УДК 519.65

ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ И ИХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ[1)]

© **В. Н. Малоземов, А. Б. Певный**

(Санкт-Петербург, Сыктывкар)

Построены основы теории дискретных периодических сплайнов. В качестве приложения рассмотрены задачи интерполяции и сглаживания дискретных периодических данных.

1. ВВЕДЕНИЕ

Дискретные периодические сплайны были введены в [1]. Там же отмечалась возможность их эффективного применения к интерполяции и сглаживанию дискретных периодических данных. В этой статье теория дискретных периодических сплайнов вместе с указанными приложениями представлена в развернутом виде.

В разд. 2 изучаются фундаментальные свойства дискретных периодических B-сплайнов. В разд. 3 дается определение дискретного периодического сплайна как линейной комбинации с комплексными коэффициентами сдвигов B-сплайна. Показывается, что возможно эквивалентное определение в терминах разложения по дискретным функциям Бернулли.

В разд. 4 получено явное решение задачи дискретной сплайн-интерполяции. Установлено, что интерполяционный дискретный периодический сплайн обладает свойством минимальной нормы. В разд. 5 приводится решение задачи сглаживания дискретных периодических данных.

Некоторые предварительные результаты по теме статьи были опубликованы в [2, 3]. Исследованию задач интерполяции и сглаживания дискретных периодических данных на основе дискретного преобразования Фурье

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–00269).

(ДПФ) посвящены работы [4, 5, 6]. Необходимые сведения из дискретного гармонического анализа имеются, например, в [7].

В статье используются следующие обозначения:

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\langle k \rangle_N$ — остаток от деления целого числа k на натуральное число $N \geq 2$; по определению $\langle k \rangle_N \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$;

$x = u + iv$ — комплексное число;

$x^* = u - iv$ — сопряженное комплексное число;

$|x| = \sqrt{xx^*} = \sqrt{u^2 + v^2}$ — модуль комплексного числа;

$\omega_N = \exp(2\pi i/N) = \cos(2\pi/N) + i \sin(2\pi/N)$ — корень N-й степени из единицы;

$\mathbb{C}_N$ — линейное множество сигналов (комплекснозначных последовательностей $x = \{x(j)\}$, N-периодических по индексу $j \in \mathbb{Z}$);

$\delta_N(j)$ — единичный импульс (сигнал, у которого $\delta_N(j) = 1$ при $\langle j \rangle_N = 0$ и $\delta_N(j) = 0$ при остальных $j \in \mathbb{Z}$);

$\Delta^r x(j) = \sum_{l=0}^{r} (-1)^{r-l} C_r^l x(j+l)$ — конечная разность r-го порядка.

Существенную роль будут играть формулы

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{jk} = \delta_N(j) \qquad \forall j \in \mathbb{Z},$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} x(j+l) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \qquad \forall l \in \mathbb{Z}.$$

Последняя формула верна для произвольного x из $\mathbb{C}_N$.

2. ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ В-СПЛАЙНЫ

Пусть m, n, r — натуральные числа и $N = mn$, $N \geq 2$. Положим

$$u(k) = \begin{cases} n^2 & \text{при } k = 0, \\ \left(\sin \dfrac{\pi k}{m} \Big/ \sin \dfrac{\pi k}{N}\right)^2 & \text{при } k = 1, \ldots, N-1. \end{cases}$$

Отметим, что

$$u(m) = u(2m) = \cdots = u\big((n-1)m\big) = 0, \tag{2.1}$$

$$u(N-k) = u(k), \qquad k = 1, \ldots, N-1. \tag{2.2}$$

Дискретный периодический В-сплайн $Q_r(j)$ порядка r определим формулой

$$Q_r(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u^r(k) \omega_N^{jk}, \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Согласно (2.2), $Q_r(j)$ принимает вещественные значения, так что формулу (2.3) можно переписать в виде

$$Q_r(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u^r(k) \cos\left(\frac{2\pi}{N} jk\right).$$

Отсюда, в частности, следует, что $Q_r(-j) = Q_r(j)$.

При $m = 1$ согласно (2.1) имеем $Q_r(j) \equiv N^{2r-1}$. При $n = 1$ будет $u(k) \equiv 1$, поэтому $Q_r(j) = \delta_N(j)$. В общем случае можно показать, что В-сплайн $Q_r(j)$ принимает только целые неотрицательные значения [3].

Лемма 1. *Справедливо тождество*

$$\sum_{p=0}^{m-1} Q_r(j - pn) \equiv n^{2r-1} \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Учитывая (2.3), запишем

$$\sum_{p=0}^{m-1} Q_r(j-pn) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^r(k) \sum_{p=0}^{m-1} \omega_N^{(j-pn)k} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} u^r(k)\omega_N^{jk} \left\{ \frac{1}{m}\sum_{p=0}^{m-1} \omega_m^{-kp} \right\} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} u^r(k)\omega_N^{jk}\delta_m(k) = n^{2r-1}.$$

Мы воспользовались свойством (2.1). Лемма доказана.

Вычислим $Q_r(pn)$ при $p = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$. Любой индекс $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$ можно представить в виде $k = sm + l$, где $s = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, $l = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$. Согласно (2.3) имеем

$$Q_r(pn) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{n-1} u^r(sm+l)\omega_N^{pn(sm+l)} = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\omega_m^{pl}\left\{ \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} u^r(sm+l) \right\}.$$

Обозначим $T_r(l) = \dfrac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} u^r(sm+l)$. Тогда

$$Q_r(pn) = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} T_r(l)\omega_m^{pl}.$$

Из этой формулы следует, что

$$T_r(l) = \sum_{p=0}^{m-1} Q_r(pn)\omega_m^{-lp}, \qquad l = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.5}$$

В частности,

$$T_r(m-l) = T_r(l), \qquad l = 1, \ldots, m-1. \tag{2.6}$$

Действительно,

$$T_r(m-l) = \sum_{p=0}^{m-1} Q_r(pn)\omega_m^{-(m-l)p} =$$

$$= Q_r(0) + \sum_{p=1}^{m-1} Q_r\big((m-p)n\big)\omega_m^{-l(m-p)} = \sum_{q=0}^{m-1} Q_r(qn)\omega_m^{-lq} = T_r(l).$$

Введем величину

$$\lambda_r(l) = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{\pi(sm+l)}{N}\right)^{-2r}, \qquad l = 1, \ldots, m-1.$$

Согласно определению $T_r(l)$ и $u(k)$ получим

$$T_r(l) = \begin{cases} n^{2r-1} & \text{при } l = 0, \\ \left(2\sin\dfrac{\pi l}{m}\right)^{2r}\lambda_r(l) & \text{при } l = 1, \ldots, m-1. \end{cases} \tag{2.7}$$

Отсюда видно, что все числа $T_r(l)$ положительны.

В [8] были введены дискретные периодические функции Бернулли $b_r(j)$,

$$b_r(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}(\omega_N^k - 1)^{-r}\omega_N^{jk}, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1. *Справедливо представление*

$$Q_r(j) = \frac{1}{N}n^{2r} + \sum_{l=-r}^{r}(-1)^{r-l}C_{2r}^{r-l}b_{2r}(j+r-ln). \tag{2.8}$$

Доказательство. Поскольку при $k = 1, \ldots, N-1$

$$u(k) = \frac{\omega_m^{-k}(\omega_m^k - 1)^2}{\omega_N^{-k}(\omega_N^k - 1)^2},$$

то

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}u^r(k)\omega_N^{jk} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}(\omega_m^k - 1)^{2r}(\omega_N^k - 1)^{-2r}\omega_N^{k(j+r-rn)} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}(\omega_N^k - 1)^{-2r}\sum_{p=0}^{2r}(-1)^{2r-p}C_{2r}^{p}\omega_N^{k(j+r-(r-p)n)} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}(\omega_N^k - 1)^{-2r}\sum_{l=-r}^{r}(-1)^{r-l}C_{2r}^{r-l}\omega_N^{k(j+r-ln)} =$$

$$= \sum_{l=-r}^{r} (-1)^{r-l} C_{2r}^{r-l} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-2r} \omega_N^{k(j+r-ln)} \right\} =$$

$$= \sum_{l=-r}^{r} (-1)^{r-l} C_{2r}^{r-l} b_{2r}(j + r - ln).$$

Теперь заключение теоремы следует из формулы (2.3). Теорема доказана.

Представление (2.8) позволяет вывести некоторые свойства дискретных B-сплайнов, опираясь на свойство дискретных функций Бернулли. Напомним, что

$$\Delta b_r(j) := b_r(j+1) - b_r(j) = b_{r-1}(j), \qquad r = 1, 2, \ldots;$$
$$\sum_{j=0}^{N-1} b_r(j) = 0; \qquad b_0(j) = \delta_N(j) - \frac{1}{N}. \tag{2.9}$$

Лемма 2. *Справедлива формула*

$$\Delta^{2r} Q_r(j) = \sum_{l=-r}^{r} (-1)^{r-l} C_{2r}^{r-l} \delta_N(j + r - ln).$$

Доказательство непосредственно следует из (2.8) и (2.9).

3. ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

Дискретный периодический сплайн $S(j)$ порядка r определим как линейную комбинацию с комплексными коэффициентами сдвигов B-сплайна $Q_r(j)$:

$$S(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r(j - pn). \tag{3.1}$$

Множество сплайнов вида (3.1) обозначим через $\mathbb{S}_r^m$.

Лемма 3. *Базисные сигналы* $Q_r(j - pn)$, $p = 0, 1, \ldots, m-1$, *линейно независимы на* $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть

$$S_0(j) := \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r(j - pn) = 0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}$$

при некоторых комплексных $c(p)$. Покажем, что все $c(p)$ равны нулю. Имеем

$$0 = \sum_{j=0}^{N-1} S_0(j) \omega_N^{-kj} = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) \sum_{j=0}^{N-1} Q_r(j - pn) \omega_N^{-k(j-pn)-kpn} =$$

$$= \left\{ \sum_{p=0}^{m-1} c(p) \omega_m^{-kp} \right\} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} Q_r(j) \omega_N^{-kj} \right\}. \tag{3.2}$$

Согласно (2.3)

$$\sum_{j=0}^{N-1} Q_r(j) \omega_N^{-kj} = u^r(k), \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Обозначим $C(k) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) \omega_m^{-kp}$. Тогда (3.2) можно переписать в виде $C(k) u^r(k) = 0$. По определению $u(k) \neq 0$ при $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, m-1$. Значит, $C(k) = 0$ при $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, m-1$. По формуле обращения получаем

$$c(p) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} C(k) \omega_m^{pk} = 0, \qquad p = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Лемма доказана.

Таким образом, индекс m у $\mathbb{S}_r^m$ обозначает размерность этого линейного пространства.

Теорема 2. *Для того чтобы сигнал S принадлежал $\mathbb{S}_r^m$, необходимо и достаточно, чтобы он допускал представление*

$$S(j) = d + \sum_{l=0}^{m-1} d(l) b_{2r}(j + r - ln), \tag{3.3}$$

где $\sum_{l=0}^{m-1} d(l) = 0$.

Доказательство. Необходимость. Согласно (3.1) и (2.8)

$$S(j)=\sum_{p=0}^{m-1}c(p)\left[\frac{1}{N}n^{2r}+\sum_{k=-r}^{r}(-1)^{r-k}C_{2r}^{r-k}b_{2r}\big(j+r-(k+p)n\big)\right]=$$

$$=\frac{n^{2r}}{N}\sum_{p=0}^{m-1}c(p)+\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{k=-r}^{r}c(p)(-1)^{r-k}C_{2r}^{r-k}b_{2r}\big(j+r-\langle k+p\rangle_m n\big).$$

Приведя подобные в двойной сумме, придем к формуле (3.3). При этом

$$\sum_{l=0}^{m-1}d(l)=\sum_{p=0}^{m-1}c(p)\sum_{k=-r}^{r}(-1)^{r-k}C_{2r}^{r-k}=0.$$

Достаточность. Из леммы 1 следует, что любая комплексная константа принадлежит $\mathcal{S}_r^m$. Остается проверить, что множеству $\mathcal{S}_r^m$ принадлежит сигнал

$$g(j)=\sum_{l=0}^{m-1}d(l)b_{2r}(j+r-ln), \tag{3.4}$$

у которого $\sum_{l=0}^{m-1}d(l)=0$. Найдем ДПФ от g. Имеем

$$G(k):=\sum_{j=0}^{N-1}g(j)\omega_N^{-kj}=\sum_{l=0}^{m-1}d(l)\sum_{j=0}^{N-1}b_{2r}(j+r-ln)\omega_N^{-k(j-ln)-kln}=$$

$$=\left\{\sum_{l=0}^{m-1}d(l)\omega_m^{-kl}\right\}\left\{\sum_{j=0}^{N-1}b_{2r}(j+r)\omega_N^{-kj}\right\}. \tag{3.5}$$

Покажем, что при $k=1,\ldots,N-1$

$$I_k:=\sum_{j=0}^{N-1}b_{2r}(j+r)\omega_N^{-kj}=(-1)^r\left(2\sin\frac{\pi k}{N}\right)^{-2r}.$$

Действительно,

$$I_k = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N-1}(\omega_N^s - 1)^{-2r}\omega_N^{rs}\sum_{j=0}^{N-1}\omega_N^{j(s-k)} = \sum_{s=1}^{N-1}(\omega_N^s - 1)^{-2r}\omega_N^{rs}\delta_N(s-k) =$$

$$= (\omega_N^k - 1)^{-2r}\omega_N^{kr} = \left(\omega_N^k - 2 + \omega_N^{-k}\right)^{-r} = (-1)^r\left(2\sin\frac{\pi k}{N}\right)^{-2r}.$$

Обозначим $D(k) = \sum_{l=0}^{m-1} d(l)\omega_m^{-kl}$. По условию

$$D(0) = D(m) = \cdots = D\big((n-1)m\big) = 0. \tag{3.6}$$

Теперь формулу (3.5) можно переписать в виде

$$G(k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \\ (-1)^r\left(2\sin\dfrac{\pi k}{N}\right)^{-2r} D(k) & \text{при } k = 1, \ldots, N-1. \end{cases} \tag{3.7}$$

Согласно (3.6)

$$G(0) = G(m) = \cdots = G\big((n-1)m\big) = 0. \tag{3.8}$$

Введем m-периодический сигнал $A(k)$,

$$A(k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \\ (-1)^r\left(2\sin\dfrac{\pi k}{m}\right)^{-2r} D(k) & \text{при } k = 1, \ldots, m-1. \end{cases}$$

Существенно, что

$$G(k) = u^r(k)A(k), \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{3.9}$$

Эта формула верна при $k = 0$, m, …, $(n-1)m$ в силу (3.8), а при остальных $k = 1$, …, $N-1$ — в силу (3.7).

Положим

$$a(l) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} A(k)\omega_m^{lk}, \qquad l = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Учитывая (3.9) и (2.3), получаем

$$g(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G(k)\omega_N^{jk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^r(k)A(k)\omega_N^{jk} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^r(k)\left\{\sum_{l=0}^{m-1} a(l)\omega_m^{-kl}\right\}\omega_N^{jk} = \sum_{l=0}^{m-1} a(l)\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^r(k)\omega_N^{k(j-ln)}\right\} =$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} a(l)Q_r(j-ln). \tag{3.10}$$

Теорема доказана.

Замечание. По ходу доказательства описана схема перехода от разложения (3.4) сигнала g к разложению (3.10). Схема выглядит так:

$$\{d(l)\} \to \{D(k)\} \to \{A(k)\} \to \{a(l)\}.$$

Лемма 4. *Для произвольного сплайна $S \in \mathbb{S}_r^m$ и произвольного сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ справедливо соотношение*

$$J(x) := \sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S(j)\Delta^r x(j) = (-1)^r \sum_{l=0}^{m-1} d(l)x(ln), \tag{3.11}$$

где $d(l)$ — коэффициенты из представления (3.3) сплайна S.

Доказательство. Согласно (2.9) имеем

$$J(x) = \sum_{j=0}^{N-1}\left\{\sum_{l=0}^{m-1} d(l)b_r\big(r-(ln-j)\big)\right\}\Delta^r x(j).$$

Поскольку $b_r(r-j) = (-1)^r b_r(j)$, то

$$J(x) = (-1)^r \sum_{l=0}^{m-1} d(l)\left\{\sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r x(j)b_r(ln-j)\right\}.$$

Как известно [8],

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r x(j) b_r(ln-j) = x(ln) - c,$$

где $c = N^{-1} \sum\limits_{j=0}^{N-1} x(j)$. Учитывая эту формулу и тот факт, что $\sum\limits_{l=0}^{m-1} d(l) = 0$, приходим к (3.11). Лемма доказана.

4. ДИСКРЕТНАЯ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Рассмотрим интерполяционную задачу на множестве $\mathbb{S}_r^m$ дискретных периодических сплайнов

$$S(kn) = z(k), \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{4.1}$$

где $z(k)$ — произвольные комплексные числа. Распишем ее подробнее

$$\sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r\big((k-p)n\big) = z(k), \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{4.2}$$

Матрица D этой системы с элементами $D(k,p) = Q_r\big((k-p)n\big)$ является симметричной и правоциркулянтной. Симметричность связана с четностью B-сплайна $Q_r(j)$, а правоциркулянтность проверяется непосредственно:

$$D(k-1, p-1) = D(k,p), \qquad k, p = 1, \ldots, m-1,$$

$$D(0, m-k) = Q_r(kn) = D(k, 0), \qquad k = 1, \ldots, m-1.$$

Положим $h(p) = D(p,0) = Q_r(pn)$, $p = 0,\, 1,\, \ldots,\, m-1$. Как известно [9, с. 45], собственные числа θ_l правоциркулянтной матрицы D имеют вид

$$\theta_l = \sum_{p=0}^{m-1} h(p)\omega_m^{-lp} = \sum_{p=0}^{m-1} Q_r(pn)\omega_m^{-lp}, \qquad l = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Согласно (2.5), $\theta_l = T_r(l)$, $l = 0,\, 1,\, \ldots,\, m-1$. В частности, все собственные числа матрицы D положительны. Это гарантирует невырожденность D

и, как следствие, однозначную разрешимость системы (4.2) при любых правых частях.

В левой части (4.2) стоит циклическая свертка сигналов $\{c(p)\}$ и $\{h(p)\}$. Перейдем в пространство Фурье-образов. По теореме о свертке получим

$$C(l)H(l) = Z(l), \qquad l = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{4.3}$$

Здесь $C(l) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p)\omega_m^{-lp}$, $Z(l) = \sum_{k=0}^{m-1} z(k)\omega_m^{-lk}$ и

$$H(l) = \sum_{p=0}^{m-1} h(p)\omega_m^{-lp} = T_r(l).$$

Согласно (4.3), $C(l) = Z(l)/T_r(l)$. По формуле обращения

$$c(p) = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} \frac{Z(l)}{T_r(l)}\,\omega_m^{pl}, \qquad p = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{4.4}$$

Таким образом, задача (4.2) имеет явное решение. Единственным решением задачи (4.1) является сплайн

$$S_0(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p)Q_r(j - pn),$$

где коэффициенты $c(p)$ вычисляются по формуле (4.4). Отметим, что числа $T_r(l)$ зависят только от m, n и r. Они могут быть вычислены заранее.

Покажем, что дискретный интерполяционный сплайн S_0 обладает экстремальным свойством. Попутно выяснится роль параметра r.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered} F(f) := \sum_{j=0}^{N-1} \bigl|\Delta^r f(j)\bigr|^2 \to \inf, \\ f(kn) = z(k), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1; \qquad f \in \mathbb{C}_N. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Теорема 3. *Единственным решением задачи* (4.5) *является дискретный интерполяционный сплайн* S_0.

Доказательство. Пусть f — произвольный план задачи (4.5). Положим $h = f - S_0$. Имеем $h(kn) = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, m-1$ и

$$F(f) = F(S_0 + h) = \sum_{j=0}^{N-1} \big[\Delta^r (S_0 + h)(j)\big]\big[\Delta^r (S_0^* + h^*)(j)\big] =$$

$$= F(S_0) + F(h) + 2\,\mathrm{Re} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S_0(j) \Delta^r h^*(j).$$

Согласно лемме 4

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S_0(j) \Delta^r h^*(j) = (-1)^r \sum_{l=0}^{m-1} d_0(l) h^*(ln) = 0.$$

Поэтому

$$F(f) = F(S_0) + F(h) \geq F(S_0). \tag{4.6}$$

Оптимальность S_0 установлена. Проверим единственность.

Предположим, что $F(f) = F(S_0)$ на некотором плане f, и докажем, что $h := f - S_0 \equiv 0$. Согласно (4.6), $F(h) = 0$, так что $\Delta^r h(j) = 0$ при $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Имеем

$$h(j) = c + \sum_{s=0}^{N-1} \Delta^r h(s) b_r(j - s) \equiv c.$$

Поскольку $h(kn) = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, m-1$, то $h(j) \equiv 0$. Теорема доказана.

5. СГЛАЖИВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered} F(f) := \sum_{j=0}^{N-1} \big|\Delta^r f(j)\big|^2 \to \inf, \\ G(f) := \sum_{k=0}^{m-1} \big|f(kn) - z(k)\big|^2 \leq \varepsilon, \qquad f \in \mathbb{C}_N, \end{gathered} \tag{5.1}$$

где $\varepsilon > 0$ — параметр. Предварительно решим вспомогательную задачу

$$g(c) := \sum_{k=0}^{m-1} \bigl|c - z(k)\bigr|^2 \to \inf. \tag{5.2}$$

Имеем

$$g(c+h) = \sum_{k=0}^{m-1} \bigl(c - z(k) + h\bigr)\bigl(c^* - z^*(k) + h^*\bigr) =$$
$$= g(c) + m|h|^2 + 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{m-1}\bigl(c - z(k)\bigr)h^*.$$

Очевидно, что единственная точка минимума функции g определяется из условия $\sum_{k=0}^{m-1}\bigl(c - z(k)\bigr) = 0$, так что

$$\tilde{c} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} z(k). \tag{5.3}$$

При этом

$$\tilde{\varepsilon} := g(\tilde{c}) = -\sum_{k=0}^{m-1}\bigl(\tilde{c} - z(k)\bigr)z^*(k) = \sum_{k=0}^{m-1}\bigl|z(k)\bigr|^2 - m|\tilde{c}|^2. \tag{5.4}$$

Величина $\tilde{\varepsilon}$ есть критическое значение параметра ε. При $\varepsilon \geq \tilde{\varepsilon}$ решением задачи (5.1) является сигнал $\tilde{f}(j) \equiv \tilde{c}$, поскольку в этом случае $G(\tilde{f}) = g(\tilde{c}) = \tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon$ и $F(\tilde{f}) = 0$. В дальнейшем считаем, что $0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}$. В частности, $\tilde{\varepsilon} > 0$. Это значит, что $z(k) \not\equiv \mathrm{const}$.

Зафиксируем параметр $\alpha > 0$, введем функцию

$$\Phi_\alpha(f) = \alpha F(f) + G(f)$$

и рассмотрим еще одну вспомогательную задачу

$$\Phi_\alpha(f) \to \inf_{f \in \mathbb{C}_N}. \tag{5.5}$$

Возьмем произвольный сплайн $S \in \mathcal{S}_r^m$ и запишем разложение

$$\Phi_\alpha(S+H) = \alpha F(S+H) + G(S+H) =$$

$$= \alpha\bigl[F(S) + F(H) + 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S(j) \Delta^r H^*(j)\bigr] +$$

$$+ G(S) + \sum_{k=0}^{m-1} \bigl|H(kn)\bigr|^2 + 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{m-1} \bigl[S(kn) - z(k)\bigr] H^*(kn).$$

Согласно лемме 4 имеем

$$\Phi_\alpha(S+H) = \Phi_\alpha(S) + \alpha F(H) + \sum_{k=0}^{m-1} \bigl|H(kn)\bigr|^2 +$$

$$+ 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{m-1} \bigl[(-1)^r \alpha d(k) + S(kn) - z(k)\bigr] H^*(kn),$$

где $d(k)$ — коэффициенты разложения (3.3) сплайна S по функциям Бернулли. Допустим, что удалось построить сплайн $S_\alpha \in \mathcal{S}_r^m$, удовлетворяющий условиям

$$(-1)^r \alpha d(k) + S(kn) = z(k), \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} d(k) = 0. \tag{5.6}$$

Тогда для любого $H \in \mathbb{C}_N$ будет выполняться равенство

$$\Phi_\alpha(S_\alpha + H) = \Phi_\alpha(S_\alpha) + \alpha F(H) + \sum_{k=0}^{m-1} \bigl|H(kn)\bigr|^2.$$

Из него, в частности, следует, что $\Phi_\alpha(S_\alpha + H) \geq \Phi_\alpha(S_\alpha)$, так что S_α — решение задачи (5.5). Более того, это единственное решение. Действительно, допустив, что $\Phi_\alpha(S_\alpha + H) = \Phi_\alpha(S_\alpha)$, получим

$$\sum_{j=0}^{N-1} \bigl|\Delta^r H(j)\bigr|^2 = 0, \qquad \sum_{k=0}^{m-1} \bigl|H(kn)\bigr|^2 = 0.$$

Первое равенство выполняется только тогда, когда $H(j) \equiv \mathrm{const}$. Согласно второму равенству $H(j) \equiv 0$.

Остается проверить, что система (5.6) имеет единственное решение в классе сплайнов S вида (3.3). Возьмем решение d_0, $d_0(0)$, $d_0(1)$, …, $d_0(m-1)$ однородной системы

$$\begin{gathered}(-1)^r \alpha d(k) + S(kn) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1, \\ \sum_{k=0}^{m-1} d(k) = 0.\end{gathered} \tag{5.7}$$

Соответствующий сплайн обозначим через S_0. Согласно лемме 4 получим

$$\sum_{j=0}^{N-1} \bigl|\Delta^r S_0(j)\bigr|^2 = (-1)^r \sum_{k=0}^{m-1} d_0(k) S_0^*(kn) = -\alpha \sum_{k=0}^{m-1} \bigl|d_0(k)\bigr|^2.$$

В силу положительности α это равенство возможно только тогда, когда все $d_0(k)$ равны нулю. Но в этом случае $S_0(j) \equiv d_0$. Вместе с тем, $S_0(kn) = (-1)^{r+1} \alpha d_0(k) = 0$ при $k = 0$, 1, …, $m-1$, так что $d_0 = 0$. Доказано, что однородная система (5.7) имеет только нулевое решение. Как следствие, получаем, что система (5.6) имеет единственное решение при любых $z(k)$.

Подведем итог.

Теорема 4. *Вспомогательная задача* (5.5) *имеет единственное решение S_α. Это дискретный периодический сплайн вида* (3.3), *коэффициенты которого определяются из системы линейных уравнений* (5.6).

Покажем, что система (5.6) может быть решена явно. Для этого перейдем в область Фурье-образов:

$$(-1)^r \alpha \sum_{k=0}^{m-1} d(k) \omega_m^{-lk} + d \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{-lk} + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{m-1} d(s) b_{2r}\bigl((k-s)n + r\bigr) \omega_m^{-lk} = \\ = \sum_{k=0}^{m-1} z(k) \omega_m^{-lk}.$$

Обозначим $D(l)=\sum_{k=0}^{m-1} d(k)\omega_m^{-lk}$, $Z(l)=\sum_{k=0}^{m-1} z(k)\omega_m^{-lk}$. Учитывая, что $lk=l(k-s)+ls$, получаем

$$(-1)^r\alpha D(l)+md\delta_m(l)+\sum_{s=0}^{m-1} d(s)\omega_m^{-ls}\sum_{k=0}^{m-1} b_{2r}(kn+r)\omega_m^{-lk}=Z(l).$$

Отметим, что $D(0)=\sum_{k=0}^{m-1} d(k)=0$. Введя еще одно обозначение

$$B_r(l)=\sum_{k=0}^{m-1} b_{2r}(kn+r)\omega_m^{-lk},$$

придем к системе линейных уравнений относительно d, $D(1), \ldots, D(m-1)$:

$$\big[(-1)^r\alpha+B_r(l)\big]D(l)+md\delta_m(l)=Z(l), \qquad l=0,1,\ldots,m-1. \tag{5.8}$$

При $l=0$ имеем

$$d=\frac{1}{m}Z(0)=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} z(k)=\tilde{c}.$$

При $l=1, \ldots, m-1$ система (5.8) принимает вид

$$\big[(-1)^r\alpha+B_r(l)\big]D(l)=Z(l). \tag{5.9}$$

Лемма 5. *При $l=1,\ldots,m-1$ справедливо равенство*

$$B_r(l)=(-1)^r\lambda_r(l), \tag{5.10}$$

где, как и в разд. 2,

$$\lambda_r(l)=\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{\pi(sm+l)}{N}\right)^{-2r}.$$

Доказательство. Имеем

$$B_r(l) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{N-1} (\omega_N^j - 1)^{-2r} \omega_N^{(kn+r)j} \omega_m^{-lk} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N-1} (\omega_N^j - 1)^{-2r} \omega_N^{rj} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{k(j-l)} \right\} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N-1} (\omega_N^j - 1)^{-2r} \omega_N^{rj} \delta_m(j-l).$$

Единичный импульс δ_m отличен от нуля только при $j = l + sm$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$. Поэтому

$$B_r(l) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} (\omega_N^{l+sm} - 1)^{-2r} \omega_N^{r(l+sm)} = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \left(\omega_N^{l+sm} - 2 + \omega_N^{-l-sm} \right)^{-r} =$$

$$= (-1)^r \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \left(2 \sin \frac{\pi(l+sm)}{N} \right)^{-2r} = (-1)^r \lambda_r(l).$$

Лемма доказана.

На основании (5.9) и (5.10) получаем

$$D(l) = \begin{cases} 0 & \text{при } l = 0, \\ \dfrac{(-1)^r Z(l)}{\alpha + \lambda_r(l)} & \text{при } l = 1, \ldots, m-1. \end{cases}$$

По формуле обращения

$$d(k) = \frac{(-1)^r}{m} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{Z(l) \omega_m^{kl}}{\alpha + \lambda_r(l)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{5.11}$$

Явное решение системы (5.6) найдено.

Теорема 5. *Сглаживающий сплайн $S_\alpha(j)$ допускает представление*

$$S_\alpha(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c_\alpha(p) Q_r(j - pn), \tag{5.12}$$

где

$$c_\alpha(p) = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{Z(l) \omega_m^{pl}}{T_r(l) + \alpha(2 \sin(\pi l/m))^{2r}}.$$

Доказательство. Имеем

$$S_\alpha(j) = d + \sum_{k=0}^{m-1} d(k) b_{2r}(j + r - kn), \tag{5.13}$$

где $d(k)$ определяются формулой (5.11) и $d = Z(0)/m$. Согласно (2.4) и (2.7)

$$d = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \frac{Z(0)}{T_r(0)} Q_r(j - pn).$$

Далее в силу (3.10)

$$\sum_{k=0}^{m-1} d(k) b_{2r}(j + r - kn) = \sum_{p=0}^{m-1} a(p) Q_r(j - pn).$$

Здесь

$$a(p) = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m-1} \left[(-1)^r \left(2 \sin \frac{\pi l}{m} \right)^{-2r} D(l) \right] \omega_m^{pl} =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{Z(l)(2\sin(\pi l/m))^{-2r}}{\alpha + \lambda_r(l)} \omega_m^{pl} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{Z(l)\omega_m^{pl}}{T_r(l) + \alpha(2\sin(\pi l/m))^{2r}}.$$

Мы снова воспользовались формулой (2.7).

Подставляя полученные выражения в (5.13), приходим к (5.12). Теорема доказана.

Замечание. Если исходные данные $\{z(k)\}$ вещественны, то вещественными будут и коэффициенты $\{c_\alpha(p)\}$ сглаживающего сплайна.

Действительно, в случае вещественных $\{z(k)\}$ компонента $Z(0)$ вещественна и $Z(m-l) = Z^*(l)$ при $l = 1, \ldots, m-1$. Учитывая это и (2.6), получаем $c_\alpha^*(p) = c_\alpha(p)$, что гарантирует вещественность $c_\alpha(p)$.

Введем функцию $\varphi(\alpha) = G(S_\alpha)$. Согласно (5.1), (5.6) и равенству

Парсеваля имеем

$$\varphi(\alpha) = \alpha^2 \sum_{k=0}^{m-1} \big|d(k)\big|^2 = \frac{\alpha^2}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \big|D(l)\big|^2 = \frac{\alpha^2}{m} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\big|Z(l)\big|^2}{\big(\alpha + \lambda_r(l)\big)^2} =$$
$$= \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\big|Z(l)\big|^2}{\big(1 + \lambda_r(l)/\alpha\big)^2}.$$

Напомним, что $z(k) \not\equiv \text{const}$, поэтому хотя бы одна из компонент $Z(1), \ldots, Z(m-1)$ отлична от нуля.

Функция $\varphi(\alpha)$ на полуоси $(0, +\infty)$ строго возрастает, причем $\lim\limits_{\alpha \to +0} \varphi(\alpha) = 0$ и

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \varphi(\alpha) = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m-1} \big|Z(l)\big|^2 = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \big|Z(l)\big|^2 - \frac{1}{m} \big|Z(0)\big|^2 =$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1} \big|z(k)\big|^2 - \frac{1}{m} \left| \sum_{k=0}^{m-1} z(k) \right|^2 = \sum_{k=0}^{m-1} \big|z(k)\big|^2 - m|\tilde{c}|^2 = \tilde{\varepsilon}.$$

Отсюда, в частности, следует, что уравнение $\varphi(\alpha) = \varepsilon$ при $0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}$ имеет единственное положительное решение α_*.

Теорема 6. *Дискретный периодический сплайн S_{α_*} является единственным решением задачи* (5.1).

Доказательство. Возьмем произвольный план f задачи (5.1) и допустим, что $F(f) \le F(S_{\alpha_*})$. Тогда

$$\Phi_{\alpha_*}(f) = \alpha_* F(f) + G(f) \le \alpha_* F(S_{\alpha_*}) + \varepsilon = \alpha_* F(S_{\alpha_*}) + \varphi(\alpha_*) =$$
$$= \alpha_* F(S_{\alpha_*}) + G(S_{\alpha_*}) = \Phi_{\alpha_*}(S_{\alpha_*}).$$

Учитывая, что S_{α_*} — единственная точка минимума функционала Φ_{α_*} на $\mathbb{C}_N$, заключаем, что $f(j) \equiv S_{\alpha_*}(j)$. Это значит, что для любого сигнала $f \not\equiv S_{\alpha_*}$ будет $F(f) > F(S_{\alpha_*})$. Теорема доказана.

Вернемся к уравнению $\varphi(\alpha) = \varepsilon$. Введем функцию

$$\psi(\beta) = \varphi\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\big|Z(l)\big|^2}{\big(1 + \lambda_r(l)\beta\big)^2}.$$

Это строго убывающая и строго выпуклая на $(0,+\infty)$ функция, такая, что $\lim\limits_{\beta\to+0}\psi(\beta)=\tilde{\varepsilon}$, $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\psi(\beta)=0$. Если β_* — положительный корень уравнения $\psi(\beta)=\varepsilon$, то $\alpha_*=1/\beta_*$. Таким образом, вместо уравнения $\varphi(\alpha)=\varepsilon$ можно решать уравнение $\psi(\beta)=\varepsilon$.

В теории сглаживания [10] рекомендуют решать эквивалентное уравнение $\bigl[\psi(\beta)\bigr]^{-1/2}=\varepsilon^{-1/2}$ методом Ньютона с начальным приближением $\beta_0=0$. Такой метод называется методом касательных гипербол. Его расчетная формула имеет вид

$$\beta_{k+1}=\beta_k+2\,\frac{\psi(\beta_k)}{\psi'(\beta_k)}\left[1-\left(\frac{\psi(\beta_k)}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right],\qquad k=0,1,\ldots$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Behr M.G., Malozemov V.N., Pevnyi A.B.* A discrete version of spline-operational calculus. In: International Conference on Optimization of Finite Element Approximations. Abstracts. St.-Petersburg. 1995. P. 35.
2. *Бер М.Г.* Дискретные сплайны и задача восстановления дискретных данных. Дис. … канд. физ.-матем. наук. Л.: ЛГУ, 1990.
3. *Певный А.Б.* Дискретные периодические сплайны и решение задачи о бесконечной цилиндрической оболочке. // Вестн. Сыктывкар. ун-та. Сер. 1. Вып. 2. 1996. С. 187–200.
4. *Бер М.Г., Малоземов В.Н.* Об интерполяции дискретных периодических данных // Пробл. передачи информ. 1992. Т. 28. Вып. 4. С. 60–68.
5. *Бер М.Г., Малоземов В.Н.* О восстановлении дискретных периодических данных // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1990. Вып. 3. С. 8–13.
6. *Желудев В.А.* Периодические сплайны и быстрое преобразование Фурье // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1992. Т. 32. №2. С. 179–198.
7. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989.
8. *Бер М.Г., Малоземов В.Н.* Наилучшие формулы для приближенного вычисления дискретного преобразования Фурье // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1992. Т. 32. №11. С. 1709–1719.
9. *Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е.* Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987.
10. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.

V. N. Malozemov, A. B. Pevnyi. Discrete periodic splines and their numerical applications.
