Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра математического анализа

Функциональные последовательности и функциональные ряды

Методические указания

Громов А. Л., Дубова Т. П.

Санкт - Петербург, 2019

Эта книга является пособием для студентов по теме «Функциональные последовательности и ряды». Ключевым понятием этого раздела математического анализа является *равномерная сходимость.* Основная цель книги — помочь студентам освоить это понятие и приобрести навыки исследования последовательностей и рядов на равномерную сходимость.

Излагаемый материал разбит на две части. Первая глава посвящена равномерной сходимости последовательностей, вторая — равномерной сходимости рядов. Исследовать ряды сложнее, чем последовательности, поэтому вторая глава разбита на несколько параграфов. Первый из них посвящен необходимым условиям сходимости, с помощью которых можно установить *отсутствие* равномерной сходимости. Во втором параграфе разбирается признак Вейерштрасса — наиболее важное *достаточное* условие равномерной сходимости. Далее рассматриваются более тонкие признаки Дирихле, Абеля и Лейбница, позволяющие доказывать равномерную сходимость неабсолютно сходящихся рядов. Им посвящены параграфы 3 и 4. В последнем параграфе главы 2 собраны ряды разных типов. Для их исследования необходимо комбинировать несколько признаков, а также использовать некоторые факты, напрямую не относящиеся к рядам, например, формулу Тейлора – Лагранжа.

Наше пособие является практическим руководством по решению задач, а не теоретическим курсом. В соответствии с этим принципом и построена структура книги. Материал излагается так, как это принято на семинарских занятиях: основной упор делается на решение задач, а теоретические сведения приводятся фрагментарно и лишь там, где они непосредственно используются. Как правило, теоремы в нашей книге не доказываются, а только формулируются. Исключение сделано лишь для утверждений, доказательство которых иллюстрирует методы, используемые при решении задач. Читателя, который интересуется теорией, мы отсылаем к литературе, список которой приведен в конце пособия.

Книга имеет следующую структуру. Наиболее важная часть излагаемого материала — примеры, снабженные решением. Нумерация этих примеров ведется отдельно в каждом параграфе. В конце некоторых параграфов даются задачи для самостоятельной работы. Их номера имеют формат $m.n$, где m — номер параграфа, а

n — номер задачи. К теоретическим сведениям относятся определения, теоремы, леммы и утверждения. Их нумерация также ведется по параграфам. В тексте встречаются еще замечания и следствия. Они привязаны к конкретному определению или утверждению и нумеруются по каждому из них отдельно. В конце книги приводятся список рекомендуемой литературы и оглавление.

Некоторые формулы в пособии помечены номерами, чтобы на них было удобно ссылаться. Нумерация формул ведется отдельно по каждой главе. Конец разбора примера или доказательства утверждения помечается символом $\square$.

ГЛАВА 1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Равномерная сходимость функциональных последовательностей

Пусть X — множество. Договоримся символом $B(X)$ обозначать класс вещественно- или комплекснозначных функций, заданных и ограниченных на X.

Определение 1. Пусть X — множество, $f \in B(X)$. Величина

$$\|f\|_X = \sup_{x \in X} \bigl|f(x)\bigr| \tag{1}$$

называется *равномерной* или *чебышевской* нормой функции f.

Замечание. Формула (1) действительно задает норму на $B(X)$, поскольку выполняются три условия.

1) Для любой функции $f \in B(X)$ верно неравенство $\|f\|_X \geqslant 0$, причем равенство реализуется только в случае $f \equiv 0$ на X.

2) Если $f \in B(X)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, то $\|\lambda f\|_X = |\lambda| \cdot \|f\|_X$.

3) Для любых $f, g \in B(X)$ справедливо *неравенство треугольника*

$$\|f + g\|_X \leqslant \|f\|_X + \|g\|_X\,.$$

Определение 2. Пусть $\bigl\{f_n\bigr\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций на X, $f\colon X \to \mathbb{C}$.

1) Если для любого $x \in X$ выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то говорят, что последовательность $\bigl\{f_n\bigr\}$ *поточечно сходится к* f *на* X, и пишут $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f\ \ (X)$.

2) Если $\|f_n - f\| \to 0$ при $n \to \infty$, то говорят, что $\bigl\{f_n\bigr\}$ *равномерно сходится к* f *на* X, и пишут

$$f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f \ \text{ на } X \quad \text{или} \quad f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f\ \ (X).$$

Замечание. Несложно показать, что условие равномерной сходимости можно записать в виде

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ \forall x \in X\colon \ \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr| < \varepsilon.$$

Определение 3. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций на X. Говорят, что $\{f_n\}$ *равномерно сходится в себе на* X, если

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n > N \ \forall x \in X\colon \ \bigl|f_m(x) - f_n(x)\bigr| < \varepsilon.$$

Замечание 1. Для практической проверки равномерной сходимости в себе полезен следующий простой факт. *Пусть существует такая последовательность* $\{c_n\}$, *что*

$$\|f_m - f_n\|_X \leqslant c_n \ \textit{при} \ m \geqslant n, \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

Тогда $\{f_n\}$ *равномерно сходится в себе на* X.

Замечание 2. Отсутствие равномерной сходимости в себе равносильно условию

$$\exists\varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists m, n > N \ \exists x \in X\colon \ \bigl|f_m(x) - f_n(x)\bigr| \geqslant \varepsilon. \qquad (2)$$

Теорема 1. Критерий Больцано – Коши. *Пусть* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *последовательность функций на* X. *Тогда равносильны следующие утверждения.*

1) $\{f_n\}$ *равномерно сходится на* X *к некоторой функции.*

2) $\{f_n\}$ *равномерно сходится в себе на* X.

Наша дальнейшая задача — научиться исследовать равномерную сходимость функциональных последовательностей. Это можно сделать двумя способами: непосредственно по определению 2 и с помощью критерия Больцано – Коши. Проиллюстрируем вначале второй подход. Его преимущество состоит в том, что не нужно знать предельную функцию, найти которую не всегда легко. При решении примеров мы будем использовать замечания к определению 3.

Пример 1. Пусть $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$. Проверить равномерную сходимость последовательности $\{f_n\}$ на $\mathbb{R}$.

Решение. В силу теоремы 1 нам достаточно показать, что $\{f_n\}$ равномерно сходится в себе на $\mathbb{R}$. Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$

$$\left|f_m(x)-f_n(x)\right| = \left|\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right| = \frac{\left|\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right|}{\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}}+\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}.$$

Правая часть равенства максимальна при $x = 0$. Поэтому, переходя к супремуму по $x \in \mathbb{R}$, при $m \geqslant n$ мы получим

$$\|f_m - f_n\|_{\mathbb{R}} \leqslant \frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Осталось воспользоваться замечанием 1 к определению 3. $\square$

Пример 2. Пусть $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$. Доказать, что последовательность $\{f_n\}$ не сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Решение. В силу теоремы 1 достаточно проверить условие (2). Пусть $N \in \mathbb{N}$. Положим $n = N+1$, $m = 2n$, $x = n$. Тогда

$$\left|f_m(x) - f_n(x)\right| = \left|\sin\tfrac{x}{m} - \sin\tfrac{x}{n}\right| = \left|\sin\tfrac{n}{2n} - \sin\tfrac{n}{n}\right| = \sin 1 - \sin\tfrac{1}{2}.$$

Полагая $\varepsilon = \sin 1 - \sin\frac{1}{2}$, мы получим (2). $\square$

Замечание. Последовательность $\{f_n\}$ в примере 2, очевидно, поточечно стремится к нулю. Таким образом, равномерная сходимость — более сильное свойство, чем поточечная сходимость.

Во многих задачах интерес представляет не только сам факт равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$, но и ее предельная функция. В таком случае равномерную сходимость исследуют непосредственно по определению. Это происходит в два этапа. Вначале ищется поточечный предел $\{f_n\}$ (обозначим его через f). Затем нужно вычислить или оценить $\|f_n - f\|_X$ и выяснить, будут ли эти нормы стремиться к нулю. Проиллюстрируем описанную схему на примерах.

Пример 3. Пусть X — множество,

$$\varphi\colon X \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{[\,n\varphi(x)\,]}{n} \ (x \in X),$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Исследовать равномерную сходимость $\{f_n\}$ на X.

Решение. Заметим, что $[z] \leqslant z < [z] + 1$ для любого $z \in \mathbb{R}$. Положим $z = n\,\varphi(x)$ и поделим двойное неравенство на n. Мы получим

$$f_n(x) \leqslant \varphi(x) < f_n(x) + \tfrac{1}{n}, \quad \text{откуда} \quad \bigl|f_n(x) - \varphi(x)\bigr| < \tfrac{1}{n} \ (x \in X).$$

Поэтому $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi\ (X)$. Кроме того,

$$\|f_n - \varphi\|_X = \sup_{x\in X}\bigl|f_n(x) - \varphi(x)\bigr| \leqslant \tfrac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Таким образом, $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi\ (X)$. $\square$

Пример 4. Пусть $f \in C^1(a,b)$, а функции f_n задаются формулой

$$f_n(x) = n \cdot \bigl(f\bigl(x + \tfrac{1}{n}\bigr) - f(x)\bigr), \quad x \in (a,b).$$

Доказать, что $\{f_n\}$ равномерно сходится к f' на любом отрезке $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$.

Заметим, что при достаточно большом n функция f_n определена на $[\alpha,\beta]$.

Решение. Пусть $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$. Выберем такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\beta + \frac{1}{n_0} < b$, и положим $\gamma = \beta + \frac{1}{n_0}$. Так как f' непрерывна на $[\alpha,\gamma]$, функция f удовлетворяет условию *равномерной дифференцируемости* на $[\alpha,\gamma]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in [\alpha,\gamma]\colon \ |x - y| < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow \bigl|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)\bigr| \leqslant \varepsilon\,|x - y|. \quad (3)$$

По $\varepsilon > 0$ подберем δ в соответствии с (3), и пусть $N \in \mathbb{N}$ таково, что $N > n_0$ и $\frac{1}{N} < \delta$. Для $n > N$ и $x \in [\alpha,\beta]$ положим $y = x + \frac{1}{n}$. Так как $y \in [\alpha,\gamma]$, соотношение (3) дает

$$\bigl|f_n(x) - f'(x)\bigr| = n \cdot \bigl|f\bigl(x + \tfrac{1}{n}\bigr) - f(x) - f'(x) \cdot \tfrac{1}{n}\bigr| \leqslant n \cdot \varepsilon \cdot \tfrac{1}{n} = \varepsilon.$$

Переходя теперь к супремуму по $x \in [\alpha, \beta]$, мы получим

$$\|f_n - f'\|_{[\alpha,\beta]} \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N,$$

что и доказывает равномерную сходимость $\{f_n\}$ к f'. $\square$

Замечание 1. Для удобства читателя приведем доказательство утверждения (3). Пусть $\varepsilon > 0$. Функция f' непрерывна и, в силу теоремы Кантора, равномерно непрерывна на $[\alpha, \gamma]$. Поэтому существует такое $\delta > 0$, что если $x, y \in [\alpha, \gamma]$, $|x - y| < \delta$, то $\bigl|f'(y) - f'(x)\bigr| < \varepsilon$. Пусть $x, y \in [\alpha, \gamma]$, $|x - y| < \delta$. Будем для определенности считать $x < y$. Положим $F(t) = f(t) - f'(x)(t - x)$. Заметим, что

$$\bigl|F'(t)\bigr| = \bigl|f'(t) - f'(x)\bigr| < \varepsilon \quad \text{для любого} \quad t \in (x, y).$$

Используя оценку конечных приращений, мы получим

$$\bigl|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)\bigr| = \bigl|F(y) - F(x)\bigr| \leqslant \\ \leqslant \sup_{t \in (x,y)} \bigl|F'(t)\bigr| \cdot |x - y| \leqslant \varepsilon\, |x - y|. \quad \square$$

Замечание 2. Если $f \in C^2(a, b)$, то разбор примера 4 можно упростить. В этом случае вместо равномерной дифференцируемости f следует использовать формулу Тейлора второго порядка для f. Из нее вытекает соотношение $\|f_n - f'\|_{[\alpha,\beta]} = O\bigl(\frac{1}{n}\bigr)$. Предлагаем читателю доказать его самостоятельно.

Замечание 3. Если $\beta \in (a, b)$, то на $(a, \beta]$ равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ может не быть. Рассмотрим для примера функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0, 1]$. Для нее

$$f_n(x) = n\left(\frac{1}{x + \frac{1}{n}} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x\left(x + \frac{1}{n}\right)}.$$

Нам достаточно показать, что $\{f_n\}$ не сходится равномерно в себе, то есть проверить условие (2). Пусть $\varepsilon = \frac{1}{6}$. Для любого $N \in \mathbb{N}$ положим $n = N + 1$, $m = 2n$ и $x = \frac{1}{n}$. Тогда

$$f_n(x) - f_m(x) = -\frac{1}{\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n}} + \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n}\right)} = \frac{2n^2}{3} - \frac{n^2}{2} = \frac{n^2}{6} \geqslant \varepsilon.$$

Пример 5. Пусть

$$f_n(x) = \frac{nx^3}{x^2 + nx + n}, \quad x \geqslant 0.$$

Исследовать равномерную сходимость $\{f_n\}$ на $X = [0, +\infty)$ и на отрезках, содержащихся в X.

Решение. Прежде всего найдем поточечный предел f последовательности $\{f_n\}$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^3}{\frac{1}{n} \cdot x^2 + x + 1} = \frac{x^3}{x+1}, \quad x \geqslant 0.$$

Тогда для любого $x \geqslant 0$

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| = \left|\frac{nx^3}{x^2 + nx + n} - \frac{x^3}{x+1}\right| = \frac{x^5}{(x+1)\big(x^2 + n(x+1)\big)}. \quad (4)$$

Покажем вначале, что последовательность $\{f_n\}$ сходится неравномерно на X. Для любого $n \in \mathbb{N}$ правая часть (4) стремится к бесконечности при $x \to +\infty$. Поэтому $\|f_n - f\|_X = +\infty \not\to 0$ $(n \to \infty)$, то есть равномерной сходимости $\{f_n\}$ на X нет.

Пусть теперь $A > 0$. Тогда для любого $x \in [0, A]$

$$\frac{x^5}{(x+1)\big(x^2 + n(x+1)\big)} \leqslant \frac{x^5}{n} \leqslant \frac{A^5}{n}.$$

Поэтому в силу (4)

$$\|f_n - f\|_{[0,A]} \leqslant \frac{A^5}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то есть $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $[0, A]$. $\square$

Пример 6. Пусть

$$f_n(x) = \operatorname{arctg} 3nx - \operatorname{arctg} 2nx, \quad x > 0.$$

Исследовать равномерную сходимость последовательности $\{f_n\}$ на множествах $X = (0,1)$ и $Y = [1,+\infty)$.

Решение. Заметим, что $\{f_n\}$ поточечно сходится на $(0,+\infty)$ к функции $f \equiv 0$, поскольку при любом $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2} = 0.$$

Таким образом, $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и на X, и на Y. По формуле для суммы арктангенсов

$$\bigl|f_n(x) - f(x)\bigr| = f_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{nx}{1+6n^2x^2}, \quad x > 0. \tag{5}$$

Покажем вначале, что последовательность $\{f_n\}$ сходится неравномерно на X. В силу (5)

$$\|f_n - f\|_X \geqslant f_n\bigl(\tfrac{1}{n}\bigr) = \operatorname{arctg}\tfrac{1}{7} \not\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Изучим теперь поведение $\{f_n\}$ на Y. Так как $\operatorname{arctg} z \leqslant z$ при любом $z \geqslant 0$, мы получим

$$\operatorname{arctg}\frac{nx}{1+6n^2x^2} \leqslant \frac{nx}{1+6n^2x^2} \leqslant \frac{nx}{6n^2x^2} = \frac{1}{6nx}.$$

Тогда в силу (5)

$$\|f_n - f\|_Y \leqslant \sup_{x\geqslant 1}\frac{1}{6nx} = \frac{1}{6n} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Поэтому на Y последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно. □

Пример 7. Пусть

$$f_n = \frac{1}{(n-x)^2(nx-1)^2+1}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Исследовать равномерную сходимость последовательности $\{f_n\}$ на множествах $[0,1]$, $[1,2]$ и $[2,+\infty)$.

Решение. Заметим, что при любом $x \geqslant 0$ знаменатель f_n представляет собой многочлен от n четвертой или второй степени. Поэтому $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, то есть $\{f_n\}$ поточечно сходится на $[0, +\infty)$ к функции $f \equiv 0$. Рассмотрим три случая.

1) $X = [0, 1]$. Тогда

$$\|f_n - f\|_X \geqslant f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = 1 \not\to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Значит, последовательность $\{f_n\}$ сходится неравномерно на X.

2) $X = [2, +\infty]$. Тогда

$$\|f_n - f\|_X \geqslant f_n(n) = 1 \not\to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, и в этом случае последовательность $\{f_n\}$ сходится неравномерно.

3) $X = [1, 2]$. Для любых $x \in X$ верны неравенства $n - x \geqslant n - 2$ и $nx - 1 \geqslant n - 1$. Поэтому при $n \geqslant 3$

$$\|f_n - f\|_X = \sup_{x \in X} f_n(x) \leqslant \frac{1}{(n-2)^2(n-1)^2 + 1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на $[1, 2]$. $\square$

Пример 8. Пусть

$$f_n(x) = \arcsin \frac{nx}{nx + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Исследовать равномерную сходимость $\{f_n\}$ на $(0, 1]$.

Решение 1. Покажем, что $\{f_n\}$ не сходится равномерно в себе на $(0, 1]$, то есть проверим условие (2). Пусть $N \in \mathbb{N}$. Положим $n = N + 1$, $m = 2n$, $x = \frac{1}{n}$. Тогда

$$\left|f_m(x) - f_n(x)\right| = \arcsin \tfrac{2}{3} - \arcsin \tfrac{1}{2}.$$

Осталось взять $\varepsilon = \arcsin \frac{2}{3} - \arcsin \frac{1}{2}$. $\square$

Решение 2. Воспользуемся *теоремой Стокса – Зейделя* (см. [1], стр. 349). Заметим, что при $n \to \infty$

$$f_n(0) = 0 \to 0; \quad f_n(x) \to \arcsin 1 = \tfrac{\pi}{2}, \text{ где } x \in (0,1].$$

Значит, $\{f_n\}$ поточечно сходится к функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Предположим, что $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $(0,1]$. Тогда равномерная сходимость будет и на множестве $[0,1]$. Поскольку все функции f_n непрерывны на $[0,1]$, по теореме Стокса – Зейделя таковой должна быть и f. Но функция f имеет разрыв в нуле. $\square$

Пусть $\{f_n\}$ — последовательность непрерывных на $[a,b]$ функций, сходящаяся (в каком-то смысле) к функции f. Если при этом

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

то говорят, что *под знаком интеграла* $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx$ *допусти́м предельный переход.* Достаточным условием, гарантирующим возможность предельного перехода в интеграле, является равномерная сходимость $\{f_n\}$ к f (см. [1], стр. 350). Следующий пример показывает, что необходимым это условие не является.

Пример 9. Пусть $f_n(x) = \sqrt{n} \cdot \sin x \cdot (\cos x)^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$.

1) Исследовать поточечную и равномерную сходимость последовательности $\{f_n\}$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Выяснить, возможен ли предельный переход под знаком интеграла $\int\limits_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$.

Решение. 1) Проверим вначале, что последовательность $\{f_n\}$ поточечно сходится на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ к $f \equiv 0$. Ясно, что $f_n(0) = 0 \to 0$ при

$n \to \infty$. Если $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, то $|\cos x| < 1$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot(\cos x)^{2n} = 0$ (это легко проверить с помощью правила Лопиталя).

Покажем теперь, что сходимость $\{f_n\}$ к f неравномерная. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $X = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$\|f_n - f\|_X = \sup_X f_n = \sqrt{n} \cdot \max_{x\in X} \left(\sin x \cdot (\cos x)^{2n}\right).$$

Максимум функции $g(x) = \sin x \cdot (\cos x)^{2n}$ найдем с помощью производной. Заметим, что

$$g'(x) = (\cos x)^{2n+1} - \sin^2 x \cdot 2n \cdot (\cos x)^{2n-1} = \\ = (\cos x)^{2n-1} \cdot \left((2n+1)\cos^2 x - 2n\right).$$

Уравнение $g'(x) = 0$ имеет на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ единственный корень x_0, причем $\cos^2 x_0 = \frac{2n}{2n+1}$ и $\sin^2 x_0 = \frac{1}{2n+1}$. Поэтому наибольшее значение функции g на X достигается в точке x_0, откуда при $n \to \infty$

$$\|f_n - f\|_X = \sqrt{n} \cdot g(x_0) = \sqrt{\frac{n}{2n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{-2n}} \to \frac{1}{\sqrt{2e}} \neq 0.$$

Таким образом, сходимость $\{f_n\}$ к f неравномерная.

2) Сделаем в $\int\limits_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$ замену $t = \cos x$. Мы получим

$$\int\limits_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx = \sqrt{n} \int\limits_0^1 t^{2n}\,dt = \frac{\sqrt{n}}{2n+1} \to 0 = \int\limits_0^{\pi/2} f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Значит, предельный переход под знаком $\int\limits_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$ допусти́м. $\square$

Пример 10. Пусть $f_n(x) = \sqrt{nx + |\ln(nx)|} - \sqrt{nx}$ при $x > 0$. Исследовать равномерную сходимость последовательности $\{f_n\}$ на множествах $X = (0, 1]$ и $Y = (1, +\infty)$.

Решение. Проверим вначале, что $\{f_n\}$ поточечно сходится к $f \equiv 0$ на $(0,+\infty)$. Заметим, что

$$f_n(x) = \frac{|\ln(nx)|}{\sqrt{nx + |\ln(nx)|} + \sqrt{nx}} \leqslant \frac{|\ln(nx)|}{\sqrt{nx}}. \qquad (6)$$

Для фиксированного $x > 0$ правая часть (6) стремится к нулю при $n \to +\infty$ (это легко проверяется с помощью правила Лопиталя). Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Покажем, что на X последовательность $\{f_n\}$ сходится неравномерно. Действительно, при $n \geqslant 3$

$$\|f_n - f\|_X = \|f_n\|_X \geqslant f_n\left(\tfrac{e}{n}\right) = \sqrt{e+1} - \sqrt{e} \not\to 0 \quad (n \to \infty).$$

Чтобы изучить поведение последовательности $\{f_n\}$ на Y, рассмотрим функцию $g(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Поскольку

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}},$$

функция g убывает на $\left[e^2, +\infty\right)$. Если $n \geqslant 9$, то в силу (6)

$$\|f_n - f\|_Y \leqslant \sup_{x\in Y} \frac{|\ln(nx)|}{\sqrt{nx}} = \sup_{x \in Y} g(nx) \leqslant g(n) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Таким образом, $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на Y при $n \to \infty$. $\square$

Задачи. Исследовать равномерную сходимость функциональной последовательности $\{f_n\}$ на указанных множествах.

1.1. $f_n(x) = x \cdot \operatorname{arctg}(nx)$ на $(0,+\infty)$.

1.2. $f_n(x) = n^2\left(x^{1/n^2} - 1\right)$ на $(1, 10]$.

1.3. $f_n(x) = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2 + \frac{n}{2} + x^2}\,\right)$ на $[0, A]$, где $A > 0$.

1.4. $f_n(x) = \dfrac{\cos nx \cdot \sin\left(\frac{1}{nx}\right)}{1 + \ln^2\left(x(n+1)\right)}$ на $(0, 1]$ и на $[\delta, +\infty)$, где $\delta > 0$.

ГЛАВА 2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§ 1. Определение и простейшие признаки равномерной сходимости

Поскольку между последовательностями и рядами существует тесная связь, понятие равномерной сходимости можно перенести и на ряды. Сделаем это.

Определение 1. Пусть X — множество, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность функций на X, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ при $n \in \mathbb{N}$.

1) Если последовательность $\{S_n\}$ поточечно сходится на X, то говорят, что *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *поточечно сходится на* X, и полагают $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ при любом $x \in X$.

2) Если последовательность $\{S_n\}$ равномерно сходится на X, то говорят, что *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *равномерно сходится на* X.

Замечание. *Равносильны два утверждения.*

1) Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *равномерно сходится на* X.

2) Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *поточечно сходится на* X *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| \sum\limits_{k=n}^{\infty} f_k \right\|_X = 0$.

Это вытекает непосредственно из определения 2 § 1.

Для практических целей это замечание не очень полезно, так как остаток ряда редко удается записать в удобной форме. Поэтому нам потребуются признаки равномерной сходимости, аналогичные тем, что выводились для числовых рядов. Мы будем их формулировать и сразу приводить примеры их использования.

Теорема 1. Критерий Больцано – Коши. *Пусть* X *— множество,* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность функций на* X*. Тогда равносильны два утверждения.*

1) Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *равномерно сходится на* X.

2) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall m > N\ \ \forall p \in \mathbb{N}\ \ \forall x \in X$: $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{m+p} f_k(x)\right| < \varepsilon$.

Доказательство этой теоремы можно найти в [1], стр. 340.

Замечание 1. Утверждение 2) можно записать в эквивалентной форме:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall m > N\ \ \forall p \in \mathbb{N}\colon\ \left\|\sum_{k=m+1}^{m+p} f_k\right\|_X < \varepsilon.$$

Замечание 2. Критерий Больцано – Коши часто используют для доказательства отсутствия равномерной сходимости ряда. Поэтому нам потребуется отрицание утверждения 2):

$$\exists \varepsilon > 0\ \ \forall N \in \mathbb{N}\ \ \exists m > N\ \ \exists p \in \mathbb{N}\ \ \exists x \in X\colon\ \left|\sum_{k=m+1}^{m+p} f_k(x)\right| \geqslant \varepsilon. \quad (1)$$

Теорема 2. Необходимый признак равномерной сходимости. *Пусть* X *— множество,* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность функций на* X. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *равномерно сходится на* X, *то* $f_k \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ *на* X.

Замечание 1. Равномерная сходимость $\{f_k\}$ — частный случай утверждения 2) теоремы 1, соответствующий $p = 1$. Поэтому необходимый признак равномерной сходимости — прямое следствие критерия Больцано – Коши.

Замечание 2. С помощью теоремы 2 нельзя доказать равномерную сходимость ряда, а можно лишь проверить ее отсутствие. Поэтому более удобна эквивалентная формулировка необходимого признака: *если* $f_k \underset{k\to\infty}{\not\rightrightarrows} 0$ *на* X, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *не сходится равномерно на* X. При этом может оказаться, что в каких-то точках X ряд вообще расходится.

Проиллюстрируем применение теорем 1 и 2 на примерах.

Пример 1. Исследовать ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-kx} \cdot \sin kx$ на равномерную сходимость на множестве $X = [0, +\infty)$.

Решение. Положим $f_k(x) = e^{-kx} \cdot \sin kx$. Проверим вначале, что при любом $x \in X$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится. Для $x = 0$ это очевидно. Если $x > 0$, то

$$\bigl|f_k(x)\bigr| = e^{-kx} \cdot |\sin kx| \leqslant e^{-kx} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-kx}$ сходится как геометрическая прогрессия.

Покажем теперь, что сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ на X неравномерная. Заметим, что

$$\|f_n\|_X \geqslant \bigl|f_n\bigl(\tfrac{1}{n}\bigr)\bigr| = e^{-1} \cdot \sin 1 \not\to 0 \quad (n \to \infty),$$

откуда $f_n \underset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows} 0$ на X. Осталось применить теорему 2. $\square$

Замечание. Следует различать утверждения «ряд сходится неравномерно» и «ряд не сходится равномерно» на X: первое из них предполагает наличие поточечной сходимости, второе — нет. Если нам требуется доказать только второе утверждение, первую часть решения примера 1 можно опустить.

Пример 2. На множестве $X = [0, +\infty)$ исследовать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{(kx)^2 + 1} \cdot \cos kx.$$

Решение. Положим $f_k(x) = \dfrac{x}{(kx)^2 + 1} \cdot \cos kx$. Проверим вначале, что при любом $x \in X$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится. Для $x = 0$ это очевидно. Если $x > 0$, то

$$\bigl|f_k(x)\bigr| \leqslant \frac{x}{(kx)^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{k^2},$$

а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится.

Покажем теперь, что сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ на X неравномерная. Воспользоваться теоремой 2 в этом примере не удастся, поскольку $\|f_k\| = O\bigl(\frac{1}{k}\bigr)$ (предлагаем читателю проверить это самостоятельно). Нам нужно применить критерий Больцано – Коши, то есть проверить условие (1). Выбор числа ε мы отложим до конца решения. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Положим $m = N+1$, $p = m$, $x = \frac{1}{2m}$. Для $k \in \{m+1, \dots, m+p\}$ верно двойное неравенство $\frac{1}{2} \leqslant kx \leqslant 1$. Отсюда $\cos kx \geqslant \cos 1$ и

$$\sum_{k=m+1}^{m+p} f_k(x) \geqslant \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{\cos 1}{2m \cdot (1+1)} = \frac{m \cos 1}{4m} = \frac{\cos 1}{4}.$$

Осталось взять $\varepsilon = \frac{\cos 1}{4}$. $\square$

Обобщая пример 2, можно получить необходимое условие равномерной сходимости рядов специального вида, которые мы назовем *тригонометрическими.* Для этого нам потребуется следующая оценка.

Лемма 1. *Пусть* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— убывающая последовательность положительных чисел,* $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $\delta \in (0, \pi]$. *Тогда*

$$\sup_{x \in [0,\delta]} \left| \sum_{k=m+1}^{n} c_k \sin kx \right| \geqslant \frac{\delta}{\pi} \left(1 - \frac{m}{n}\right)(m+1)\, c_n.$$

Доказательство. Положим $x = \frac{\delta}{2n}$. Ясно, что $x \in [0, \delta]$. Если $k \in \{m+1, \dots, n\}$, то $kx \leqslant \frac{n\delta}{2n} \leqslant \frac{\pi}{2}$, откуда

$$\sin kx \geqslant \frac{2kx}{\pi} = \frac{k\delta}{\pi n} \geqslant \frac{(m+1)\delta}{\pi n}.$$

Тогда в силу убывания c_k

$$\sup_{x \in [0,\delta]} \left| \sum_{k=m+1}^{n} c_k \sin kx \right| \geqslant \frac{(m+1)\delta}{\pi n} \sum_{k=m+1}^{n} c_k \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(m+1)\delta}{\pi n} (n-m)\, c_n = \frac{\delta}{\pi} \left(1 - \frac{m}{n}\right)(m+1)\, c_n. \quad \square$$

Следствие. *Пусть* $\{c_k\}$ *— убывающая последовательность положительных чисел,* $n \in \mathbb{N}$, $m = \left[\frac{n}{2}\right]$, $\delta \in (0, \pi]$. *Тогда*

$$\sup_{x\in[0,\delta]} \left| \sum_{k=m+1}^{n} c_k \sin kx \right| \geqslant \frac{\delta}{4\pi} \cdot nc_n.$$

Доказательство. Заметим, что

$$1 - \frac{m}{n} \geqslant 1 - \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad m + 1 \geqslant \frac{n}{2}.$$

Тогда в силу леммы 1

$$\sup_{x\in[0,\delta]} \left| \sum_{k=m+1}^{n} c_k \sin kx \right| \geqslant \frac{\delta}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot c_n = \frac{\delta}{4\pi} \cdot nc_n. \quad \square$$

Выведем теперь необходимое условие равномерной сходимости тригонометрического ряда.

Теорема 3. *Пусть* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— убывающая последовательность положительных чисел,* $\delta \in (0, \pi]$. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx$ *сходится равномерно по* $x \in [0, \delta]$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} nc_n = 0$.

Доказательство. Предположим, что $nc_n \not\to 0$. Тогда найдется такое $M > 0$, что неравенство $nc_n \geqslant M$ выполняется для бесконечного числа индексов n. Нам нужно показать, что тригонометрический ряд не сходится равномерно на $[0, \delta]$, а для этого достаточно проверить условие (1). Пусть $N \in \mathbb{N}$. По предположению существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\left[\frac{n}{2}\right] > N$ и $nc_n \geqslant M$. Положим $m = \left[\frac{n}{2}\right]$, $p = n - m$. Тогда в силу следствия леммы 1

$$\sup_{x\in[0,\delta]} \left| \sum_{k=m+1}^{m+p} c_k \sin kx \right| \geqslant \frac{\delta}{4\pi} \cdot nc_n \geqslant \frac{M\delta}{4\pi}.$$

Таким образом, условие (1) выполняется при $\varepsilon = \frac{M\delta}{4\pi}$. $\square$

Замечание. Далее мы докажем, что условие $\lim\limits_{n\to\infty} nc_n = 0$ не только необходимо, но и достаточно для равномерной сходимости тригонометрического ряда.

Задачи. Исследовать равномерную сходимость функционального ряда на указанных множествах.

1.1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot k\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{k^2x}\right)$ на $(0,\delta]$, где $\delta>0$.

1.2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{-\sqrt{k}\cdot x}\cdot\dfrac{\sin kx}{k}$ на $[0,\delta]$, где $\delta>0$.

1.3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\bigl(\operatorname{arctg}(2kx)-\operatorname{arctg}(kx)\bigr)$ на $[0,\delta]$, где $\delta>0$.

1.4. $\sum\limits_{k=N}^{\infty}\dfrac{k}{1+k^2x^2}\cdot\operatorname{tg}\sqrt{\dfrac{x}{k}}$ на $[0,\delta]$ и на $[\delta,N]$, где $0<\delta<N$.

Указание. При исследовании равномерной сходимости этого ряда на $[0,\delta]$ оцените снизу выражение

$$\sup_{x\in[0,\delta]}\frac{k}{1+k^2x^2}\cdot\operatorname{tg}\sqrt{\frac{x}{k}}$$

и воспользуйтесь теоремой 2.

§ 2. Признак Вейерштрасса

Как уже говорилось ранее, теорема 2 § 1 не позволяет доказать равномерную сходимость ряда. Критерий Больцано – Коши на практике тоже чаще используется для проверки отсутствия равномерной сходимости, что видно и из разобранных выше примеров. Для доказательства равномерной сходимости нужно иметь какие-то *достаточные* условия. Важнейшим из них является признак Вейерштрасса. Сформулируем его.

Теорема 1. Признак Вейерштрасса. *Пусть X — множество, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность функций на X. Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_X < +\infty,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на X.

Доказательство этой теоремы можно найти в [1], стр. 341.

Замечание 1. На практике нормы f_k не всегда легко вычислить, поэтому нередко их оценивают. Иными словами, используется следующая редакция признака Вейерштрасса: *если*

$$\sup_{x\in X}\bigl|f_k(x)\bigr| \leqslant c_k \ \ \textit{для любых}\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на X.

Про ряд с общим членом c_k говорят, что он *мажорирует функциональный ряд.*

Замечание 2. Признак Вейерштрасса гарантирует абсолютную сходимость функционального ряда.

Пример 1. Исследовать равномерную сходимость на $\mathbb{R}$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{1+k^2x^2} \cdot \ln\left(1 + \frac{|x|}{1+k^2x^2}\right).$$

Решение. Пусть $g_k(x) = \dfrac{x}{1+k^2x^2}$. Функция g_k нечетна, и

$$g_k'(x) = \frac{1-k^2x^2}{\left(1+k^2x^2\right)^2} \quad (x > 0).$$

Поэтому $\|g_k\|_{\mathbb{R}} = g_k\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2k}$. С учетом неравенства $\ln(1+t) \leqslant t$ при $t > -1$ мы получаем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{x}{1+k^2x^2} \cdot \ln\left(1 + \frac{|x|}{1+k^2x^2}\right)\right| \leqslant \sup_{\mathbb{R}}\, g_k^2 = \frac{1}{4k^2}.$$

Функциональный ряд мажорируется на $\mathbb{R}$ сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2}$ и потому равномерно сходится. $\square$

Пример 2. Исследовать равномерную сходимость на $\mathbb{R}$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} x \cdot \sin \frac{\pi}{1 + k^5 x^2}.$$

Решение. Пусть $g_k(x) = \dfrac{x}{1 + k^5 x^2}$. Функция g_k нечетна, и

$$g_k'(x) = \frac{1 - k^5 x^2}{\left(1 + k^5 x^2\right)^2} \quad (x > 0).$$

Поэтому $\|g_k\|_{\mathbb{R}} = g_k\left(k^{-5/2}\right) = \frac{1}{2}\, k^{-5/2}$. Поскольку $|\sin t| \leqslant |t|$ при $t \in \mathbb{R}$, мы получаем

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x \cdot \sin \frac{\pi}{1 + k^5 x^2} \right| \leqslant \pi \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g_k| = \frac{\pi}{2k^{5/2}}.$$

Функциональный ряд мажорируется на $\mathbb{R}$ сходящимся числовым рядом и потому равномерно сходится. $\square$

Признак Вейерштрасса дает лишь достаточное условие равномерной сходимости, даже если ряд неотрицательный. Чтобы получить соответствующий пример, докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $f \in C^1\big([1, +\infty)\big)$ — неотрицательная функция, причем f' возрастает на $[1, +\infty)$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} f'(t) = +\infty$. Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{1 + \big(x f(k)\big)^2}$$

равномерно сходится на $[0, +\infty)$.

Доказательство. По условию найдется такое число $a > 1$, что $f'(t) \geqslant 1$ при $t \geqslant a$. Тогда f возрастает на $[a, +\infty)$, и при $x \to +\infty$

$$f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)\, dt \geqslant f(a) + \int\limits_a^x dt = f(a) - a + x \to +\infty.$$

Нам достаточно проверить, что остаток ряда допускает равномерную по $x > 0$ оценку бесконечно малой числовой последовательностью. Пусть $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant a$, $x > 0$. Тогда

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{x}{1+\big(xf(k)\big)^2} \leqslant \int\limits_{N-1}^{+\infty} \frac{x\,dt}{1+\big(xf(t)\big)^2} = \int\limits_{N-1}^{+\infty} \frac{xf'(t)\,dt}{\big(1+(xf(t))^2\big)f'(t)}.$$

Из монотонности f' следует неравенство $f'(t) \geqslant f'(N-1)$. Эта оценка в сочетании с заменой $u = xf(t)$ дает

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{x}{1+\big(xf(k)\big)^2} \leqslant \frac{1}{f'(N-1)} \int\limits_{xf(N-1)}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{f'(N-1)} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2f'(N-1)}.$$

Осталось перейти к супремуму по $x > 0$ и заметить, что по условию $f'(N-1) \to +\infty$ при $N \to \infty$. $\square$

Замечание. Несложно доказать, что

$$\sup_{x \geqslant 0} \frac{x}{1+\big(xf(k)\big)^2} = \frac{1}{2f(k)}.$$

Если $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f(k)} = +\infty$, то равномерную сходимость функционального ряда не удастся исследовать по признаку Вейерштрасса.

Пример 3. Доказать равномерную сходимость на $[0, +\infty)$ рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{1+\big(x \cdot k \ln^p k\big)^2} \;\text{ при }\; p \in (0,1], \qquad \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x}{1+\big(x \cdot k \ln k\, \ln(\ln k)\big)^2}.$$

Решение. В силу предыдущего замечания условия признака Вейерштрасса для этих рядов не выполняются. Воспользуемся теоремой 2. Положим

$$f(t) = t \ln^p t \;\text{ при }\; p \in (0,1], \qquad g(t) = t \ln t\, \ln(\ln t).$$

Тогда $f(t) \geqslant 0$ при $t \geqslant 1$, $g(t) \geqslant 0$ при $t \geqslant 3$. Кроме того,

$$f'(t) = \ln^p t + p \ln^{p-1} t, \qquad g'(t) = \bigl(\ln t + 1\bigr) \ln(\ln t) + 1.$$

Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} g'(t) = +\infty$, а также возрастание g' на $[1, +\infty)$. Наконец, при $t \geqslant 3$

$$f''(t) = \frac{p \ln^{p-1} t + p\,(p-1) \ln^{p-2} t}{t} = \frac{p \ln^{p-2} t}{t} \cdot \bigl(\ln t - (1-p)\bigr) > 0,$$

поскольку $\ln t \geqslant \ln 3 > 1 \geqslant 1 - p$. Значит, f' возрастает на $[3, +\infty)$. Осталось применить теорему 2 к функциям f и g. $\square$

Нередко бывает так, что функциональный ряд на всей своей области определения сходится неравномерно, а на некотором ее подмножестве — равномерно. Поэтому при решении задач признак Вейерштрасса часто комбинируют с каким-либо необходимым условием равномерной сходимости. Для этой цели подходят теоремы из § 1. Но отсутствие равномерной сходимости ряда можно установить и неявно, с помощью теорем о свойствах его суммы (см. [1], § 2 главы 8). Следующие два примера иллюстрируют такой подход.

Пример 4. Исследовать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2x^k - x^{2k}}{\ln k}$$

на $[0, 1)$ и на $[0, A]$ при $A \in [0, 1)$.

Решение. Обозначим через f_k общий член ряда. Пусть вначале $A \in [0, 1)$. Тогда при $x \in [0, A]$ и $k \geqslant 2$

$$\left| \frac{2x^k - x^{2k}}{\ln k} \right| \leqslant \frac{2A^k + A^{2k}}{\ln 2}.$$

Таким образом, функциональный ряд мажорируется суммой двух прогрессий и по признаку Вейерштрасса равномерно сходится.

Покажем теперь, что на $[0, 1)$ наш ряд не сходится равномерно. Воспользуемся теоремой о пределе суммы функционального ряда (см. [1], стр. 348). Если $\sum\limits_{k=2}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на $[0,1)$, то по теореме сумма ряда будет иметь конечный предел в точке 1, и

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{k=2}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=2}^{\infty}\lim_{x\to 1-0} f_k(x) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\ln k}.$$

Но это невозможно, поскольку ряд в правой части расходится. $\square$

Пример 5. Рассмотрим ряд

$$S(x) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln^x(k+2)}{k^{2+x}}.$$

1) Выяснить, при каких x ряд $S(x)$ сходится.

2) Исследовать равномерную сходимость ряда S на его области определения и на множестве $X_\delta = [-1+\delta, +\infty)$, где $\delta > 0$.

Решение. Обозначим общий член ряда S через f_k. Покажем вначале, что $S(x)$ расходится при $x \leqslant -1$. Ясно, что

$$f_k(-1) = \frac{1}{k\ln(k+2)} \sim \frac{1}{k\ln k} \quad (k\to\infty).$$

Тогда ряд $S(-1)$ расходится по интегральному признаку Коши. Пусть $x < -1$. Запишем $f_k = g_k \cdot \frac{1}{k}$, где $g_k(x) = \dfrac{k^{-1-x}}{\ln^{-x}(k+2)}$. Заметим, что $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = +\infty$, поскольку степенная последовательность стремится к бесконечности быстрее логарифма. Значит, по теореме сравнения $S(x)$ ряд расходится.

Рассмотрим теперь $x > -1$. Докажем оценку

$$\frac{\ln^x(k+2)}{k^{2+x}} \leqslant \max\left\{\frac{1}{k^{2+x}}, \frac{1}{k^2}\right\}. \tag{2}$$

Действительно, если $x < 0$, то $\ln^x(k+2) \leqslant \ln^x 3 \leqslant 1$. Пусть $x \geqslant 0$. Тогда при $k \geqslant 2$

$$\frac{\ln^x(k+2)}{k^x} = \left(\frac{\ln 2 + \ln\left(1+\frac{k}{2}\right)}{k}\right)^x \leqslant \left(\frac{\ln 2}{k} + \frac{1}{2}\right)^x \leqslant \left(\frac{\ln 2 + 1}{2}\right)^x < 1,$$

откуда и следует (2).

Из неравенства (2) вытекают два вывода. Во-первых, ряд $S(x)$ сходится при $x > -1$ по теореме сравнения. Таким образом, область определения S равна $(-1, +\infty)$. Во-вторых, для $k \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$ мы получаем оценку

$$\|f_k\|_{X_\delta} \leqslant k^{-\sigma}, \quad \text{где } \sigma = \min\{1+\delta, 2\},$$

и ряд S равномерно сходится на X_δ по признаку Вейерштрасса.

Осталось доказать, что на $(-1, +\infty)$ ряд S сходится неравномерно. Вновь воспользуемся теоремой о пределе суммы функционального ряда. Если $\sum\limits_{k=2}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на $(-1, +\infty)$, то сумма ряда будет иметь конечный предел справа в точке -1, и

$$\lim_{x\to -1+0} \sum_{k=2}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \lim_{x\to -1+0} f_k(x) = \sum_{k=2}^{\infty} f_k(-1).$$

Но это невозможно, поскольку ряд $S(-1)$ расходится. $\square$

Изучим теперь с помощью признака Вейерштрасса два знакопеременных ряда.

Пример 6. Исследовать равномерную сходимость на $\mathbb{R}$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k^4} + \sin kx}.$$

Решение. Заметим, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k^4} + \sin kx} \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{k^4} - 1} \sim k^{-4/3} \quad (k \to \infty).$$

Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-4/3} < +\infty$, исходный функциональный ряд равномерно сходится на $\mathbb{R}$. $\square$

Пример 7. Исследовать равномерную сходимость на $\mathbb{R}$ ряда

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k^2} + \cos kx}.$$

Решение. Обозначим общий член ряда за f_k. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\bigl|f_k(x)\bigr| \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}+1} \sim k^{-2/3}$. Поскольку $\sum\limits_{k=2}^{\infty} k^{-2/3} = +\infty$, функциональный ряд не сходится абсолютно, и применить к нему признак Вейерштрасса не удастся. Чтобы обойти эту трудность, выделим у f_k главную часть. Положим

$$g_k(x) = f_k(x) - \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k^2}} = \frac{(-1)^{k+1}\cos kx}{\sqrt[3]{k^2}\bigl(\sqrt[3]{k^2}+\cos kx\bigr)}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k^2}}$ сходится по признаку Лейбница и, значит, равномерно сходится, поскольку общий член ряда не зависит от x. Поэтому нам достаточно доказать равномерную сходимость на $\mathbb{R}$ ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty} g_k$. Это уже вытекает из признака Вейерштрасса, поскольку

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \bigl|f_k(x)\bigr| \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}\bigl(\sqrt[3]{k^2}-1\bigr)} \sim k^{-4/3} \quad (k \to \infty),$$

а ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} k^{-4/3}$ сходится. $\square$

Замечание. В разобранном примере мы выделили главную часть последовательности f_k «вручную», с помощью алгебраических преобразований. В более общей ситуации это можно сделать с помощью формулы Тейлора – Лагранжа. В § 5 мы приведем примеры, демонстрирующие такой подход.

Задачи. Исследовать равномерную сходимость функционального ряда на указанных множествах.

2.1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(kx)\right)}{(\ln k)^p}$ на $[0, +\infty)$, где $p > 1$.

2.2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x\left(\ln k - \ln x\right)}{k^2 + \ln k}$ на $(0, A]$, где $A > 0$.

2.3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{k}}}{1 + k^2x^2}$ на $[0, \delta)$, $[\delta, A]$ и $[A, +\infty)$, где $0 < \delta < A$.

§ 3. Признаки Дирихле и Абеля

Признак Вейерштрасса имеет серьезное ограничение: с его помощью можно исследовать только абсолютно сходящиеся ряды. Рассмотрим теперь достаточные условия равномерной сходимости знакопеременных рядов. Важную роль будут играть признаки Дирихле и Абеля. Их доказательство основано на *преобразовании Абеля* и вытекающей из него оценки. Ввиду важности этой оценки приведем ее вывод.

Лемма 1. Преобразование Абеля. *Пусть* $\{a_k\}$ *и* $\{b_k\}$ *— числовые последовательности,* $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $n > m$. *Положим* $A_k = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j$ *при* $k \in \mathbb{N}$, $A_0 = 0$. *Тогда*

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - A_m b_{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Если последовательность $\{b_k\}$ *монотонна, то справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k \right| \leqslant 4 \max_{m \leqslant k \leqslant n} |A_k| \cdot \max\bigl\{|b_{m+1}|, |b_n|\bigr\}. \qquad (3)$$

Доказательство. Проверим первое равенство:

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m+1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k =$$
$$= \sum_{k=m+1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m+1}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=m+1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_{k+1} =$$
$$= A_n b_n - A_m b_{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Пусть теперь последовательность $\{b_k\}$ монотонна. Тогда все разности $b_k - b_{k+1}$ имеют одинаковый знак. Положим $M = \max\limits_{m \leqslant k \leqslant n} |A_k|$.

Мы получим

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant M\left(|b_{m+1}| + |b_n| + \sum_{k=m+1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}|\right) =$$
$$= M\left(|b_{m+1}| + |b_n| + \left|\sum_{k=m+1}^{n-1} (b_k - b_{k+1})\right|\right) =$$
$$= M\big(|b_{m+1}| + |b_n| + |b_{m+1} - b_n|\big) \leqslant 4M \max\big\{|b_{m+1}|, |b_n|\big\}. \quad \square$$

Сформулируем теперь признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости ряда.

Теорема 1. Признак Дирихле. *Пусть X – множество, $\{f_k\}$ и $\{g_k\}$ – последовательности функций на X. Предположим, что*

1) существует такое $C > 0$, что $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant C$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$;

2) при любом $x \in X$ последовательность $\{g_k(x)\}$ монотонна и $g_k \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} 0\ (X)$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ равномерно сходится на X.

Теорема 2. Признак Абеля. *Пусть X – множество, $\{f_k\}$ и $\{g_k\}$ – последовательности функций на X. Предположим, что*

1) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на X;

2) при любом $x \in X$ последовательность $\{g_k(x)\}$ монотонна и $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|g_k\|_X < +\infty$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ равномерно сходится на X.

Доказательства этих теорем основаны на преобразовании Абеля. Их можно найти в [1], стр. 344.

Признак Дирихле полезен при изучении тригонометрических рядов. Чтобы применять его на практике, нам потребуется вычислить и оценить суммы синусов и косинусов кратных углов. Сделаем это.

Лемма 2. *Пусть* $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $x \in (0, 2\pi)$. *Тогда*

$$\sum_{k=m+1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\big(m+\frac{1}{2}\big)x - \cos\big(n+\frac{1}{2}\big)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$
$$\sum_{k=m+1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\big(n+\frac{1}{2}\big)x - \sin\big(m+\frac{1}{2}\big)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Доказательство. Проверим первое равенство:

$$\sum_{k=m+1}^{n} \sin kx = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=m+1}^{n} \sin kx \cdot \sin\tfrac{x}{2} =$$
$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=m+1}^{n} \Big(\cos\big(k-\tfrac{1}{2}\big)x - \cos\big(k+\tfrac{1}{2}\big)x\Big) =$$
$$= \frac{\cos\big(m+\frac{1}{2}\big)x - \cos\big(n+\frac{1}{2}\big)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

(промежуточные слагаемые в сумме сокращаются). Второе равенство доказывается аналогично, предлагаем читателю сделать это самостоятельно. □

Следствие. *В условиях леммы 2 справедливы неравенства*

$$\Bigg|\sum_{k=m+1}^{n} \sin kx\Bigg| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}, \qquad \Bigg|\sum_{k=m+1}^{n} \cos kx\Bigg| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{4}$$

Доказательство. Достаточно вычислить эти суммы по лемме 2 и заметить, что модули числителей не превосходят 2. □

Пример 1. Исследовать равномерную сходимость $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ на множествах $X = [0, \delta]$ и $Y = [\delta, 2\pi - \delta]$, где $\delta \in (0, \pi)$.

Решение. На X равномерной сходимости не будет. Это вытекает из теоремы 3 § 1, поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} k \cdot \frac{1}{k} = 1 \neq 0$. Докажем, что на Y ряд равномерно сходится. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $x \in Y$. Применяя оценку (4) при $m = 0$, мы получим

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

Кроме того, $\frac{1}{k}$ убывает и $\frac{1}{k} \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на Y. Осталось применить признак Дирихле. $\square$

Замечание. Попутно мы доказали, что ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ поточечно сходится на $\mathbb{R}$. Действительно, сходимость ряда в нуле очевидна. Любая точка $x \in (0, 2\pi)$ лежит в некотором промежутке вида $[\delta, 2\pi - \delta]$, поэтому в ней ряд также сходится. Осталось воспользоваться 2π-периодичностью общего члена ряда.

Пример 2. Исследовать равномерную сходимость $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k + x^2}$ на множестве $X = [\delta, 2\pi - \delta]$, где $\delta \in (0, \pi)$.

Решение. Применяя оценку (4) при $m = 0$, мы получим

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

Кроме того, положим $g_k(x) = \left(k + x^2\right)^{-1}$. Тогда при любом $x \in X$ последовательность $g_k(x)$ убывает и

$$\|g_k\|_X = \sup_{x \in X} \frac{1}{k + x^2} = \frac{1}{k} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Осталось применить признак Дирихле. $\square$

Пример 3. Исследовать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x \cdot \sin kx}{\ln k + k^2 x^2}$$

на множествах $X = [0, \pi]$ и $Y = [\delta, +\infty)$, где $\delta > 0$.

Решение. Покажем вначале, что при любом $\delta > 0$ ряд равномерно сходится на Y. Действительно, для $x \geqslant \delta$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{x \cdot \sin kx}{\ln k + k^2x^2}\right| \leqslant \frac{x}{k^2x^2} = \frac{1}{k^2x} \leqslant \frac{1}{k^2\delta}.$$

Осталось применить признак Вейерштрасса.

Докажем теперь, что и на X ряд равномерно сходится. Запишем общий член ряда в виде $f_k \cdot g_k$, где

$$f_k(x) = x \cdot \sin kx, \qquad g_k(x) = \frac{1}{\ln k + k^2x^2},$$

и проверим условия признака Дирихле. Если $N \in \mathbb{N}$ и $x \in (0, \pi]$, то в силу (4) и вогнутости синуса

$$\left|\sum_{k=1}^{N} x \cdot \sin kx\right| \leqslant \frac{x}{\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{x}{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{2}} = \pi.$$

Это неравенство верно и при $x = 0$. Кроме того, при любом $x \in X$ последовательность $g_k(x)$ убывает, и

$$\|g_k\|_X \leqslant \sup_{x \in [0,\pi]} \frac{x}{\ln k + k^2x^2} \leqslant \frac{\pi}{\ln k} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Осталось применить признак Дирихле. $\square$

Пример 4. Исследовать равномерную сходимость на множестве $X = [0, +\infty)$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \cos kx}{k^x \ln k + 1} \cdot \operatorname{arctg}(kx).$$

Решение. Воспользуемся признаком Абеля. Заметим, что при любом $x \in X$ последовательность $\operatorname{arctg}(kx)$ монотонна и

$$\sup_{x \in X} \left|\operatorname{arctg}(kx)\right| \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{для всех } \ k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому нам достаточно проверить равномерную сходимость на X ряда
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \cos kx}{k^x \ln k + 1}.$$

Применим к нему признак Дирихле. Пусть $N \in \mathbb{N}$, $x \in X$, $\frac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$. В силу (4)
$$\left|\sum_{k=1}^{N} \sin x \cdot \cos kx\right| \leqslant \frac{|\sin x|}{|\sin \frac{x}{2}|} = 2\left|\cos \tfrac{x}{2}\right| \leqslant 2.$$

Эта оценка верна и при $\frac{x}{2\pi} \in \mathbb{Z}$. Кроме того, при любом $x \in X$ последовательность $(k^x \ln k + 1)^{-1}$ убывает, и
$$\sup_{x \geqslant 0} \frac{1}{k^x \ln k + 1} = \frac{1}{\ln k + 1} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Таким образом, условия признака Дирихле выполнены. □

В главе IV учебника [2] сформулированы критерии равномерной сходимости тригонометрического ряда и равномерной ограниченности его частичных сумм. Приведем их вывод. Для этого нам потребуется следующая оценка.

Лемма 3. *Пусть* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— убывающая последовательность положительных чисел,* $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $x \in (0, 2\pi)$. *Тогда*
$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} c_k \sin kx\right| \leqslant (\pi + 4) \sup_{k \geqslant m+1} kc_k. \tag{5}$$

Доказательство. Можно считать $x \in (0, \pi]$, поскольку неравенство не меняется при замене x на $2\pi - x$. Положим
$$S(p,q) = \sum_{k=p+1}^{q} c_k \sin kx, \qquad \sigma_p = \sup_{k \geqslant p+1} kc_k.$$

Пусть $N = \left[\frac{\pi}{x}\right]$. Тогда $N \leqslant \frac{\pi}{x}$ и $\frac{\pi}{x} < N+1$. Рассмотрим три случая.

1) $N \geqslant n$. Используя неравенство $|\sin kx| \leqslant kx$, мы получим

$$|S(m,n)| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} c_k |\sin kx| \leqslant x \sum_{k=m+1}^{n} k c_k \leqslant x(n-m)\sigma_m < \pi\sigma_m,$$

поскольку $x(n-m) < xn \leqslant xN \leqslant \pi$.

2) $N \leqslant m$. Если $q \in \{m+1, \ldots, n\}$, то в силу (4) и вогнутости синуса на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\left|\sum_{k=1}^{q} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{2}} = \frac{\pi}{x} < N + 1 \leqslant m + 1.$$

Поскольку последовательность $\{c_k\}$ убывает, мы можем применить оценку (3) с $a_k = \sin kx$ и $b_k = c_k$:

$$|S(m,n)| \leqslant 4 \max_{m \leqslant q \leqslant n} \left|\sum_{k=1}^{q} \sin kx\right| \cdot c_{m+1} \leqslant 4\,(m+1)\,c_{m+1} \leqslant 4\sigma_m.$$

3) $m < N \leqslant n$. Тогда в силу 1) и 2)

$$\bigl|S(m,n)\bigr| \leqslant \bigl|S(m,N)\bigr| + \bigl|S(N,n)\bigr| \leqslant \pi\sigma_m + 4\sigma_N \leqslant (\pi+4)\sigma_m.$$

Таким образом, в любом из трех случаев неравенство (5) справедливо при любом $x \in (0, 2\pi)$. $\square$

Теорема 3. *Пусть $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ — убывающая последовательность положительных чисел, и*

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Частичные суммы ряда S равномерно ограничены на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{kc_k\}$ ограничена.

2) Ряд S равномерно сходится на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{k\to\infty} kc_k = 0$.

Доказательство. Положим $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \sin kx$.

1) Пусть существует такое $M > 0$, что

$$\big|S_n(x)\big| \leqslant M \quad \text{при всех } \ n \in \mathbb{N} \ \text{ и } \ x \in \mathbb{R}.$$

Положим $m = \left[\frac{n}{2}\right]$. Тогда по следствию леммы 1 § 1 для любого $n \in \mathbb{N}$

$$nc_n \leqslant 4 \sup_{x\in[0,\pi]} \left|\sum_{k=m+1}^{n} c_k \sin kx\right| = 4 \sup_{x\in[0,\pi]} \Big|S_n(x) - S_m(x)\Big| \leqslant 8M.$$

Обратно, пусть последовательность $\{kc_k\}$ ограничена. Применяя оценку (5) при $m = 0$, мы получим

$$\big|S_n(x)\big| \leqslant (\pi + 4) \cdot \sup_{k\in\mathbb{N}} kc_k \quad \text{при всех } \ n \in \mathbb{N} \ \text{ и } \ x \in [0, 2\pi).$$

В силу периодичности S_n эта оценка верна для любого $x \in \mathbb{R}$.

2) Необходимость вытекает из теоремы 3 § 1. Докажем достаточность. В силу периодичности $S(x)$ достаточно проверить равномерную сходимость S на $(0, 2\pi)$. Предположим, что $\lim\limits_{k\to\infty} kc_k = 0$. По $\varepsilon > 0$ подберем такое $N \in \mathbb{N}$, что $kc_k < \dfrac{\varepsilon}{\pi + 4}$ при $k > N$. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $N < m < n$, $x \in (0, 2\pi)$. Тогда из неравенства (5)

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} c_k \sin kx\right| \leqslant (\pi + 4) \sup_{k\geqslant m+1} kc_k \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, по критерию Больцано – Коши ряд S равномерно сходится на $x \in (0, 2\pi)$. $\square$

Первое утверждение теоремы 3 бывает полезным при использовании признака Дирихле. Приведем соответствующий пример.

Пример 5. Доказать равномерную сходимость на $\mathbb{R}$ ряда

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{k\sqrt{\ln^2 k + x^2}}.$$

Решение. По первому утверждению теоремы 3 суммы $\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\sin kx}{k}$ равномерно ограничены на $\mathbb{R}$. Кроме того, при любом x последовательность $\dfrac{1}{\sqrt{\ln^2 k + x^2}}$ убывает и

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{\ln^2 k + x^2}} = \frac{1}{\ln k} \to 0 \quad (k\to\infty).$$

Таким образом, наш ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$ по признаку Дирихле. $\square$

Задачи. Исследовать равномерную сходимость функционального ряда на указанных множествах.

3.1. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\cos\left(kx+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k+x^2)}$ на $(0,\delta]$, $[\delta, 2\pi-\delta]$ и $[2\pi-\delta, 2\pi)$, где $\delta\in[0,\pi]$.

3.2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\left(\sin^2 kx - \sin^2(k-1)x\right)}{k+\frac{1}{\ln k}}\cdot\cos\frac{\ln k}{k+x^2}$ на $[-A, A]$, где $A>0$.

3.3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k^2}+\sin(kx)}$ на $\mathbb{R}$.

3.4. $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty}\frac{\sin(kx)\cdot\cos\left(\frac{x}{k}\right)}{k\sqrt{\ln(\ln k)}}$ на $[0,2\pi]$.

§ 4. Признак Лейбница

Сформулируем важный частный случай признака Дирихле равномерной сходимости функционального ряда — признак Лейбница.

Теорема 1. Признак Лейбница. *Пусть X — множество, $\{g_k\}$ — последовательность функций на X. Предположим, что*

1) для любого $x\in X$ последовательность $g_k(x)$ монотонна;

2) $g_k \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на X.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k g_k$ равномерно сходится на X.

Доказательство. Достаточно положить $f_k = (-1)^k$ и применить признак Дирихле. $\square$

Замечание 1. Условие 1) теоремы 1 можно ослабить: достаточно потребовать существования такого $N \in \mathbb{N}$, что для любого $x \in X$ последовательность $\{g_k(x)\}_{k=N}^{\infty}$ монотонна. Отметим, что число N *должно быть общим для всех* $x \in X$.

Замечание 2. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Поскольку суммы $\sum\limits_{k=m+1}^{n} (-1)^k$ ограничены по модулю единицей, из (3) вытекает оценка

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} (-1)^k g_k(x)\right| \leqslant 4 \cdot \max\bigl\{\|g_{m+1}\|_X\,, \|g_n\|_X\bigr\} \quad (x \in X).$$

Пример 1. Исследовать равномерную сходимость ряда

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{k^2+x^2}\right)$$

на $\mathbb{R}$ и на множествах вида $[-A, A]$ при $A > 0$.

Решение. Пусть $A > 0$, $X = [-A, A]$. Докажем, что ряд S равномерно сходится на X. Заметим, что

$$\sin\left(\pi\sqrt{k^2+x^2}\right) = (-1)^k \sin\pi\left(\sqrt{k^2+x^2} - k\right) = \\ = (-1)^k \sin\left(\frac{\pi x^2}{k + \sqrt{k^2+x^2}}\right).$$

Положим

$$a_k(x) = \frac{\pi x^2}{k + \sqrt{k^2+x^2}}, \qquad g_k = \sin a_k,$$

и проверим для $\{g_k\}$ условия признака Лейбница. Ясно, что при любом $x \in \mathbb{R}$ последовательность $a_k(x)$ убывает. Для $x \in [-A, A]$ справедливо неравенство $0 < a_k(x) < \frac{\pi A^2}{2k}$. Тогда $a_k(x) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ при $k > A^2$. Поэтому и $\{g_k(x)\}$ убывает, начиная с $\left[A^2\right]+1$. Кроме того,

$$\sup_{x\in X}\bigl|g_k(x)\bigr| \leqslant \sup_{x\in X}\bigl|a_k(x)\bigr| \leqslant \frac{\pi A^2}{2k} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Таким образом, $\{g_k\}$ удовлетворяет условиям признака Лейбница.

Докажем теперь, что на $\mathbb{R}$ ряд S не сходится равномерно. Заметим, что поточечно ряд сходится на $\mathbb{R}$, так как любое $x \in \mathbb{R}$ лежит в некотором отрезке вида $[-A, A]$. Положим $f_k(x) = \sin\big(\pi\sqrt{k^2 + x^2}\,\big)$. Образом функции $x \mapsto \pi\sqrt{k^2 + x^2}$ является промежуток $[\pi k, +\infty)$, поэтому она принимает значение $\pi k + \frac{\pi}{2}$ в некоторой точке x_0. Тогда

$$1 \geqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} \big|f_k(x)\big| \geqslant \big|f_k(x_0)\big| = \big|\sin\big(\tfrac{\pi}{2} + \pi k\big)\big| = 1,$$

то есть $\|f_k\|_{\mathbb{R}} = 1$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Значит, $\|f_k\|_{\mathbb{R}} \not\to 0$, и ряд S не сходится равномерно по теореме 2 § 1. $\square$

Пример 2. Исследовать равномерную сходимость на множестве $X = [0, +\infty)$ ряда

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \big(\operatorname{arctg}(k+1)x - \operatorname{arctg} kx\big).$$

Решение. Положим $g_k(x) = \operatorname{arctg}(k+1)x - \operatorname{arctg} kx$ и проверим для $\{g_k\}$ условия признака Лейбница. По формуле разности арктангенсов

$$g_k(x) = \operatorname{arctg} \frac{(k+1)x - kx}{1 + (k+1)x \cdot kx} = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + k(k+1)x^2}.$$

Отсюда ясно, что при любом $x \geqslant 0$ последовательность $g_k(x)$ убывает. Кроме того,

$$\left(\frac{x}{1 + k(k+1)x^2}\right)' = \frac{1 - k(k+1)x^2}{\big(1 + k(k+1)x^2\big)^2}.$$

Поэтому наибольшее значение g_k на $[0, +\infty)$ достигается в точке $x_0 = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$, и

$$\|g_k\|_X = \big|g_k(x_0)\big| \leqslant \frac{x_0}{1 + k(k+1)x_0^2} = \frac{1}{2\sqrt{k(k+1)}} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Таким образом, ряд равномерно сходится на $[0, +\infty)$ по признаку Лейбница. $\square$

Замечание. Поскольку общий член ряда зависит от x нечетным образом, мы фактически доказали равномерную сходимость ряда на $\mathbb{R}$.

Пример 3. Исследовать равномерную сходимость на множестве $X = [0, +\infty)$ ряда

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + \cos\frac{x}{k}}.$$

Решение. Положим $g_k(x) = \dfrac{1}{k + \cos\frac{x}{k}}$. Попробуем воспользоваться признаком Лейбница. Нам нужно подобрать такое $N \in \mathbb{N}$, не зависящее от x, начиная с которого будет монотонной последовательность $a_k(x) = k + \cos\frac{x}{k}$ (см. замечание 1 к теореме 1). Для $k \in \mathbb{N}$ положим $x_k = \pi k(k+1)$. Тогда при нечетном k

$$a_{k+1}(x_k) - a_k(x_k) = 1 + \cos\pi k - \cos\pi(k+1) = -1 < 0,$$
$$a_{k+2}(x_k) - a_{k+1}(x_k) = 1 + \cos\tfrac{x_k}{k+2} - \cos\pi(k+1) = 2 + \cos\tfrac{x_k}{k+2} > 0.$$

Поэтому $a_k(x_k) > a_{k+1}(x_k) < a_{k+2}(x_k)$, и условие 1) в признаке Лейбница не выполнено даже в ослабленном варианте.

Чтобы обойти эту трудность, воспользуемся методом выделения главной части, использованным ранее в примере 7 § 2. Запишем

$$(-1)^k g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k}{k + \cos\frac{x}{k}} - \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{k+1}\cos\frac{x}{k}}{k\bigl(k + \cos\frac{x}{k}\bigr)}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ сходится по признаку Лейбница, а значит, равномерно сходится, поскольку его общий член не зависит от x. Так как

$$\left|\frac{(-1)^{k+1}\cos\frac{x}{k}}{k\bigl(k + \cos\frac{x}{k}\bigr)}\right| \leqslant \frac{1}{k(k-1)} \quad \text{при } k \geqslant 2 \text{ и } x \in X,$$

ряд $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\cos\frac{x}{k}}{k\bigl(k + \cos\frac{x}{k}\bigr)}$ равномерно сходится на X по признаку Вейерштрасса. Таким образом, и ряд S равномерно сходится на X. $\square$

§ 5. Ряды различных типов

В этом параграфе мы разберем несколько примеров исследования рядов на равномерную сходимость, комбинируя сформулированные ранее утверждения. Рекомендуем читателю вначале прочитать параграфы 1 – 4, чтобы ориентироваться в признаках равномерной сходимости.

Пример 1. Исследовать равномерную сходимость ряда

$$S(x)=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{\sqrt{k}+(\ln k)^x}\cdot\cos\left(\frac{x}{\ln k}\right),$$

на множествах $X=[0,1)$ и $Y=[1,2)$.

Решение. Обозначим через f_k общий член S. Проверим вначале, что ряд S поточечно сходится на множестве $[0,2)$. Действительно, $S(0)=\sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+1}$, этот ряд сходится по признаку Лейбница. Если же $x\in(0,2)$, то $|f_k(x)|\leqslant|x-1|^k$, то есть $S(x)$ мажорируется сходящейся геометрической прогрессией.

Докажем, что ряд S равномерно сходится на X. Для этого воспользуемся признаком Абеля. При любом $x\in X$ последовательность $\left\{\cos\frac{x}{\ln k}\right\}_{k=3}^{\infty}$ лежит на $[0,1]$ и возрастает. Осталось проверить равномерную сходимость ряда

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{\sqrt{k}+(\ln k)^x}=\sum_{k=3}^{\infty}(-1)^k\frac{(1-x)^k}{\sqrt{k}+(\ln k)^x}.$$

Она вытекает из признака Лейбница, поскольку убывание модуля общего члена по k очевидно, а

$$\sup_{x\in[0,1)}\frac{(1-x)^k}{\sqrt{k}+(\ln k)^x}\leqslant\frac{1}{\sqrt{k}}\to 0\quad(k\to\infty).$$

Покажем теперь, что сходимость S на Y неравномерная. Для этого воспользуемся теоремой о пределе суммы ряда. Заметим, что

$$\lim_{x\to 2-0}f_k(x)=\frac{1}{\sqrt{k}+\ln^2 k}\sim\frac{1}{\sqrt{k}}\quad(k\to\infty).$$

Если бы ряд S равномерно сходился на $[1,2)$, то по теореме сходился бы и числовой ряд $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$, что неверно. $\square$

Ранее мы уже использовали метод выделения главной части общего члена (см. пример 7 § 2 и пример 3 § 4). Рассмотрим теперь его более подробно. В общей ситуации нам потребуется формула Тейлора – Лагранжа. Для удобства читателя напомним ее формулировку.

Теорема 1. Формула Тейлора – Лагранжа. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, функция f $n+1$ раз дифференцируема на $\langle A, B\rangle$, a и x — различные точки из $\langle A, B\rangle$. Тогда найдется такое $\theta \in (0,1)$, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}\big(a+\theta(x-a)\big)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}.$$

Пример 2. Доказать равномерную сходимость на $\mathbb{R}$ ряда

$$S(x) = \sum_{k=3}^{\infty}\left(\exp\left(\frac{\sin kx}{k\ln k}\right) - 1\right).$$

Решение. По формуле Тейлора – Лагранжа для экспоненты

$$e^z - 1 = z + R(z), \quad \text{где } R(z) = \frac{z^2}{2}\cdot e^{\theta z}, \ \ \theta \in (0,1). \tag{6}$$

Положим $z = \dfrac{\sin kx}{k\ln k}$. Тогда

$$\exp\left(\frac{\sin kx}{k\ln k}\right) - 1 = \frac{\sin kx}{k\ln k} + R\left(\frac{\sin kx}{k\ln k}\right).$$

Ряд $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k\ln k}$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$ по теореме 3 § 3, так как последовательность $c_k = \frac{1}{k\ln k}$ убывает и $\lim\limits_{k\to\infty} kc_k = 0$. Кроме того, при $k \geqslant 3$

$$|z| = \frac{|\sin kx|}{k\ln k} \leqslant \frac{1}{k\ln k} < 1 \quad \text{и} \quad e^{\theta z} \leqslant e^{\theta|z|} < e^{|z|} < e.$$

Поэтому для любых $k \geqslant 3$ и $x \in \mathbb{R}$

$$R\left(\frac{\sin kx}{k\ln k}\right) \leqslant \frac{e}{2} \cdot \frac{\sin^2 kx}{k^2 \ln^2 k} \leqslant \frac{e}{2k^2}.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{k=3}^{\infty} R\left(\dfrac{\sin kx}{k\ln k}\right)$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса. Значит, и ряд S равномерно сходится на $\mathbb{R}$. $\square$

Пример 3. Пусть $\delta \in (0, \pi)$. Исследовать равномерную сходимость ряда

$$S(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{\cos kx}{\sqrt{k}\ln k}\right) - \cos\frac{1}{kx}\right)$$

на множествах $X = [\delta, 2\pi - \delta]$ и $Y = (0, \delta]$.

Решение. Обозначим через f_k общий член ряда S. Проверим вначале равномерную сходимость ряда S на X. Запишем

$$f_k = a_k + b_k, \quad \text{где } a_k(x) = \exp\left(-\frac{\cos kx}{\sqrt{k}\ln k}\right) - 1, \ \ b_k(x) = 1 - \cos\frac{1}{kx}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=3}^{\infty} b_k$ равномерно сходится на X по признаку Вейерштрасса, так как при любых $k \geqslant 3$ и $x \in X$

$$b_k(x) = 2\sin^2\left(\frac{1}{2kx}\right) \leqslant \frac{1}{2k^2x^2} \leqslant \frac{1}{2\delta^2} \cdot \frac{1}{k^2}.$$

Для $a_k(x)$ воспользуемся опять разложением (6):

$$a_k(x) = -\frac{\cos kx}{\sqrt{k}\ln k} + R\left(-\frac{\cos kx}{\sqrt{k}\ln k}\right).$$

Ряд $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \dfrac{\cos kx}{\sqrt{k}\ln k}$ равномерно сходится на X по признаку Дирихле, поскольку в силу (4)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} \quad \text{при } n \in \mathbb{N} \text{ и } x \in X.$$

Кроме того, при $k \geqslant 3$

$$|z| = \frac{|\cos kx|}{\sqrt{k}\ln k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}\ln k} < 1 \quad \text{и} \quad e^{\theta z} \leqslant e^{\theta|z|} < e^{|z|} < e.$$

Поэтому для любых $k \geqslant 3$ и $x \in X$

$$R\left(-\frac{\cos kx}{\sqrt{k}\ln k}\right) \leqslant \frac{e}{2} \cdot \frac{\cos^2 kx}{k\ln^2 k} \leqslant \frac{e}{2k\ln^2 k}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k\ln^2 k}$ сходится по интегральному признаку, так как

$$\int\limits_3^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^2 t} = -\frac{1}{\ln t}\bigg|_3^{+\infty} = \frac{1}{\ln 3}.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=3}^{\infty} R\left(-\frac{\cos kx}{\sqrt{k}\ln k}\right)$ равномерно сходится на X по признаку Вейерштрасса. Значит, равномерно на X сходится и ряд $\sum\limits_{k=3}^{\infty} a_k$.

Заметим, что из доказанного вытекает поточечная сходимость S на $(0, 2\pi)$, поскольку любое число $x \in (0, 2\pi)$ попадает в некоторый отрезок вида $[\delta, 2\pi - \delta]$. В частности, ряд S поточечно сходится на Y. Покажем, что эта сходимость неравномерная. Воспользуемся необходимым признаком равномерной сходимости. Для $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in Y}\bigl|f_n(x)\bigr| \geqslant f_n\left(\tfrac{\pi}{2n}\right) = 1 - \cos\tfrac{2}{\pi} > 0.$$

Поэтому $f_n \underset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows} 0\ (Y)$, и ряд S сходится неравномерно на Y. $\square$

Замечание. Ряд из примера 3 не сходится равномерно на промежутке $[2\pi - \delta, 2\pi)$. Предлагаем читателю проверить это самостоятельно.

Пример 4. Пусть $\delta \in (0, \pi)$. Исследовать равномерную сходимость ряда

$$S(x) = \sum_{k=3}^{\infty}\left(\left(1 + \frac{\cos kx}{\sqrt[3]{k^2}}\right)^{3/2} - 1\right)$$

на множествах $X = [\delta, 2\pi - \delta]$ и $Y = (0, \delta]$.

Решение. Обозначим через f_k общий член ряда S. Проверим вначале равномерную сходимость ряда S на X. По формуле Тейлора – Лагранжа для степенной функции

$$(1+z)^{3/2} - 1 = \frac{3z}{2} + R(z), \quad \text{где } R(z) = \frac{3}{8} \cdot \frac{z^2}{\sqrt{1+\theta z}}, \ \theta \in (0,1).$$

Положим $z = \dfrac{\cos kx}{\sqrt[3]{k^2}}$. Тогда

$$\left(1 + \frac{\cos kx}{\sqrt[3]{k^2}}\right)^{3/2} - 1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\cos kx}{\sqrt[3]{k^2}} + R\left(\frac{\cos kx}{\sqrt[3]{k^2}}\right).$$

Ряд $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos kx}{\sqrt[3]{k^2}}$ равномерно сходится на X по признаку Дирихле, поскольку в силу (4)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} \quad \text{при } n \in \mathbb{N} \text{ и } x \in X.$$

Кроме того, при $k \geqslant 3$

$$|z| = \frac{|\cos kx|}{\sqrt[3]{k^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} < \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{1+\theta z}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-|z|}} < \sqrt{2}.$$

Поэтому для любых $k \geqslant 3$ и $x \in X$

$$R\left(\frac{\cos kx}{\sqrt[3]{k^2}}\right) \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{\cos^2 kx}{k^{4/3}} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{1}{k^{4/3}}.$$

Тогда ряд $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} R\left(\frac{\cos kx}{\sqrt[3]{k^2}}\right)$ равномерно сходится на X по признаку Вейерштрасса. Значит, и ряд S равномерно сходится на X.

Заметим, что из доказанного вытекает поточечная сходимость S на $(0, 2\pi)$, поскольку любое число $x \in (0, 2\pi)$ попадает в некоторый отрезок вида $[\delta, 2\pi - \delta]$. В частности, ряд S поточечно сходится на Y. Покажем, что эта сходимость неравномерная. Воспользуемся теоремой о пределе суммы функционального ряда. Заметим, что для любого $k \geqslant 3$

$$\lim_{x \to 0+} f_k(x) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right)^{3/2} - 1 \sim \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{k^{2/3}} \quad (k \to \infty).$$

Если бы ряд S сходился равномерно на $(0, \delta]$, то по теореме сходился бы и числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-2/3}$, что неверно. $\square$

Задачи. Исследовать равномерную сходимость функционального ряда на указанных множествах.

5.1. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^k \cos(kx)}{\sqrt{k}\,\ln k}\right)$ на $(\pi, \pi + \delta)$ и $[\pi + \delta, 3\pi - \delta]$, где $\delta \in (0, \pi]$.

5.2. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \sin\left(\dfrac{\cos(kx)}{\sqrt[3]{k}}\right)$ на $[\delta, 2\pi - \delta]$ и $(2\pi - \delta, 2\pi)$, где $\delta \in (0, \pi]$.