6. Приближенное вычисление интегралов по простейшим формулам

6.1. Общие сведения

Квадратурная формула имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \tag{1}$$

где A_k — коэффициенты, x_k — узлы квадратурной формулы, они попарно различны. В дальнейщем предполагается, что $x_k \in [a, b],\ k = 1, 2, \ldots, n$.
Сумма в правой части формулы (1) называется квадратурной суммой.
Квадратурная формула называется интерполяционной, если

$$A_k = \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} dx\ ,\ \omega(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i). \tag{2}$$

Важной характеристикой квадратурной формулы является ее алгебраическая степень точности.

Определение. Целое неотрицательное число d называется алгебраической степенью точности квадратурной формулы, если эта формула точна для всех многочленов степени не выше d и не точна для x^{d+1}.

Теорема. *Для того чтобы квадратурная формула с n попарно различными узлами была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы $d \geq n - 1$.*

6.2. Квадратурные формулы прямоугольников

6.2.1. Квадратурная формула левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a)f(a). \tag{3}$$

Очевидно, что ее алгебраическая степень точности $d = 0$ и формула является интерполяционной.

6.2.2. Квадратурная формула правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a)f(b). \tag{4}$$

6.2.3. Квадратурная формула средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right). \tag{5}$$

Алгебраическая степень точности $d = 1$ и формула является интерполяционной.

6.2.4. Составные квадратурные формулы прямоугольников

Разбиваем промежуток интегрирования $[a, b]$ на N равных частей, $h = \dfrac{(b-a)}{N}$ — длина частичного разбиения. Обозначим $x_k = a + k\,h$, $f_k = f(x_k)$. Составные квадратурные формулы прямоугольников напишем в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\sum_{k=1}^{N} f(\alpha + (k-1)\,h)\right), \tag{6}$$

где при $\alpha = a$ получаем формулу левых прямоугольников, при $\alpha = a + h/2$ — средних прямоугольников, при $\alpha = a + h$ — правых прямоугольников. Обратим внимание, что алгебраические степени точности формул остаются прежними и составные квадратурные формулы не являются интерполяционными.

6.3. Квадратурная формула трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)). \tag{7}$$

Составная квадратурная формула трапеций имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2N}(f_0 + 2(f_1 + \ldots + f_{N-1}) + f_N). \tag{8}$$

Алгебраическая степень точности формулы трапеций $d = 1$.

6.4. Квадратурная формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right). \tag{9}$$

Составная квадратурная формула Симпсона

Разбиваем промежуток интегрирования $[a, b]$ на N равных частей.

Пусть $h = \dfrac{b-a}{2N}$ — половина длины частичного разбиения.
Обозначим $x_k = a + kh$, $f_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, 2N$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6N}(f_0 + 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2N-1}) + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2N-2}) + f_{2N}). \tag{10}$$

Количество узлов формулы Симпсона равно $2N + 1$ — нечетно.
Алгебраическая степень точности квадратурной формулы $d = 3$.

6.5. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

Интерполяционные квадратурные формулы по равноотстоящим узлам (концы отрезка $[a, b]$ являются узлами) называются формулами Ньютона-Котеса. Заметим, что рассмотренные выше формула трапеций (7) и формула Симпсона (9) (не составные) относятся к семейству квадратурных формул Ньютона-Котеса.
Алгебраическая степень точности квадратурной формулы Ньютона-Котеса равна количеству узлов при нечетном их числе (например, формула Симпсона) и на единицу меньше — при четном (например, формула трапеций).

6.6. Оценка погрешности квадратурных формул

Если функция $f(x)$ имеет на $[a,b]$ непрерывную производную $(d+1)$ порядка, то для оценки погрешности рассмотренных выше составных квадратурных формул, имеющих алгебраическую степень точности d, справедливо неравенство

$$|R_N(f)| \leq C(b-a)\left(\frac{b-a}{N}\right)^{d+1} \cdot M_{d+1}, \quad M_{d+1} = \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(d+1)}(\xi)|. \tag{11}$$

Здесь $C = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{в формуле левых и правых прямоугольников;} \\ \frac{1}{24} & \text{в формуле средних прямоугольников;} \\ \frac{1}{12} & \text{в формуле трапеций,} \\ \frac{1}{2880} & \text{в формуле Симпсона.} \end{cases}$

6.7. Правило Рунге практической оценки погрешности (экстраполяция по Ричардсону)

Будем предполагать, что $f(x)$ имеет непрерывные на $[a,b]$ производные требуемого порядка. Пусть S_N — квадратурная сумма с N разбиениями, S_{2N} — квадратурная сумма с 2N разбиениями, I — точное значение интеграла.
Можно показать, что главный член погрешности может быть вычислен следующим образом:

$$R_{main}^{(N)} = \frac{S_{2N} - S_N}{2^{d+1} - 1}. \tag{12}$$

Экстраполяция по Ричардсону выполняется по следующей формуле:

$$I_{adjusted} = S_{2N} + R_{main}^{N}. \tag{13}$$

Часто последний результат является более точным.
Заметим, что в результате уточнения по правилу Рунге получаются квадратурные формулы с более высокой алгебраической степенью точности, а именно:

- из формулы левых и правых прямоугольников $\Rightarrow$ формула средних прямоугольников;
- из формулы трапеций $\Rightarrow$ формула Симпсона;
- из формулы Симпсона $\Rightarrow$ квадратурная формула с алгебраической степенью точности d=5.

Для достаточно гладких функций при достаточно больших N можно пользоваться следующим критерием: если $|R_{main}^{(N)}| < \varepsilon$, то $|S_{2N} - I| < \varepsilon$.

6.8. Задание

Для заданной функции $f(x)$ вычислить $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ приближенно по составным квадратурным формулам
а) левых прямоугольников;
б) трапеций;
в) Симпсона.
Результаты оформить в следующем виде (для $N=2$):

Метод	S_N	$I - S_N$	R_N	S_{2N}	$I - S_{2N}$	R_{2N}	R_{main}	I_{ad}	$I - I_{ad}$
Левых прям.									
Трапеций									
Симпсона									

Протестировать квадратурные формулы на многочленах различных степеней, в зависимости от алгебраической степени точности формулы.

Краткая инструкция по работе с таблицами в Maple приведена здесь.

Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+c}\,dx$, где $c>0$ определяется вариантом задания.

Заметим, что для оценки модуля производной k-го порядка подынтегральной функции при $x\in[a,b]$ может быть использовано неравенство

$$\left|\left(\frac{1}{x^2+c}\right)^{(k)}\right| \le \frac{k!}{(\sqrt{c})^{k+2}}.$$