САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Тимофеев Василий Алексеевич

МОДЕЛИРОВАНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ В ЗАДАЧАХ ЭРМИТА-БИРКГОФА

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2006

Работа выполнена на кафедре параллельных алгоритмов
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Бурова Ирина Герасимовна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Славянов Сергей Юрьевич

доктор физико-математических наук,
профессор Фарафонов Виктор Георгиевич

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный
университет

Защита состоится "___" _____________ 2006 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.51 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при СПбГУ по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. А.М. Горького СПБГУ по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан "___" _____________ 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Мартыненко Б. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

В настоящее время остается актуальной задача совершенствования методов решения известных интерполяционных задач Лагранжа, Эрмита и Эрмита-Биркгофа. Всем хорошо известно классическое решение этих задач с помощью интерполяционных полиномов. В ряде случаев применение интерполяционных полиномов не дает желаемого эффекта. Так, например, решение задачи Эрмита-Биркгофа с помощью интерполяционных полиномов в ряде случаев не существует.

При решении разнообразных задач хорошо зарекомендовало себя применение различных видов сплайновых приближений, рассмотреных в работах Стечкина С.В., Субботина Ю.Н., Вагера Б.Г., Серкова Н.К., Квасова Б.И. Применение минимальных полиномиальных сплайнов позволяет проводить последовательную интерполяцию в реальном масштабе времени. Стимулом к изучению этого направления приближения функций послужили работы В.С.Рябенького С.Г. Михлина и Ю.К. Демьяновича.

Решение задач Лагранжа и Эрмита с помощью полиномиальных минимальных сплайнов подробно рассмотрено в работах Буровой И.Г., Демьяновича Ю.К. , где в частности показано преимущество данного подхода при решении ряда задач математической физики. приближение строится на отдельном сеточном интервале в виде линейной комбинации нескольких соседних значений приближаемой функции в узлах сетки и некоторых функций, называемых базисными сплайнами. Набор базисных сплайнов вычисляется в аналитическом виде один раз для решения данной задачи интерполяции и далее при построении приближения никаких дополнительных систем решать не требуется. Полиномиальные минимальные сплайны обладают свойством точности на степенях аргумента.

Ввиду бурного развития информационных технологий вычислений, актуальной является задача построения приближений, обладающих свойством точности на произвольном множестве функций, что во многих случаях способствует уменьшению вычислительных ресурсов ввиду достижения более высокой точности результата с меньшими затратами памяти ЭВМ и меньшим количеством операций. Некоторый подход к построению таких приближений в классе сплайнов дан в работах Буровой И.Г., Демьяновича Ю.К. и Квасова Б.И.

В диссертации рассматриваются построение и свойства минимальных лагранжевых, эрмитовых неполиномиальных сплайнов, изучаются решение задачи Эрмита-Биркгофа минимальными полиномиальными и неполиномиальными сплайнами. Предлагаемые виды приближений были реализованы в виде модулей для пакета аналитических вычислений Maple, позволяющих получать соответствующие базисные функции в аналитическом виде.

Для удобства пользователя создана оболочка в среде разработки Borland C++ Builder.

При построении минимальных сплайнов, так же как в работах Демьяновича Ю.К. и Буровой И.Г., используется идея аппроксимационных соотношений, благодаря чему удается построить приближения с заданным порядком аппроксимации и обладающие точностью на заданном множестве функций как на конечной, так и на бесконечной сетке. При этом рассмотрены несколько типов аппроксимационных соотношений, порождающих различные типы минимальных сплайнов (Лагранжа, Эрмита). Для сохранения свойств приближения на конечной сетке в структуру минимальных сплайнов вблизи концевых точек вводится некоторая неоднородность. Полученные таким образом сплайны называются гранично-минимальными.

Для приближения функций одной переменной предлагается использовать базисы полиномиальных и неполиномиальных минимальных сплайнов, позволяющие строить приближения, точные на соответствующих полиномах.

Для аппроксимации функций многих переменных вводятся мультипликативные базисные функции, причем здесь возможна аппроксимация разного типа по разным координатным направлениям (смешанная аппроксимация).

Цель диссертационной работы

Построить минимальные и гранично-минимальные сплайны, обладающие локальным интерполяционным базисом, точные на алгебраических или обобщенных полиномах заданного порядка, исследовать их свойства, составить оптимальные алгоритмы и отладить соответствующие программные модули. Создать программный комплекс, позволяющий быстро проводить сравнение различных видов приближений с удобным интерфейсом, способствующим быстрому знакомству со свойствами различных видов возможных аппроксимаций и выбору наиболее подходящей для эффективного решения конкретной задачи.

Методы исследования

Для построения базисов минимальных сплайнов разрабатывается метод аппроксимационных соотношений, методы теории функций вещественного переменного (разложения в ряды Тейлора и др.), теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Программирование осуществляется в среде C++ Builder. Аналитическое моделирование осуществляется в среде Maple.

Достоверность и обоснованность

Достоверность результатов подтверждена доказанными теоремами и проведенными многочисленными тестами. Результаты численных экспериментов приведены в диссертации.

Результаты, выносимые на защиту

1. Построены минимальные сплайны, удобные для решения интерполяционных задач Лагранжа и Эрмита, обладающие локальным интерполяционным базисом и свойством точности на обобщенных полиномах заданного порядка, исследованы их свойства, составлены оптимальные алгоритмы и отлажены соответствующие программные модули.

2. Создана оболочка, позволяющая быстро проводить сравнение различных видов приближений. Составлены программные модули и разработана удобная оболочка для изучения тонкостей применения разных видов аппроксимаций, что позволяет эффективно исследовать поведение различных сплайновых приближения на конечной и бесконечной сетках.

3. Построены семейства неполиномиальных элементарных непрерывных гранично минимальных сплайнов, мультипликативных неполиномиальных сплайнов.

4. Построены решения некоторых задач Эрмита-Бирктофа с помощью семейства полиномиальных и неполиномиальных минимальных сплайнов.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Выделим основные:

1. Построены семейства неполиномиальных лагранжевых непрерывных гранично минимальных сплайнов, мультипликативных неполиномиальных сплайнов.

2. Построены семейства эрмитовых минимальных неполиномиальных сплайнов

3. Построены решения некоторых задач Эрмита-Бирктофа с помощью семейства полиномиальных и неполиномиальных минимальных сплайнов.

4. Составлены программные модули и создана удобная оболочка для изучения тонкостей применения разных видов аппроксимаций, что позволяет эффективно исследовать поведение различных сплайновых приближения на конечной и бесконечной сетках.

5. Разработаны алгоритмы для генерации базисных Лагранжевых и Эрмитовых сплайнов.

Теоретическая и практическая полезность

Работа носит теоретический характер и имеет практический интерес. Может быть использована как в обучающих так и в исследовательских целях. Полученные результаты могут быть использованы для создания высокоэффективных алгоритмов решения различных практических прикладных программ. Результаты могут найти применение при решении задач интерполяции и аппроксимации вещественных функций одной и многих переменных как на конечной, так и на бесконечной сетке узлов, сгущающейся к точке особенности, при сжатии и последующем восстановлении с заданной погрешностью больших объемов графической информации, при численном решении ряда задач математической физики, в том числе при решении краевых задач вариационными методами, а также при построении параллельных форм алгоритмов перечисленных здесь задач.

Апробация работы

Основные результаты были доложены на следующих конференциях и семинарах:

1. International conference in memory of V.I.Zubov. Stability and Control Processes. 29.06-1.07.2005. SPb.

2. XXXVII Международная научная конференция аспирантов и студентов "Процессы управления и устойчивость", 11-13 апреля 2006 г. СПб.

Результаты были использованы при чтении лекций по вычислительной математике для студентов математико-механического факультета

Основные результаты опубликованы (см. раздел "Публикации автора по теме диссертации"в конце автореферата) в статьях [2–5] и материалах конференций [1], [6].

Структура и объем работы

Диссертация объемом 146 страниц состоит из введения, четырех глав, разбитых на разделы и параграфы, приложения и списка литературы. Содержит 13 таблиц, 9 рисунков и список цитируемой литературы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. В первой главе рассматривается аппроксимация функций одной и многих переменных вещественными полиномиальными и неполиномиальными минимальными сплайнами. Построенные сплайны мы называем минимальными ввиду того, что при заданном порядке аппроксимации они имеют минимально возможный носитель и задаются полиномами минимально возможной степени.

В дальнейшем рассматривается сетка X одного из двух видов: бесконечная сетка

$$X = \{x_j\}: \quad \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < \ldots, \tag{1}$$

где

$$a = \lim_{j\to-\infty} x_j, \qquad b = \lim_{j\to\infty} x_j,$$

или — конечная сетка

$$X = \{x_j\}: \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b. \tag{1$'$}$$

С сеткой X свяжем упорядоченное множество индексов $J = J(X)$, состоящее из всех целых чисел в случае бесконечной сетки X и из чисел $\{0, 1, \ldots, N\}$ — в случае конечной сетки X вида (1′).

Пусть K_0 — вещественное число, $K_0 \geq 1$. Будем говорить, что сетка $X = \{x_j\}$ лежит в классе $\mathcal{X}_1(K_0)$ локально квазиравномерных сеток, если для любого j со свойством $j-1, j, j+1 \in J$ выполнено условие

$$K_0^{-1} \leq \frac{x_{j+1} - x_j}{x_j - x_{j-1}} \leq K_0. \tag{2}$$

Пусть m, l, s – натуральные числа, такие что $l + s = m + 1$.

В случае бесконечной сетки вида (1) определим базисные минимальные сплайны ω_j с носителями $\mathrm{supp}\omega_j = [x_{j-s}, x_{j+l}]$ из соотношений

$$\sum_{j\in J} \varphi^\alpha(x_j)\omega_j(x) = \varphi^\alpha(x), \quad \alpha = 0, 1, \ldots, m. \qquad (5),$$

где $\varphi(x)$ строго монотонная достаточно гладкая функция.

Соотношения (5) называются аппроксимационными соотношениями. Получающиеся в результате функции $\omega_j(x)$ непрерывны и обладают интерполяционным свойством $\omega_j(x_i) = \delta_{i,j}$, где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Они имеют вид

$$\omega_j(x) = \begin{cases} \prod\limits_{\substack{j'\neq j \\ -l+1\leq j'-k\leq s}} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_{j'})}{\varphi(x_j)-\varphi(x_{j'})}, & x \in [x_k, x_{k+1}), \\ & k = j-s, \ldots, j+l-1; \\ 0, & x \notin [x_{j-s}, x_{j+l}]; \end{cases} \tag{6}$$

и называются элементарными базисными (неполиномиальными) минимальными сплайнами. Таким образом, в этом случае пространство минимальных сплайнов состоит из функций $\widetilde{u}(x)$, определяемых при $x \in [x_k, x_{k+1})$ равенством

$$\widetilde{u}(x) = \sum_{j=k-l+1}^{k+s} v_j \omega_j(x), \tag{7}$$

где $v_j = v(x_j)$ – значения сеточной функции, заданной на сетке $X = \{x_j\}$, $v_j \in R^1$.

В случае конечной сетки ($1'$) рассмотрения аналогичны, но при этом оказывается, что формула (7) сохраняется лишь для интервалов $[x_k, x_{k+1})$, $k = l-1, \dots, N-s$, а для интервалов вблизи левого и правого концов отрезка $[a, b]$ получаются следующие формулы: при $k = 0, \dots, l-2$, $x \in [x_k, x_{k+1})$, полагаем

$$\widetilde{u}(x) = \sum_{j=0}^{l} v_j \omega_j(x), \tag{8}$$

где

$$\omega_j(x) = \prod_{\substack{j' \neq j \\ 0 \leq j' \leq m}} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_{j'})}{\varphi(x_j) - \varphi(x_{j'})}, \quad x \in [x_0, x_{l-1}]. \tag{9}$$

а при $k = N-s+1, \dots, N-1$, $x \in [x_k, x_{k+1})$, берем $\widetilde{u}(x)$ в виде

$$\widetilde{u}(x) = \sum_{j=N-s}^{N} u_j \omega_j(x), \tag{10}$$

где

$$\omega_j(x) = \prod_{\substack{j' \neq j \\ N-m \leq j' \leq N}} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_{j'})}{\varphi(x_j) - \varphi(x_{j'})}, \quad x \in [x_{N-s+1}, x_N]. \tag{11}$$

Базисные сплайны, определяемые формулами (6), (9), (11) будем называть гранично-минимальными базисными сплайнами.

Завершает главу приближение функций многих переменных. С помощью рассмотренных одномерных минимальных сплайнов строим многомерные мультипликативные базисные сплайны

$$\Omega_{j_1, j_2, \dots, j_k}(x_1, x_2, \dots x_k) = \omega_{j_1}(x_1) \omega_{j_2}(x_2) \dots \omega_{j_k}(x_k),$$

линейные комбинации которых позволяют строить приближения функций многих переменных на локально квазиравномерных (вдоль каждой из осей) сетках. Здесь ω_{j_k} — полиномиальные или неполиномиальные минимальные сплайны.

Предлагаются мультипликативные приближения смешанными типами одномерных сплайнов, где, например, по одной переменной используются непрерывные полиномиальные или экспоненциальные базисные сплайны, а по другой — непрерывные тригонометрические базисные сплайны.

Основные результаты первой главы можно сформулировать следующим образом.

Предложены решения задачи Лагранжа в виде не только полиномиальных, но и неполиномиальных сплайновых аппроксимаций. Используемые полиномиальные и неполиномиальные минимальные сплайны являются непрерывными функциями, но их первая производная имеет разрывы первого рода в узлах сетки. Предлагаемые сплайновые аппроксимации обладают свойством точности на заданном множестве функций.

2. Во второй главе рассматривается построение сплайнов $\omega_{j,\alpha}$ ($\alpha \le s$, s — целое число), удобных для решения интерполяционной задачи Эрмита (по этой причине эти сплайны называем эрмитовыми гранично-минимальными сплайнами).

Функцию $u \in C^{m+1}(a,b)$ будем приближать функциями $\widetilde{u}(t)$ вида

$$\widetilde{u}(t) = \sum_j \sum_{\alpha=0}^{s} u^{(\alpha)}(x_j)\omega_{j,\alpha}(t), \tag{1}$$

где s — неотрицательное число, а $\{\omega_{j,\alpha} \mid j \in \mathcal{Z}, \alpha = 0,1,\ldots,s\}$ — семейство функций с компактным носителем на (a,b). Предполагаем, что кратность семейства ω конечна: $æ^{(t)}_{(a,b)}(\omega) < +\infty$.

Аппроксимация (1) точна на функциях $\varphi_\alpha(t) = \varphi^\alpha(t)$, $\alpha = 0,1,\ldots,m$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_j \sum_{\alpha'=0}^{s} \frac{\varphi^{\alpha-\alpha'}(x_j)}{(\alpha-\alpha')!}\omega_{j,\alpha'}(t) = \frac{\varphi^\alpha(t)}{\alpha!}, \quad \alpha = 0,1,\ldots,m;$$

здесь считаем, что $g^\gamma/\gamma! = 0$ при $\gamma < 0$ и $x^\gamma/\gamma! = 1$ при $\gamma = 0$.

Предполагаем, что вронскиан системы функций $\varphi_\alpha(t) = \varphi^\alpha(t)$, $\alpha = 0,1,\ldots,m$ отличен от нуля на промежутке $[a,b]$.

Предположим, что неотрицательные числа r и r_1 таковы, что $r + r_1 = M$, $(s+1)M = m+1$, $\operatorname{supp}\omega_{j,\alpha} = [x_{j-r}.x_{j+r_1}]$, $\alpha = 0,1,\ldots,s$.

Тогда, при $t \in (x_k, x_{k+1})$ получаем:

$$\sum_{j=k-r_1+1}^{k+r} \sum_{\alpha=0}^{s_{k,j}} (\varphi^\beta(x_j))^{(\alpha)}\omega_{j,\alpha}(t) = \varphi^\beta(t), \quad 0 \le \beta \le m; \tag{3}$$

здесь $(\varphi^\beta(x_j))^{(\alpha)}$ означает производную порядка α от функции $\varphi^\beta(t)$ в точке x_j.

Матрица системы уравнений (3) состоит из прямоугольных блоков $(\mathcal{X}_j, \mathcal{X}_j^{(1)}, \ldots, \mathcal{X}_j^{(s)})$, $j = 1,\ldots,M$, здесь и далее через $\mathcal{X}$ будем обозначать вектор-столбец $(1, \varphi(t), \ldots, \varphi^m(t))$, а $\mathcal{X}_j^{(i)}$ — вектор-столбец, составленный из i-х производных компонент вектора $\mathcal{X}$, причем символ j означает, что вектор-функции от t вычислены в точке $t = x_j$.

Таким образом, матрица системы (3) может быть записана в виде суммы

$$\sum_{k-r_1+1<j<k+r} (\mathcal{X}_j, \mathcal{X}_j^{(1)}, \ldots, \mathcal{X}_j^{(s)}).$$

Доказана теорема

$$(\det(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_1^{(1)}, \ldots, \mathcal{X}_1^{(s)} \ldots \mathcal{X}_M, \mathcal{X}_M^{(1)}, \ldots, \mathcal{X}_M^{(s)}) =$$

$$= (1!\,2!\ldots s!)^M \prod_{1\le j<i\le M} (\varphi(x_i)-\varphi(x_j))^{(s+1)^2} \prod_{i=1}^{M} \varphi'(x_i).$$

Доказательство проводится дифференцированием определителя Вандермонда

$$\det(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_{s+1} \ldots \mathcal{X}_{M(s+1)})$$

по входящим в него переменным $x_j, j = 1, 2, \ldots, M$ следующим образом: один раз по x_2, два раза по x_3, …, s раз по x_{s+1} и полагая $x_1 = x_2 = \ldots = x_{s+1}$ и т.д.

Итак, базисные функции $\omega_{j,\alpha}$ находим, решая систему линейных алгебраических уравнений

$$(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_1^{(1)}, \ldots, \mathcal{X}_1^{(s)}, \ldots, \mathcal{X}_M, \mathcal{X}_M^{(1)}, \ldots, \mathcal{X}_M^{(s)})V = \mathcal{X},$$

где вектор-функция V имеет вид:

$$V = (\omega_{1,0}, \ldots, \omega_{1,s}, \ldots, \omega_{M,0}, \ldots, \omega_{M,s}).$$

По теореме Крамера имеем:

$$\omega_{j,i}(t) = \frac{\det(\ldots + (\mathcal{X}_j, \mathcal{X}_j^{(1)}, \ldots, \mathcal{X}_j^{(i-1)}, \mathcal{X}, \mathcal{X}_j^{(i+1)}, \ldots, \mathcal{X}_j^{(s)}) + \ldots)}{\det\left(\sum\limits_{1\le j'\le M} (\mathcal{X}_{j'}, \mathcal{X}_{j'}^{(1)}, \ldots, \mathcal{X}_{j'}^{(s)})\right)},$$

$j = 1, 2, \ldots, M$; $i = 1, 2, \ldots, s$. Здесь определитель в числителе получается из определителя в знаменателе заменой столбца $\mathcal{X}_j^{(i)}$ на столбец $\mathcal{X}$, в первом из определителей выписана j-я группа столбцов, а остальные группы обозначены многоточием.

Определитель, стоящий в знаменателе находится с помощью теоремы, а определитель, стоящий в числителе, вычисляем аналогично.

Перечислим свойства минимальных неполиномиальных сплайнов.

1) Точность аппроксимации равна m, т. е. $u(x) - \tilde{u}(x) \equiv 0$, если $u(x) = \varphi^i(x)$, $i = 0, 1, \ldots m$.

2) Базисный сплайн ω_j представляет собой обобщенный полином порядка m: $\sum_{i=0..m} a_i \varphi^i(x)$.

3) При $l \ge 1$, $s \ge 1$ функция, задающая базисный сплайн, непрерывна.

4) Носитель базисного сплайна содержит $m+1$ сеточных интервалов, а кратность накрытия точки $t \in [a, b]$ носителями базисных сплайнов равна $m+1$ (за исключением узлов сетки $\{x_j\}$).

Приведены различные частные случаи и результаты численных экспериментов.

3. Третья глава посвящена решению задач Эрмита–Биркгофа. Остановимся кратко на содержании.

Пусть в узлах сетки $\{x_j\}$, $\ldots < x_{j-1} < x_j < x_{j+1} < \ldots$ заданы поочередно значения то функции $u(x)$, то ее производной $\ldots, u'_{j-1}, u_j, u'_{j+1}, \ldots$. Считаем, что $u \in C^1(R^1)$.

3.1. На промежутке $[x_j, x_{j+1})$ функцию $u(x)$ приближаем выражением

$$\tilde{u}(x) = u'(x_{j-1})\omega_{j-1,1}(x) + u(x_j)\omega_{j,0}(x) + u'(x_{j+1})\omega_{j+1,1}(x).$$

Из условий $\tilde{u}(x) = u(x)$ при $u = 1, \varphi_1(x), \varphi_2(x)$ получаем систему аппроксимационных соотношений

$$\omega_{j,0}(x) = 1,$$
$$\varphi_1'(x_{j-1})\omega_{j-1,1}(x) + \varphi_1(x_j)\omega_{j,0}(x) + \varphi_1'(x_{j+1})\omega_{j+1,1}(x) = \varphi_1(x),$$
$$\varphi_2'(x_{j-1})\omega_{j-1,1}(x) + \varphi_2(x_j)\omega_{j,0}(x) + \varphi_2'(x_{j+1})\omega_{j+1,1}(x) = \varphi_2(x).$$

Пусть $\varphi_2(x) = \varphi_1^2(x)$, тогда определитель системы равен

$$\Delta_j = 2\varphi_{j-1}'\varphi_{j+1}'(\varphi_{j-1} - \varphi_{j+1}).$$

В предположении, что $\Delta_j \neq 0$ формулы базисных сплайнов имеют вид

$$\begin{aligned}
&\omega_{j,0}(x) = 1,\\
&\omega_{j-1,1}(x) = \frac{\varphi_{j+1}'(\varphi_j - \varphi(x))(2\varphi_{j+1} - \varphi_j - \varphi(x))}{\Delta_j},\\
&\omega_{j+1,1}(x) = \frac{\varphi_{j-1}'(\varphi(x) - \varphi_j)(2\varphi_{j-1} - \varphi(x) - \varphi_j)}{\Delta_j}.
\end{aligned}$$

Эти же формулы применяем на промежутке $[x_{j-1}, x_j]$.

3.2. Пусть в узлах сетки $\{x_j\}$ заданы поочередно значения то функции u_j, то второй производной: $\ldots, u_{j-1}'', u_j, u_{j+1}'', \ldots$.

Функцию $u(x)$ будем приближать на $[x_j, x_{x+1})$ выражением

$$\tilde{u}(x) = u_{j-1}''\omega_{j,2}(x) + u_j\omega_{j,0}(x) + u_{j+1}''\omega_{j+1,2}(x).$$

Базисные функции $\omega_{j,i}(x)$ определяемые из условий

$$u(x) = \tilde{u}(x), \quad u(x) = 1, \varphi_1(x), \varphi_2(x),$$

имеют вид

$$\begin{aligned}
\omega_{j-1,2}(x) &= \frac{(\varphi_j - \varphi(x))(2(\varphi_{j+1}')^2 + 2\varphi_{j+1}\varphi_{j+1}'' - \varphi_{j+1}''\varphi_j - \varphi_{j+1}''\varphi(x))}{\delta_j},\\
\omega_{j+1,2}(x) &= \frac{(\varphi(x) - \varphi_j)(2(\varphi_{j-1}')^2 + 2\varphi_{j-1}\varphi_{j-1}'' - \varphi_{j-1}''\varphi_j - \varphi_{j-1}''\varphi(x))}{\delta_j},
\end{aligned}$$

в предположении, что $\delta_j \neq 0$. Аналогичные формулы применяем на $[x_{j-1}, x_j]$.

3.3. Пусть опять заданы в узлах сетки поочередно значения то функции, то второй производной: $\ldots, u_{j-1}'', u_j, u_{j+1}'', \ldots$.

Функцию $u(x)$ приближаем на $[x_j, x_{j+1})$ соотношением

$$\tilde{u}(x) = u_j\omega_{j,0}(x) + u_{j+1}''\omega_{j+1,2}(x),$$

где

$$\omega_{j+1,2}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi_j}{\varphi_{j+1}''}.$$

4. В четвертой главе описан программный комплекс для решения задач Лагранжа, Эрмита и Эрмита-Биркгофа.

К настоящему времени разработана версия программного комплекса, предназначенная для работы в операционной системе Windows 9x/2000/XP. Отдельные модули, входящие в состав программного комплекса, снабжены подробными инструкциями по применению и могут использоваться как самостоятельные библиотечные процедуры. Основным языком интерфейса является русский. Основными входными данными являются: промежуток интерполяции, шаг сетки или набор упорядоченных по возрастанию узлов сетки; параметры сплайна: аналитические выражения для функций, задающих базисный сплайн (в случае неполиномиального базисного сплайна), целые числа, задающие расположение носителя базисного сплайна относительно вершины, целое число, определяющее количество используемых производных при построении приближения (высоту аппроксимации), аналитическое выражение приближаемой функции или ее значения в узлах сетки.

В результате работы программного комплекса аналитически генерируются формулы базисных сплайнов нулевой и ненулевой высоты, рассчитывается приближение, строятся графики базисных функций, приближений и погрешностей для аппроксимаций Лагранжа и Эрмита.

Программная система для вычисления приближений, решающих задачу Эрмита–Биркгофа, и приближенного интегрирования с помощью полученных сплайнов, состоит из двух подсистем — для проведения численных экспериментов с помощью полученных сплайнов и для проведения численных экспериментов по приближенному вычислению интегралов с помощью построенных квадратурных формул.

Первая программная система обладает следующими возможностями:

1) вывод графиков функций и аппроксимаций, в том числе практически неограниченного количества графиков на одном чертеже;

2) реализация четырех методов аппроксимации как по заранее встроенным в программу тестовым функциям, так и по вводимым пользователем функциям, при этом программный комплекс вычисляет необходимые производные;

3) реализация экспорта полученных иллюстраций в графические файлы, сохранение таблицы значений функций и аппроксимаций в текстовый файл.

Программный комплекс включает в себя встроенные тестовые примеры и предусматривает возможность пользователю проводить собственные вычисления (используя соответствующие рекомендации) приближений и построению изображений функций и поверхностей.

Для удобства пользователя разработана оболочка в C++ Builder, вычислительным ядром для аналитических вычислений которой является среда Maple.

Объем представленной реализации составляет приблизительно 14000 строк. Объем объектного кода примерного 220 KB. Минимальный объем необходимой для исполнения оперативной памяти составляет 8 MB.

В приложении к диссертационной работе даны тексты программ.

Заключение

Построены минимальные сплайны Лагранжа и Эрмита, обладающие локальным интерполяционным базисом, точные на обобщенных полиномах заданного порядка, исследованы их свойства, составлены оптимальные алгоритмы и отлажены соответствующие программные модули. Создана оболочка, позволяющая быстро проводить сравнение различных видов приближений. Разработаны параллельные алгоритмы решения некоторых задач интерполяции. Построены семейства полиномиальных и неполиномиальных элементарных непрерывных гранично минимальных сплайнов, мультипликативных полиномиальных и неполиномиальных сплайнов. Построены решения некоторых задач Эрмита-Биркгофа с помощью семейства полиномиальных и неполиномиальных минимальных сплайнов. Составлены программные модули и разработана удобная оболочка для изучения тонкостей применения разных видов аппроксимаций, что позволяет эффективно исследовать поведение различных сплайновых приближения на конечной и бесконечной сетках.

Список опубликованных работ по теме диссертации

1. Бурова И.Г., Тимофеев В.А. Об эрмитовых аппроксимациях с заданным свойством точности.
   Материалы XXXVII международной научной конференции аспирантов и студентов "Процессы управления и устойчивость", 11-13 апреля 2006 г., СПб., 3 стр.

2. Бурова И.Г., Тимофеев В. А. Построение приближений Эрмита и Эрмита-Биркгофа с заданными свойствами. Деп в ВИНИТИ N 222 В2005 от 15 февраля 2005. 14 с.

3. Бурова И.Г., Тимофеев В.А. Построение сплайнов ненулевой высоты. Сб. Методы вычислений Т. 21. 2005. с. 31–39

4. Бурова И.Г., Тимофеев В.А. Решение задачи Эрмита-Биркгофа с помощью минимальных неполиномиальных сплайнов. // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2006. Вып. 3. С. 50-51.

5. Тимофеев В.А. Программная реализация алгоритмов решения задачи Эрмита-Биркгофа с помощью минимальных сплайнов и построение согласованных квадратурных формул, Деп в ВИНИТИ № 1171 от 7 июля 2004. 8 с.

6. Тимофеев В.А. Программная реализация решений обобщенных задач Эрмита и Эрмита-Биркгофа. Proceedings International conference in memory of V.I.Zubov. Stability and Control Processes. 29.06-1.07.2005. SPb. V.2. p 965-974.