УДК 519.677

В. Н. Малоземов, А. Б. Певный

ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ B-СПЛАЙНЫ[1]

1°. Пусть m, n, r — натуральные числа и $N = mn$. Дискретный N-периодический B-сплайн $Q_r(j)$ порядка r был введен в [1] формально:

$$Q_r(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u^r(k)\omega_N^{jk}, \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$ и

$$u(k) = \begin{cases} n^2 \text{ при } k = 0, \\ \bigl(\sin(\pi k/m) \,/\, \sin(\pi k/N)\bigr)^2 \text{ при } k \in 1 : N-1. \end{cases}$$

Здесь мы дадим неформальный анализ этого определения.

2°. При $m = 1$ имеем $Q_r(j) \equiv N^{2r-1}$. При $m = N$ будет $u(k) \equiv 1$, поэтому $Q_r(j) = \delta_N(j)$, где $\delta_N(j)$ — единичный N-периодический импульс. В дальнейшем считаем, что $m \in 2 : N-1$.

Лемма 1. *При $r = 1$ справедлива формула*

$$Q_1(j) = \begin{cases} n - j, & j \in 0 : n-1, \\ 0, & j \in n : N-n, \\ j - (N-n), & j \in N-n+1 : N-1. \end{cases} \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем дискретное преобразование Фурье (ДПФ) от правой части формулы (2). Имеем

$$\begin{aligned} q_1(k) &:= \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)\omega_N^{-kj} + \sum_{j=N-n+1}^{N-1} (j-N+n)\omega_N^{-kj} = \\ &= n + \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)\omega_N^{-kj} + \sum_{l=1}^{n-1} (n-l)\omega_N^{kl} = \\ &= n + 2\sum_{j=1}^{n-1} (n-j)\cos\left(\frac{2\pi}{N}kj\right). \end{aligned}$$

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96–01–00269).

В частности, $q_1(0) = n^2$. Воспользуемся тождеством

$$n + 2\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\cos jx = \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2.$$

При $k \in 1 : N-1$ получим

$$q_1(k) = \bigl(\sin(\pi k/m)/\sin(\pi k/N)\bigr)^2.$$

Таким образом, $q_1(k) = u(k)$ при $k \in 0 : N-1$. Теперь (2) следует из формулы обращения для ДПФ и (1). ■

Согласно теореме о циклической свертке [2],

$$Q_l(j) = \sum_{k=0}^{N-1} Q_1(k)Q_{l-1}(j-k), \qquad l = 2, \ldots, r. \tag{3}$$

С учетом леммы 1 заключаем, что B-сплайн $Q_r(j)$ принимает целые неотрицательные значения.

Перепишем формулу (1) в виде

$$Q_r(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^r(k)\cos\left(\frac{2\pi}{N}jk\right), \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда, в частности, следует, что $Q_r(-j) = Q_r(j)$.

3°. Введем дополнительное условие

$$2r(n-1) < N-1. \tag{4}$$

Оно гарантирует, что множество J_r индексов j, удовлетворяющих неравенствам $r(n-1) < j < N - r(n-1)$, непусто. Отметим, что условие (4) выполняется при $2r \le m$.

Теорема 1. *При выполнении условия* (4) *B-сплайн* $Q_r(j)$ *обладает следующими свойствами:*

1) $Q_r(j) > 0$ *при* $j \in 0 : r(n-1)$ *и* $j \in N - r(n-1) : N-1$,
   $Q_r(j) = 0$ *при* $j \in J_r$;
2) $Q_r\bigl(r(n-1)\bigr) = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $r = 1$ утверждение очевидно. Сделаем индукционный переход от $r-1$ к r. Согласно (3)

$$Q_r(j) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} + \sum_{k=N-n+1}^{N-1}\right) Q_1(k) Q_{r-1}(j-k) =$$
$$= \sum_{k=-n+1}^{n-1} Q_1(k) Q_{r-1}(j-k).$$

При изменении j от $-r(n-1)$ до $r(n-1)$ разность $j-k$, $k \in -n+1 : n-1$, последовательно пробегает множества

$$-(r+1)(n-1) : -(r-1)(n-1), \ldots, (r-1)(n-1) : (r+1)(n-1).$$

Все эти множества имеют общие точки с множеством $-(r-1)(n-1) : (r-1)(n-1)$, на котором, в силу индукционного предположения и периодичности, B-сплайн $Q_{r-1}(j)$ положителен. Учитывая, что $Q_1(k) > 0$ при всех $k \in -n+1 : n-1$, заключаем, что $Q_r(j) > 0$ при $j \in -r(n-1) : r(n-1)$ или, в силу периодичности,

$$Q_r(j) > 0 \text{ при } j \in 0 : r(n-1) \text{ и } j \in N - r(n-1) : N-1.$$

При этом

$$Q_r\bigl(r(n-1)\bigr) = Q_1(n-1) Q_{r-1}\bigl((r-1)(n-1)\bigr) = 1.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $(r+1)(n-1) < N-(r-1)(n-1)$.

Остается проверить, что $Q_r(j) = 0$ при $j \in J_r$. Но при указанных j разность $j-k$, $k \in -n+1 : n-1$, последовательно пробегает множества $(r-1)(n-1)+1 : (r+1)(n-1)+1, \ldots,$ $N-(r+1)(n-1)-1 : N-(r-1)(n-1)-1$. По индукционному предположению на всех этих множествах B-сплайн Q_{r-1} равен нулю. Значит, и $Q_r(j) = 0$ при $j \in J_r$. ■

4°. В [3] были введены дискретные периодические функции Бернулли $b_r(j)$,

$$b_r(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-r} \omega_N^{jk}, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 2. *Справедливо представление*

$$Q_r(j) = \frac{1}{N} n^{2r} + \sum_{l=-r}^{r} (-1)^{r-l} C_{2r}^{r-l} b_{2r}(j + r - ln). \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку при $k \in 1 : N-1$

$$u(k) = \left(\frac{\omega_m^{k/2} - \omega_m^{-k/2}}{\omega_N^{k/2} - \omega_N^{-k/2}} \right)^2 = \frac{\omega_m^{-k} (\omega_m^k - 1)^2}{\omega_N^{-k} (\omega_N^k - 1)^2},$$

то

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} u^r(k) \omega_N^{jk} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_m^k - 1)^{2r} (\omega_N^k - 1)^{-2r} \omega_N^{k(j+r-rn)} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-2r} \sum_{p=0}^{2r} (-1)^{2r-p} C_{2r}^p \omega_N^{k\left(j+r-(r-p)n\right)} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-2r} \sum_{l=-r}^{r} (-1)^{r-l} C_{2r}^{r-l} \omega_N^{k(j+r-ln)} =$$

$$= \sum_{l=-r}^{r} (-1)^{r-l} C_{2r}^{r-l} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-2r} \omega_N^{k(j+r-ln)} \right\} =$$

$$= \sum_{l=-r}^{r} (-1)^{r-l} C_{2r}^{r-l} b_{2r}(j + r - ln).$$

Теперь заключение теоремы следует из формулы (1). ■

5°. Лемма 1 допускает обобщение на случай произвольного r. Чтобы получить его, потребуется некоторая подготовка. Положим

$$\varphi(j) = j \prod_{k=1}^{r-1} (j^2 - k^2), \qquad \psi(j) = (j)_+ \prod_{k=1}^{r-1} (j^2 - k^2),$$

где $(j)_+ = \max\{0, j\}$. Очевидно, что

$$\psi(j) = 0 \text{ при } j \le r - 1, \qquad \psi(j) = \varphi(j) \text{ при } j \ge -r + 1. \tag{6}$$

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\Delta^{2r}\psi(j) := \sum_{p=0}^{2r}(-1)^{2r-p}C_{2r}^{p}\psi(j+p) = \begin{cases} (2r-1)! \text{ } \textit{при } j=-r, \\ 0 \text{ } \textit{при остальных } j\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемма верна при $j \geq -r+1$, поскольку в этом случае, согласно (6), $\psi(j) = \varphi(j)$, а φ — алгебраический полином степени $2r-1$. Лемма верна и при $j \leq r-1$, ибо тогда $j+2r \leq r-1$, а $\psi(j) = 0$ при $j \leq r-1$. Остается вычислить $\Delta^{2r}\psi(-r)$. Согласно (6) имеем

$$\Delta^{2r}\psi(-r) = \sum_{p=0}^{2r}(-1)^{2r-p}C_{2r}^{p}\psi(-r+p) = \psi(r) =$$
$$= \varphi(r) = r(r-1)(r+1)\cdots 1\cdot(2r-1) = (2r-1)!$$

Лемма доказана. ■

Введем функцию

$$g_r(j) = \frac{1}{(2r-1)!}\sum_{l=-r}^{r}(-1)^{r-l}C_{2r}^{r-l}\psi(j-ln).$$

Лемма 3. *Справедливы равенства*

$$g_r(j) = 0 \text{ } \textit{при } j < -r(n-1), \tag{7}$$
$$g_r(j) = 0 \text{ } \textit{при } j > r(n-1), \tag{8}$$
$$\sum\nolimits_{j\in\mathbb{Z}} g_r(j) = n^{2r}. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (7) следует из того, что при $j < -r(n-1)$ будет $j + rn \leq r-1$.

При $j > r(n-1)$ будет $j - rn \geq -r+1$, поэтому $\psi(j-ln) = \varphi(j-ln)$ при $l \in -r : r$. Равенство (8) справедливо, поскольку конечная разность $(2r)$-го порядка по узлам $j-rn$, $j-(r-1)n$, $\ldots$, $j+rn$ от полинома φ степени $2r-1$ равна нулю.

Для проверки равенства (9) введем функцию

$$\Phi(j) = (j-r)\varphi(j) = (j-r)(j-r+1)\cdots(j+r-1).$$

Для нее $\Delta\Phi(j) := \Phi(j+1) - \Phi(j) = 2r\varphi(j)$.

Пусть $\Psi(j) = (j-r)\psi(j)$. Нетрудно показать, что

$$\Delta\Psi(j) = 2r\psi(j), \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Действительно, при $j \geq 0$ имеем

$$\Psi(j+1) - \Psi(j) = \Phi(j+1) - \Phi(j) = 2r\varphi(j) = 2r\psi(j).$$

При $j \leq -1$ обе части в (10) равны нулю.

Согласно (10)

$$\sum_{|j| \leq r(n-1)} \psi(j - ln) = \frac{1}{2r} \sum_{j=-r(n-1)}^{r(n-1)} \Delta\Psi(j - ln) =$$
$$= \frac{1}{2r} \left\{ \Psi\bigl((r-l)n - r + 1\bigr) - \Psi\bigl(-(r+l)n + r\bigr) \right\}. \tag{11}$$

При $l \in -r : r$ будет $(r-l)n - r + 1 \geq -r + 1$, $-(r+l)n + r \leq r$, поэтому выражение, стоящее в правой части (11) в фигурных скобках, равно $\Phi\bigl((r-l)n - r + 1\bigr)$. Получаем

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} g_r(j) = \sum_{|j| \leq r(n-1)} g_r(j) =$$
$$= \frac{1}{(2r)!} \sum_{l=-r}^{r} (-1)^{r-l} C_{2r}^{r-l} \Phi\bigl(r(n-1) + 1 - ln\bigr). \tag{12}$$

Сумма в правой части (12) есть конечная разность порядка $2r$ с шагом n от полинома Φ степени $2r$ со старшим коэффициентом, равным 1. Она равна $(2r)!n^{2r}$. Учитывая это, приходим к (9). ■

6°. Теорема 3. *Пусть $m > 2r$. Тогда*

$$Q_r(j) = g_r(j) \text{ при } |j| \leq r(n-1). \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$\tilde{g}_r(j) = \begin{cases} g_r(j), & j \in 0 : r(n-1), \\ 0, & j \in J_r, \\ g_r(j - N), & j \in N - r(n-1) : N - 1, \end{cases}$$

и распространим $\tilde{g}_r$ периодически с периодом N на все множество $\mathbb{Z}$. Отметим, что

$$\tilde{g}_r(j) = g_r(j) \text{ при } |j| \le N - r(n-1) - 1. \qquad (14)$$

Разложим $\tilde{g}_r$ по дискретным функциям Бернулли [3]:

$$\tilde{g}_r(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=-r(n-1)}^{r(n-1)} \tilde{g}_r(k) + \sum_{k=-N+r(n-1)+1}^{r(n-1)} \Delta^{2r} \tilde{g}_r(k) b_{2r}(j-k). \qquad (15)$$

Первая сумма в правой части (15) согласно (14) и лемме 3 равна n^{2r}. Во второй сумме $\Delta^{2r}\tilde{g}_r(k) = \Delta^{2r} g_r(k)$ при $k \in -N + r(n-1) + 1 : r(n-1)$. Это следует из (14) и того, что $r(n-1) + 2r < N - r(n-1)$ при $m > 2r$. Получаем

$$\Delta^{2r}\tilde{g}_r(k) = \frac{1}{(2r-1)!} \sum_{p=-r}^{r} (-1)^{r-p} C_{2r}^{r-p} \Delta^{2r} \psi(k - pn).$$

В силу леммы 2

$$\Delta^{2r}\tilde{g}_r(k) = \begin{cases} (-1)^{r-l} C_{2r}^{r-l} \text{ при } k = ln - r, \quad l \in -r : r, \\ 0 \text{ при остальных } k \in -N + r(n-1) + 1 : r(n-1). \end{cases}$$

Теперь формула (15) принимает вид

$$\tilde{g}_r(j) = \frac{1}{N} n^{2r} + \sum_{l=-r}^{r} (-1)^{r-l} C_{2r}^{r-l} b_{2r}(j + r - ln). \qquad (16)$$

Сравнивая (5) и (16) и учитывая (14), приходим к (13). ■

7°. Дискретный периодический сплайн $S(j)$ порядка r определим как линейную комбинацию с комплексными коэффициентами сдвигов B-сплайна $Q_r(j)$:

$$S(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r(j - pn).$$

Свойствам и применению дискретных периодических сплайнов к цифровой обработке сигналов будет посвящена отдельная статья.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Behr M. G., Malozemov V. N., Pevnyi A. B.* A discrete version of spline-operational calculus // International Conference on Optimization of Finite Element Approximations. Abstracts. St.-Petersburg. 1995. P. 35.
2. *Макклеллан Дж. Х., Рейдер Ч. М.* Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. М., 1983. 264 с.
3. *Бер М. Г., Малоземов В. Н.* Наилучшие формулы для приближенного вычисления дискретного преобразования Фурье // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1992. Т. 32. N 11. С. 1709–1719.

РЕФЕРАТ

УДК 519.677

М а л о з е м о в В. Н., П е в н ы й А. Б. **Дискретные периодические B-сплайны** // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 199 . Вып. (N). С. 00–00.

Дается определение дискретных периодических B-сплайнов и устанавливаются их фундаментальные свойства.

Библиогр. 3 назв.

SUMMARY

В. Н. Малоземов, А. Б. Певный. **Дискретные периодические В-сплайны.**

Устанавливаются некоторые фундаментальные свойства дискретных периодических В-сплайнов.

V. N. Malozemov, A. B. Pevnyi. **Discrete periodic B-splines.**

Some fundamental properties of discrete periodic B-splines are determined.