Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра математического анализа

Решение одной задачи В. И. Арнольда об условном экстремуме

методические указания

Т. П. Дубова, О. Л. Семенова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2023

В своей книге [1] В. И. Арнольд приводит список из ста «эталонных задач», который он называет «математических минимумом студента-физика». Под номером 8 в этом списке приведена такая задача:

Задача. Сколько максимумов, минимумов и седловых точек имеет функция $f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{5} x_i^4$ на множестве $S(C)$, заданном в $\mathbb{R}^5 = \{\bar{x} = (x_1, \ldots, x_5)\}$ системой уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1, \\ \sum_{i=1}^{5} x_i^3 = C? \end{cases} \tag{1}$$

В данном пособии мы занимаемся подробным решением этой задачи для произвольного вещественного C. Ранее (в [3]) мы приводили решение этой задачи для случая $C = 0$.

Решение. Прежде всего, заметим, что в данной задаче присутствуют несколько видов симметрии, что позволяет редуцировать множество исследуемых точек.

Замечание 1.

Если точка $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_5)$ является одной точкой условного максимума (точкой условного минимума или седловой точкой) заданной функции при заданных ограничениях, то всякая точка, полученная из $\bar{x}$ перестановкой ее координат, также есть точка максимума (соответственно, точка условного минимума или седловая точка) той же функции при том же значении параметра C.

$S(-C) \equiv -S(C)$, $f(-\bar{x}) \equiv f(\bar{x})$, поэтому если точка $\bar{x}$ является точкой условного максимума (точкой условного минимума или седловой точкой) заданной функции f при заданных ограничениях и каком-либо значении параметра $C = C_0$, то точка $-\bar{x}$ также есть точка того же типа той же функции при значении параметра $C = -C_0$.

Обозначим за $[\bar{x}]$ класс эквивалентности точки $\bar{x}$ по отношению равенства с точностью до перестановки координат. Далее, в силу симметрии задачи нам полезна следующая свободная от множителей Лагранжа формулировка необходимого условия условного экстремума:

Переформулировка необходимого условия условного экстремума. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, точка $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ есть точка условного экстремума функции $\Phi_m(\bar{x})$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ при условиях*

$$\begin{cases} \Phi_1(\bar{x}) = b_1, \\ \quad \ldots\ldots \\ \Phi_{m-1}(\bar{x}) = b_{m-1}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$. Пусть $\bar{\Phi}(\bar{x}) = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m)(\bar{x})$. Тогда справедливы следующие утверждения (I) и (II):

(I) В точке $\bar{a}$ нарушается регулярность отображения $\bar{\Phi}(\bar{x})$.

(II) Если отображение $\bar{\Phi}(\bar{x})$ дифференцируемо в точке $\bar{a}$, то в этой точке нарушается условие максимальности ранга для матрицы Якоби отображения $\bar{\Phi}(\bar{x})$:

$$\operatorname{rang}(\bar{\Phi}'(\bar{a})) < m. \tag{3}$$

Комментарий. Условие (I) означает одно из двух: или $\bar{\Phi}(\bar{x})$ не дифференцируемо в точке $\bar{a}$, или $\bar{\Phi}(\bar{x})$ дифференцируемо в этой точке и при этом верно (3). В свою очередь, условие (3) предполагает две возможности: либо $\operatorname{rang}(\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1})'(\bar{a}) < m-1$ (то есть $\bar{a}$ есть особая точка множества, заданного системой уравнений (2)), либо $\operatorname{rang}(\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1})'(\bar{a}) = m-1$ (точка $\bar{a}$ не является особой), и тогда $\nabla_{\bar{a}}\Phi_m$ есть линейная комбинация векторов $\nabla_{\bar{a}}\Phi_1, \ldots, \nabla_{\bar{a}}\Phi_{m-1}$, то есть выполняется необходимое условие условного экстремума Лагранжа.

Теперь для натуральных j положим $\Phi_j(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{5} x_k^j$ и отображение с координатными функциями Φ_1, Φ_2, Φ_3 обозначим за $\overline{\Phi}_3$:

$$\overline{\Phi}_3(\bar{x}) = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)(\bar{x}) = \left(\sum_1^5 x_k, \sum_1^5 x_k^2, \sum_1^5 x_k^3 \right), \qquad \text{где} \quad \bar{b} = (0, 1, C). \tag{4}$$

Для начала исследуем вопрос о совместности системы уравнений (1) в зависимости от C. Для этого определим наибольшее и наименьшее значения функции $\Phi_3(\bar{x})$ на трехмерной сфере S^3, заданной в пространстве $\mathbb{R}^5$ системой первых двух уравнений системы (1):

$$S^3 = \left\{ \bar{x} = (x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \quad : \quad \Phi_1(\bar{x}) = 0, \quad \Phi_2(\bar{x}) = 1. \right\}$$

.

В книге [2] решена задача об исследовании функции $\sum_{i=1}^{m} x_i^3$ на условный экстремум на $(m-2)$-мерной сфере

$$S^{m-2} = \left\{ \bar{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \quad : \quad \sum_1^m x_k = 0, \ \sum_1^m x_k^2 = 1 \right\}$$

при $m \geq 3$. Поскольку нам это поможет при исследовании подозрительных точек в основной задаче, мы приведем здесь подробное решение задачи об отыскании наибольшего и наименьшего значений на S^3 $(m=5)$ функции $\Phi_3(\bar{x})$.

Как известно, сфера S^3 это компакт, функция $\Phi_3(\bar{x})$ непрерывна, стало быть, по теореме Вейерштрасса $\Phi_3(\bar{x})$ достигает на S^3 наибольшего и наименьшего значений, что возможно только в точках условного экстремума $\Phi_3(\bar{x})$ при условии

$$\begin{cases} \Phi_1(\bar{x}) = 0, \\ \Phi_2(\bar{x}) = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Поскольку все участвующие функции $\Phi_j(\bar{x})$ гладкие, в точках условного экстремума ранг матрицы Якоби отображения $\overline{\Phi}_3$, действующего из $\mathbb{R}^5$ в $\mathbb{R}^3$, должен быть меньше трех в силу (3).

Матрица Якоби отображения $\overline{\Phi}_3(\bar{x})$ есть

$$\overline{\Phi}_3'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 & 2x_5 \\ 3x_1^2 & 3x_2^2 & 3x_3^2 & 3x_4^2 & 3x_5^2 \end{pmatrix}.$$

Все миноры третьего порядка этой матрицы отличаются друг от друга лишь номерами координат точки $\bar{x}$ и сводятся вынесением постоянных множителей из строк к определителям Вандермонда. Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 3x_1^2 & 3x_2^2 & 3x_3^2 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = 6 \cdot \prod_{1 \le j < i \le 3} (x_i - x_j).$$

Обращение в ноль всех миноров третьего порядка означает, что подозрительны на условный экстремум функции $\Phi_3(\bar{x})$ ровно те точки сферы S^3, все координаты которых принимают не более двух значений. Среди точек множества S^3 нет точек, все координаты которых совпадают между собой, значит, у подозрительных точек $\bar{x}$ координаты принимают *ровно* два значения. То есть с точностью до перенумерации координат все точки $\bar{x}$ сферы S^3, в которых выполняется условие (3), представимы в виде:

$$\mathrm{I}: \ \bar{x} = (a, b, b, b, b) \quad \text{либо} \quad \mathrm{II}: \ \bar{x} = (a, a, b, b, b), \tag{6}$$

где a и b — некоторые различные вещественные числа. Найдем все такие точки сферы S^3.

В случае I (т.е. $\bar{x} = (a, b, b, b, b)$):

$$(a, b, b, b, b) \in S^3 \ \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4b, \\ a^2 = 1 - 4b^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4b, \\ 20b^2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \mp\frac{4}{\sqrt{20}}, \\ b = \pm\frac{1}{\sqrt{20}}. \end{cases}$$

Таким образом, имеются две симметричные относительно нуля подозрительные на условный экстремум функции $\Phi_3(\bar{x})$ при условии (5) точки типа I:
$\pm\bar{x}_{\mathrm{I}} = \pm\left(\frac{4}{\sqrt{20}}, -\frac{1}{\sqrt{20}}, -\frac{1}{\sqrt{20}}, -\frac{1}{\sqrt{20}}, -\frac{1}{\sqrt{20}}\right)$. Класс $[\bar{x}_{\mathrm{I}}]$ (как и класс $[-\bar{x}_{\mathrm{I}}]$) состоит ровно из пяти точек.

Для случая II (т.е., $\bar{x} = (a, a, b, b, b)$) аналогично получаем:

$$(a, a, b, b, b) \in S^3 \ \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3b}{2}, \\ a^2 = \frac{1-3b^2}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3b}{2}, \\ \frac{15b^2}{4} = \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \mp\frac{3}{\sqrt{30}}, \\ b = \pm\frac{2}{\sqrt{30}}, \end{cases} \tag{7}$$

Две симметричные относительно нуля подозрительные на условный экстремум функции $\Phi_3(\bar{x})$ при условии (5) точки типа II: $\pm\bar{x}_{\mathrm{II}} = \pm\left(\frac{3}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}\right)$. Класс $[\bar{x}_{\mathrm{II}}]$ (как и класс $[-\bar{x}_{\mathrm{II}}]$) образуют $C_5^2 = 10$ точек.

Чтобы определить наибольшее и наименьшее значения функции $\Phi_3(\bar{x})$ на сфере S^3, вычислим значения этой функции в найденных подозрительных точках и сравним их между собой: $\Phi_3(\pm\bar{x}_{\mathrm{I}}) = \pm\Phi_3(\bar{x}_{\mathrm{I}}) = \pm\frac{3}{\sqrt{20}}$, $\Phi_3(\pm\bar{x}_{\mathrm{II}}) = \pm\Phi_3(\bar{x}_{\mathrm{II}}) = \pm\frac{1}{\sqrt{30}}$, т.е. $\max\{\Phi_3(\bar{x}) \ : \ \bar{x} \in S^3\} = \Phi_3(\bar{x}_{\mathrm{I}}) = \frac{3}{\sqrt{20}}$ и $\min\{\Phi_3(\bar{x}) \ : \ \bar{x} \in S^3\} = \Phi_3(-\bar{x}_{\mathrm{I}}) = -\frac{3}{\sqrt{20}}$. Введем следующие обозначения для найденных особых значений параметра C:

$$C_* = \frac{1}{\sqrt{30}}, \qquad C_M = \frac{3}{\sqrt{20}}. \tag{8}$$

В итоге решения задачи о нахождении экстремальных значений функции $\Phi_3(\bar{x})$ на сфере S^3 можно сделать следующие наблюдения о свойствах множества $S(C)$ в исходной задаче:

Утверждение 1.

При $|C| > C_M$ *множество* $S(C)$ *пусто.*

При $C = \pm C_M$ *множество* $S(C)$ *состоит из пяти точек, образующих класс* $[\pm\bar{x}_{\mathrm{I}}]$ *(см. (6)).*

При $|C| = C_*$ *среди точек множества* $S(C)$ *имеются точки, в которых нарушается регулярность отображения* $\overline{\Phi}_3 = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ *(т.е. ранг матрицы Якоби* $\overline{\Phi}'_3$ *меньше трёх). Это десять точек, образующих класс* $[\bar{x}_{\mathrm{II}}]$ *при* $C = C_*$*, и десять точек, образующих класс* $[-\bar{x}_{\mathrm{II}}]$ *при* $C = -C_*$

При всех других значениях C*, то есть при значениях, удовлетворяющих системе условий*

$$\begin{cases} |C| < C_M, \\ |C| \neq C_*; \end{cases} \tag{9}$$

среди точек множества $S(C)$ *нет точек нерегулярности.*

Далее мы решаем основную задачу для $|C| < C_M$ (см. (8)). Для отыскания подозрительных точек как и в предыдущем случае применим переформулированное необходимое условие условного экстремума. Опять же, как в предыдущем случае, все миноры четвертого порядка матрицы Якоби отображения $\overline{\Phi}_4(\bar{x}) = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4)(\bar{x})$ с точностью до постоянного множителя совпадают с определителем Вандермонда четвертого порядка, и все они в подозрительной точке равны нулю. Поэтому все координаты подозрительной на условный экстремум точки многообразия $S(C)$ принимают не более трех различных значений (при этом случай когда этих значений меньше трех нами уже рассмотрен при исследовании на экстремум функции Φ_3 при условиях (5)).

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Утверждение 2. *С точностью до перенумерации координат все точки* $\bar{x}$ *множества* $S(C)$*, в которых выполняется условие (3) по отношению к отображению* $\bar{\Phi} = \overline{\Phi}_4$*, представимы в виде:*

$$\mathrm{III}: \ \bar{x} = (a, b, c, c, c), \quad \text{либо} \quad \mathrm{IV}: \ \bar{x} = (a, a, b, b, c), \tag{10}$$

где a,b,c — некоторые вещественные числа, не все совпадающие между собой, и $a \leq b$*. Совпадение двух из этих трех чисел возможно лишь в случаях* $C = \pm C_*$ *и* $C = \pm C_M$*.*

Наша ближайшая цель — для точек III и IV свести систему (1) к набору равенств, который выражает координаты этих точек a, b, c, а также параметр C как функции одной переменной, пропорциональной координате c. Заметим, что в обоих случаях III и IV система (1) есть система

$$\begin{cases} A(a+b) + Bc = 0, \\ A(a^2+b^2) + Bc^2 = 1, \\ A(a^3+b^3) + Bc^3 = C; \end{cases} \tag{11}$$

где в случае III $(A, B) = (1, 3)$, а в случае IV — $(A, B) = (2, 1)$.

Переменные a и b входят симметрично в систему (11), поэтому, не умаляя общности, можно ограничиться рассмотрением ее решений, удовлетворяющих условию $a \leq b$.

Утверждение 3. *Для произвольных положительных коэффициентов A и B множество решений a, b, c, C системы (11), удовлетворяющих условиям $a \le b$, допускает следующую параметризацию:*

$$\begin{array}{l} a(p) = \frac{-p-\sqrt{2R-p^2(1+2Q)}}{2}, \\ b(p) = \frac{-p+\sqrt{2R-p^2(1+2Q)}}{2}, \\ c(p) = Qp, \\ C(p) = \frac{p}{2}\left(Wp^2-3\right), \end{array} \tag{12}$$

где $p \in [-p_M; p_M]$, и p_M, Q, R, W — положительные параметры, зависящие от коэффициентов A и B, а именно:

$$Q = \frac{A}{B}, \quad R = \frac{1}{A}, \quad W = \frac{(2Q+1)(Q+1)}{R}, \quad p_M = \sqrt{\frac{2R}{1+2Q}}. \tag{13}$$

Напомним, что
в случае III $(A, B) = (1, 3)$, поэтому $Q = \frac{1}{3}$, $\quad R = 1$, $\quad W = \frac{20}{9} = C_M^{-2}$, $\quad p_M = \sqrt{\frac{6}{5}}$;
в случае IV: $(A, B) = (2, 1)$, поэтому $Q = 2$, $\quad R = \frac{1}{2}$, $\quad W = 30 = C_*^{-2}$, $\quad p_M = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Доказательство. Для начала отметим, что при любых положительных A и B параметры Q, R, W, p_M корректно определены соотношением (13) и положительны. Далее, полагая $p = -(a+b)$, из первого уравнения системы (11) получаем $c = Qp$. Это позволяет из первых двух уравнений системы выразить через переменную p сначала сумму квадратов a и b, а затем их произведение:

$$\begin{array}{l} a^2 + b^2 = \frac{1}{A} - \frac{B}{A}c^2 = R - Qp^2, \\ ab = \frac{1}{2}\big((a+b)^2 - (a^2+b^2)\big) = \frac{1}{2}\left((Q+1)p^2 - R\right). \end{array} \tag{14}$$

После чего применение формулы суммы кубов приводит к четвертому равенству в (12): $\quad C = A(a+b)((a+b)^2 - 3ab) + Bc^3 = \frac{1}{R}\left(-p(p^2-3ab) + Q^2p^3\right) =$
$= \frac{p}{R}\left((Q^2-1)p^2 + 3ab\right) = \frac{(2Q^2+3Q+1)}{2R}p^3 - \frac{3}{2}p = \frac{p}{2}(Wp^2-3)$.

Если положить $q = \frac{1}{2}\left((Q+1)p^2 - R\right)$ (то есть определить q равным правой части второго уравнения из (14)), то с учетом определения p, по теореме Виета, числа a и b есть вещественные корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. Это уравнение разрешимо при $p^2 \ge 4q$ (или $p^2 \le \frac{2R}{1+2Q} = p_M^2$), и при выполнении этого условия

$$\{a, b\} = \left\{\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right\} = \left\{\frac{-p \pm \sqrt{2R - p^2(1+2Q)}}{2}\right\}.$$

Поскольку в условиях утверждения предполагается, что $a \le b$, последнее равенство приводит к первым двум равенствам системы (12). Легко видеть, что при $p \in [-p_M; p_M]$ система (12) допускает обратные преобразования, сводящие ее к (11). Утверждение доказано.

Проделаем простейшее исследование функции $C(p)$, определяемой (12) на промежутке $[-p_M, p_M]$ для p_M из (13). В силу нечетности функции $C(p)$ достаточно рассматривать неотрицательные p. Единственный положительный корень

$$p_* = \frac{1}{\sqrt{W}} \tag{15}$$

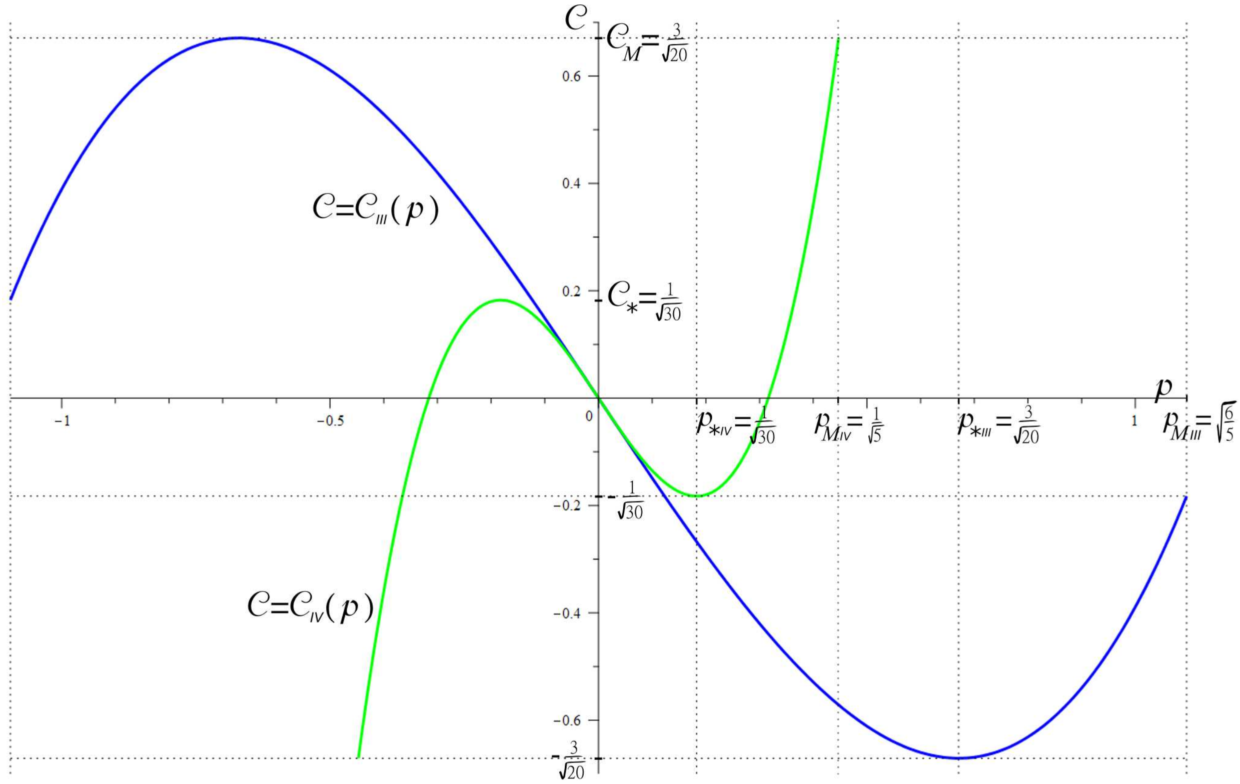

Рис. 1. Графики функции $C(p)$ для случая III и для случая IV.

производной $C'(p) = \frac{3}{2}(Wp^2 - 1)$ есть внутренняя точка промежутка $\left[0; p_M\right]$ (Q положительно, а значит, $\frac{1}{Q+1} < 2$, и тогда $p_*^2 = \frac{1}{W} = \frac{R}{(2Q+1)(Q+1)} < \frac{2R}{2Q+1} = p_M^2$). Точка p_* — точка минимума, $C(p_*) = -p_*$. На правом конце промежутка исследуемая функция принимает значение $C(p_M) = \frac{1}{2}p_M\left(\frac{(2Q+1)(Q+1)}{R} \cdot \frac{2R}{2Q+1} - 3\right) = \frac{1}{2}p_M(2Q-1)$. При этом для случая III: $p_* = C_M,\ p_M = \sqrt{\frac{2}{1+2/3}} = \sqrt{\frac{6}{5}},\ C(p_*) = -C_M,\ C(p_M) = -\frac{1}{6}p_M = -C_*$. Для случая IV: $p_* = C_*,\ p_M = \frac{1}{\sqrt{5}},\ C(p_*) = -C_*,\ C(p_M) = \frac{3}{2}p_M = C_M$. См. рис. 1.

Наш следующий вопрос — это вопрос о взаимном расположении координат a, b, c особых точек типа III и IV, определяемых соотношениями (12), в зависимости от значения p. Так как $(a(-p), b(-p), c(-p)) \equiv -(b(p), a(p), c(p))$, при решении этого вопроса мы ограничимся случаем $p \geq 0$.

Утверждение 4. *Для чисел $a = a(p), b = b(p), c = c(p)$, определяемых соотношениями (12), и функции*

$$\varphi(z) = (z-a)(z-b)(z-c) \tag{16}$$

справедливы следующие соотношения:
$a < c < b$, *и* $\varphi'(a) > 0$, $\varphi'(b) > 0$, $\varphi'(c) < 0$ *при* $0 \leq p < p_*$;
$a < c = b$ *при* $p = p_*$;
$a < b < c$, *и* $\varphi'(a) > 0$, $\varphi'(b) < 0$, $\varphi'(c) > 0$ *при* $p_* < p < p_M$;
$a = b < c$ *при* $p = p_M$.

См. рис. 2.

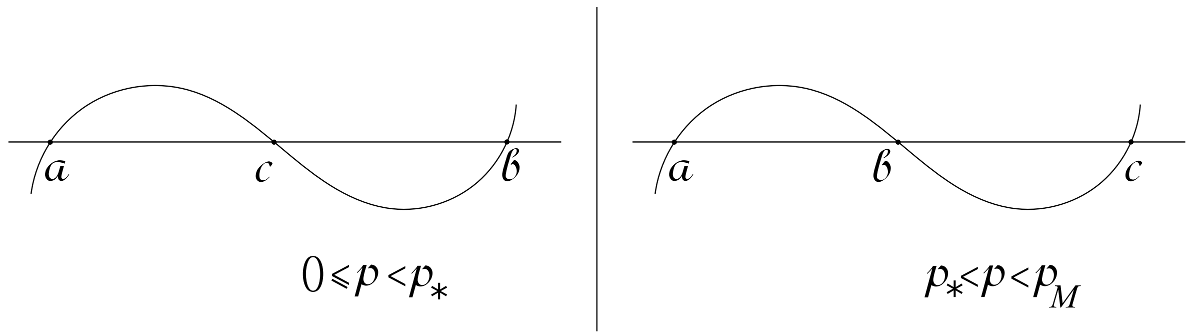

Рис. 2. Схематичное изображение графика функции $\varphi(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ (а также функции $\chi(z) \equiv 4z^3 - 3\lambda_3 z^2 - 2\lambda_2 z - \lambda_1$), демонстрирующее характер монотонности, знак производной этой функции в точках a, b, c, заданных соотношениями (12), в случаях III и IV в зависимости от их взаимного расположения при разных значениях параметра p.

.

Доказательство. Найдем неотрицательные значения p, при которых возможны совпадения в тройке $(a(p), b(p), c(p))$. Совпадение между $a(p)$ и $c(p)$ невозможно, поскольку $a(p) < 0 \leq c(p)$. Остается два случая совпадения:
1) $a(p) = b(p) \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = \frac{2R}{1+2Q} \quad \Leftrightarrow \quad p = p_M$.
2) $b(p) = c(p) \quad \Leftrightarrow \quad -p + \sqrt{2R - p^2(1+2Q)} = 2Qp \quad \Leftrightarrow \quad (2Q+1)(Q+1)p^2 = R \quad \Leftrightarrow$ $p = p_*$.

Читатель легко проверит, что $c < b$ при $0 \leq p < p_*$, и $b < c$ при $p_* < p < p_M$. Что касается знаков производной функции φ в ее корнях, то они однозначно определяются по расположению этих корней, поскольку известно, что функция φ — это многочлен третьей степени с положительным старшим коэффициентом.

Отметим, что при совпадениях между числами в тройке $a(p), b(p), c(p)$ возможны следующие два варианта:
1) при $a(p) = b(p)$, точка $(a(p), b(p), c(p), c(p), c(p))$ типа III превращается в точку типа II, что возможно лишь при $C = \pm C_*$, а точка $(a(p), a(p), b(p), b(p), c(p))$ типа IV превращается в точку типа I при $C = \pm C_M$.
2) при $b(p) = c(p)$, точка типа III превращается в точку типа I (при $C = \pm C_M$), а точка типа IV превращается в точку типа II (при $C = \pm C_*$).

Для классификации найденных подозрительных на условный экстремум точек типа III и IV в случае попарно различных a, b, c применимо достаточное условие условного экстремума Лагранжа, которым мы и воспользуемся.

В силу необходимого условия условного экстремума координаты подозрительной точки $\bar{x}$ удовлетворяют равенству

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}(\bar{x}) = 4x_k^3 - 3\lambda_3 x_k^2 - 2\lambda_2 x_k - \lambda_1 = 0, \qquad \forall \quad k = 1, \ldots, 5, \tag{17}$$

где $L(\bar{x}) = f(\bar{x}) - \langle \bar{\lambda}, \overline{\Phi}_3(\bar{x}) \rangle$— функция Лагранжа и $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — вектор множителей Лагранжа. Заметим, что все частные производные первого порядка функции $L(\bar{x})$ устроены единообразно:

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}(\bar{x}) \equiv \chi(x_k), \qquad \forall \quad k = 1, \ldots, 5, \tag{18}$$

где

$$\chi(z) \equiv 4z^3 - 3\lambda_3 z^2 - 2\lambda_2 z - \lambda_1. \tag{19}$$

Также заметим, что любая из координат a, b или c решения $\bar{x}$ системы (17) типа III и IV есть корень многочлена χ, тогда $\frac{\chi(z)}{4} \equiv \varphi(z)$, поскольку обе функции — это многочлены третьей степени с одними и теми же корнями и единичным старшим коэффициентом. Поэтому утверждение 4 позволяет определить и знаки $\chi'(z)$ в ее корнях.

Рассмотри второй дифференциал функции Лагранжа. С учетом (18) и (19) имеем:

$$d^2_{\bar{x}}L = \sum_{k=1}^{5} \frac{\partial^2 L}{\partial x_k^2}(\bar{x}) dx_k^2 = \sum_{k=1}^{5} \chi'(x_k) dx_k^2.$$

Опишем касательное пространство $T_{\bar{x}}S(C)$ в подозрительных на условный экстремум точках $\bar{x}$ типа III. Для этого подставим координаты точки $\bar{x} = (a, b, c, c, c)$ в продифференцированную систему уравнений связи (1):

$$(dx_1, ..., dx_5) \in T_{\bar{x}}S(C) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \sum_{k=1}^{5} dx_k = 0, \\ adx_1 + bdx_2 + c(dx_3 + dx_4 + dx_5) = 0, \\ a^2 dx_1 + b^2 dx_2 + c^2(dx_3 + dx_4 + dx_5) = 0; \end{cases}$$

Данную систему можно рассматривать как однородную систему с определителем Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - b)(c - a) \tag{20}$$

относительно трех переменных dx_1, dx_2 и $dx_3 + dx_4 + dx_5$. В случае попарно различных чисел a, b, c эта система имеет лишь тривиальное решение: $dx_1 = dx_2 = dx_3 + dx_4 + dx_5 = 0$, то есть в итоге получаем следующее представление для касательного пространства в точках $\bar{x}$ типа III: $T_{\bar{x}}S(C) = \{(0, 0, dx_3, dx_4, dx_5) \ : \ dx_3, dx_4, dx_5 \in \mathbb{R}, \ dx_3 + dx_4 + dx_5 = 0, \}$, а сужение второго дифференциала функции Лагранжа на это пространство представляет собой знакоопределенную при $\chi'(c) \neq 0$ квадратичную форму:

$$d^2_{\bar{x}}L|_{T_{\bar{x}}S(C)} = \chi'(c) \sum_{k=3}^{5} dx_k^2.$$

Она является положительной (или отрицательной) вместе со значением $\chi'(c)$.

Знаки χ' в точках a, b, c были исследованы в утверждении 4: $\chi'(c) = 4\varphi'(c) < 0$ при $0 \leq p < p_{*III} = C_M$, и $\chi'(c) = 4\varphi'(c) > 0$ при $p > p_{*III} = C_M$ (см. рис 2).

Таким образом, *в случае III для $C = C(p)$ все точки $\bar{x}(p)$ — это точки условного максимума при $|p| < p_{*III} = C_M$ и это точки условного минимума при $C_M < |p| < \sqrt{\frac{6}{5}}$* (см. рис 3).

Аналогично исследуем знак второго дифференциала функции Лагранжа на касательном пространстве в случае IV. Подставим координаты точки $\bar{x} = (a, a, b, b, c)$ в продифференцированную систему уравнений связи (1):

$$(dx_1, ..., dx_5) \in T_{\bar{x}}S(C) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \sum_{k=1}^{5} dx_k = 0, \\ a(dx_1 + dx_2) + b(dx_3 + dx_4) + cdx_5 = 0, \\ a^2(dx_1 + dx_2) + b^2(dx_3 + dx_4) + c^2 dx_5 = 0; \end{cases}$$

Как и в случае III, полученная система может быть рассмотрена как однородная система с определителем Вандермонда (20), обладающая только тривиальными решениями, но уже относительно трех переменных $dx_1 + dx_2, dx_3 + dx_4, dx_5$, то есть в точках $\bar{x}$ типа IV для касательного пространства верно следующее равенство: $T_{\bar{x}}S(C) = \{(dx_1, -dx_1, dx_3, -dx_3, 0) \ : \ dx_1, dx_3 \in \mathbb{R}\}$, а сужение второго дифференциала функции Лагранжа на это пространство в данном случае принимает вид:

$$d^2_{\bar{x}} L|_{T_{\bar{x}}S(C)} = \sum_{k=1}^{4} \chi'(x_k) dx_k^2 = 2\left(\chi'(a)dx_1^2 + \chi'(b)dx_3^2\right).$$

Вопрос о знаке этой квадратичной формы сводится к вопросу о знаке значений $\chi'(a)$ и $\chi'(b)$ (они такие же, как знаки $\varphi'(a)$ и $\varphi'(b)$). Снова обратимся к утверждению 4 и рис. 2: *при* $0 \le p < p_{*IV} = \frac{1}{\sqrt{30}}$ справедливы неравенства $\chi'(a) > 0, \chi'(b) > 0$, то есть $d^2_{\bar{x}} L|_{T_{\bar{x}}S(C)} > 0$ и *точка* $\bar{x}$ *есть точка минимума. При* $p > p_{*IV} = \frac{1}{\sqrt{30}}$ справедливы неравенства $\chi'(a) > 0, \chi'(b) < 0$ и *точка* $\bar{x}$ *— седловая точка.*

Выводы, сделанные в результате применения достаточного условия условного экстремума в случаях III и IV, иллюстрирует рис. 3.

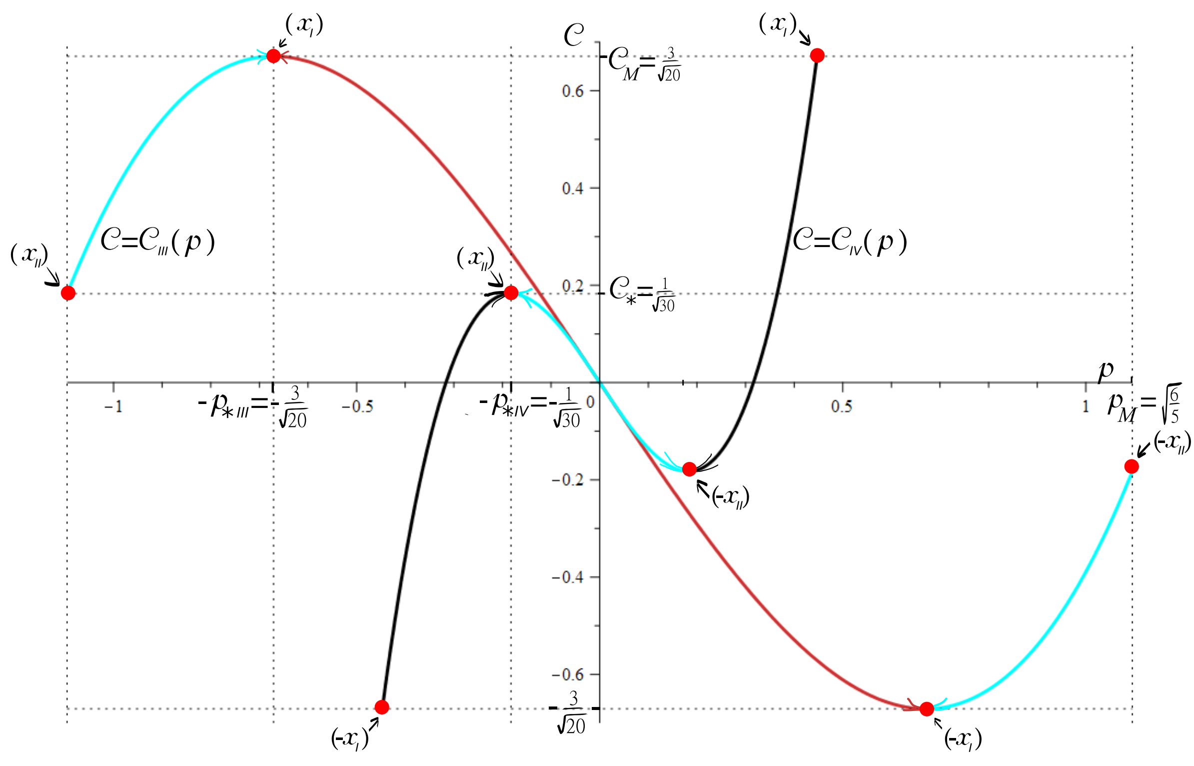

Рис. 3. Выводы, сделанные в результате применения достаточного условия условного экстремума на графиках функций $C_{III}(p)$ и $C_{IV}(p)$. Для обоих случаев III и IV голубым цветом выделены точки графиков, абсциссы которых параметризуют точки минимумов, оранжевым — точки максимумов, черным — седловые точки, красным — особые точки типов I и II, к которым неприменимо достаточное условие условного экстремума.

Таким образом, для завершения классификации подозрительных на условный экстремум точек осталось только определить характер точек типа II (точки типа I уже классифицированы: такие точки возникают лишь при максимальных значениях модуля C, в этом случае множество $S(C)$ конечно, а исследуемая функция постоянна на $S(C)$, см. утверждение 1).

Точки типа II возникают среди элементов $S(C)$ лишь при $|C| = C_*$. Обратимся к рис. 3 и заметим, что среди "гладких особых точек" при $C = C_*$ обнаружены только точки максимума (случай III при некотором $p \approx -0,15$) и седловые (случай IV при некотором $p \approx 0,37$). В то же время, минимум функции f по теореме Вейерштрасса на компактном множестве $S(C_*)$ должен достигаться. Поскольку других подозрительных на условный минимум для $C = C_*$ точек нет, он достигается в одной из точек типа II. Тогда в силу симметричной зависимости всех функций Φ_j от координат их переменных *во всех точках типа II достигается условный минимум.*

Произведенная классификация точек приводит нас еще к одному выводу.

Утверждение 5. *особые точки множества $S\,(\pm C_*)$, то есть элементы классов $[\pm \bar{x}_{\mathrm{II}}]$, являются неизолированными точками этого множества.*

Действительно, если бы хотя бы одна (тогда и все остальные — в силу симметрии) из особых точек была изолированной для $S\,(\pm C_*)$, то после вычитания из $S\,(\pm C_*)$ множества всех таких точек получался бы компакт, на котором все подозрительные на условный экстремум точки были бы либо точками максимума, либо седловыми.

Таким образом, все точки классифицированы, для завершения решения осталось лишь подсчитать количество точек экстремума того или иного типа, а также количество седловых точек функции f на множестве $S(C)$ в зависимости от C.

Согласно утверждению 2, все точки, подозрительные на условный экстремум, с точностью до перенумерации координат совпадают с точками одного из двух типов III и IV при $a \leq b$ (типы I и II есть частные случаи типов III и IV при совпадении двух координат из трех в тройке a, b, c. При отсутствии совпадений в тройке a, b, c точка (a, b, c, c, c) типа III не эквивалентна точке (a, a, b, b, c) типа IV, так как у этих точек разное число дублирующихся координат, а эта величина — число дублирующихся координат — есть инвариант класса эквивалентности). Как установлено в утверждении 3, координаты a, b, c точек как типа III так и типа IV при условии $a \leq b$ параметризуются переменной p через соотношения системы (12). При этом каждому из двух типов отвечает свой набор параметров (13). Та же система уравнений (12) определяет и значение параметра C для данного значения переменной p. Согласно утверждению 1, множество $S(C)$ непусто лишь при $|C| \leq C_M$.

Зафиксируем $C = C_0$, $|C_0| \leq C_M$. Найдем все точки пересечения прямой $C = C_0$ с графиком функции $C = C_{III}(p)$ (см. рис. 4). Абсциссы этих точек — это ровно те значения параметра p, для которых точка $x_{III}(p) = (a(p), b(p), c(p), c(p), c(p))$ подозрительна на условный экстремум функции $f(x)$ на множестве $S(C_0)$. Заметим, что разным p отвечают неэквивалентные точки поверхности $S(C_0)$: как мы выяснили, функция $f(x)$ в разных точках "ведет себя" по-разному, а по замечанию 1 тип поведения в эквивалентных точках должен быть одинаковым. Таким образом, для подсчета всех точек типа III, являющихся точками максимума, точками минимума или седловыми, достаточно найти число элементов в классах эквивалентности точек $x_{III}(p)$ для найденных значений p.

Аналогично вычисляется число точек максимума, точек минимума и седловых точек типа IV. Заметим, что любая точка III неэквивалентна точке IV (у них разное число дублирующихся координат). Кроме того, разным p опять-таки отвеча-

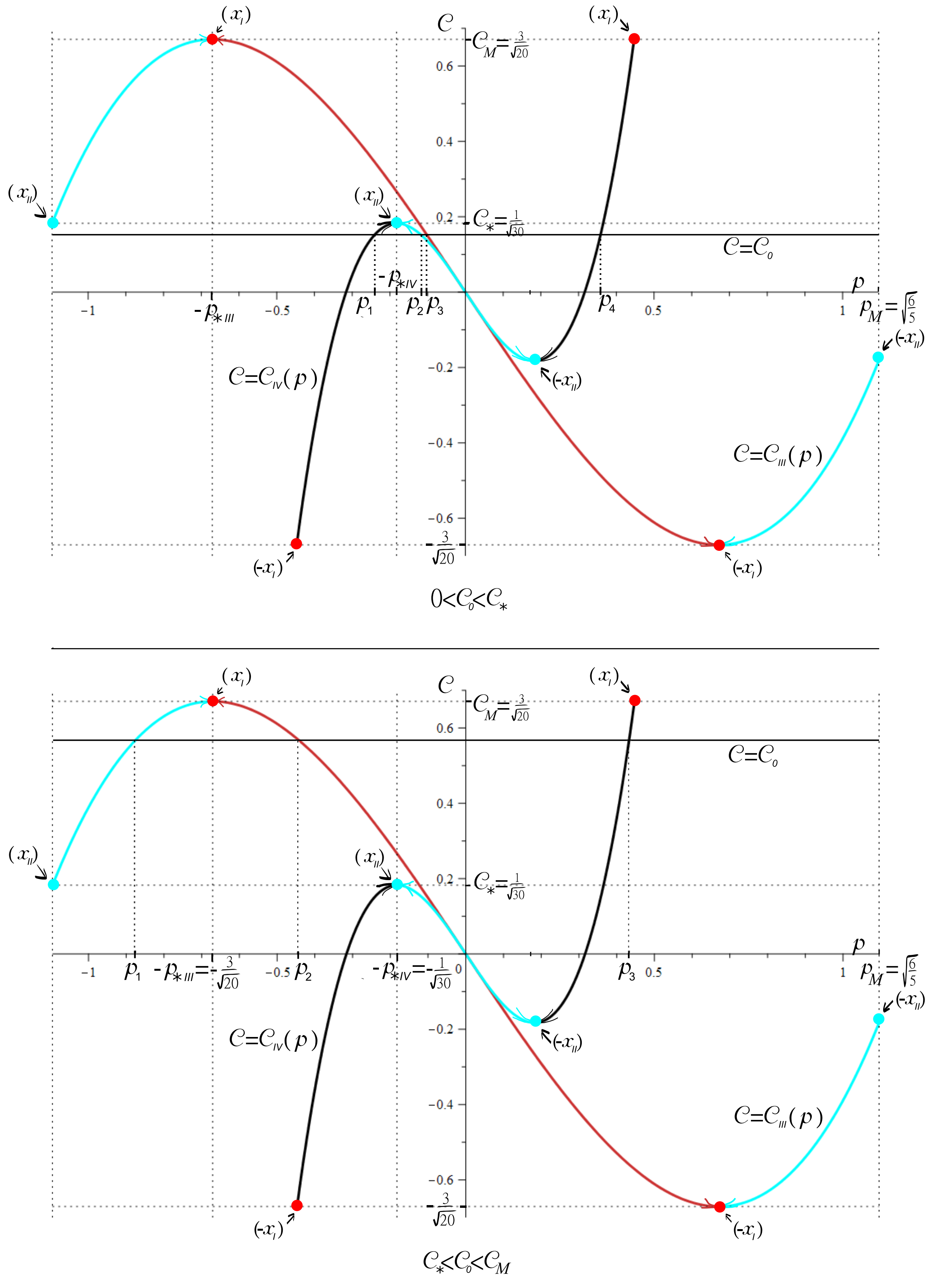

Рис. 4. Точки пересечения прямой $C = C_0$ с графиками $C_{III}(p)$ и $C_{IV}(p)$ при разных C_0. Голубым цветом выделены точки графиков, абсциссы которых параметризуют точки минимумов, оранжевым — точки максимумов, черным — седловые точки, красным — особые точки типа I (возникающие лишь при $C = \pm C_M$, когда функция f постоянна на $S(C)$.

ют неэквивалентные точки (если бы точки, отвечающие значениям, например, p_1 и p_2 были эквивалентными, у них должны были совпасть значения недублирующихся координат, а это, по их определению, возможно только при $c(p_1) = c(p_2)$. Но функция $c(p)$ из (12) линейна, поэтому разные значения параметра p отвечают разным значениям c, а потому и неэквивалентным точкам).

В зависимости от расположения C_0 относительно C_* и C_M получаем такую картину.

Как видно из рис. 4 a), для произвольного $C_0 \in (0, C_*)$ пересечение прямой $C = C_0$ с объединением графиков C_{III} и C_{IV} состоит из четырех точек с абсциссами p_1, p_2, p_3, p_4, пронумерованными по возрастанию, каждое из этих значений определяет посредством (12) точку типа III или типа IV с попарно различными a, b, c (т.к. совпадения между какими-либо парами в тройке a, b, c, заданной (12), как мы знаем, возможно лишь при $C_0 = C_*$, либо $C_0 = C_M$). Значение p_1 задает седловую точку типа IV, p_2 — точку минимума типа IV (в ее классе эквивалентности $C_5^2 \cdot C_3^2 = 30$ точек), p_3 — точку максимума типа III (в ее классе эквивалентности $C_5^1 \cdot C_4^1 = 20$ точек), значение p_4, как и значение p_1, задает седловую точку типа IV. Как мы заметили двумя абзацами выше, значения p_1 и p_4 задают неэквивалентные седловые точки, следовательно, при $C = C_0 \in (0, C_*)$ общее количество седловых точек есть $2 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 = 2 \cdot 30 = 60$. В итоге, вывод для $C_0 \in (0, C_*)$: всего имеется 30 точек минимума, 20 точек максимума и 60 седловых точек.

Случай $C = 0$ был подробно рассмотрен в [3], но здесь мы можем заодно отметить, что в этом случае картина та же, что и при $C = C_0 \in (0, C_*)$ (при $C = 0$ случае точки p_2 и p_3 склеиваются $p_2 = p_3 = 0$, но значение $p = 0$ задает и точки типа III, и точки типа IV).

При $C_0 = C_*$ картина относительно случая $C_0 \in (0, C_*)$ меняется так: значения p_1 и p_2 "склеиваются" и параметризуют точку типа II, в которую при данном значении $p = -p_{*IV}$ превращается точка типа IV. Такого же, т.е. II, типа точка возникает при $p = -p_{M\,III}$ для случая III. Все точки II, как установлено выше, есть точки минимума, и, как установлено в утверждении 1, их 10 штук. Кроме того, как и в предыдущем случае, при $C = C_*$ имеется 20 точек максимума типа III и 30 седловых точек типа IV.

В случае $C_0 \in (C_*, C_M)$ (см. рис 4 b)) прямая $C = C_0$ пересекает график C_{III} в двух точках p_1 и p_2, а график C_{IV} — в одной точке p_3. При этом p_1 отвечает двадцати точкам минимума, p_2 — двадцати точкам максимума, p_3 — тридцати седловым точкам.

Случай $C = C_M$ был рассмотрен в утверждении 1: функция f постоянна на множестве $S(C_M)$, а само множество $S(C_M)$ состоит ровно из пяти точек.

Вспомнив о четной зависимости числа особых точек того или иного типа от C, получаем ответ. Прежде чем его формулировать напомним, что C_* и C_M задаются соотношениями (8).

Ответ: на множестве $S(C)$, заданном системой уравнений (1), функция $f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^5 x_i^4$ имеет

при $|C| < C_*$: 30 точек минимума (типа IV), 20 точек максимума (типа III) и 60 седловых точек (типа IV);

при $|C| = C_*$: 10 точек минимума (типа II), 20 точек максимума (типа III) и 30 седловых точек (типа IV);

при $|C| \in (C_*, C_M)$: 20 точек минимума (типа III), 20 точек максимума (типа III), 30 седловых точек (типа IV);

при $|C| = C_M$ функция f постоянна на множестве $S(C_M)$, а само множество $S(C_M)$ состоит ровно из пяти точек (типа I).

При $|C| > C_M$ множество $S(C)$ пусто.

Авторы выражают глубокую признательность коллегам по кафедре за ряд ценных замечаний по тексту этой работы.

Список литературы

[1] Арнольд В. И., *Избранное-60.* М.: Фазис, 1997.

[2] Макаров Б. М., Подкорытов А. Н., *Гладкие функции и отображения.* М.: МЦНМО, 2020.

[3] Дубова Т. П., Семенова О. Л., *Условный экстремум. Отыскание экстремальных значений (методические указания).* СПб.: репозиторий СПбГУ, 2021.