4. Интерполирование Эрмита с использованием разделенных разностей

4.1. Постановка задачи

Дан $m+1$ узел, каждый узел x_i имеет кратность r_i, т. е. в нём задано значение функции и значения производных до (r_i-1)-го порядка. Исходные данные приведем в виде таблицы:

x_0	x_1	...	x_m
$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_m)$
$f'(x_0)$	$f'(x_1)$	...	$f'(x_m)$
...	...	...	...
$f^{(r_0-1)}(x_0)$	$f^{(r_1-1)}(x_1)$	...	$f^{(r_m-1)}(x_m)$

Предполагаем, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$.

Пусть $r_0 + r_1 + \ldots + r_m = r$, существует единственный многочлен $H_{r-1}(x)$, удовлетворяющий условиям: $H^{(\alpha_j)}_{(r-1)}(x_j) = f^{(\alpha_j)}(x_j), j = 0,\, 1, \ldots, m,\ \alpha_j = 0, \ldots, r_j - 1$.

Частные случаи:

1. $r_0 = r_1 = \ldots = r_m = 1$ — обычное интерполирование по значениям функции.

2. m$=0$, тогда $H_{r_0-1}(x)$ — отрезок ряда Тейлора:

$$H_{r_0-1}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(r_0-1)}(x_0)}{(r_0-1)!}(x-x_0)^{r_0-1}. \quad (1)$$

Разделенные разности по кратным узлам вычисляются по следующей формуле:

$$f\,\underbrace{(x_0,\ldots,x_0)}_{k+1} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}. \quad (2)$$

4.2. Задание

Дана таблица попарно различных узлов, в которых заданы значения функции и значения производных до некоторого порядка. Требуется построить аналитическое выражение интерполяционного полинома Эрмита по данной таблице, используя таблицу разделенных разностей. Проверить, что построенный полином удовлетворяет заданным условиям.

Образец выполнения задания

Пусть дана таблица

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-1	-17	33	
0	-4	3	-8
2	10		

1. Строим таблицу разделенных разностей, повторяя узлы столько раз, какова их кратность. Разделенные разности по некратным узлам вычисляем обычным образом, а разделенная разность k-го порядка по кратному узлу x_i вычисляется по приведенной выше формуле (2).

x	$f(x)$	р.р. 1 пор	р.р. 2 пор	р.р. 3 пор	р.р. 4 пор	р.р. 5 пор
-1	-17					
		33				
-1	-17		-20			
		13		10		
0	-4		-10		-4	
		3		6		1
0	-4		-4		-1	
		3		3		
0	-4		2			
		7				
2	10					

2. Выпишем интерполяционный многочлен в форме Ньютона:

$$P_5(x) = -17 + 33(x+1) - 20(x+1)^2 + 10(x+1)^2 x - 4(x+1)^2 x^2 + (x+1)^2 x^3$$

3. Проверка интерполяционности многочлена:

x	$P_5(x)$	$P_5'(x)$	$P_5''(x)$
-1	-17	33	
0	-4	3	-8
2	10		

Варианты задания