Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра математического анализа

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий

по теории функций комплексной переменной

часть 1

Начальные главы

О. Л. Семенова, А. Г. Савельева

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2019

1. Введение. Комплексные числа и их свойства

Комплексным числом z называется упорядоченная пара (x, y) вещественных чисел x и y. Первая компонента x этой пары называется *вещественной* (или действительной) *частью*, вторая компонента y — *мнимой частью*; для них приняты обозначения $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. *Мнимой единицей* называют число $i = (0, 1)$.

Комплексные числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$, а их произведением — комплексное число $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$. Вычитание и деление комплексных чисел вводятся как обратные сложению и умножению действия соответственно. Множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел образует поле относительно введенных операций сложения и умножения.

Комплексное число $z = (x, 0)$ отождествляется с вещественным числом x, а комплексное число $z = (0, y)$ называется чисто мнимым и представимо в виде $(0, y) = iy$. Таким образом, для произвольного комплексного числа $z = (x, y)$ справедливо равенство $z = x + iy$, правую часть которого называют *алгебраической формой* числа z.

Комплексно сопряженным числу $z = x + iy$ называют число $\bar{z} = x - iy$. Справедливы соотношения:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2; \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2; \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\ (z_2 \neq 0). \tag{1.1}$$

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется неотрицательное вещественное число $|\,z\,| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Справедливы следующие равенства:

$$|\,z\,|^2 = z\,\bar{z}; \quad |\,z_1 \cdot z_2\,| = |\,z_1\,| \cdot |\,z_2\,|; \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|\,z_1\,|}{|\,z_2\,|}\ (z_2 \neq 0). \tag{1.2}$$

Угол φ, составленный радиусом-вектором точки z, $z \neq 0$, с положительным направлением вещественной оси (угол считается положительным, если он отсчитывается от положительного направления вещественной оси к вектору z против часов стрелки, отрицательным — в противном случае), называется *аргументом* числа z. Разность между любыми двумя аргументами числа z является целым кратным числа 2π, т. о. совокупность $\operatorname{Arg} z$ всех аргументов числа z представима в виде $\operatorname{Arg} z = \{\varphi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, где φ — некоторый (любой) аргумент числа z. Единственный элемент совокупности $\operatorname{Arg} z$, принадлежащий полуинтервалу $(-\pi, \pi]$, называется *главным значением аргумента* и обозначается $\arg z$ (иногда, однако, при определении главного значения аргумента рассматривается промежуток $[0, \pi)$ вместо $(-\pi, \pi]$). Следующие соотношения справедливы для любого z, не лежащего на оси Oy:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x < 0, y \geq 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x < 0, y < 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Аргумент числа $z = 0$ не определен (но модуль равен 0).

Для любого $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ возможно представление комплексного числа $z \neq 0$ в виде

$$z = |\,z\,|(\cos\varphi + \sin\varphi). \tag{1.4}$$

Такая запись называется *тригонометрической формой* комплексного числа. Использование в равенстве (1.4) формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \forall \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

позволяет получить также *экспоненциальную* (*показательную*) *форму* числа z:

$$z = |\,z\,|\, e^{i\,\varphi}.$$

Если $z, z_1, z_2 \neq 0$ и $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$, $\varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$, то справедливы следующие соотношения:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |\,z_1\,| = |\,z_2\,|, \\ \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$z_1 \cdot z_2 = |\,z_1\,| \cdot |\,z_2\,| \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right); \tag{1.5}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|\,z_1\,|}{|\,z_2\,|} \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right); \tag{1.6}$$

$$z^n = |\,z\,|^n \left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.7}$$

Последние три соотношения в показательной форме принимают вид

$$z_1 \cdot z_2 = |\,z_1\,| \cdot |\,z_2\,|\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|\,z_1\,|}{|\,z_2\,|}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}; \quad z^n = |\,z\,|^n e^{in\varphi}. \tag{1.8}$$

Корнем натуральной степени n из комплексного числа z называется любой корень w уравнения $w^n = z$. Для всякого комплексного числа $z \neq 0$ существует ровно n (различных) корней из этого числа:

$$(\sqrt[n]{z})_k = |\,z\,|^{\frac{1}{n}}\, e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}}, \quad k = 0, \ldots, n-1, \tag{1.9}$$

где $\varphi = \arg z$.

Пример. Записать число $z = \frac{(1+i)^3}{(1-i\sqrt{3})^2} + e^{\frac{2\pi i}{3}}$ в алгебраической форме.

Решение. Положим $z_1 = \frac{(1+i)^3}{(1-i\sqrt{3})^2}$ и $z_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Найдем алгебраическую часть числа z_1. Сначала представим числа $1+i$ и $1-i\sqrt{3}$ в показательной форме (поскольку операции умножения и деления, а также возведения в степень удобнее производить с числами именно в такой форме), воспользовавшись определениями модуля и аргумента:

$$1 + i = \sqrt{1^2 + 1^2}\, e^{i\,\operatorname{arctg} 1} = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}};$$

$$1 - i\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}\, e^{i\,\operatorname{arctg}\frac{(-\sqrt{3})}{1}} = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$

Далее (применяя соотношение (1.8)) получаем:

$$(1+i)^3 = (\sqrt{2})^3 e^{3\frac{i\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}; \qquad (1 - i\sqrt{3})^2 = 2^2 e^{-2\frac{i\pi}{3}} = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}};$$

таким образом

$$z_1 = \frac{2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}}{4e^{-i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{e^{i\pi\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)}}{\sqrt{2}} = \frac{e^{i\frac{17\pi}{12}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos(17\pi/12) + \sin(17\pi/12)\right).$$

Косинус и синус угла $17\pi/12$ вычислим, используя тригонометрические формулы:
$\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{(-\sqrt{2})}{2}\cdot\frac{(-1)}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$,
и, аналогично,
$\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right) = \sin\frac{3\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{(-1)}{2} + \frac{(-\sqrt{2})}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$.
Из последних трех соотношений получаем алгебраическую форму числа z_1:

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} - i\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}\right) = \frac{(1-\sqrt{3})}{4} - i\frac{(1+\sqrt{3})}{4}.$$

Число z_2 можно сразу представить в алгебраической форме, воспользовавшись формулой Эйлера:

$$z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Зная алгебраическую форму обоих слагаемых, теперь получаем алгебраическую форму числа z:

$$z = z_1 + z_2 = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 + i(\operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2) =$$

$$= \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\right) + i\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

Задачи

1.1. Найти вещественную и мнимую части следующих комплексных чисел:
1) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$; 2) i^n; 3) $(1+i)^n + (1-i)^n$; 4) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$;
5) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$; 6) $\frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96} - i(1+i)^{98}}$.

Ответы:
1) $\operatorname{Re} w = 0$, $\operatorname{Im} w = 1$;
2) при $n = 2k+1$ $\operatorname{Re} w = 0$, $\operatorname{Im} w = (-1)^k$; при $n = 2k$ $\operatorname{Re} w = (-1)^k$, $\operatorname{Im} w = 0$;
3) $\operatorname{Re} w = 2\sum_{m=0}^{[n/2]} C_n^{2m}(-1)^m$, $\operatorname{Im} w = 0$;
4) при $n = 2k+1$ $\operatorname{Re} w = 0$, $\operatorname{Im} w = (-1)^{k+1}$; при $n = 2k$ $\operatorname{Re} w = (-1)^k$, $\operatorname{Im} w = 0$;
5) $\operatorname{Re} w = 1/4$, $\operatorname{Im} w = 0$; 6) $\operatorname{Re} w = -4/3$, $\operatorname{Im} w = 0$.

1.2. Найти модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел:

1) $\frac{2}{1-3i}$; 2) $(1+i\sqrt{3})^3$; 3) $\left(\frac{4}{-1+i\sqrt{3}}\right)^{12}$; 4) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$;
5) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$; 6) $-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$; 7) $\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$;
8) $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha,\ 0 \le \alpha \le 2\pi$; 9) $\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha},\ 0 \le \alpha \le 2\pi$;
10) $z^2 + z,\ |z| = 1$.

Ответы:
1) $|w| = \sqrt{2/5}$, $\arg w = \operatorname{arctg} 3$; 2) $|w| = 8$, $\arg w = \pi$;
3) $|w| = 2^{12}$, $\arg w = 0$; 4) $|w| = 1/4$, $\arg w = 0$;
5) $|w| = 1$, $\arg w = -n\pi/2 + 2\pi m \in (-\pi, \pi],\ n, m \in \mathbb{Z}$;
6) $|w| = 1$, $\arg w = 5\pi/6$; 7) $|w| = 1$, $\arg w = -\pi/4$;

8) $|w| = 2|\cos\frac{\alpha}{2}|$, $\arg w = \frac{\alpha}{2}$;
9) $|w| = 1$, $\arg w = \alpha + 2\pi n \in (-\pi, \pi],\ n \in \mathbb{Z}$;
10) $|w| = 2\cos\varphi/2$, где $\varphi = \arg z \in (-\pi, \pi]$,

$$\arg w = \begin{cases} 3\varphi/2, & |\varphi| \le 2\pi/3; \\ -2\pi + 3\varphi/2, & 2\pi/3 < \varphi \le \pi; \\ 2\pi + 3\varphi/2, & -\pi < \varphi < -2\pi/3. \end{cases}$$

1.3. Решить уравнения относительно $z \in \mathbb{C}$:

1) $z^2 = i$; 2) $z|z| + 2z + i = 0$; 3) $z^2 + z|z| + |z^2| = 0$;
4) $|z| = z + 2i + 1$; 5) $\bar{z} = z^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$; 6) $z = \bar{z}^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Ответы:
1) $z = e^{i\varphi},\ \varphi = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $z = i(1 - \sqrt{2})$;
3) $z = x + iy,\ x = \pm y/\sqrt{3}$; 4) $z = 3/2 - 2i$;
5) $z = 1$ при $n = 1$; $z = x,\ x \in \mathbb{R}$ при $n = 2$; $z = 0$ и $z = e^{i\varphi}$, где $\varphi = \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ при $n > 2$;
6) $z = x \in \mathbb{R}$ при $n = 1$; $z = e^{i\varphi}$, где $\varphi = \frac{2\pi k}{n+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ при $n > 1$.

1.4. Найти все значения следующих корней и построить их:

1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[4]{-1}$; 4) $\sqrt[6]{-8}$; 5) $\sqrt[8]{1}$;
6) $\sqrt{1-i}$; 7) $\sqrt{3+4i}$; 8) $\sqrt[3]{-2+2i}$; 9) $\sqrt[5]{-4+3i}$.

Ответы:
1) $1,\ -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$; 2) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ -i$; 3) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$;
4) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i),\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i),\ \pm\sqrt{2}\,i$;
5) $\pm 1 \pm i,\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; 6) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} - i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$;
7) $\pm(2+i)$; 8) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{(2k+\frac{3}{4})\pi}{3} + i\sin\frac{(2k+\frac{3}{4})\pi}{3}\right)$, $(k = 0, 1, 2)$;
9) $\sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{4}}{5} + i\sin\frac{(2k+1)\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{4}}{5}\right)$, $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$.

Задания для самостоятельной работы

1.5. Найти вещественную и мнимую части, модуль и аргумент следующих комплексных чисел:

1) $\frac{1}{(1+2i)^2}$;	2) $e^{i\pi/3}(1-i)$;	3) $\frac{2+i}{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}}$;	4) $(1+5i)^{-2}$;
5) $\frac{3-i}{4e^{i\pi/5}}$;	6) $\frac{e^{\pi}}{(1+i)^2}$;	7) $\frac{2}{e^{\frac{\pi i}{4}}+1}$;	8) $\frac{3-i}{(2+i)^2}$;
9) $\frac{(1-i)^2}{1+2i}$;	10) $(\sqrt[3]{1+2i})_2$;	11) $e^{i(3+2i)}$;	12) $\frac{i-5}{i(1+i)}$;
13) $(1+3i)e^{e^{\frac{\pi i}{2}}}$;	14) $\frac{5-i}{(2+i)^2}$;	15) $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2-i}}\right)_0$;	16) $\frac{e^{\frac{\pi i}{3}}}{2+e^{\frac{\pi i}{3}}}$;
17) $(3-i)e^{\frac{\pi i}{6}}$;	18) $\frac{i-2}{(1+i)(1+2i)}$;	19) $\left(\frac{4i-1}{3i}\right)^2$;	20) $\frac{1+e^{\frac{\pi i}{4}}}{1-e^{\frac{\pi i}{4}}}$.

2. Функции комплексной переменной

Следующие равенства являются определениями однозначных элементарных функций ($x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z$):

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y); \quad \ln z = \ln|\,z\,| + i\arg z;$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}; \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z-e^{-z}}{2};$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}; \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Многозначной функцией комплексной переменной называется всякое отображение $F : O \to 2^{\mathbb{C}}$, где O — некоторое подмножество комплексной плоскости, $2^{\mathbb{C}}$ — система всевозможных подмножеств комплексной плоскости (таким образом, комплексному числу z отображение F ставит в соответствие некоторую совокупность комплексных чисел $F(z)$).

Следующие равенства являются определениями многозначных функций (корни также являются многозначными функциями, $\sqrt{z}$ обозначает двухэлементный набор корней второй степени из числа z):

$$\operatorname{Ln} z = \ln|\,z\,| + i\operatorname{Arg} z; \tag{2.1}$$

$$A^z = e^{z\operatorname{Ln} A}\ (A \neq 0); \quad \operatorname{Exp}(z) = A^z \text{ для } A = e; \tag{2.2}$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}); \quad \operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln} i(z+\sqrt{z^2-1});$$

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}); \quad \operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1});$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{i+z}{i-z} = \frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}; \quad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i};$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}; \quad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}.$$

Пример 1. Найти все значения выражения $(1-2i)^{1-i}$.

Решение. Положим $A = 1-2i$, $z = 1-i$ и воспользуемся формулами (2.1) и (2.2):

$$\begin{gathered}
\operatorname{Ln} A = \ln|\,A\,| + i\operatorname{Arg} A = \ln\sqrt{1+4} + i(\operatorname{arctg}(-2)+2\pi n) = \\
= \tfrac{\ln 5}{2} + i(-\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z}; \\
z\ \operatorname{Ln} A = (1-i)\left(\tfrac{\ln 5}{2} + i(-\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n)\right) = \\
= \tfrac{\ln 5}{2} - \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n + i\left(-\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n - \tfrac{\ln 5}{2}\right); \\
(1-2i)^{1-i} = e^{z\ \operatorname{Ln} A} = e^{\operatorname{Re}(z\operatorname{Ln} A)}\left(\cos(\operatorname{Im}(z\ \operatorname{Ln} A)) + i\sin(\operatorname{Im}(z\ \operatorname{Ln} A))\right) = \\
= e^{\frac{\ln 5}{2}-\operatorname{arctg} 2+2\pi n}\left(\cos\left(\operatorname{arctg} 2 + \tfrac{\ln 5}{2}\right) - i\sin\left(\operatorname{arctg} 2 + \tfrac{\ln 5}{2}\right)\right),\ n \in \mathbb{Z}.
\end{gathered}$$

Пример 2. Для отображения $w = 1/(z+1)$ найти прообраз окружности $C = \{z\ :\ |z-1-i| = 1\}$.

Решение. Положим $\zeta = z+1$, $s = \operatorname{Re}\zeta$, $t = \operatorname{Im}\zeta$. Тогда $w = \frac{1}{\zeta}$, $u = \operatorname{Re} w(z) = \operatorname{Re}\frac{\bar\zeta}{|\zeta|^2} = \frac{s}{s^2+t^2}$, $v = \operatorname{Im} w = -\frac{t}{s^2+t^2}$. Искомый прообраз обозначим T. Отметим, $z \in T$

$\Leftrightarrow w(z) \in C \Leftrightarrow (u-1)^2+(v-1)^2 = 1 \Leftrightarrow u^2+v^2-2(u+v)+1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{s^2+t^2} - 2\frac{s-t}{s^2+t^2} + 1 = 0$ $\Leftrightarrow 1 - 2(s-t) + s^2 + t^2 = 0 \Leftrightarrow (s-1)^2 + (t+1)^2 = 1 \Leftrightarrow |\zeta - 1 + i| = 1 \Leftrightarrow |z+i| = 1.$ Таким образом, $T = \{z \ : \ |z+i| = 1\}$.

Пример 3. Для отображения $\cos z$ найти образ мнимой оси.

Решение. Обозначим мнимую ось буквой I и воспользуемся определением функции cos как функции комплексной переменной. $\cos(I) = \cos(\{iy \ : \ y \in \mathbb{R}\}) = \{\cos(iy) \ : \ y \in \mathbb{R}\} = \{\frac{e^{-y}+e^{y}}{2} \ : \ y \in \mathbb{R}\} = \{\operatorname{ch}(y) \ : \ y \in \mathbb{R}\}$. Таким образом, $\cos(I)$ совпадает с множеством значений функции ch на вещественной прямой, которое, как известно из вещественного анализа, представляет собой луч $[1; +\infty)$.

Задачи

2.1. Выразить через тригонометрические и гиперболические функции вещественного аргумента вещественные и мнимые части, а также модули следующих функций:

1) $\sin z$; 2) $\cos z$; 3) $\operatorname{tg} z$; 4) $\operatorname{sh} z$; 5) $\operatorname{ch} z$; 6) $\operatorname{th} z$.

Ответы:

1) $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y, \quad |\sin z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}$;
2) $\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y, \quad |\cos z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x}$;
3) $\operatorname{tg} z = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}, \quad |\operatorname{tg} z| = \frac{\sqrt{\sin^2 2x + \operatorname{sh}^2 2y}}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$;
4) $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y, \ |\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y}$;
5) $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y, \quad |\operatorname{ch} z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y}$;
6) $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} 2x + i \sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}, \quad |\operatorname{th} z| = \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 2x + \sin^2 2y}}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$.

2.2. Представить следующие комплексные числа в алгебраической форме:

1) $\cos(2+i)$; 2) $\sin 2i$; 3) $\operatorname{tg}(2-i)$; 4) $\operatorname{ctg}(\pi/4 - i\ln 2)$;
5) $\operatorname{cth}(2+i)$; 6) $\operatorname{th}(\ln 3 + \pi i/4)$.

Ответы:

1) $\cos 2 \operatorname{ch} 1 - i \sin 2 \operatorname{sh} 1$; 2) $i \operatorname{sh} 2$; 3) $\frac{\sin 4 - i \operatorname{sh} 2}{2(\cos^2 2 + \operatorname{sh}^2 1)}$; 4) $\frac{8+15i}{17}$;
5) $\frac{\operatorname{sh} 4 - i \sin 2}{\operatorname{ch} 4 - \cos 2}$; 6) $\frac{40+9i}{41}$.

2.3. Вычислить:

1) $\operatorname{Ln} 4, \ \operatorname{Ln}(-1), \ \ln(-1)$; 2) $\operatorname{Ln} i, \ \ln i$; 3) $\operatorname{Ln} \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$;
4) $\operatorname{Ln}(2-3i)$; 5) $\operatorname{Ln}(-2+3i)$.

Ответы:

1) $\ln 4 + 2k\pi i, \ (2k+1)\pi i, \ \pi i$; 2) $(2k + \frac{1}{2})\pi i, \ \frac{\pi i}{2}$; 3) $(2k \pm 1/4)\pi i$;
4) $\frac{1}{2}\ln 13 + \left(2k\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right) i$; 5) $\frac{1}{2}\ln 13 + \left((2k+1)\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right) i$.

2.4. Найти все значения следующих выражений:

1) $1^{\sqrt{2}}$; 2) $(-2)^{\sqrt{2}}$; 3) 2^i; 4) 1^{-i}; 5) i^i; 6) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$;
7) $(3-4i)^{1+i}$; 8) $(-3+4i)^{1+i}$.

Ответы:
1) $\cos(2k\sqrt{2}\pi) + i\sin(2k\sqrt{2}\pi)$; 2) $2^{\sqrt{2}}(\cos(2k{+}1)\pi\sqrt{2} + i\sin(2k{+}1)\pi\sqrt{2})$;
3) $e^{2k\pi}(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2)$; 4) $e^{2k\pi}$; 5) $e^{(2k-1/2)\pi}$; 6) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}e^{(2k+1/4)\pi}$;
7) $5e^{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2k\pi}\left(\cos(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}) + i\sin(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3})\right)$;
8) $-5e^{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+(2k+1)\pi}\left(\cos(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}) + i\sin(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3})\right)$.
Везде $k \in \mathbb{Z}$.

2.5. Найти линии, заданные указанными уравнениями:
1) $z = 1 - it,\ 0 \le t \le 2$; 2) $z = t + it^2,\ -\infty < t < +\infty$;
3) $z = t^2 + it^4;\ -\infty < t < +\infty$;
4) $z = a(\cos t + i\sin t),\ \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2},\ a > 0$; 5) $z = t + \frac{i}{t},\ -\infty < t < 0$; 6) $z = t + i\sqrt{1-t^2},\ -1 \le t \le 1$; 7) $z = -t + i\sqrt{1-t^2},\ -1 \le t < 0$.

Ответы:
1) отрезок прямой $x = 1,\ -2 \le y \le 0$; 2) парабола $y = x^2$;
3) дважды пробегаемая правая половина параболы $y = x^2$;
4) левая полуокружность радиуса a с центром в точке $z = 0$;
5) ветвь гиперболы $y = 1/x$, лежащая в третьем квадранте;
6) верхняя полуокружность радиуса 1 с центром в точке $z = 0$;
7) четверть окружности радиуса 1 с центром в точке $z = 0$, лежащая в первом квадранте.

2.6. Для отображения $w = z^2$ требуется:
1) найти образы линий $x = C$, $y = C$, $x = y$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ ($\alpha \in [-\pi, \pi)$);
2) найти прообразы (на z-плоскости) линий $u = C$, $v = C$ ($w = u + iv$).

Ответы:
1) образами прямых $x = C$ являются при $C \ne 0$ параболы $u = C^2 - \frac{v^2}{4C^2}$, при $C = 0$ полуось $v = 0,\ u \le 0$; образами прямых $y = C$ при $C \ne 0$ являются параболы $u = \frac{v^2}{4C^2} - C^2$, при $C = 0$ полуось $v = 0,\ u \ge 0$; образом прямой $x = y$ является полуось $u = 0,\ v \ge 0$; образами окружностей $|z| = R$ являются окружности $|w| = R^2$; образами лучей $\arg z = \alpha$ — лучи $\arg w = 2\alpha + 2\pi k \in [-\pi, \pi),\ k \in \{0, 1, 2\}$;
2) прообразами прямых $u = C$ являются гиперболы $x^2 - y^2 = C$ (при $C = 0$ — пара прямых), прообразами прямых $v = C$ являются гиперболы $xy = \frac{C}{2}$ (при $C = 0$ — пара прямых).

2.7. Для отображения $w = 1/z$ найти:
1) образы линий $x = C$, $y = C$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ ($\alpha \in (-\pi, \pi)$), $|z{-}1| = 1$;
2) прообразы линий $u = C$, $v = C$ ($w = u + iv$).

Ответы:
1) образами прямых $x = C$ являются окружности $u^2 + v^2 - \frac{u}{C} = 0$, при $C = 0$ — ось $u = 0$; образами прямых $y = C$ являются окружности $u^2 + v^2 + \frac{v}{C} = 0$, при $C = 0$ — ось $v = 0$; образами окружностей $|z| = R$ являются окружности $|w| = 1/R$; образами лучей $\arg z = \alpha$ являются лучи $\arg w = -\alpha$, образом окружности $|z - 1| = 1$ является прямая $u = 1/2$;
2) прообразами прямых $u = C$ являются окружности $x^2 + y^2 - \frac{x}{C} = 0$, при $C = 0$ — ось $x = 0$; прообразами прямых $v = C$ являются окружности $x^2 + y^2 + \frac{y}{C} = 0$, при $C = 0$ — ось $y = 0$.

2.8. Для отображений $w = z + \frac{1}{z}$ и $w = z - \frac{1}{z}$ найти образы окружностей $|z| = R$.

Ответ: функция $w = z + \frac{1}{z}$ отображает окружности $|z|{=}R{\neq}1$ на эллипсы $\frac{u^2}{(R+R^{-1})^2} + \frac{v^2}{(R-R^{-1})^2} = \frac{1}{4}$, а окружность $|z| = 1$ — на отрезок $v = 0, u \in [-2, 2]$; функция $w = z - \frac{1}{z}$ отображает окружности $|z|{=}R{\neq}1$ на эллипсы $\frac{u^2}{(R-R^{-1})^2} + \frac{v^2}{(R+R^{-1})^2} = \frac{1}{4}$, а окружность $|z| = 1$ — на отрезок $u = 0, v \in [-2, 2]$.

2.9. Для отображения $w = e^z$ найти:
1) образы линий $x = C$, $y = C$, $x = y$;
2) прообразы линий $\rho = \theta$ ($\theta \in [0; +\infty)$).

Ответы:
1) окружности $\rho = e^C$, лучи $\theta = C$, спирали $\rho = e^\theta$;
2) линии $y = e^x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Задачи для самостоятельной работы

2.10. Вычислить:

1) $\left(\frac{1}{2i} + 1\right)^{i-2}$; 2) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{e^{\frac{3\pi i}{4}}}$; 3) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^{\frac{1}{1+i}}$;

4) $\cos(\pi(1+i)) + \ln(2e^{\frac{i\pi}{5}})$; 5) $\sin\left(\frac{i}{1-i}\right)$; 6) $\mathrm{tg}(1+i)$;

7) $\mathrm{sh}(2+i) + i^{1+i}$; 8) $\mathrm{ch}(i-2) + \frac{2+i}{3-i}$; 9) $\left(\frac{i-1}{i}\right)^{\left(\frac{i-1}{i}\right)}$;

10) $(2-i)^{\sqrt{3}-i}$; 11) $\mathrm{sh}\,(3-i) + \frac{2-i}{1+i}$; 12) $\mathrm{ch}\,\frac{i}{2+i}$;

13) $\mathrm{tg}\left(\frac{3-i}{2+i}\right)$; 14) $(i-3)^{i-4}$; 15) $\mathrm{th}\left(\frac{3+2i}{1-i}\right)$;

16) $\left(1 + \frac{1}{1+i}\right)^{1-i}$; 17) $\frac{\mathrm{sh}(1-i)}{i}$; 18) $\frac{(2+i)^{1-i}}{i}$;

19) $\left(\frac{1-i}{2+i}\right)^{2i}$; 20) $\left(\frac{i+1}{i-1}\right)^{1+i}$.

2.11. Для отображения $f(z)$ найти образ $f(A)$ множества A, для отображения $g(z)$ найти прообраз $g^{-1}(B)$ множества B:

1) $f(z) = z^2$, $g(z) = \ln(i2z)$, $A = \{z \in \mathbb{C}\ :\ \mathrm{Re}\, z > |\,\mathrm{Im}\, z|\}$, $B = \{xe^{i\pi/4}\ :\ x \in [0, +\infty)\}$;

2) $f(z) = \frac{1}{2z}$, $g(z) = z^2$, $A = \{z \in \mathbb{C}\ :\ \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z\} \setminus \{0\}$, $B = \{w \in \mathbb{C}:\ \arg w \in (-\pi/6, \pi/3)\}$;

3) $f(z) = \sin(2\,iz)$, $g(z) = e^{3\,iz}$, A — мнимая ось, $B = \{w \in \mathbb{C}:\ |\arg w| < \frac{\pi}{4}\}$;

4) $f(z) = \frac{z}{z+1}$, $g(z) = \ln(2\,iz)$, $A = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < 1\}$, $B = \{w \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\, w = 5\}$;

5) $f(z) = 1 + z^2 + 2z$, $g(z) = e^{3iz+1}$, $A = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z+1| = 3\}$, $B = \{w \in \mathbb{C}: |w| < 1\}$;

6) $f(z) = \ln(3z)$, $g(z) = z^3$, $A = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |\arg z| < \pi/4\}$, $B = [0, +\infty)$;

7) $f(z) = e^{2\,iz}$, $g(z) = \frac{z+1}{z-1}$, A — мнимая ось, $B = \{w \in \mathbb{C}:\ |w| = 1\}$;

8) $f(z) = \ln(2\,iz)$, $g(z) = 3z^2$, $A = \{z \in \mathbb{C}\ :\ \mathrm{Re}\, z > 0, \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $B = \{w \in \mathbb{C}: \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z\}$;

9) $f(z) = 2z^2 + 1$, $g(z) = \sin 3z$, $A = \{z \in \mathbb{C}\ :\ \arg z \in (-\pi/3, 0)\}$, B — мнимая ось;

10) $f(z)=e^{4iz}$, $g(z)=2+1/z$, $A=\{z\in\mathbb{C}\ :\ \operatorname{Re} z\in(-\pi/8,\pi/8)\}$, $B=\{w\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re} w>0\}$.

3. Дифференцируемость функции комплексной переменной

Функция $f(z)$, определенная в некоторой окрестности точки $z\in\mathbb{C}$, называется $\mathbb{R}$-*дифференцируемой* (соответственно, $\mathbb{C}$-*дифференцируемой*), в точке z, если для всех достаточно малых Δz ее приращение $\Delta f=f(z+\Delta z)-f(z)$ в этой точке представляется в виде

$$\Delta f=L(\Delta z)+o\,(\Delta z),$$

где (при фиксированном z) $L:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — некоторая $\mathbb{R}$-линейная (соответственно, $\mathbb{C}$ -линейная) функция, а $o\,(\Delta z)$ — малая высшего порядка относительно Δz, т. е. $\frac{o\,(\Delta z)}{\Delta z}\to 0$ при $\Delta z\to 0$. Функция L называется *дифференциалом* функции f в точке z (и обозначается $d_z f$).

Формальными производными функции $f(z)$ называют функции

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right);\quad \frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Производной в точке z функции f, определенной в некоторой окрестности этой точки, называется комплексное число

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z},$$

если указанный предел существует.

Теорема. Для $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z_0 функции $f(z)$ следующие утверждения являются равносильными:
(I) $f(z)$ является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0;
(II) в точке z_0 существует производная $f'(z_0)$;
(III) $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)=0$;
(IV) в точке z_0 справедлива следующая система уравнений Коши–Римана:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\end{cases}$$

где $u=\operatorname{Re} f$, $v=\operatorname{Im} f$.

В случае справедливости одного из утверждений (I)–(IV) (а значит и всех остальных) справедливо равенство $f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

Далее для краткости вместо термина „$\mathbb{C}$-дифференцируемость“ используется термин „дифференцируемость“.

Из дифференцируемости функций f и g в точке z_0 следует дифференцируемость результата арифметических действий над f и g (за исключением случая деления на ноль), и справедливы равенства:

$$(f\pm g)'(z_0)=f'(z_0)\pm g'(z_0);\quad (f\cdot g)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0);$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

Аналогичные формулы справедливы также и для формальных производных $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ функций f и g (в этом случае не требуется существования производных $f'(z)$ и $g'(z)$).

Правила дифференцирования сложной и обратной функции переносятся без изменений в комплексный анализ из теории функций одной вещественной переменной.

В каждой точке z_0, в которой $f\,'(z_0) \neq 0$, имеет место сохранение (консерватизм) углов по величине и по направлению отсчета между любыми двумя гладкими жордановыми кривыми, пересекающимися в точке z_0, и их образами при отображении f. Кроме того, в этом случае величина $|f\,'(z_0)|$ совпадает с искажением масштаба при отображении f и это искажение одно и то же по всем направлениям, выходящим из точки z_0.

Функция называется *голоморфной* (или *регулярной*) в некоторой точке, если она $\mathbb{C}$-дифференцируема в некоторой окрестности данной точки.

Пример. Найти все точки $z = x + iy$, в которых дифференцируема функция $f(z) = \frac{|\,z\,|^2+1}{z-1}$.

Решение. Отметив, что $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(x+iy)}{\partial x} + i\frac{\partial(x+iy)}{\partial y}\right) \equiv 0$, воспользуемся п. (III) теоремы об условиях, равносильных дифференцируемости, а также правилами вычисления формальных производных.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{z\bar{z}+1}{z-1}\right) = \left(\frac{\frac{\partial(z\bar{z}+1)}{\partial \bar{z}}(z-1) - (z\bar{z}+1)\frac{\partial(z-1)}{\partial \bar{z}}}{(z-1)^2}\right) = \frac{z}{z-1}.$$

Условие $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ выполняется лишь в точке $z = 0$, которая, таким образом, является единственной точкой дифференцируемости.

Задачи

3.1. Найти все точки $z = x + iy$, в которых дифференцируемы функции:
1) $\operatorname{Re} z$; 2) $\bar{z}$; 3) $|z|$; 4) $|z|^2$; 5) $z \operatorname{Re} z$; 6) x^2y^2; 7) $x^2 + iy^2$; 8) $\sqrt{|xy|}$; 9) $2xy - i(x^2 - y^2)$; 10) $x + iy^2$; 11) z^{-1}; 12) $z^2\bar{z}$; 13) $z\bar{z}^2$.

Ответы:
1) $\emptyset$; 2) $\emptyset$; 3) $\emptyset$; 4) 0; 5) 0; 6) $\{\operatorname{Re} z = 0\} \cup \{\operatorname{Im} z = 0\}$;
7) прямая $y = x$; 8) $\emptyset$; 9) $\mathbb{C}$; 10) прямая $z = x + i/2,\ x \in \mathbb{R}$;
11) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; 12) 0; 13) 0.

3.2. Найти $\frac{\partial f}{\partial z}$ для следующих функций:
1) $f(z) = |z|$; 2) $f(z) = |z|^p,\ p \in \mathbb{R}$; 3) $f(z) = e^{p|z|},\ p \in \mathbb{R}$; 4) $f(z) = \sqrt{|z-a|^2 + |z-b|^2}$; 5) $f(z) = \log|\,z\,|$;
6) $f(z) = \frac{|\,z-a\,|}{|\,z-b\,|}$; 7) $f(z) = \operatorname{arctg}\frac{1+|\,z\,|}{1-|\,z\,|},\ |z| < 1$.

Ответы:

1) $\frac{|\,z\,|}{2z}$; 2) $\frac{p|\,z\,|^p}{2z}$; 3) $e^{p|\,z\,|}\cdot\frac{p|\,z\,|}{2z}$; 4) $\frac{2\bar z-\bar a-\bar b}{2\sqrt{|\,z-a\,|^2+|\,z-b\,|^2}}$; 5) $\frac{1}{2z}$;
6) $\frac{|\,z-a\,|}{2|\,z-b\,|}\cdot\frac{a-b}{(z-a)(z-b)}$; 7) $\frac{|\,z\,|}{2z(1+|\,z\,|^2)}$.

3.3. Найти множество точек дифференцируемости следующих функций и написать формулы для их производных:

1) $e^{\operatorname{ch} z}$; 2) $\sin(2e^z)$; 3) $\sin z\operatorname{ch} z-i\cos z\operatorname{sh} z$; 4) ze^{-z}; 5) $\frac{e^z}{z}$; 6) $\frac{z\cos z}{1+z^2}$.

Ответы:
1) $\operatorname{sh} z\, e^{\operatorname{ch} z}$; 2) $2e^z\cos(2e^z)$; 3) $(1-i)\cos z\operatorname{ch} z+(1+i)\sin z\operatorname{sh} z$; 4) $(1-z)e^{-z}$;
5) $\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\right)e^z,\ z\neq 0$; 6) $\frac{(1+z^2)(\cos z-z\sin z)-2z^2\cos z}{(1+z^2)^2},\ z\neq\pm i$.

3.4. Найти множество точек z, в которых коэффициент линейного растяжения при следующих отображениях равен нулю:

1) $f(z)=z^2$; 2) $f(z)=\sin z$; 3) $f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ c\neq 0,\ ad\neq bc$; 4) $f(z)=z^n,\ n\in\mathbb{N}$; 5) $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

Ответы:
1) $\{0\}$; 2) $\{\pi/2+\pi k\ :\ k\in\mathbb{Z}\}$; 3) $\emptyset$; 4) $\{0\}$; 5) $\{\pm 1\}$.

3.5. Найти множество точек z, в которых угол поворота при следующих отображениях равен нулю:

1) $f(z)=z^2$; 2) $f(z)=\sin z$; 3) $f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ c\neq 0,\ ad\neq bc$;
4) $f(z)=z^n,\ n\in\mathbb{N}$; 5) $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

Ответы:
1) $(0,+\infty)$; 2) $\bigcup_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$;
3) $\{z\in\mathbb{C}\ :\ \operatorname{Re}\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}>0,\ \operatorname{Im}\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}=0\}$;
4) объединение лучей, выходящих из точки 0 под углом $2\pi k/(n-1)$, $k=0,1,\dots,n-2$;
5) $\{iy\ :\ y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$.

Задачи для самостоятельной работы

3.6. Найти:
а) значения формальных производных $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial\bar z}$ указанных ниже функций;
б) все точки $z=x+iy$, где данные функции дифференцируемы;
в) значение производной в точках дифференцируемости.

1) $\cos\left(i+\frac{1}{z}\right)$; 2) $\sin\frac{i-z}{z}$; 3) $e^{z-\frac{i}{z}}$; 4) $\operatorname{sh}\frac{i-z}{z}$; 5) $\frac{ix-y}{x^2+y^2}z$;
6) $\frac{3z+2\bar z}{z-\bar z}$; 7) $\frac{x+2z}{iyz-3\bar z}$; 8) $\frac{x-iy}{z\bar z}$; 9) $\sqrt{x^2+y^2}+ixy$;
10) $\sqrt[3]{x^3+y^3}+i(x+2y)$ 11) $(\cos y+i\sin x)e^x$;
12) $e^y(\cos x+i\sin x)$; 13) $|\,z\,|^2+2z+3\bar z$; 14) $z^2+\bar z^2+2z$;
15) $\frac{z+\bar z}{|\,z\,|^2}+4\bar z$; 16) $(|z|+1)(|z|+2)$; 17) $\operatorname{ch}(\bar z)\sin(\bar z)(z+1)$;
18) $\cos(\bar z)\operatorname{sh}(\bar z)(z+2)$; 19) $\frac{3x+4y+ixy}{x^2-y^2}$; 20) $\frac{x-2y+i3y}{x^2+y^2}$.

Литература

1. *Справочное пособие по высшей математике. Т. 4. Функции комплексного переменного: теория и практика* / А. К. Боярчук. — М. : Едиториал УРСС, 2001. — 352 с. — ISBN 5-354-00020-3.

2. *Сборник задач по теории функции комплексного переменного* / Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. — М. : Наука, 1975. — 319 с.

3. *Сборник задач по теории аналитических функций* / М. А. Евграфов, Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк и др. — М. : Наука, 1972. — 416 с.

4. *Задачи по теории функции комплексного переменного* / Т. А. Леонтьева, В. С. Панферов, В. С. Серов. — М. : Изд-во МГУ, 1992. — 255 с. — ISBN 5-211-01574-6.

5. *Краткий курс теории аналитических функций* / А. И. Маркушевич. — М. : Наука, 1966. — 388 с.

6. *Введение в комплексный анализ. ч.1* / Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1985. — 336 с.