РЕФЕРАТЫ

УДК 517.956:517.983.246

Д у р а н т е Т., К а р д о н е Дж., Н а з а р о в С. А. **Моделирование сочленений пластин и стержней посредством самосопряженных расширений** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 3–14.

На основе асимптотического анализа эллиптических задач в тонких областях и их сочленениях строится модель смешанной краевой задачи для скалярного дифференциального уравнения второго порядка на объединении трехмерных тонких стержней и пластины. Один из концов каждого стержня присоединен к пластине, а на другом поставлены условия Дирихле, но на остальной части границы сочленения назначены краевые условия Неймана. Асимптотическое разложение решения такой задачи обладает несколькими отличительными особенностями: коэффициенты в разложении оказываются рациональными функциями большого параметра $|\ln h|$ ($h \in (0, 1]$ — малый геометрический параметр), а решение предельной задачи в продольном сечении пластины приобретает логарифмические сингулярности в точках присоединения стержней. Поэтому классические постановки краевых задач непригодны для описания асимптотики и приходится использовать технику самосопряженных расширений и функциональных пространств с отделенной асимптотикой.

Установлено, что адекватной моделью краевой задачи на трехмерном сочленении служит задача на гибридной области, а именно, объединении двумерной области и одномерных отрезков. Такая задача описывается при помощи абстрактного уравнения с оператором — специальным самосопряженным расширением матричного оператора, составленного из операторов предельных задач для пластины и стержней. Параметры самосопряженного расширения определяются при исследовании явления пограничного слоя в зонах присоединения стержней к пластине.

Получены оценки точности приближения решения краевой задачи в исходной сингулярно возмущенной области и решением задачи на гибридной области.

Ключевые слова: сочленение тонких тел, скалярная смешанная краевая задача, гибридная область, самосопряженное расширение.

Библиогр. 37. Ил. 3.

УДК 519.245+519.683

Е р м а к о в С. М. **О конструировании параллельных алгоритмов в задачах вычислительной математики** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 15–22.

В работе показано на примере методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), что алгоритмы, обладающие важными свойствами параллелизма и асинхронности, могут быть построены после сведения задачи к вычислению континуального интеграла (интеграла по траекториям). Ранее в ряде работ автора и его коллег было показано, что с ростом размерности n системы параллельные и асинхронные алгоритмы Монте-Карло могут быть лучше соответствующих итерационных. В статье приводится качественное объяснение этого факта.

Решение СЛАУ вида $X = AX + F$ допускает простое представление в виде интеграла по траекториям лишь при условии $\lambda_1(A) < 1$, где $\lambda_1(A)$ — наибольшее по модулю собственное число A. Если это условие не выполнено, то можно построить рекуррентные процедуры решения системы, обладающие свойствами (крупнозернистого) параллелизма. В этом случае, однако, требуются дополнительные условия для синхронизации алгоритма.

Наконец, показано, как на базе результатов автора и В. Вагнера [10] можно получить эффективные аналоги стохастических алгоритмов — алгоритмы метода *квази* Монте-Карло, обладающие повышенной по сравнению с методом Монте-Карло скоростью сходимости.

Аналогичные подходы возможны при решении широкого класса задач математической и теоретической физики, где известны интегральные представления решений.

Ключевые слова: параллелизм, системы линейных алгебраических уравнений, методы Монте-Карло, методы квази Монте-Карло.

Библиогр. 15 назв.

УДК 517.938

Зубер И. Е., Гелиг А. Х. **Устойчивость неопределённых систем** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 23–30.

Рассматривается непрерывная система

$$dx/dt = A(\cdot)x,$$

у которой элементы $m \times m$-матрицы $A(\cdot)$ ограничены и являются функционалами произвольной природы. Известны лишь границы изменения коэффициентов. Предполагается, что выполнена локальная теорема существования решения и продолжимость при всех $t > 0$ любого решения, остающегося в ограниченной области.

С помощью построения функции Ляпунова в виде квадратичной формы с якобиевой матрицей коэффициентов получены соотношения между границами изменения коэффициетов системы, при которых система экспоненциально устойчива в целом.

Изучается также импульсная система, полученная из исходной заменой элементов, стоящих на главной диагонали, синхронными импульсными модуляторами, осуществляющими амплитудно-частотную модуляцию. Эта система после усреднения сигналов на выходах модуляторов и стремлении частоты импульсации к бесконечности переходит в рассмотренную непрерывную систему.

Для импульсной системы получены условия на границы изменения коэффициентов и нижняя граница частоты импульсации, при которых система устойчива в целом.

Ключевые слова: неопределенные системы, устойчивость, функции Ляпунова, импульсные системы.

Библиогр. 9 назв.

УДК 518:517.432.1

Кабардов М. М. **Геометрическая интерпретация метода суммирования Эйлера—Кноппа в задаче обращения преобразования Лапласа** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 31–36.

Рассматривается метод обращения преобразования Лапласа $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$, состоящий в представлении оригинала рядом Лагерра

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_k(bt)\,. \tag{1}$$

Предварительно производится некоторое конформное отображение плоскости (s), зависящее от параметра ξ, значение которого находится в зависимости от геометрии расположения особых точек данного изображения. При этом ряд (1) преобразуется к виду

$$f(t) = \frac{b-\xi}{b} \exp(\xi t) \sum_{k=0}^{\infty} c_k L_k((b-\xi)t)\,.$$

Показано, что такая схема обращения равносильна применению метода Пиконе—Трикоми с последующим ускорением сходимости ряда (1), основанным на нелинейной процедуре Эйлера—Кноппа

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(p) \frac{z^k}{(1-p\,z)^{k+1}}\,, \qquad A_k(p) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-p)^{k-j} a_j\,.$$

В этой технике оригинал представляется рядом

$$f(t) = \exp\left(\frac{bp\,t}{p-1}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k(p)}{(1-p)^{k+1}}\, L_k\left(\frac{bt}{1-p}\right),$$

причем параметры ξ и p связаны равенством $p = \xi/(\xi - b)$.

В отличие от других способов суммирования рядов в предлагаемой схеме нет необходимости в исследовании условий регулярности.

Ключевые слова: обращение преобразования Лапласа, ряд Лагерра, ускорение сходимости, метод Эйлера—Кноппа.

Библиогр. 6 назв. Ил. 2.

УДК 519.63

Кривулин Н. К. **Вычисление показателя Ляпунова обобщенных линейных систем с показательным распределением элементов переходной матрицы** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 37–47.

Рассматривается стохастическая динамическая система второго порядка. Эволюция системы описывается при помощи динамического уравнения со случайной переходной матрицей, которое является линейным в идемпотентной алгебре с операциями вычисления максимума и сложения. Предполагается, что некоторые элементы матрицы являются нулевыми константами, а все остальные элементы имеют экспоненциальные распределения и независимы. Рассматривается задача вычисления показателя Ляпунова, который определяется как средняя асимптотическая скорость роста вектора состояний системы. Известные результаты решения задачи ограничиваются системой с матрицей, у которой равны нулю недиагональные элементы. Для вычисления показателя Ляпунова в случае матриц с нулевой строкой, с нулевыми элементами на диагонали, или только с одним нулевым элементом, используется подход, который опирается на построении и анализ некоторой последовательности одномерных функций распределения. Величина показателя Ляпунова находится как среднее значение случайной величины, которая определяется предельным распределением этой последовательности.

Ключевые слова: стохастическая динамическая система, случайная матрица, идемпотентная алгебра, показатель Ляпунова, сходимость функций распределения

Библиогр. 9 назв.

УДК 517.972.2:517.974.8

Крым В. Р. **Метод Эйлера—Лагранжа в формулировке Понтрягина** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 48–58.

Классическую вариационную задачу с неголономными ограничениями можно решить с помощью метода Эйлера—Лагранжа в формулировке Понтрягина, но тогда множители Лагранжа будут только измеримыми функциями. Мы предлагаем модифицированный метод Эйлера—Лагранжа, в котором в исходной задаче используется лагранжиан, зависящий только от независимых компонент вектора скорости. Тогда множители Лагранжа оказываются абсолютно непрерывной вектор-функцией. Этот метод применяется к задаче о горизонтальных геодезических для неголономного распределения на многообразии. Установлено, что эти уравнения содержат два вида связности, связность на распределении и связность на многообразии, что не было учтено другими авторами.

Ключевые слова: метод Эйлера—Лагранжа, принцип максимума Понтрягина, классическое вариационное исчисление, горизонтальные геодезические, неголономные распределения.

Библиогр. 8 назв.

УДК 518

Л е б е д и н с к а я Н. А., Л е б е д и н с к и й Д. М. **Измельчение триангуляции при помощи разбиения ребра** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 59–62.

Доказано, что любую триангуляцию плоской многоугольной области можно измельчить при помощи многократного применения операции разбиения ребра так, чтобы 1) максимальный диаметр треугольников был меньше любого наперед заданного положительного числа и 2) минимальный внутренний угол треугольников полученной триангуляции был не меньше, чем минимальный внутренний угол треугольников исходной триангуляции, деленный на 9. Требуемое измельчение триангуляции строится в два этапа: во-первых, триангуляция измельчается так, чтобы треугольники полученной триангуляции могли быть объединены в пары, причем без пары могли остаться только граничные треугольники; на этом этапе каждый треугольник делится максимум на 4 части. Затем полученная триангуляция измельчается еще раз, чтобы в итоге диаметр треугольников стал меньше фиксированного ε. На каждом из этапов минимальный внутренний угол треугольников уменьшается не более, чем в 3 раза. Это обеспечивается леммой, гарантирующей, что внутренние углы треугольников, на которые исходный треугольник делится медианой, не могут быть меньше трети минимального внутреннего угла исходного треугольника.

Ключевые слова: измельчение триангуляции, локальные преобразования, углы треугольников.

Библиогр. 2 назв.

УДК 517.968.2+517.956

М а з ь я В. Г., П о б о р ч и й С. В. **Однозначная разрешимость интегрального уравнения для гармонического потенциала простого слоя на границе области с пиком** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 63–73.

Как известно, отыскание решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в виде потенциала простого слоя $V\varrho$ с неизвестной плотностью ϱ приводит к граничному интегральному уравнению вида $V\varrho = f$ для нахождения плотности, где f — граничные данные Дирихле. Мы показываем, что если S — граница n-мерной области ($n > 2$) с вершиной изолированного пика на S, то оператор V^{-1}, действующий на гладких на S функциях, может быть единственным образом продолжен до изоморфизма между пространством следов на S функций с конечным интегралом Дирихле на $\mathbf{R}^n$ и сопряженным к этому пространству. Тем самым уравнение $V\varrho = f$ однозначно разрешимо относительно плотности ϱ для любого следа $f = u|_S$ функции u, имеющей конечный интеграл Дирихле на $\mathbf{R}^n$. Используя явное описание пространства указанных следов, можно сформулировать теорему о разрешимости граничного интегрального уравнения $V\varrho = f$ в терминах функции, описывающей заострение пика.

Ключевые слова: задача Дирихле, уравнение Лапласа, граничные интегральные уравнения, гармонические потенциалы, области с негладкой границей.

Библиогр. 12 назв.

УДК 519.21

М и р о ш и н Р. Н. **О решении интегрального уравнения Колмогорова—Чепмена в виде ряда** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 74–78.

Указанное в заголовке нелинейное интегральное уравнение — основное в теории случайных марковских процессов. Его решением является плотность вероятности перехода. Обычно оно решается путем сведения к линейному уравнению. В 1932 г. С. Н. Бернштейн поставил задачу его непосредственного решения. В 1962 г. О. В. Сарманов нашел такие решения в терминах билинейного ряда для стационарного Марковского процесса. В 2007 г. автор получил несколько решений в виде интегралов от произведения двух ядер известных интегральных

преобразований. В этой статье без ограничений Сарманова выводятся решения в виде ряда, члены которого содержат произведение двух ортогональных функций. Результаты иллюстрируются примерами, в которых ряд суммируется к простой функции.

Ключевые слова: интегральное уравнение Колмогорова—Чепмена, случайные марковские процессы, плотность вероятности.

Библиогр. 7 назв.

УДК 518:517

Стоянова С. Б. **Инвариантная кубатурная формула степени 9 для гиперкуба** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 78–85.

В данной статье для построения кубатурных формул вычисления интегралов по гиперкубу в $\mathbf{R}^n$

$$C_n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid -1 \le x_i \le 1,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

применяется теорема Соболева.

Эти формулы точны для всех полиномов степени не выше 9 и инвариантны относительно группы всех ортогональных преобразований гипероктаэдра

$$G_n = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le 1 \right\}$$

на себя.

Раздел 1 содержит введение в предмет и обзор известных результатов. В разделах 2 и 3 определяются параметры кубатурной формулы для $n \ge 4$ и $n = 3$, соответственно. Численные результаты (узлы и коэффициенты кубатурных формул) представлены в разделе 4.

Ключевые слова: кубатурная формула, степень точности, группа преобразований, гиперкуб, гипероктаэдр, орбиты узлов.

Библиогр. 8 назв. Табл. 1.

УДК 517.586

Холшевников К. В., Шайдулин В. Ш. **Асимптотика равномерной нормы присоединенных функций Лежандра P_n^k (случай $k \ll n$)** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 86–93.

Исследуется равномерная (чебышевская) норма присоединенных функций Лежандра $P_n^k(x)$ на промежутке ортогональности $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Основное внимание уделено асимптотике при стремлении нижнего индекса к бесконечности. В статье рассмотрен случай, когда верхний индекс фиксирован или растет медленнее, чем $n^{2/3}$. Установлено, что норма растет как n^k. Коэффициентом служит наибольшее значение функции Бесселя порядка k. Для него также получена асимптотика: убывание как $k^{-1/3}$ с точным числовым коэффициентом. Прямым вычислением показано, что асимптотическое приближение удовлетворительно даже для первых значений верхнего индекса.

Ключевые слова: присоединенные функции Лежандра, равномерная и среднеквадратическая норма, асимптотика.

Библиогр. 14 назв. Табл. 1. Ил. 1.

УДК 539.3

Лебедев А. В. **Устойчивость пластин, ослабленных отверстиями** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 94–99.

Статья посвящена исследованию задачи о потери устойчивости тонкой изотропной упругой прямоугольной пластины, ослабленной квадратным центральным отверстием, подвергнутой сжимающему нагружению, приложенному к торцам. Исследуется влияние геометрических параметров пластины и отверстия, а также граничных условий закрепления пластины на величину критической нагрузки и форму потери устойчивости.

Рассматриваются три вида граничных условий. Установлено, что в случае цилиндрического изгиба величина критической нагрузки падает по мере увеличения площади отверстия. Для шарнирно опертой пластины при четном количестве волн в продольном направлении увеличение размера отверстия ведет к росту критической нагрузки, а при нечетном — к падению. Для жестко опертой пластины увеличение площади отверстия ведет к росту критической нагрузки, независимо от формы потери устойчивости пластины. Для очень длинных пластин критическая нагрузка не зависит от величины отверстия, если оно не слишком велико.

Ключевые слова: устойчивость, пластина с отверстием.

Библиогр. 4. Ил. 5.

УДК 533.601.18

Мемнонов В. П., Морозов А. О. **Экспериментальная оценка статистических характеристик шероховатой поверхности** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 100–104.

С помощью атомно-силового микроскопа Solver PRO-M, используя дополнительное осреднение по 25 точкам для снижения шума, произведены измерения неровностей поверхности образцов слюды и кремния с точностью по высоте вплоть до 0,02 нм. По гистограммам углов наклона отрезков ломаной вдоль линии измерения при минимальных горизонтальных смещениях на 10 нм была оценена плотность функции распределения $f(\beta)$ углов β отклонения нормалей микроплощадок от нормали к среднему уровню поверхностей этих образцов. Оказалось, что на большей части интервала углов β функция $f(\beta)$ приближенно представляется экспонентой $\exp(-m * |\beta|)$. И лишь на небольшом участке малых углов $\beta < \beta_b$ появляется квадратичная зависимость показателя экспоненты $f(\beta) \sim \exp(-c * \beta^2)$. В работе представлена методика измерений и оценка ошибки констант m и c для слюды и кремния. Следует отметить, что на поверхностях всех образцов был мощный адсорбционный слой, заполняющий также и все впадины поверхности, так как измерения проводились при атмосферном давлении с целью воспроизвести условия течений воздуха в современных высокотехнологичных устройствах, имеющих часто в некоторых направлениях нанометровые размеры, как это будет реализовано, например, в проектируемых сейчас новых винчестерах. Поэтому полученные результаты не применимы к чистой поверхности, для которой необходимы эксперименты с высоким вакуумом.

Ключевые слова: статистические характеристики шероховатой поверхности, атомно-силовой микроскоп, распределения углов отклонения нормалей.

Библиогр. 6 назв. Ил. 3.

УДК 539.3:519.63

Морозов Н. Ф., Товстик П. Е. **Динамика стержня при продольном ударе** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 105–111.

Как правило в задачах об устойчивости стержней при динамическом нагружении предполагается, что сжимающая сила постоянна по длине стержня. В статье рассматривается кратковременный продольный удар по концу упругого стержня. Предполагается, что время удара меньше времени пробега продольной волны по удвоенной длине стержня. Нелинейная краевая задача сводится приближенно к последовательности двух линейных задач. В первой из них решается волновое уравнение и определяется осевая сила, переменная по времени и по длине стержня. Во второй задаче при заданной осевой силе с использованием разложения в ряд Фурье определяются поперечные колебания стержня, связанные с отклонениями его начальной формы от прямолинейной. Установлено, во-первых, что поперечные колебания существенно зависят от величины и формы начальной неправильности. Во-вторых, амплитуда поперечных колебаний продолжает неограниченно расти и после прекращения действия удара. Ясно, что это приближенное решение пригодно лишь для достаточно малого интервала времени. Получена более точная нелинейная система уравнений, которая позволяет оценить область применимости описанного выше линейного приближенного подхода.

Ключевые слова: динамика стержня, продольный удар, параметрическое возбуждение.

Библиогр. 6 назв. Ил. 2.

УДК 539.3, 517.928

Филиппов С. Б. **Устойчивость кольцевой пластинки под действием радиальных растягивающих усилий на внутреннем контуре** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 112–000.

Рассматривается потеря устойчивости кольцевой пластинки под действием радиальных растягивающих усилий, равномерно распределенных по внутреннему контуру. Исследуется зависимость критической нагрузки от граничных условий. В работе Мансфилда было получено аналитическое решение уравнения, описывающего потерю устойчивости кольцевой пластинки, однако эта работа имеет существенный недостаток. Используемые в ней начальные напряжения не удовлетворяют граничным условиям, которые обычно встречаются на практике.

В данной работе получено уравнение устойчивости кольцевой пластинки для реальных начальных напряжений, равных нулю на внешнем контуре пластины. Это уравнение не имеет аналитического решения. В общем случае краевые задачи для определения критических нагрузок и форм потери устойчивости пластинки решаются методом прогонки. Для узких и широких пластин с помощью асимптотических методов получены приближенные формулы для вычисления критической нагрузки. Показано, что для узкой пластинки замена начальных напряжений Мансфилда реальными напряжениями может привести к уменьшению критической нагрузки в 20 раз.

Задача о потере устойчивости кольцевой пластинки представляет интерес в связи с задачей о потере устойчивости подкрепленной оболочки вращения, ибо кольцевая пластинка может рассматриваться как модель шпангоута, подкрепляющего оболочку.

Ключевые слова: Кольцевая пластинка, потеря устойчивости, краевая задача, асимптотический метод.

Библиогр. 4 назв. Ил. 3.

УДК 517.947, 534.1, 536.241

Юферева Л. М., Лавров Ю. А. **Термомеханическое поле многослойной пластины с внутренними источниками** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 000–000.

Методом малого параметра построено приближеное решение одномерной задачи определения совместных колебаний температуры и механических вибраций в многослойной плоской пластине. Процессы в пластине возбуждаются распределенными по ее объему внутренними источниками теплоты, интенсивность которых имеет периодическую зависимость от времени. В плоскостях соприкосновения каждой пары соседних слоев выполняются условия идеального механического и теплового контакта. Механический и тепловой режим на внешних поверхностях пластины подчиняются модели Винклера и модели Ньютона соответственно. Для собственных значений задачи Штурма—Лиувилля, необходимых при построении базисных функций, по которым разлагается тепловое и механическое поле, выведены и численно испытаны явные приближенные формулы. Построены и испытаны приближенные выражения для полей.

Ключевые слова: многослойная пластина, идеальный тепловой и механический контакт, приближенное аналитическое решение.

Библиогр. 4. Ил. 1.

УДК 520.87, 519.25

Б а л у е в Р. В. **О поиске периодических компонент в наблюдательных данных** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 000–000.

Данная статья рассматривает методы поиска (выявления) периодических сигналов, основанные на периодограммах, построенных при помощи принципа наименьших квадратов. Эти методы включают в себя, в частности, такие широко распространенные инструменты анализа данных, как периодограмма Ломба—Скаргла и мультигармоническая периодограмма. Значительное внимание уделено недавним важным результатам, полученным автором в задаче оценки статистической значимости периодичностей, выявляемых при помощи указанных периодограмм. Полученные приближения, основанные на теории экстремальных значений случайных процессов, весьма удобны для практического применения и одновременно достаточно точны.

Ключевые слова: обработка данных, периодограмма, вероятность ложной тревоги, случайные процессы.

Библиогр. 14 назв.