УДК 519.677 Вестник СПбГУ. Сер. 1, 1998, вып. (№)

В. Н. Малоземов, А. А. Третьяков

АЛГОРИТМ КУЛИ-ТЬЮКИ И ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХААРА*

1°. Пусть $\mathbb{C}_N$ — линейное пространство комплекснозначных N-периодических последовательностей $x = \{x(j)\}$, $j \in \mathbb{Z}$, называемых для краткости сигналами, $\mathcal{F}_N : \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_N$ — дискретное преобразование Фурье [1] и $\mathcal{H}_N : \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_N$ — дискретное преобразование Хаара [2]. В заметке будет показано, что при $N = 2^n$ между дискретными преобразованиями Фурье и Хаара существует связь. Обнаружить эту связь поможет последовательность ортогональных базисов $\{\mu_s(k;j)\}_{k=0}^{N-1}$, $s = 0, 1, ..., n$, в пространстве $\mathbb{C}_N$, которая будет построена в следующем пункте.

2°. Обозначим через $\delta_N(j)$ единичный N-периодический импульс, равный единице при $j = 0, \pm N, \pm 2N, ...$ и равный нулю при остальных $j \in \mathbb{Z}$. С его помощью любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ можно представить в виде

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\delta_N(j-k) \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Положим $N = 2^n$, $N_s = N/2^s$, $\Delta_s = 2^{s-1}$, $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$. Сигнал $\mu_s(k;j)$ как элемент пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать через $\mu_s(k)$. Последовательность $\{\mu_s(k)\}$ построим по рекуррентным формулам:

$$\mu_0(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k \in 0 : N-1; \tag{2a}$$

$$\mu_s(m + 2l\Delta_s) = \tfrac{1}{2}[\mu_{s-1}(m + 2l\Delta_s) + \omega_{2\Delta_s}^m \mu_{s-1}(m + (2l+1)\Delta_s)], \tag{2b}$$

$$\mu_s(m + (2l+1)\Delta_s) = \tfrac{1}{2}[\mu_{s-1}(m + 2l\Delta_s) - \omega_{2\Delta_s}^m \mu_{s-1}(m + (2l+1)\Delta_s)], \tag{2c}$$

$$l = 0 : N_s - 1, \quad m \in 0 : \Delta_s - 1, \quad s \in 1 : n.$$

Так же, как в [3], показывается, что

$$\mu_s(m + 2l\Delta_s) = \frac{1}{2^s} \sum_{q=0}^{2\Delta_s - 1} \mu_0(q + 2l\Delta_s)\omega_N^{m\,\mathrm{rev}(q)}, \tag{3}$$

где $l \in 0 : N_s - 1$, $m \in 0 : 2\Delta_s - 1$, $s \in 0 : n$ и $\mathrm{rev}(q)$ — целое неотрицательное число, двоичный код которого равен перевернутому n-разрядному двоичному коду числа q. В частности, при $k, j \in 0 : N-1$

$$\mu_n(k;j) = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} \delta_N(j-q)\omega_N^{k\,\mathrm{rev}(q)} = \frac{1}{N}\omega_N^{k\,\mathrm{rev}(j)}. \tag{4}$$

3°. Если в $\mathbb{C}_N$ ввести скалярное произведение $\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{y(j)}$ и норму $||x|| = \langle x, x\rangle^{1/2}$, то с помощью формулы (3) нетрудно проверить, что

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00269)

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

при каждом $s \in 0:n$ система сигналов $\{\mu_s(k)\}_{k=0}^{N-1}$ является ортогональной и $||\mu_s(k)||^2 = 2^{-s}$. Это позволяет любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ при каждом $s \in 0:n$ представить в виде

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} x_s(k)\mu_s(k), \tag{5}$$

где $x_s(k) = 2^s\langle x, \mu_s(k)\rangle$. Для коэффициентов $x_s(k)$ справедливы рекуррентные формулы

$$x_0(k) = x(k), \qquad k \in 0:N-1; \tag{6a}$$

$$x_s(m + 2l\Delta_s) = x_{s-1}(m + 2l\Delta_s) + \omega_{2\Delta_s}^{-m} x_{s-1}(m + (2l+1)\Delta_s), \tag{6b}$$

$$x_s(m + (2l+1)\Delta_s) = x_{s-1}(m + 2l\Delta_s) - \omega_{2\Delta_s}^{-m} x_{s-1}(m + (2l+1)\Delta_s), \tag{6c}$$

$$l \in 0:N_s - 1, \quad m \in 0:\Delta_s - 1, \quad s \in 1:n.$$

Эти формулы очевидным образом следуют из (2a)–(2c). При $s = n$ согласно (4) получаем

$$x_n(k) = 2^n\langle x, \mu_n(k)\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\omega_N^{-k\,\mathrm{rev}(j)}.$$

Введем сигнал x_0 по правилу

$$x_0(k) = x(\mathrm{rev}(k)), \qquad k \in 0:N-1. \tag{7}$$

Тогда

$$x_n(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(\mathrm{rev}(j))\omega_N^{-k\,\mathrm{rev}(j)} = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\omega_N^{-kj} =: X(k).$$

Величина $X(k)$ есть k-я компонента дискретного преобразования Фурье сигнала x. Следовательно, по рекуррентным формулам (7), (6b), (6c) вычисляется $\mathcal{F}_N(x)$. Указанные формулы соответствуют алгоритму Кули-Тьюки с прореживанием по частоте.

4°. Теперь на основе последовательности $\{\mu_s(k)\}_{k=0}^{N-1}$, $s = 0, 1, ..., n$, построим вейвлетное разложение пространства $\mathbb{C}_N$, базисными функциями которого будут дискретные функции Хаара. Обозначим через V_s и W_s линейные оболочки, натянутые соответственно на сигналы $\{\mu_s(2l\Delta_s)\}_{l=0}^{N_s-1}$ и $\{\mu_s((2l+1)\Delta_s)\}_{l=0}^{N_s-1}$. Согласно (1), $V_0 = \mathbb{C}_N$. Подпространства W_s определены при $s = 1, ..., n$.

Запишем формулы (2b) и (2c) при $m = 0$:

$$\mu_s(2l\Delta_s) = \tfrac{1}{2}\left[\mu_{s-1}(2l\Delta_s) + \mu_{s-1}((2l+1)\Delta_s)\right],\ l \in 0:N_s - 1; \tag{8a}$$

$$\mu_s((2l+1)\Delta_s) = \tfrac{1}{2}[\mu_{s-1}(2l\Delta_s) - \mu_{s-1}\left((2l+1)\Delta_s\right)],\ l \in 0:N_s - 1. \tag{8b}$$

Отсюда следует, что $V_s \subset V_{s-1}$, $W_s \subset V_{s-1}$. Учитывая, что сигналы $\mu_s(k\Delta_s)$ при $k \in 0:2N_s - 1$ ортогональны и их количество совпадает с размерностью V_{s-1} , заключаем, что $V_{s-1} = V_s \oplus W_s$. Последовательное применение этой формулы приводит к вейвлетному разложению пространства $\mathbb{C}_N$:

$$\mathbb{C}_N = V_0 = W_1 \oplus V_1 = W_1 \oplus (W_2 \oplus V_2) = \cdots = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n \oplus V_n. \tag{9}$$

Здесь V_n — одномерное подпространство комплексных констант, поскольку, согласно (4), $\mu_n(0;j) \equiv N^{-1}$.

Подпространства W_s называются вейвлетными. В силу (3) базисные функции подпространства W_s обладают свойством

$$\mu_s((2l+1)\Delta_s; j) = \mu_s(\Delta_s; j - 2l\Delta_s), \qquad l \in 0 : N_s - 1. \tag{10}$$

Теорема. *Справедлива формула*

$$\mu_s(\Delta_s; j) = \begin{cases} 2^{-s} & при\ j \in 0 : \Delta_s - 1, \\ -2^{-s} & при\ j \in \Delta_s : 2\Delta_s - 1, \\ 0 & при\ j \in 2\Delta_s : N - 1. \end{cases} \tag{11}$$

Доказательство. Согласно (3)

$$\mu_s(\Delta_s; j) = \frac{1}{2^s} \sum_{q=0}^{2\Delta_s - 1} \delta_N(j-q)\omega_N^{\Delta_s \operatorname{rev}(q)}. \tag{12}$$

При $s = 1$ получаем $\mu_1(\Delta_1; j) = \frac{1}{2}[\delta_N(j) - \delta_N(j-1)]$, что соответствует формуле (11). В дальнейшем считаем, что $s \geqslant 2$.

Пусть $q \in 0 : \Delta_s - 1$. Тогда

$$q = q_1 2^{s-2} + \cdots + q_{s-2}2^1 + q_{s-1}, \quad q_k \in \{0, 1\};$$

$$\operatorname{rev}(q) = q_{s-1}2^{n-1} + q_{s-2}2^{n-2} + \cdots + q_1 2^{n-s+1};$$

$$\Delta_s \operatorname{rev}(q) = q_{s-1}2^{n+s-2} + q_{s-2}2^{n+s-3} + \cdots + q_1 2^n.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\omega_N^{\Delta_s \operatorname{rev}(q)} = 1 \quad \text{при} \quad q \in 0 : \Delta_s - 1. \tag{13}$$

Далее, при $q \in \Delta_s : 2\Delta_s - 1$ имеем

$$q = 2^{s-1} + t_1 2^{s-2} + \cdots + t_{s-2}2^1 + t_{s-1}, \quad t_k \in \{0, 1\};$$

$$\operatorname{rev}(q) = t_{s-1}2^{n-1} + t_{s-2}2^{n-2} + \cdots + t_1 2^{n-s+1} + 2^{n-s};$$

$$\Delta_s \operatorname{rev}(q) = t_{s-1}2^{n+s-2} + t_{s-2}2^{n+s-3} + \cdots + t_1 2^n + 2^{n-1},$$

так что

$$\omega_N^{\Delta_s \operatorname{rev}(q)} = -1 \quad \text{при} \quad q \in \Delta_s : 2\Delta_s - 1. \tag{14}$$

Подставив (13), (14) в (12), получим

$$\mu_s(\Delta_s; j) = \frac{1}{2^s} \left[\sum_{q=0}^{\Delta_s - 1} \delta_N(j-q) - \sum_{q=\Delta_s}^{2\Delta_s - 1} \delta_N(j-q) \right].$$

Это соответствует (11). Теорема доказана.

Согласно (9) система сигналов

$$\left\{ \mu_n(0);\ \{\mu_s((2l+1)\Delta_s)\}_{l=0}^{N_s-1},\ s = 1, ..., n \right\} \tag{15}$$

является ортогональным базисом в пространстве $\mathbb{C}_N$. Формулы (10), (11) показывают, что (15) — дискретный базис Хаара.

5°. Возьмем сигнал x и разложим его по ортогональному базису (15):

$$x = x_n(0)\mu_n(0) + \sum_{s=1}^{n}\sum_{l=0}^{N_s-1} x_s((2l+1)\Delta_s)\mu_s((2l+1)\Delta_s). \tag{16}$$

Здесь

$$x_s((2l+1)\Delta_s) = 2^s\langle x, \mu_s((2l+1)\Delta_s)\rangle,$$

$$x_n(0) = 2^n\langle x, \mu_n(0)\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j).$$

Коэффициенты разложения (16) можно вычислять по рекуррентным формулам

$$x_0(k) = x(k), \qquad k \in 0 : N-1;$$

$$x_s(2l\Delta_s) = x_{s-1}(2l\Delta_s) + x_{s-1}((2l+1)\Delta_s), \tag{17}$$

$$x_s((2l+1)\Delta_s) = x_{s-1}(2l\Delta_s) - x_{s-1}((2l+1)\Delta_s), \tag{18}$$

$$l \in 0 : N_s - 1, \quad s \in 1 : n.$$

Это очевидным образом следует из (8a), (8b). Формула (18) дает N_s коэффициентов в разложении (16), а величины $x_s(2l\Delta_s)$ используются для вычисления следующей группы коэффициентов $x_{s+1}((2l+1)\Delta_{s+1})$, $l \in 0 : N_{s+1} - 1$. Коэффициент $x_n(0)$ вычисляется по формуле (17) при $s = n$.

6°. Разложение (16) можно получить более прямым путем. Для этого наряду с сигналом x рассмотрим сигнал $\tilde{x}$ с компонентами

$$\tilde{x}(2l) = x(2l+1),\ \tilde{x}(2l+1) = x(2l), \quad l \in 0 : N_1 - 1.$$

Имеем

$$x(j) = \tfrac{1}{2}\,[x(j) + \tilde{x}(j)] + \tfrac{1}{2}[x(j) - \tilde{x}(j)] =: v_1(j) + w_1(j).$$

Согласно (1), (17) и (8a) запишем

$$v_1(j) = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{N_1-1}[x(2l) + x(2l+1)]\delta_N(j-2l) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{N_1-1}[x(2l+1) + x(2l)]\delta_N(j-2l-1) = \sum_{l=0}^{N_1-1} x_1(2l\Delta_1)\mu_1(2l\Delta_1).$$

Аналогично в силу (18) и (8b)

$$w_1(j) = \sum_{l=0}^{N_1-1} x_1((2l+1)\Delta_1)\mu_1((2l+1)\Delta_1).$$

Слагаемое w_1 есть вейвлетная составляющая сигнала x. Оно входит в правую часть представления (16) при $s = 1$. Слагаемое v_1 разложим по той же схеме $v_1 = v_2 + w_2$, где

$$v_2(j) = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{N_2-1}[x_1(2l\Delta_2) + x_1((2l+1)\Delta_2)][\mu_1(2l\Delta_2) + \mu_1((2l+1)\Delta_2)] =$$

$$= \sum_{l=0}^{N_2-1} x_2(2l\Delta_2)\mu_2(2l\Delta_2),$$

$$w_2(j) = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{N_2-1}[x_1(2l\Delta_2) - x_1((2l+1)\Delta_2)][\mu_1(2l\Delta_2) - \mu_1((2l+1)\Delta_2)] =$$

$$= \sum_{l=0}^{N_2-1} x_2((2l+1)\Delta_2)\mu_2((2l+1)\Delta_2).$$

Продолжив этот процесс, придем к формуле (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М., 1989. 448 с.
2. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. Philadelphia, 1992. 357 pp.
3. *Малоземов В. Н., Третьяков А. А.* Новый подход к алгоритму Кули-Тьюки // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1997. Вып. 3 (№ 15). С. 57–60.

Статья поступила в редакцию

РЕФЕРАТ

УДК 519.677

М а л о з е м о в В. Н., Т р е т ь я к о в А. А. **Алгоритм Кули-Тьюки и дискретное преобразование Хаара** // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1998. Вып. (№). С. 00–00.

В пространстве дискретных периодических сигналов построена последовательность ортогональных базисов. С помощью этой последовательности установлена связь между дискретным преобразованием Фурье и дискретным преобразованием Хаара.

Библиогр. 3 назв.

SUMMARY

Malozemov V. N., Tretyakov A. A. The Cooley-Tukey algorithm and Discrete Haar Transform.

The sequence of orthogonal bases is built in the space of discrete periodic signals. With the help of this sequence, a connection between Discrete Fourier Transform and Discrete Haar Transform is established.

РЕЗЮМЕ

Малоземов В. Н., Третьяков А.А. Алгоритм Кули-Тьюки и дискретное преобразование Хаара.

В пространстве дискретных периодических сигналов построена последовательность ортогональных базисов. С помощью этой последовательности установлена связь между дискретным преобразованием Фурье и дискретным преобразованием Хаара.