

© 2005 г. Г.А. Леонов, д-р физ.-мат. наук  
(Санкт-Петербургский государственный университет)

## ФАЗОВАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ<sup>1</sup>

Дается обзор современного состояния теории фазовой синхронизации. Рассматриваются приложения этой теории для синхронных и асинхронных электрических машин, систем фазовой автоматической подстройки частоты, самосинхронизации неуравновешенных роторов. При исследовании глобальной устойчивости систем фазовой синхронизации широко применяется частотная теорема Якубовича-Калмана.

### 1. Введение

Мы часто встречаемся с проявлением эффекта фазовой синхронизации. Электрический ток в энергосети вырабатывается синхронными электрическими генераторами, действие которых основано на принципе фазовой синхронизации. Одновременно с включением телевизора запускается специальная система фазовой синхронизации, управляющая генератором развертки электронного луча. В настоящее время астатические системы фазовой синхронизации применяются для управления распределенными системами тактовых генераторов в многопроцессорных кластерах (синхронизация часов в многопроцессорной системе).

С широким спектром применения систем фазовой синхронизации связано разнообразие их механических, электромеханических и электронных реализаций. Однако универсален сам принцип фазовой синхронизации: разность фаз колебаний трансформируется в управляющее воздействие на частоту генератора - и происходит синхронизация колебаний.

Общая теория фазовой синхронизации сформировалась во второй половине двадцатого века в результате обобщения методов, развитых в рамках трех самостоятельных теорий:

- 1) теории синхронных и асинхронных электрических машин,
- 2) теории систем фазовой автоподстройки частоты (phase locked loops),
- 3) теории самосинхронизации неуравновешенных роторов.

В настоящем обзоре рассматриваются те разделы этих теорий, внутри которых создавались понятия и методы, развивавшиеся в дальнейшем в общую теорию фазовой синхронизации. Описываются три уровня рассмотрения задач фазовой синхронизации: на уровне механических, электромеханических или электронных реализаций, на уровне фазовых и частотных соотношений и на уровне дифференциальных, разностных, интегральных или интегродифференциальных уравнений. Приводятся основные понятия теории фазовой синхронизации. Описываются методы глобального исследования систем фазовой синхронизации: метод периодических функций Ляпунова, метод положительно инвариантных конусных сеток, метод нелокального сведения.

Здесь сделана попытка изложить основные понятия и методы теории фазовой синхронизации на самом простом уровне – для как можно более широкого круга специалистов в тех областях, где возможно применение этой теории. С этой целью существенно модернизировано описание известных методов, многие результаты снабжены новыми, более простыми доказательствами. Кроме того, показано взаимопроникновение методов и идей различных конкретных теорий, использующих принципы фазовой синхронизации.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 04-01-00250А), Программы русско-голландского сотрудничества NWO

Пионерской работой, в которой были заложены многие принципы общей теории фазовой синхронизации, была статья Ф.Трикоми [1]. Она была посвящена глобальному анализу дифференциальных уравнений синхронной электрической машины. Это исследование было сразу замечено и изложено в известной книге [2]. В дальнейшем методы Ф.Трикоми развивались и модернизировались его многочисленными последователями [3-9].

Здесь мы рассмотрим наиболее простые математические модели синхронных и асинхронных электродвигателей, обсудим их с точки зрения теории фазовой синхронизации и опишем основные идеи Ф.Трикоми.

Мы опишем здесь следующую электромеханическую модель, которая позволяет рассмотреть динамику синхронных и асинхронных электродвигателей с общей позиций.

Основными элементами этих электродвигателей являются неподвижный статор и вращающийся ротор. На статоре имеются обмотки, по которым проходит переменный электрический ток, создающий переменное магнитное поле. Примем здесь, что обмотки статора устроены так, что при прохождении через них переменного тока вектор напряженности магнитного поля является постоянным по величине и вращается с постоянной угловой скоростью [10-12] (рис.1).

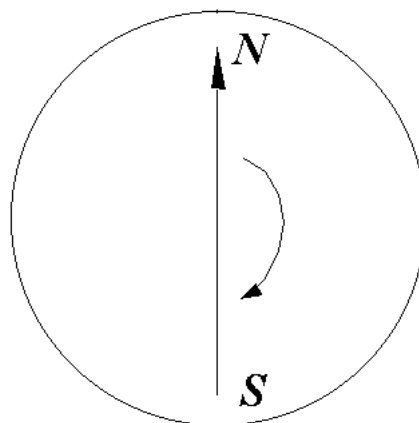


Рис. 1. Вращающееся магнитное поле

Такое вращающееся магнитное поле впервые было получено Г.Феррарисом и Н.Теслой в 1888 году [10]. Ясно, что частота его вращения совпадает с частотой переменного тока, проходящего через обмотки статора.

Примем здесь, что электромагнитные процессы в обмотках ротора не влияют на параметры вращающегося магнитного поля (т.е. мы пренебрегаем влиянием этих процессов на токи в обмотках статора).

Предположим теперь, что в пазах ротора располагаются две перпендикулярные по отношению друг к другу обмотки. Схематично они изображены на рис.2. Здесь показан в виде рамки с током  $i_1$  (или  $i_2$ ) один из витков такой обмотки.

Для синхронной машины одна из рамок замкнута (так называемая демпферная обмотка), к другой подводится (обычно через щетки электродвигателя) постоянное напряжение  $e$ . Эту обмотку называют обмоткой возбуждения.

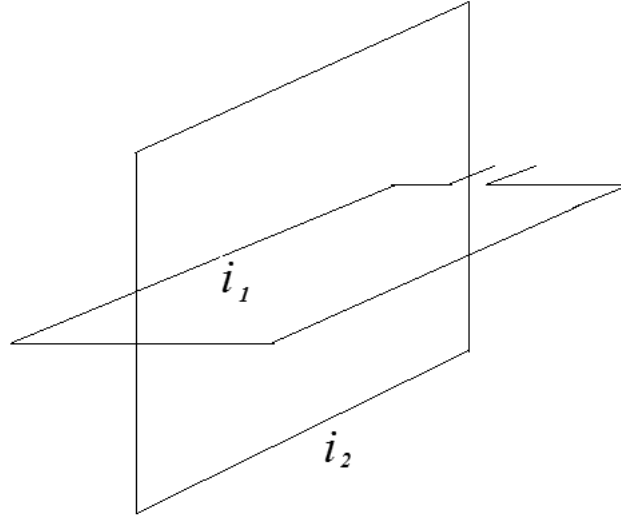


Рис. 2. Схема обмоток

Для асинхронной машины обе рамки замкнуты. В этом случае говорят, что обмотки короткозамкнуты. Ясно, что здесь  $e = 0$ .

Будем рассматривать движение рамок во вращающейся системе координат, жестко связанной с вектором напряженности магнитного поля. В этом случае токи  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  в рамках определяются с учетом закона электромагнитной индукции и закона Ома:

$$(1) \quad \begin{aligned} L \frac{di_1(t)}{dt} + Ri_1(t) &= e + SB(\sin \theta(t))\dot{\theta}(t) \\ L \frac{di_2(t)}{dt} + Ri_2(t) &= SB(\cos \theta(t))\dot{\theta}(t). \end{aligned}$$

Здесь  $R$  и  $L$  – соответственно сопротивление и индуктивность каждой из рамок, которые будем предполагать одинаковыми. Величина  $B$  – напряженность магнитного поля,  $S$  – площадь каждой из рамок,  $\theta(t)$  – угол между плоскостью рамки с током  $i_1$  и плоскостью, перпендикулярной вектору напряженности магнитного поля.

Движение ротора с расположенными на нем рамками относительно вращающегося магнитного поля имеет вид

$$(2) \quad I\ddot{\theta} = -\beta SB(i_1(t) \sin \theta + i_2(t) \cos \theta) - M.$$

Здесь  $I$  – момент инерции ротора,  $\beta$  – коэффициент пропорциональности,  $M$  – момент сил сопротивления (так называемый момент нагрузки).

Предположим вначале, что  $L = 0$ . В этом случае подставляя (1) в уравнение (2), получим

$$(3) \quad I\ddot{\theta} = -\frac{\beta S^2 B^2}{R}\dot{\theta} - \frac{\beta S B e}{R} \sin \theta - M.$$

Введя переобозначение  $\theta \rightarrow -\theta$ , это уравнение можно записать в виде

$$(4) \quad \ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + b \sin \theta = \gamma.$$

Здесь

$$\alpha = \frac{\beta S^2 B^2}{IR}, \quad b = \frac{\beta S B e}{IR}, \quad \gamma = \frac{M}{I}.$$

В дальнейшем для синхронной машины ( $e > 0$ ), не умаяя общности, примем, что  $b = 1$ . К уравнению такого вида можно привести уравнение (4), используя замену времени  $\tau = t\sqrt{b}$ .

Синхронному рабочему режиму синхронной машины соответствует состояние равновесия уравнения (4)

$$(5) \quad \theta(t) \equiv \theta_0, \quad \dot{\theta} \equiv 0,$$

где  $\theta_0$  удовлетворяет соотношениям

$$\sin \theta_0 = \gamma, \quad \cos \theta_0 > 0.$$

Этот режим возможен, когда  $\gamma < 1$ . В этом случае он является локально асимптотически устойчивым. Состояния равновесия (5) с  $\cos \theta_0 < 0$  являются неустойчивыми седловыми особыми точками. Заметим, что стационарные множества системы (1), (2) при  $L = 0$  и при  $L > 0$  совпадают. Сохраняется также локальная устойчивость и неустойчивость стационарных решений при переходе от уравнения (4) (случай  $L = 0$ ) к системе (1),(2) (случай  $L \geq 0$ ).

Проведенный Ф.Трикоми глобальный анализ уравнения (4) показал, что существует некоторое число  $\alpha(\gamma)$ , для которого при  $\alpha > \alpha(\gamma)$  все решения уравнения (4) стремятся при  $t \rightarrow +\infty$  к состояниям равновесия. При  $\alpha < \alpha(\gamma)$  имеются так называемые круговые решения, для которых  $\dot{\theta}(t) \geq \varepsilon, \forall t \geq t_0$ . Здесь  $\varepsilon > 0, t_0$  – некоторые числа.

В первом случае имеет место глобальное затягивание в синхронный режим (особые решения, стремящиеся к неустойчивым седлам, физически не наблюдаемы). Во втором – при некоторых начальных условиях  $\theta(0), \dot{\theta}(0)$  имеет место рассинхронизация.

Рабочему режиму асинхронного электродвигателя соответствует решение

$$\theta(t) \equiv -s_0 t + \theta_0, \quad \dot{\theta}(t) \equiv -s_0,$$

где  $\theta_0$  – некоторое число. Число  $s_0$  зависит от  $L$  и поэтому формулы для его вычисления являются разными для (4) (при  $L = 0$ ) и для (1), (2) (при  $L > 0$ ).

При  $e = 0$  система (1), (2) может быть преобразована к системе третьего порядка. Для этого введем в рассмотрение следующие преобразования  $\theta_1 = -\theta$

$$s = \dot{\theta}_1, \quad x = \frac{L}{SB} (i_1 \cos \theta_1 + i_2 \sin \theta_1), \quad y = \frac{L}{SB} (-i_1 \sin \theta_1 + i_2 \cos \theta_1).$$

Система (1), (2) запишется в новых переменных следующим образом

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{s} &= ay + \gamma \\ \dot{y} &= -cy - s - xs \\ \dot{x} &= -cx + ys, \end{aligned}$$

где

$$a = \frac{\beta(SB)^2}{IL}, \quad c = \frac{R}{L}.$$

Заметим, что величина  $s_0$  для уравнения (4) определяется из соотношения  $s_0 = \gamma/\alpha$ , а для системы (6) – из соотношения

$$(7) \quad \frac{acs_0}{c^2 + s_0^2} = \gamma.$$

Таким образом, в отличие от синхронной машины, уравнение (4) неадекватно описывает асинхронную машину. Наиболее простым адекватным описанием динамики асинхронной машины является система (6). Функция

$$\varphi(s_0) = \frac{acs_0}{c^2 + s_0^2}$$

называется статической характеристикой асинхронной машины.

Матрица Якоби правой части системы (6) в стационарной точке  $s = s_0$ ,  $y_0 = -\gamma/a$ ,  $x_0 = -\gamma s_0/ac$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -1 - x_0 & -c & -s_0 \\ y_0 & s_0 & -c \end{pmatrix}.$$

Ее характеристический полином, учитывая (7) можно записать в следующем виде

$$p^3 + 2cp^2 + (c^2 + s_0^2 + \frac{ac^2}{c^2 + s_0^2})p + ac\frac{c^2 - s_0^2}{c^2 + s_0^2}.$$

Отсюда следует, что стационарная точка  $s_0, y_0, x_0$  локально асимптотически устойчива при  $s_0 < c$  и неустойчива при  $s_0 > c$ .

При отсутствии нагрузки ( $\gamma = 0$ ) при любых начальных данных осуществляется захват в синхронизм:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = 0.$$

Такая глобальная устойчивость нулевого решения системы (6) легко доказывается с помощью функции Ляпунова

$$V(x, y, s) = x^2 + y^2 + \frac{s^2}{a}.$$

Далее происходит наброс нагрузки (это типично, если асинхронный электродвигатель используется в приводе металлорежущего станка). И здесь важно, чтобы в новом переходном режиме решение системы (6) с ненулевым  $\gamma$  и начальными условиями  $x = y = s = 0$  стремилось при  $t \rightarrow +\infty$  к стационарной точке  $x_0, y_0, s_0$ .

Здесь наблюдается весьма специальный тип синхронизма "с вычетом частотной составляющей  $s_0$ ". Условия, при которых возможны такие переходные процессы будут описаны далее.

Приведем здесь основные результаты, полученные Ф.Трикоми, перейдя от уравнения (4) к эквивалентной системе

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{\theta} &= \eta, \\ \dot{\eta} &= -\alpha\eta - \varphi(\theta), \end{aligned}$$

где  $\varphi(\theta) = \sin \theta - \gamma$ .

*Теорема 1.* Любое ограниченное при  $t \geq 0$  решение системы (8) стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к некоторому состоянию равновесия.

Доказательство этой теоремы легко провести, построив функцию ляпуновского типа

$$V(\eta, \theta) = \frac{1}{2}\eta^2 + \int_0^\theta \varphi(\theta)d\theta$$

и применив стандартные рассуждения в рамках прямого метода Ляпунова [13,14].

Ясно, что для системы (8) необходимым условием существования асимптотически устойчивого (в малом) состояния равновесия (которое соответствует устойчивому синхронному рабочему режиму электродвигателя) является условие  $\gamma < 1$ . В этом случае система (8) имеет седловое состояние равновесия  $\eta = 0, \theta = \theta_0 + 2k\pi$ , где число  $\theta_0$  удовлетворяет условиям

$$\sin \theta_0 = \gamma, \quad \cos \theta_0 < 0, \quad \theta_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

и асимптотически устойчивое (в малом) состояние равновесия  $\eta = 0, \theta = \theta_1 + 2k\pi$ , где число  $\theta_1$  удовлетворяет условиям

$$\sin \theta_1 = \gamma, \quad \cos \theta_1 > 0, \quad \theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Зафиксируем параметр  $\gamma \in (0, 1)$  и будем варьировать параметр  $\alpha \in [0, +\infty)$ .

При  $\alpha = 0$  система (8) интегрируема и легко видеть, что для сепаратрисы  $\theta(t)^+, \eta(t)^+$  седла  $\theta = \theta_0, \eta = 0$ , удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \eta(t)^+ &= 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t)^+ = \theta_0, \\ \eta(t) &> 0, \quad \forall t \in (T, +\infty), \end{aligned}$$

(здесь  $T$  – некоторое число), существует некоторое число  $\tau$  такое, что

$$(9) \quad \begin{aligned} \eta(\tau)^+ &= 0, \quad \theta^+(\tau) \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0), \\ \eta(t)^+ &> 0, \quad \forall t > \tau. \end{aligned}$$

(Рис. 3). Рассмотрим теперь отрезок прямой

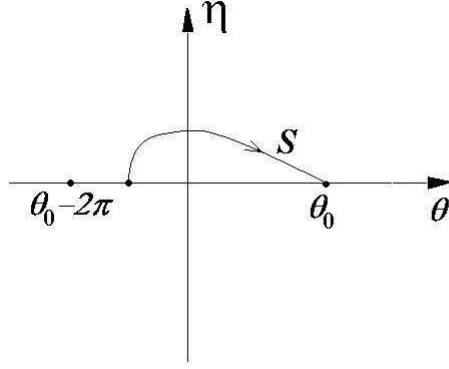


Рис. 3. Сепаратриса седла

$$\eta = -K(\theta - \theta_0) \quad \theta \in [\theta_0 - 2\pi, \theta_0].$$

Легко видеть, что на этом отрезке выполнены следующие соотношения

$$\begin{aligned} (\eta + K(\theta - \theta_0))^\bullet &= -\alpha\eta + K\eta - \sin\theta + \gamma = \\ &= (\theta - \theta_0) \left( -K(K - \alpha) + \frac{\gamma - \sin\theta}{\theta - \theta_0} \right). \end{aligned}$$

Используя очевидное неравенство

$$\left| \frac{\gamma - \sin\theta}{\theta - \theta_0} \right| \leq 1, \quad \forall \theta \neq \theta_0$$

и предполагая, что

$$\alpha > 2, \quad \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} < K < \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1},$$

получим оценку

$$(10) \quad (\eta + K(\theta - \theta_0))^\bullet < 0$$

при  $\eta = -K(\theta - \theta_0), \theta \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0)$ .

Из оценки (10) следует (рис. 4), что сепаратриса  $\theta(t)^+, \eta(t)^+$  в полосе  $\{\eta, \theta \mid \theta \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0)\}$  будет располагаться выше отрезка прямой  $\{\eta, \theta \mid \eta = -K(\theta - \theta_0), \theta \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0)\}$ . Отсюда следует, что при  $\alpha > 2$  не существует числа  $\tau$ , для которого выполнены соотношения (9).

Хорошо известно, что кусок траектории  $S : \{\eta(t)^+, \theta(t)^+ \mid t \geq \tau\}$  непрерывно зависит от параметра  $\alpha$ . Отсюда и из приведенных выше рассуждений вытекает следующий известный результат.

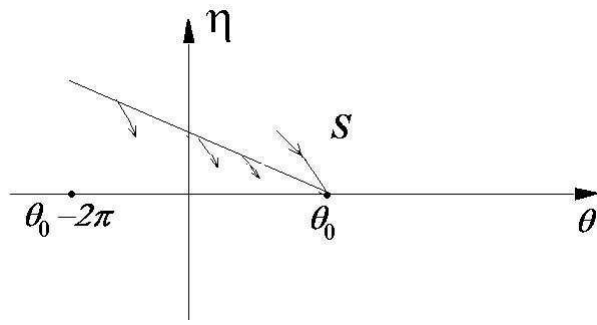


Рис. 4. Нижняя оценка сепаратрисы седла

*Теорема 2 [1]. Для любого  $\gamma > 0$  существует число  $\alpha(\gamma) \in (0, 2]$  такое, что система (8) с такими параметрами  $\gamma, \alpha(\gamma)$  имеет в цилиндрическом фазовом пространстве  $\{\eta, \theta \bmod 2\pi\}$  гомоклиническую траекторию:*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \eta(t) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \eta(t) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) &= \theta_0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t) = \theta_0 - 2\pi. \end{aligned}$$

Легко также показать, что  $\alpha(\gamma)$  однозначно определяется по  $\gamma$  и  $\alpha(\gamma)$  являются монотонно возрастающей функцией.

Отсюда, из теорем 1 и 2 вытекает следующее расположение траекторий в фазовом пространстве системы (8).

1) При  $\alpha > \alpha(\gamma)$  сепаратрисы, стремящиеся при  $t \rightarrow +\infty$  к седловым состояниям равновесия системы (8), являются границами областей притяжения асимптотически устойчивых состояний равновесия. Можно показать [9], что все фазовое пространство разбито на такие области притяжения (рис.5).

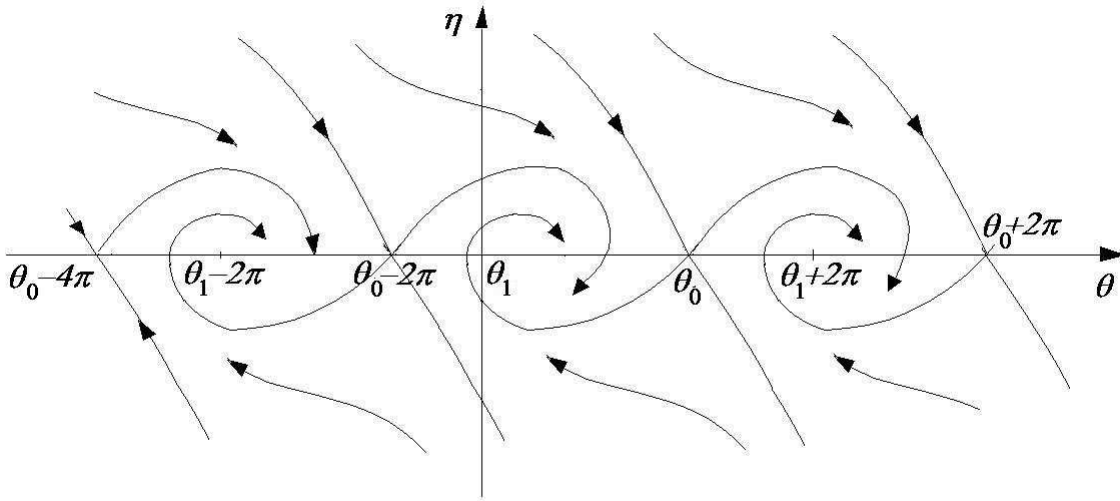


Рис. 5. Глобальная устойчивость

2) При  $\alpha = \alpha(\gamma)$  области притяжения устойчивых состояний равновесия также ограничены такими сепаратрисами. Однако эти области уже не заполняют все фазовое пространство.

В области, расположенной над гомоклиническими орбитами, все траектории стремятся при  $t \rightarrow +\infty$  к бесконечности, приближаясь к множеству, состоящему из гомоклинических орбит (рис.6)

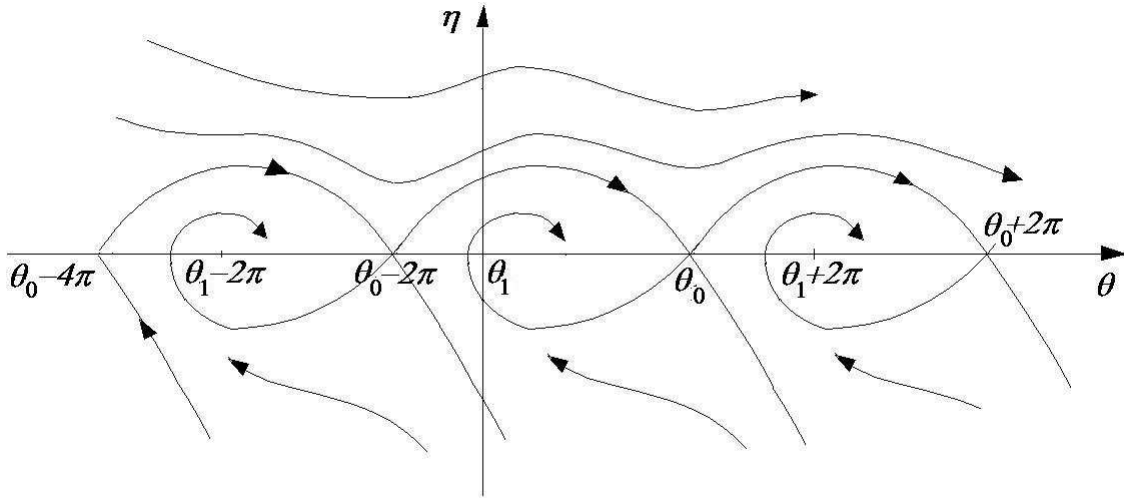


Рис. 6. Гомоклиническая бифуркация

3) При  $\alpha < \alpha(\gamma)$  между сепаратрисами возникают коридоры неустойчивости (рис.7).

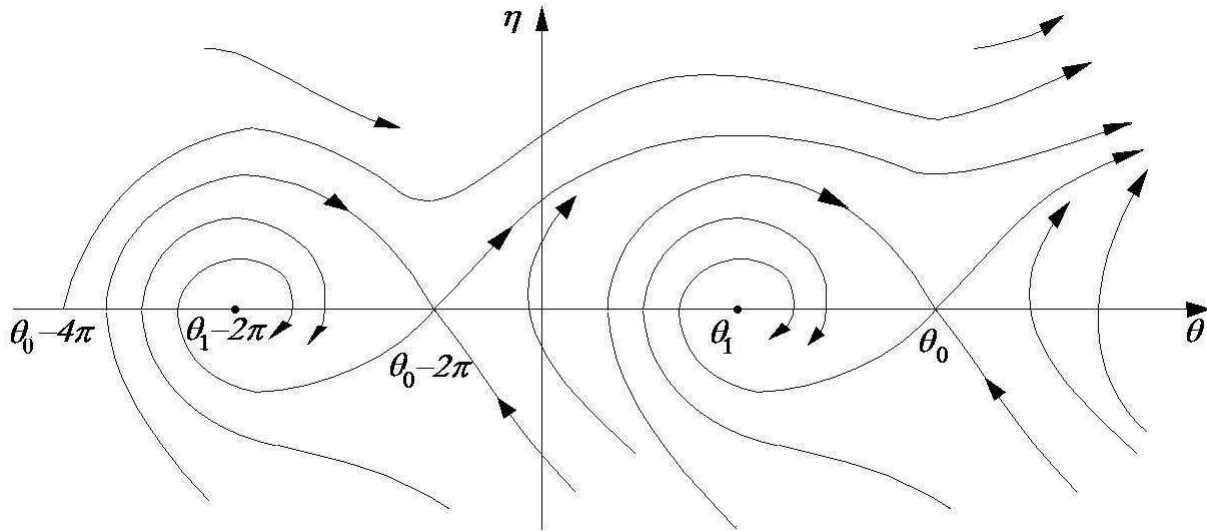


Рис. 7. Случай  $\alpha < \alpha(\gamma)$

В этих коридорах все траектории стремятся при  $t \rightarrow +\infty$  к бесконечности. Все фазовое пространство разбивается на такие коридоры и области притяжения устойчивых состояний равновесия.

Таким образом, случай 1) соответствует глобальной устойчивости: все траектории стремятся при  $t \rightarrow +\infty$  к состояниям равновесия. Для синхронной машины это соответствует тому, что

при любом переходном режиме качания ротора демпфируются и в результате машина выходит на рабочий синхронный режим.

В случае 3) возможен как переход к синхронному режиму, так и выпадение машины из синхронизма. Это зависит от начальных условий  $\theta(0), \eta(0)$ .

Приведем здесь наиболее известные аналитические оценки величины  $\alpha(\gamma)$ .

*Теорема 3 [5,6].*

$$\alpha(\gamma) < 2 \sin \left( \frac{1}{2} \theta_1 \right).$$

Заметим, что при малых  $\gamma$  эта оценка принимает вид

$$(11) \quad \alpha(\gamma) < \gamma.$$

*Теорема 4 [6].*

$$\alpha(\gamma)^2 > \sqrt{3(\cos \theta_1)^2 + 1} - 2 \cos \theta_1.$$

Вычисление величины  $\alpha(\gamma)$  с помощью численных методов обсуждается в [15,16].

Обобщение приведенных здесь методов и результатов на более сложные модели синхронных машин изложено в [14,17].

Другие бифуркации в системах фазовой синхронизации: удвоения периода, Андронова-Хопфа, полустойчивого цикла изучались и обсуждались в [7, 8, 15-24].

### 3. Системы фазовой автоподстройки частоты

Системы фазовой автоподстройки (ФАП, phase locked loops, PLL) широко распространены в радиотехнике и электросвязи. После их изобретения в 30–40-х годах двадцатого века стала интенсивно развиваться как практика применения, так и теория систем ФАП [15-19,25-36]. В последнее десятилетие системы ФАП стали широко применяться для управления тактовыми генераторами цифровых сигнальных процессоров, многопроцессорных кластеров и других устройств цифровой обработки информации [16,24, 37-44].

Опишем здесь основные принципы синтеза и анализа систем автоподстройки. Здесь с 60-х годов стало традиционным использование трех уровней описания систем ФАП: 1) первый уровень – описание электронной реализации системы, 2) второй уровень – описание блок-схемы, содержащей фазовые соотношения, 3) третий уровень – описание дифференциальными, интегральными или разностными уравнениями.

Приведем здесь такое, ставшее классическим, описание системы ФАП с генераторами, вырабатывающими гармонические колебания [25,28].

Рассмотрим систему ФАП на первом уровне (рис.8)

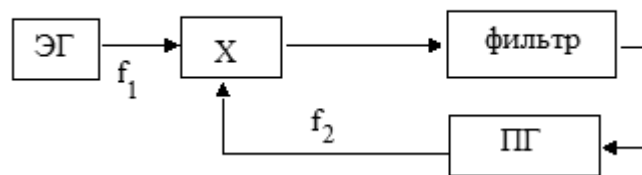


Рис. 8. Электронная схема системы ФАП

Здесь ЭГ – эталонный генератор, ПГ – подстраиваемый генератор, вырабатывающие высокочастотные "почти гармонические колебания"

$$f_j(t) = A_j \sin(\omega_j(t)t + \psi_j).$$

Блок  $\times$  является перемножителем колебаний  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ . На его выходе появляется сигнал  $f_1(t)f_2(t)$ . Соотношения между входом  $\xi(t)$  и выходом  $\sigma(t)$  линейного фильтра имеют вид

$$\sigma(t) = \alpha_0(t) + \int_0^t \gamma(t - \tau)\xi(\tau) d\tau.$$

Здесь  $\gamma(t)$  – импульсная переходная функция фильтра,  $\alpha_0(t)$  – экспоненциально затухающая функция, зависящая от начального состояния фильтра в момент  $t = 0$ .

Электронные реализации генераторов, перемножителей и фильтров имеются в [37, 45].

Переформулируем теперь свойство высокочастотности колебаний  $f_j(t)$  в следующее условие.

Рассмотрим большой фиксированный промежуток времени  $[0, T]$ , который можно разбить на малые промежутки вида  $[\tau, \tau + \delta]$ , ( $\tau \in [0, T]$ ), где выполняются соотношения

$$(12) \quad \begin{aligned} |\gamma(t) - \gamma(\tau)| &\leq C\delta, \quad |\omega_j(t) - \omega_j(\tau)| \leq C\delta, \\ \forall t \in [\tau, \tau + \delta], \quad \forall \tau \in [0, T], \\ |\omega_1(\tau) - \omega_2(\tau)| &\leq C_1, \quad \forall \tau \in [0, T], \\ \omega_j(t) &\geq R, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Здесь будем считать, что  $\delta$  – достаточно мало по отношению к фиксированным числам  $T, C, C_1$ , а число  $R$  – достаточно большое по отношению к числу  $\delta$ . Последнее означает, что на малых промежутках  $[\tau, \tau + \delta]$  функции  $\gamma(t)$  и  $\omega_j(t)$  являются почти константами, а функции  $f_j(t)$  на них быстро осциллируют, как гармонические функции. Ясно, что такие условия имеют место для высокочастотных колебаний.

Рассмотрим теперь две блок-схемы, изображенные на рисунках 9 и 10

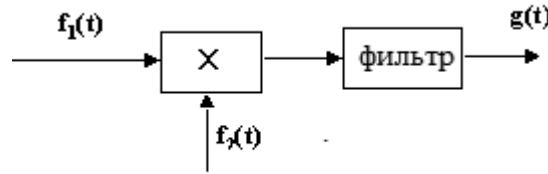


Рис. 9. Перемножитель и фильтр

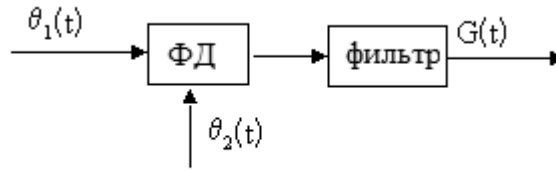


Рис. 10. Фазовый детектор и фильтр

Здесь  $\theta_j(t) = \omega_j(t)t + \psi_j$ , которые будем называть фазами колебаний  $f_j(t)$ , ФД – нелинейный блок с характеристикой  $\varphi(\theta)$ , называемый фазовым детектором (дискриминатором). На входы блока ФД поступают фазы  $\theta_j(t)$ , выходом является функция  $\varphi(\theta_1(t) - \theta_2(t))$ .

Сигналы  $f_1(t)f_2(t)$  и  $\varphi(\theta_1(t) - \theta_2(t))$  поступают на одинаковые фильтры с одинаковой импульсной переходной функцией  $\gamma(t)$ . Выходами фильтров являются соответственно функции  $g(t)$  и  $G(t)$ .

Классический синтез систем ФАП основан на хорошо известном результате.

*Теорема 5. Если выполнены условия (12) и*

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2}A_1A_2 \cos \theta,$$

*то при одних и тех же начальных состояниях фильтра имеет место соотношение*

$$|G(t) - g(t)| \leq C_3\delta, \quad \forall t \in [0, T].$$

Здесь  $C_3$  – некоторое не зависящее от  $\delta$  число.

Таким образом, выходы двух блок-схем на рис.9 и рис.10  $g(t)$  и  $G(t)$  мало отличаются друг от друга и можно перейти (с точки зрения асимптотики по  $\delta$ ) на следующий уровень описания – на уровень фазовых соотношений 2).

В этом случае блок-схема на рис.8 перейдет в следующую блок-схему (рис. 11)

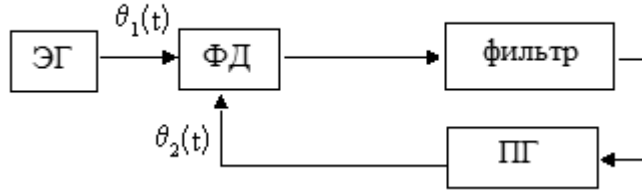


Рис. 11. Блок-схема ФАП на уровне фазовых соотношений

*Доказательство теоремы 5.*

Очевидно, что при  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} g(t) - G(t) &= \int_0^t \gamma(t-s) [A_1A_2 \sin(\omega_1(s)s + \psi_1) \cdot \\ &\sin(\omega_2(s)s + \psi_2) - \varphi(\omega_1(s)s - \omega_2(s)s + \psi_1 - \psi_2)] ds = \\ &= -\frac{A_1A_2}{2} \int_0^t \gamma(t-s) [\cos((\omega_1(s) + \omega_2(s))s + \psi_1 + \psi_2)] ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим промежутки  $[k\delta, (k+1)\delta]$ , где  $k = 0, \dots, m$ , число  $m$  такое, что

$$t \in [m\delta, (m+1)\delta].$$

Из условий (12) следует, что на каждом из промежутков  $[k\delta, (k+1)\delta]$  справедливы соотношения

$$(13) \quad \gamma(t-s) = \gamma(t-k\delta) + O(\delta)$$

$$(14) \quad \omega_1(s) + \omega_2(s) = \omega_1(k\delta) + \omega_2(k\delta) + O(\delta)$$

при любом  $s \in [k\delta, (k+1)\delta]$ . Но тогда из соотношения (14) вытекает оценка

$$(15) \quad \begin{aligned} \cos((\omega_1(s) + \omega_2(s))s + \psi_1 + \psi_2) &= \\ = \cos((\omega_1(k\delta) + \omega_2(k\delta))s + \psi_1 + \psi_2) &+ O(\delta) \end{aligned}$$

для любого  $s \in [k\delta, (k+1)\delta]$ .

Из соотношений (13) и (15) следует, что

$$(16) \quad \int_0^t \gamma(t-s) [\cos((\omega_1(s) + \omega_2(s))s + \psi_1 + \psi_2)] ds = \\ = \sum_{k=0}^m \gamma(t - k\delta) \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} [\cos((\omega_1(k\delta) + \omega_2(k\delta))s + \psi_1 + \psi_2)] ds + O(\delta).$$

Из последнего неравенства (12) и из того факта, что  $R$  – достаточно большое по отношению к  $\delta$  число (рис.12), следует оценка

$$\int_{k\delta}^{(k+1)\delta} [\cos((\omega_1(k\delta) + \omega_2(k\delta))s + \psi_1 + \psi_2)] ds = O(\delta^2).$$

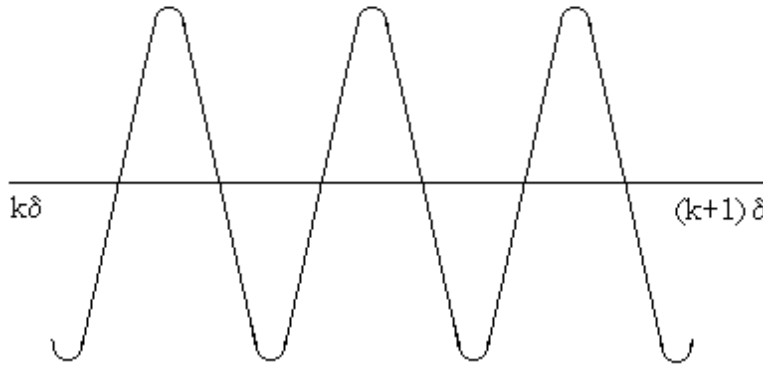


Рис. 12. Высокочастотные колебания

Отсюда следует, что

$$\int_0^t \gamma(t-s) [\cos((\omega_1(s) + \omega_2(s))s + \psi_1 + \psi_2)] ds = O(\delta).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь высокочастотные импульсные генераторы, соединенные по схеме на рис. 8. Здесь

$$f_j(t) = A_j \text{sign} \sin(\omega_j(t)t + \psi_j).$$

Колебания такого вида характерны для импульсных последовательностей тактовых генераторов [37–47], центрированных относительно нулевого напряжения. Перемножитель колебаний здесь может выполнен на логическом элементе "исключающее или" [46, 47].

Как и ранее будем здесь предполагать, что выполнены условия (12).

Рассмотрим теперь  $2\pi$ -периодическую функцию  $\varphi(\theta)$  следующего вида

$$(17) \quad \varphi(\theta) = \begin{cases} A_1 A_2 (1 + 2\theta/\pi) & \text{при } \theta \in [-\pi, 0], \\ A_1 A_2 (1 - 2\theta/\pi) & \text{при } \theta \in [0, \pi]. \end{cases}$$

и блок-схемы на рисунках 9 и 10.

*Теорема 6 [42-44].* Если выполнены условия (12) и характеристика фазового детектора  $\varphi(\theta)$  имеет вид (17), то при одних и тех же начальных состояниях фильтра имеет место соотношение

$$|G(t) - g(t)| \leq C_4 \delta, \quad \forall t \in [0, T].$$

Здесь  $C_4$  – некоторое, не зависящее от  $\delta$  число.

*Доказательство.* Очевидно, что при  $t \in [0, T]$

$$g(t) - G(t) = \int_0^t \gamma(t-s) [A_1 A_2 \text{sign} [\sin(\omega_1(s)s + \psi_1) \sin(\omega_2(s)s + \psi_2)] - \varphi(\omega_1(s)s - \omega_2(s)s + \psi_1 - \psi_2)] ds.$$

Как и в доказательстве теоремы 5 рассмотрим промежутки  $[k\delta, (k+1)\delta]$  и воспользуемся соотношениями (13)-(15) для того, чтобы получить оценку

$$\begin{aligned} & \int_0^t \gamma(t-s) [A_1 A_2 \text{sign} [\sin(\omega_1(s)s + \psi_1) \sin(\omega_2(s)s + \psi_2)] - \\ & - \varphi(\omega_1(s)s - \omega_2(s)s + \psi_1 - \psi_2)] ds = \\ & = \sum_{k=0}^m \gamma(t-k\delta) \left[ \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} A_1 A_2 \text{sign} [\cos((\omega_1(k\delta) - \omega_2(k\delta))s + \psi_1 - \psi_2) - \right. \\ & \left. - \cos((\omega_1(k\delta) + \omega_2(k\delta))s + \psi_1 + \psi_2)] ds - \right. \\ & \left. - \varphi((\omega_1(k\delta) - \omega_2(k\delta) + \psi_1 - \psi_2)\delta) + O(\delta^2) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда и из соотношения

$$A_1 A_2 \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} \text{sign} [\cos \alpha - \cos(Rs + \psi_0)] ds = \varphi(\alpha)\delta + O(\delta^2),$$

которое выполнено при любом  $\alpha \in [-\pi, \pi]$ , любом  $\psi_0$  и при достаточно большом относительно числа  $\delta$  числе  $R$ , получим утверждение теоремы 6.

Теорема 6 является основой для синтеза систем фазовой автоподстройки с импульсными генераторами. Она позволяет провести для импульсных тактовых генераторов параллельное рассмотрение двух блок-схем: на уровне электронной реализации (рис. 8) и на уровне фазовых соотношений (рис. 11), где можно применять общие принципы теории фазовой синхронизации.

Таким образом, возможно построение теории фазовой синхронизации распределенных систем тактовых генераторов в многопроцессорных кластерах [42-44].

Сделаем теперь одно замечание, необходимое для вывода дифференциальных уравнений системы ФАП.

Рассмотрим величину

$$\dot{\theta}_j(t) = \omega_j(t) + \dot{\omega}_j(t)t.$$

Для правильно синтезированной, а именно – обладающей свойством глобальной устойчивости, системы ФАП имеет место экспоненциальное затухание величины  $\dot{\omega}_j(t)$ :

$$|\dot{\omega}_j(t)| \leq C e^{-\alpha t}.$$

Здесь  $C$  и  $\alpha$  – некоторые, не зависящие от  $t$  положительные числа. Поэтому величина  $\dot{\omega}_j(t)t$ , как правило, достаточно мала по отношению к числу  $R$  (смотри условие (12)).

Из приведенных выше соотношений можно сделать вывод о том, что имеет место следующее приближенное равенство

$$(18) \quad \dot{\theta}_j(t) = \omega_j(t).$$

При выводе дифференциальных уравнений систем ФАП используют блок-схему на рис. 11 и соотношение (18), которое принимают точным.

Заметим, что закон управления подстраиваемым генератором принимается линейным:

$$(19) \quad \omega_2(t) = \omega_2(0) + LG(t).$$

Здесь  $\omega_2(0)$  – начальная частота подстраиваемого генератора,  $L$  – некоторое число,  $G(t)$  – управляющий сигнал, который является выходом фильтра (рис. 11).

Таким образом, уравнение системы ФАП имеет вид

$$\dot{\theta}_2(t) = \omega_2(0) + L(\alpha_0(t) + \int_0^t \gamma(t-\tau) \cdot \varphi(\theta_1(\tau) - \theta_2(\tau))d\tau).$$

Принимая, что эталонный генератор высокостабилен, т.е.  $\omega_1(t) \equiv \omega_1(0)$ , откуда получим следующие уравнения системы ФАП

$$(20) \quad (\theta_1(t) - \theta_2(t))^\bullet + L(\alpha_0(t) + \int_0^t \gamma(t-\tau) \cdot \varphi(\theta_1(\tau) - \theta_2(\tau))d\tau) = \omega_1(0) - \omega_2(0).$$

Это – уравнение типовой системы ФАП [15,21].

Заметим, что если фильтр является интегрирующим с передаточной функцией

$$K(p) = \frac{1}{p + \alpha},$$

и  $\varphi(\theta) = \sin \theta$ , то уравнение (20) эквивалентно уравнению (4) с  $\theta = \theta_1 - \theta_2$ ,  $b = L$ ,  $\gamma = \omega_1(0) - \omega_2(0)$ .

Используя рассуждения, проведенные при доказательствах теорем 5 и 6, можно получить следующее соотношение

$$\int_0^t [f_1(\tau)f_2(\tau) - \varphi(\theta_1(\tau) - \theta_2(\tau))]d\tau = O(\delta).$$

Это соотношение является аналогом теорем 5 и 6, когда  $K(p) = p^{-1}$ . Из равенств (15) и (16) следует, что подстраиваемый генератор можно рассматривать как идеальный интегратор с передаточной функцией  $K(p) = Lp^{-1}$ . Отсюда следует, что в системах ФАП можно применять фильтры с передаточными функциями более общего вида:

$$K(p) = a + W(p),$$

где  $a$  – некоторое число,  $W(p)$  – правильная дробно-рациональная функция. В этом случае вместо уравнения (20) получим уравнение

$$(21) \quad (\theta_1(t) - \theta_2(t))^\bullet + L(a\varphi(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + \alpha_0(t) + \int_0^t \gamma(t-\tau)\varphi(\theta_1(\tau) - \theta_2(\tau))d\tau) = \omega_1(0) - \omega_2(0).$$

#### 4. Самосинхронизация неуравновешенных роторов

Явление самосинхронизации неуравновешенных роторов, находящихся на общем упругом основании было открыто в середине двадцатого века [48–55].

Рассмотрим это явление на примере двухвибрационной системы (рис. 13) [55]. Электрический привод левого вибратора создает силовой момент, который вращает вибратор с заданной угловой скоростью  $\omega$ . Привод правого вибратора создает силовой момент  $M \geq 0$ .

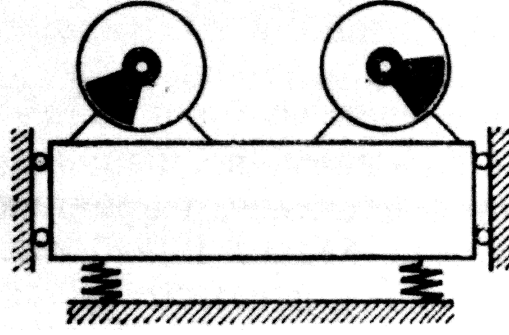


Рис. 13. Платформа с дебалансными вибраторами

Пренебрегая влиянием динамики правого вибратора на движения платформы и левого вибратора (вспомним аналогичное предположение для обмоток статора при рассмотрении модели электродвигателей) получим, что точка подвеса физического маятника, которым является правый вибратор, совершает вертикальные колебания вида  $A \cos \omega t$ .

Хорошо известно [55], что в этом случае динамика правого ротора описывается следующим дифференциальным уравнением

$$(22) \quad I\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} + meA\omega^2 \cos \omega t \sin \varphi = mge \sin \varphi + M.$$

Здесь  $I$  – момент инерции ротора,  $m$  – его масса,  $e$  – эксцентриситет,  $k$  – коэффициент вязкого трения,  $\varphi$  – угол поворота ротора.

Введем обозначение

$$\theta = \varphi - \omega t$$

и преобразуем уравнение (22) к виду

$$(23) \quad I\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{meA\omega^2}{2}(\sin \theta + \sin(\theta + 2\omega t)) - mge \sin(\theta + \omega t) = M - k\omega.$$

Примем теперь методику, развитую при анализе и синтезе систем ФАП.

Введем обозначения

$$\alpha = \frac{k}{I}, \quad \beta = \frac{meA\omega^2}{2I}, \quad \gamma = \frac{M - k\omega}{I}, \quad \rho = \frac{mge}{I}$$

и предположим, что величина  $\omega$  – достаточно большая по отношению к  $\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \gamma$  и  $\rho$ . Кроме того предположим, что

$$(24) \quad \beta > |\gamma|.$$

В этом случае уравнение

$$(25) \quad \ddot{\sigma} + \alpha\dot{\sigma} + \beta \sin \sigma = \gamma$$

имеет в фазовом пространстве области притяжения устойчивых положений равновесия (рис. 7)

Будем рассматривать уравнение (25) как уравнение сравнения для уравнения (23).

Покажем, что на любом конечном прометужке  $[0, T]$  при достаточно больших  $\omega$  разность решений  $\theta(t)$  и  $\sigma(t)$  уравнений (23) и (25) с одними и теми же начальными данными

$$(26) \quad \theta(0) = \sigma(0), \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\sigma}(0), \quad |\dot{\theta}(0)| \leq \frac{2\beta + |\gamma| + \rho}{\alpha}$$

достаточно мала. Для этого запишем уравнение (23) в следующей интегральной форме

$$\theta(t) = \nu(t) + \int_0^t \gamma(t-\tau) [\sin \theta(\tau) + \sin(\theta(\tau) + 2\omega\tau) - \frac{\rho \sin(\theta(t) + \omega\tau)}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta}] d\tau.$$

Аналогичная интегральная форма для уравнения (25) имеет вид

$$\sigma(t) = \nu(t) + \int_0^t \gamma(t-\tau) [\sin \sigma(\tau) - \frac{\gamma}{\beta}] d\tau.$$

Здесь  $\theta(0) = \sigma(0)$ ,  $\dot{\theta}(0) = \dot{\sigma}(0)$

$$(27) \quad \nu(t) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\dot{\theta}(0) + \theta(0)$$

$$(28) \quad \gamma(t) = \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$$

Также как при доказательстве теоремы 5 здесь получим соотношение

$$\int_0^t \gamma(t-\tau) [\sin(\theta(\tau) + 2\omega\tau) - \frac{\rho}{\beta} \sin(\theta(\tau) + \omega\tau)] d\tau = O(\delta).$$

Здесь мы учитываем, что  $\gamma(t)$  и  $\theta(t)$  – медленно меняющиеся на интервалах  $[k\delta, (k+1)\delta]$  функции.

В самом деле, для функции  $\gamma(t)$  это следует из соотношения (28).

Хорошо известно, что для уравнения (23) из условий (26) следует оценка

$$|\dot{\theta}(t)| \leq \frac{2\beta + |\gamma| + \rho}{\alpha}, \quad \forall t \geq 0.$$

Отсюда вытекает, что  $\theta(t)$  медленно изменяется на  $[k\delta, (k+1)\delta]$ . При этом функции  $\sin(\theta(t) + 2\omega t)$  и  $\cos(\theta(t) + \omega t)$  быстро осциллируют на  $[k\delta, (k+1)\delta]$  (рис.12).

Таким образом, здесь можно сформулировать следующий результат.

*Теорема 7.* Для любых  $T > 0$  и  $\delta > 0$  существует число  $\omega > 0$  достаточно большое по отношению к  $\alpha, \alpha^{-1}, \beta, |\gamma|$  и  $\rho$  и такое, что для решений  $\theta(t)$  и  $\sigma(t)$  уравнений (22) и (25) с начальными данными (26) выполнено неравенство

$$(29) \quad |\theta(t) - \sigma(t)| \leq \delta, \quad \forall t \in [0, T].$$

Из этой теоремы и из неравенства (24) следует, что для уравнения (22) при фиксированных значениях  $\alpha, \beta, \gamma, \rho, T > 0$ , удовлетворяющих (24), для достаточно больших  $\omega$  наблюдается вращение правого ротора с частотой  $\omega$  на временном промежутке  $[0, T]$  при начальных условиях  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ,  $\sin \varphi(0) = \gamma/\beta$ ,  $\varphi(0) \in (0, \pi/2)$ . Этот же эффект наблюдается и при начальных условиях  $\varphi(0) = \sigma(0)$ ,  $\dot{\varphi}(0) = \dot{\sigma}(0)$  из области притяжения устойчивого положения равновесия  $\dot{\sigma}(0) = 0$ ,  $\sigma(0) \in (-\pi/2, \pi/2)$ ,  $\sin \sigma(0) = \gamma/\beta$ .

Напомним, что при  $M = 0$  и при некоторых значениях параметров  $\alpha, \beta, \gamma, \rho$  для достаточно больших  $\omega$  в некоторой окрестности начальных условий  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = \pi$  наблюдается устойчивость этих состояний равновесия [56–58].

## 5. Уравнения систем фазовой синхронизации

Отметим вначале, что при рассмотрении и синхронных машин, и систем ФАП, и неуравновешенных роторов мы приходим к анализу дифференциального уравнения

$$(30) \quad \ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \sin \theta = \gamma.$$

Однако в более сложных случаях уравнения систем ФАП и синхронных машин имеют разную структуру.

В том случае, когда передаточная функция фильтра  $a + W(p)$  невырождена, т.е. ее числитель и знаменатель не имеют общих корней, уравнение (21) эквивалентно следующей системе дифференциальных уравнений

$$(31) \quad \begin{aligned} \dot{z} &= Az + b\psi(\sigma) \\ \dot{\sigma} &= c^*z + \rho\psi(\sigma). \end{aligned}$$

Здесь  $A$  – постоянная  $n \times n$ -матрица,  $b$  и  $c$  – постоянные  $n \times n$ -векторы,  $\rho$  – число,  $\psi(\sigma)$  –  $2\pi$ -периодическая функция, удовлетворяющие соотношениям  $\rho = -aL$

$$\begin{aligned} W(p) &= Lc^*(A - pI)^{-1}b, \\ \psi(\sigma) &= \varphi(\sigma) - \frac{\omega_1(0) - \omega_2(0)}{L(a + W(0))}. \end{aligned}$$

Заметим, что в (31)  $\sigma = \theta_1 - \theta_2$ .

Из невырожденности  $a + W(p)$  следует [14, 19, 58] полная управляемость пары  $(A, b)$  и полная наблюдаемость пары  $(A, c)$ . Последнее означает выполнение неравенств

$$\begin{aligned} \det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) &\neq 0, \\ \det(c, A^*c, \dots, (A^*)^{n-1}c) &\neq 0. \end{aligned}$$

Дискретная система фазовой автоподстройки частоты описывается аналогичными уравнениями [34].

$$(32) \quad \begin{aligned} z(t+1) &= Az(t) + b\psi(\sigma(t)) \\ \sigma(t+1) &= \sigma(t) + c^*z(t) + \rho\psi(\sigma(t)). \end{aligned}$$

Здесь  $t \in Z$ , где  $Z$  – множество целых чисел.

Уравнения (31) и (32) – это уравнения так называемых типовых систем ФАП [15].

Имеется много различных модификаций систем ФАП, уравнения которых приведены в [15–19, 25–36].

Приведем здесь уравнения астатической системы ФАП, управляющей тактовыми генераторами в цифровых сигнальных процессорах [42–44]. Блок-схема такой системы отличается от блок-схемы на рис. 11 с характеристикой фазового детектора (17) лишь тем, что после фильтра включен релейный элемент с характеристикой  $u(G) = \text{sign } G$ . В этом случае получим следующие уравнения системы ФАП

$$(33) \quad \begin{aligned} \dot{z} &= Az + b\varphi(\sigma) \\ \dot{\sigma} &= g(c^*z), \end{aligned}$$

где  $\sigma = \theta_1 - \theta_2$ , матрица  $A$  и векторы  $b$  и  $c$  таковы, что

$$\begin{aligned} W(p) &= c^*(A - pI)^{-1}b, \\ g(G) &= -L(\text{sign } G) + (\omega_1(0) - \omega_2(0)). \end{aligned}$$

Напомним, что здесь предполагается высокостабильность эталонного генератора:  $\dot{\theta}_1(t) \equiv \omega_1(t) \equiv \omega_1(0)$ .

Широкий класс синхронных электрических машин описывается следующей системой дифференциальных уравнений [14, 59, 60]

$$(34) \quad \begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= -g(\eta, \sigma) + z^*Cf(\sigma) - \varphi(\sigma) \\ \frac{dz}{dt} &= Az + Df(\sigma)\eta, \end{aligned}$$

где  $A$  – постоянная  $n \times n$ -матрица,  $D$  и  $C$  –  $n \times m$ -матрицы,  $f(\sigma)$  – непрерывно дифференцируемая  $2\pi$ -периодическая  $m$ -мерная вектор-функция,  $\varphi(\sigma)$  и  $g(\eta, \sigma)$  – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\mu_1 \leq \frac{g(\eta, \sigma)}{\eta} \leq \mu_2, \quad \forall \eta \neq 0, \quad \forall \sigma \in R^1,$$

$$\varphi(\sigma + 2\pi) = \varphi(\sigma), \quad g(\eta, \sigma + 2\pi) = g(\eta, \sigma), \quad \forall \eta \in R^1, \quad \forall \sigma \in R^1.$$

Здесь  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – неотрицательные числа.

Заметим, что система (1), (2) может быть записана в виде (34) с

$$\begin{aligned} \sigma &= -\theta, \quad \eta = -\dot{\theta}, \quad z = \begin{pmatrix} i_1 - e/R \\ i_2 \end{pmatrix}, \\ g(\eta, \sigma) &= 0, \quad \varphi(\sigma) = \frac{\beta S B e}{I R} \sin \sigma - \frac{M}{I}, \\ f(\sigma) &= \frac{S B}{L} \begin{pmatrix} \sin \sigma \\ \cos \sigma \end{pmatrix}, \\ A &= \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ C &= -\frac{\beta L}{I} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Синхронные двигатели с двумя демпферными обмотками, питающиеся от мощной сети, описываются уравнениями (34) с трехмерным вектором  $z$ , компонентами которого являются токи в обмотке возбуждения и в двух демпферных обмотках [12].

Различные обобщения и модификации приведенных здесь уравнений (34) имеются в [17, 61].

## 6. Некоторые общие понятия теории фазовой синхронизации

В предыдущих разделах были приведены уравнения систем фазовой синхронизации. Они различны, но их общей чертой является наличие угловых координат. Важным свойством всех систем, встречающихся в приложениях, является свойство устойчивости.

Наличие угловой координаты позволяет ввести цилиндрическое фазовое пространство. Для этого рассмотрим  $n$ -мерное дифференциальное уравнение

$$(35) \quad \frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad x \in R^n, \quad t \in R^1.$$

Здесь  $F(t, x)$  – вектор-функция, определенная на  $R^1 \times R^n$ .

Предположим, что для линейно независимых векторов  $d_j \in R^n$  ( $j = 1, \dots, m$ ) справедливы тождества

$$(36) \quad F(t, x + d_j) = F(t, x), \quad \forall x \in R^n, \quad \forall t \in R^1.$$

Часто скалярную величину  $d_j^* x / |d_j|$  называют угловой координатой. Для системы (8), например,

$$d_1 = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \theta \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \frac{d_1^* x}{|d_1|} = \theta.$$

Введем в рассмотрение дискретную группу

$$\Gamma = \left\{ x = \sum_{j=1}^m k_j d_j \mid k_j \in Z, \quad j = 1, \dots, m \right\}.$$

Здесь  $Z$  – множество целых чисел.

Рассмотрим фактор-группу  $R^n / \Gamma$ , элементами которой являются классы вычетов

$$[x] = \{x + u \mid \forall u \in \Gamma, \quad x \in R^n\}.$$

Далее введем так называемую плоскую метрику

$$(37) \quad \rho([x], [y]) = \inf_{\substack{z \in [x] \\ v \in [y]}} |z - v|.$$

Здесь  $z \in R^n$ ,  $v \in R^n$ ,  $|\cdot|$  – евклидова норма в  $R^n$ .

Легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

*Предложение 1.* Если  $x(t)$  – решение уравнения (35), определенное на интервале  $(t_1, t_2)$ , то  $x(t) + kd_j$ ,  $k \in Z$ , также является решением уравнения (35) на интервале  $(t_1, t_2)$ .

Из предложения 1 следует, что введенное таким образом метрическое пространство  $R^n/\Gamma$  в автономном случае (т.е. когда  $F(t, x) \equiv F(x)$ ) является фазовым пространством системы (35). Это означает, что это пространство разбивается на непересекающиеся траектории системы (35), если есть факт существования и единственности траекторий в  $R^n$ . Часто такое пространство удобно для исследования и в общем неавтономном случае, когда имеется зависимость правой части (35) от времени.

Пространство  $R^n/\Gamma$  часто называют цилиндрическим фазовым пространством так как оно диффеоморфно поверхности цилиндра

$$\underbrace{C \times C \times \cdots \times C}_m \times \underbrace{R^1 \times \cdots \times R^1}_{n-m}$$

Здесь  $C$  – окружность.

Часто пространство  $R^n/\Gamma$  с метрикой (37) оказывается более удобным, чем пространство  $R^n$ .

Во-первых, для  $R^n/\Gamma$  исчезает та многозначность, которая связана с угловыми координатами: всем значениям угловой координаты  $\sigma + 2k\pi$  соответствует только одно состояние реальной системы.

Во-вторых, здесь может быть введено естественным образом понятие ограниченности решений системы (35) в пространстве  $R^n/\Gamma$  относительно метрики (37). Такая ограниченность означает ограниченность решений в исходном пространстве  $R^n$  только по неугловым координатам (а также, быть может, и по некоторым угловым координатам, если их число больше, чем  $m$ ).

В третьих, для автономного случая естественным образом вводится классификация циклов. Поясним это более подробно.

Пусть правая часть уравнения (35) не зависит от времени (т.е.  $F(t, x) \equiv F(x)$ ).

Как обычно, решение  $x(t)$  системы (35) называем циклом первого рода, если  $x(t)$  не является состоянием равновесия и существует число  $T > 0$  такое, что

$$(38) \quad x(t + T) = x(t), \quad \forall t \in R^1.$$

*Определение 1.* Решение  $x(t)$  будем называть циклом второго рода, если существуют такие числа  $T > 0$  и  $k \in Z$ ,  $k \neq 0$ , что выполнено соотношение

$$(39) \quad x(t + T) = x(t) + kd_j, \quad \forall t \in R^1.$$

Здесь  $d_j$  – один из введенных ранее векторов из  $R^n$ .

Ясно, что циклы второго рода являются замкнутыми траекториями  $[x(t)]$  в цилиндрическом фазовом пространстве и теряют свойство замкнутости при переходе к фазовому пространству  $R^n$ .

Классификация циклов второго рода может быть продолжена введением гомотопных классов циклов, число которых определяется порядком связности цилиндрического фазового пространства [9]. Однако для теории фазовой синхронизации часто бывает достаточным установления свойства (39).

*Определение 2.* Решение  $x(t)$  системы (35) будем называть круговым, если существуют числа  $\varepsilon > 0$  и  $T > 0$  такие, что выполнено неравенство

$$(40) \quad d_j^* \dot{x}(t) \geq \varepsilon, \quad \forall t \geq T.$$

Заметим, что для системы (8) это неравенство приобретает вид

$$\dot{\theta}(t) = \eta(t) \geq \varepsilon/2\pi.$$

Такие решения существуют при  $\alpha < \alpha(\gamma)$  и соответствуют круговым движениям маятника вокруг точки подвеса.

Таким образом, введенное понятие кругового решения является некоторым обобщением этого понятия для системы (8), описывающей, в частности, движение маятника.

Перейдем теперь к определениям глобальной устойчивости системы (35), которые важны для систем фазовой синхронизации

Будем предполагать, что любое решение системы (35)  $x(t, t_0, x_0)$  с начальными данными  $x(t_0, t_0, x_0)$  существует и определено при всех  $t \geq t_0$ .

*Определение 3.* [59] Систему (35) будем называть *дихотомичной (dichotomic)*, если любое ее ограниченное на  $[t_0, +\infty)$  решение стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к стационарному множеству.

*Определение 4.* [59, 62] Систему (35) будем называть *системой градиентного типа (gradient-like)*, если любое ее решение стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к состоянию равновесия.

Если в цилиндрическом фазовом пространстве  $R^n/\Gamma$  стационарное множество состоит из одного локально асимптотически устойчивого состояния равновесия, а остальные состояния равновесия неустойчивы по Ляпунову, то такую систему градиентного типа будем называть глобально устойчивой.

С точки зрения теории фазовой синхронизации термин "глобальная устойчивость" более приемлем, чем термин "система градиентного типа", поскольку здесь физически наблюдается только единственный глобально устойчивый синхронизм. И такая терминология наиболее распространена в инженерной практике.

В электронных системах фазовой синхронизации иногда оказывается приемлемым более слабый тип устойчивости – так называемая устойчивость по Бакаеву [34].

Для определения этого типа устойчивости предположим, что  $m$  – это максимальное число линейно независимых векторов  $d_j$ , для которых справедливо тождество (36), система  $\{d_j\}$  – ортогональна, т.е.  $d_k^* d_j = 0$ , если  $k \neq j$ , и для векторов вида  $\lambda d_j$ , где  $\lambda \in (0, 1)$ , не выполнены тождества (36).

*Определение 5.* Будем говорить, что система (35) устойчива по Бакаеву, если для любого ее решения  $x(t, t_0, x_0)$  существует число  $T \geq t_0$  такое, что выполнены неравенства

$$(41) \quad |d_j^*(x(t_1, t_0, x_0) - x(t_2, t_0, x_0))| \leq |d_j|^2$$

при всех  $t_1 \geq T, t_2 \geq T, j = 1, \dots, m$ .

Заметим, что при анализе устойчивых по Бакаеву систем ФАП необходимо проводить специальное исследование адекватности дифференциальных уравнений (35) тем блок-схемам, которые описывают фазовые отношения (см. рис.11 и условие (18)).

В том случае, когда уравнение (35) глобально устойчиво, использование теории первого приближения в окрестности устойчивого состояния равновесия позволяет, как правило, сделать вывод об экспоненциальном затухании переходных процессов. Этот факт обосновывает переход к равенству (18) и, тем самым, обосновывает переход от блок-схемы на рис. 11 к дифференциальным уравнениям (31).

Отметим, что различные подходы к определению понятия "синхронизация" имеются в работах [63–68].

Для исследования глобальной устойчивости систем фазовой синхронизации оказалось возможным провести некоторую модификацию классического прямого метода Ляпунова. Такая модификация будет описана в следующем разделе.

## 7. Прямой метод Ляпунова для систем фазовой синхронизации

*Теорема 8.* Предположим, что существует непрерывная функция  $V(x) : R^n \rightarrow R^1$  такая, что выполнены следующие условия

- 1)  $V(x + q) = V(x), \forall x \in R^n, \forall q \in \Gamma,$
- 2)  $V(x) + \sum_{j=1}^m (d_j^* x)^2 \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow \infty,$

3) для любого решения  $x(t)$  системы (35) функция  $V(x(t))$  является невозрастающей.

Тогда любое решение  $[x(t)]$  системы (35) ограничено на  $[t_0, +\infty)$  в цилиндрическом пространстве  $R^n/\Gamma$ .

*Доказательство.* Из условия 1) теоремы следует, что можно определить функцию  $V([x]) : R^n/\Gamma \rightarrow R^1$  по формуле  $V([x]) = V(x)$ . При этом из условия 2) следует, что

$$(42) \quad V([x]) \rightarrow +\infty \text{ при } [x] \rightarrow \infty.$$

Предположим теперь, что решение  $[x(t)]$  не является ограниченным на  $[t_0, +\infty)$ . В этом случае существует последовательность  $t_k \rightarrow +\infty$  такая, что

$$[x(t_k)] \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из условия (42) следует, что

$$V([x(t_k)]) \rightarrow +\infty \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Последнее противоречит условию 3) теоремы. Полученное противоречие доказывает ограниченность  $[x(t)]$  в  $R^n/\Gamma$ .

Предположим теперь, что система (35) автономна ( $F(t, x) \equiv F(x)$ ) и ее стационарное множество состоит из изолированных точек.

*Теорема 9.* Предположим, что существует функция  $V(x) : R^n \rightarrow R^1$  такая, что выполнены условия 1)-3) теоремы 8 и условие

4) если  $V(x(t)) \equiv V(x(0))$ , то  $x(t) \equiv \text{const}$ .

Тогда система (35) является системой градиентного типа.

*Доказательство.* Напомним, что точка  $[p]$  называется  $\omega$ -предельной для траектории  $[x(t)]$ , если существует последовательность  $t_k \rightarrow \infty$  такая, что

$$[p] = \lim_{k \rightarrow \infty} [x(t_k)].$$

Напомним также [14, 59], что через  $\omega$ -предельную точку  $[p]$  проходит траектория  $[y(t)]$ , целиком состоящая из  $\omega$ -предельных точек траектории  $[x(t)]$  (этот факт обычно называют инвариантностью  $\omega$ -предельного множества).

Из теоремы 8 следует ограниченность  $[x(t)]$  при  $t \geq 0$ . Отсюда и из непрерывности  $V([x(t)])$  следует ограниченность при  $t \geq 0$  функции  $V[x(t)]$ . Поэтому из условия 3) следует существование предела

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V([x(t)]) = V_0.$$

Но тогда  $V([y(t)]) \equiv V_0$ . В этом случае из условия 4) получим, что  $y(t) \equiv \text{const}$ . Из этого тождества и из изолированности точек стационарного множества системы (35) получим, что эта система является системой градиентного типа.

Теорема 9 является распространением широко известных теоремы Барбашина-Красовского [69] и принципа Ла-Салля [70, 71] на системы с цилиндрическим фазовым пространством. Различные ее варианты приводились в работах [16, 59, 72].

Рассмотрим теперь основные особенности применения теорем 8 и 9 к системам вида (31). Для таких систем хорошо известна процедура построения функций ляпуновского типа вида "квадратичная форма от координат (т.е. от вектора  $z$ ) и, возможно, от нелинейности (т.е. от  $\psi(\sigma)$ ) плюс интеграл от нелинейности":

$$(43) \quad V = \begin{pmatrix} z \\ \psi \end{pmatrix}^* H \begin{pmatrix} z \\ \psi \end{pmatrix} + \int_0^\sigma \psi(\sigma) d\sigma.$$

Здесь  $H$  – некоторая симметричная  $(n+1) \times (n+1)$ -матрица.

С помощью такого вида функций для систем (31) с угловой координатой  $\sigma$  можно получить условия дихотомичности. Условия градиентности могут быть получены таким методом только

при условии

$$\int_0^{2\pi} \psi(\sigma) d\sigma = 0.$$

В том случае, когда это соотношение не выполнено, была разработана процедура [14, 59] построения периодических ляпуновских функций вида

$$(44) \quad V = \begin{pmatrix} z \\ \psi \end{pmatrix}^* H \begin{pmatrix} z \\ \psi \end{pmatrix} + \int_0^\sigma F(\sigma) d\sigma,$$

где

$$(45) \quad F(\sigma) = \psi(\sigma) - \nu |\psi(\sigma)|.$$

Здесь число  $\nu$  выбирается так, чтобы функция  $V$  была периодичной по  $\sigma$ :

$$(46) \quad \nu = \int_0^{2\pi} \psi(\sigma) d\sigma \left( \int_0^{2\pi} |\psi(\sigma)| d\sigma \right)^{-1}.$$

Сформулируем частотный критерий, полученный с помощью ляпуновских функций вида (44)-(46) и частотной теоремы Якубовича-Калмана [14, 34, 59] для системы (31).

Будем предполагать, что функция  $\psi(\sigma)$  дифференцируема, имеет изолированные нули и для некоторых чисел  $\mu_1$  и  $\mu_2$  выполнены условия

$$(47) \quad \mu_1 \leq \frac{d\psi(\sigma)}{d\sigma} \leq \mu_2, \quad \forall \sigma \in R^1.$$

Введем также в рассмотрение передаточную функцию

$$K(p) = c^*(A - pI)^{-1}b - \rho.$$

*Теорема 10.* Пусть матрица  $A$  устойчива и существуют числа  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\tau \geq 0$  и  $\varkappa$  такие, что выполнены неравенства

$$(48) \quad \begin{aligned} & Re\{\varkappa K(i\omega) - \varepsilon |K(i\omega)|^2 - \\ & - \tau(K(i\omega) + \mu_1^{-1}i\omega)^*(K(i\omega) + \mu_2^{-1}i\omega)\} > \delta \\ & \forall \omega \in R^1, \end{aligned}$$

$$(49) \quad 4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2.$$

Тогда система (31) является системой градиентного типа.

Напомним, что матрицу  $A$  называют устойчивой, если все ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части.

Некоторые обобщения этой теоремы и ее применение к различным системам ФАП имеются в [14, 34, 59].

Для системы (33) в случае  $n = 1$  периодическая по  $\sigma$  функция Ляпунова строится очень просто:

$$V = - \int_0^{c^*z} g(y) dy + c^*b \int_0^\sigma \varphi(u) du.$$

Легко видеть, что

$$\dot{V} = -Ac^*zg(c^*z) < 0, \quad \forall c^*z \neq 0$$

при  $A < 0$  и  $L > |\omega_1(0) - \omega_2(0)|$ . Напомним, что

$$\int_0^{2\pi} \varphi(u) du = 0.$$

Такая конструкция и небольшие дополнительные рассуждения позволяют доказать следующую важную для синтеза систем ФАП в цифровых сигнальных процессорах теорему.

*Теорема 11 [42–44]. Если выполнены неравенства  $A < 0$  и*

$$|L| > |\omega_1(0) - \omega_2(0)|,$$

*то система (33) с  $n = 1$  является системой градиентного типа.*

*Если  $|L| < |\omega_1(0) - \omega_2(0)|$ , то все решения этой системы стремятся к бесконечности при  $t \rightarrow +\infty$ .*

До сих пор неясно, как этот результат распространить на системы вида (33) большей размерности (т.е., когда  $n > 1$ ). Актуальность этой задачи связана с возможностями применения более сложных фильтров в таких астатических системах ФАП.

Применим теперь метод построения периодических функций Ляпунова к анализу синхронных машин.

Для системы (34) рассмотрим следующую функцию ляпуновского типа

$$(50) \quad V = z^* H z + \frac{1}{2} \eta^2 + \int_0^\sigma \varphi(\sigma) d\sigma.$$

В том случае, когда отсутствует момент нагрузки ( $M = 0$ ), имеет место равенство

$$(51) \quad \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) d\sigma = 0$$

и функция  $V$  обладает свойством периодичности по координате  $\sigma$ .

Симметричная положительно определенная матрица  $H$  выбирается так, чтобы было выполнено неравенство

$$(52) \quad 2z^* H (Az + D\xi) + z^* C\xi \leq -\varepsilon |z|^2, \quad \forall z \in R^n, \quad \forall \xi \in R^m$$

для некоторого числа  $\varepsilon > 0$ . По теореме Якубовича-Калмана [59] такая матрица существует, если  $A$  – устойчивая матрица и имеют место неравенства

$$(53) \quad K(i\omega) + K(i\omega)^* > 0, \quad \forall \omega \in R^1$$

$$(54) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 (K(i\omega) + K(i\omega)^*) > 0.$$

Здесь  $K(p) = C^*(A - pI)^{-1}D$ . Напомним, что неравенство  $H > 0$  для симметричной матрицы  $H$  означает, что квадратичная форма  $z^* H z$  – положительно определена.

Легко видеть, что из соотношения (52) и неравенства  $\mu_1 \geq 0$  следует невозрастание функции  $V(z(t), \eta(t), \sigma(t))$ , где  $z(t), \eta(t), \sigma(t)$  – решение системы (34).

Таким образом, если выполнены условия (51), (53) и (54), то для функции  $V$  выполнены условия 1)–3) теоремы 8. Проверим, что и условие 4) теоремы 9 здесь также выполнено.

Из соотношения  $V(z(t), \eta(t), \sigma(t)) \equiv \text{const}$  и из неравенства (52) сразу следует, что  $\dot{z}(t) \equiv 0$ . Но тогда  $\dot{z}(t) \equiv 0$  и поэтому  $Df(\sigma(t))\eta(t) \equiv 0$ . Легко показать, что из соотношения (53) следует равенство  $\text{rank} D = m$ . Поэтому  $f(\sigma(t))\eta(t) \equiv 0$ . Отсюда и из равенства  $\eta(t) = \dot{\sigma}(t)$  получим, что

$$(55) \quad \int_{\sigma(t_0)}^{\sigma(t)} f(\sigma) d\sigma = 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

Если в некоторой точке  $t_1 > t_0$  имеем неравенство  $\sigma(t_1) \neq \sigma(t_0)$ , то из (55) получим соотношение

$$(56) \quad \int_{\sigma(t_0)}^{\sigma} f(\sigma) d\sigma = 0$$

при всех  $\sigma$  таких, что  $(\sigma - \sigma(t_0))(\sigma - \sigma(t_1)) \leq 0$ . Дифференцируя (56) по  $\sigma$  получим равенство  $f(\sigma) = 0$  при  $(\sigma - \sigma(t_0))(\sigma - \sigma(t_1)) \leq 0$ .

Последнее невозможно, если предположить, что

$$(57) \quad f(\sigma) \neq 0, \quad \forall \sigma \in (\theta_1, \theta_2), \quad \forall \theta_1 < \theta_2.$$

Таким образом, если выполнено условие (57), то  $\sigma(t) \equiv \sigma(t_0)$ . Но тогда и  $\eta(t) = \dot{\sigma}(t) \equiv 0$ .

Итак, если  $V(z(t), \eta(t), \sigma(t)) \equiv \text{const}$ , то решение  $z(t), \eta(t), \sigma(t)$  является состоянием равновесия. Элементарный анализ системы (34) показывает, что состояния равновесия изолированы тогда и только тогда, когда изолированы все нули функции  $\varphi(\sigma)$ .

Таким образом, нами доказан следующий результат.

*Теорема 12 [59].* Предположим, что  $\mu_1 \geq 0$ , и  $A$  – устойчивая матрица, все нули функции  $\varphi(\sigma)$  изолированы и выполнены условия (51), (53), (54), (57).

Тогда система (34) является системой градиентного типа.

По той же схеме доказывается

*Теорема 13 [59].* Если выполнены все условия теоремы 12, кроме (51), то система (34) дихотомична.

Теорема 12 позволяет установить глобальную устойчивость ненагруженной синхронной машины. Это важно в двух случаях: когда машина работает в режиме компенсатора [14] или когда машина запускается без нагрузки, в переходном процессе затягивается в синхронизм и только потом происходит наброс нагрузки. В последнем случае важной является задача определения предельного наброса нагрузки, при которой машина не выпадет из синхронизма. Эта задача может быть также решена с помощью функции Ляпунова (50).

Здесь мы предположим, что синхронному холостому (т.е. без нагрузки) режиму работы соответствует стационарное решение системы (34)  $z(t) \equiv 0, \eta(t) \equiv 0, \sigma(t) \equiv 0$ . Далее в некоторый момент времени  $\tau$  происходит мгновенный наброс нагрузки  $M$  (см. уравнения (1), (2) как частный случай системы (34)). После этого при  $t > \tau$  изменяется правая часть системы (34).

Здесь изменяется на константу только функция  $\varphi(\sigma)$ :

$$\varphi(\sigma) \rightarrow \varphi(\sigma) - \gamma,$$

а точка  $z = 0, \eta = 0, \sigma = 0$  уже не является состоянием равновесия. Новое локально устойчивое состояние равновесия имеет вид  $z = 0, \eta = 0, \sigma = \sigma_0$ , где  $\varphi(\sigma_0) = \gamma, \varphi'(\sigma_0) > 0$  и  $\sigma_0 \in [0, 2\pi]$  (рис. 14).

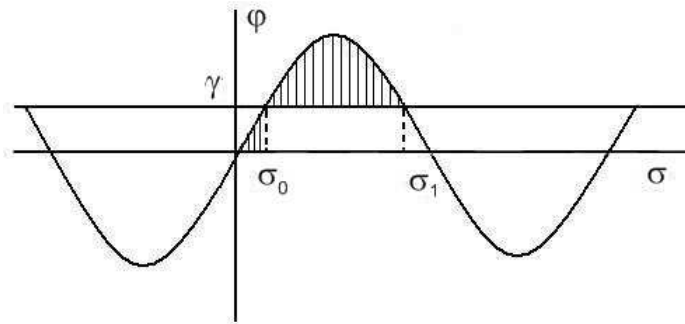


Рис. 14. Метод площадей

Здесь будем предполагать, что на  $[0, 2\pi]$  существуют только два нуля функции  $\varphi(\sigma) - \gamma$ :  $\sigma_0$  и  $\sigma_1$ , для которого  $\varphi'(\sigma_1) < 0$ .

Задача о предельной нагрузке ставится так. При каких нагрузках после переходного процесса синхронная машина затянется в новый рабочий синхронный режим  $z(t) \equiv 0$ ,  $\eta(t) = \dot{\sigma}(t) \equiv 0$ ,  $\sigma(t) \equiv \sigma_0$ ? С математической точки зрения этот вопрос переформулируется следующим образом. Найти условия, при которых решение  $z(t), \eta(t), \sigma(t)$  с начальными данными  $z(\tau) = 0$ ,  $\eta(\tau) = 0$ ,  $\sigma(\tau) = 0$  находилось бы в области притяжения стационарного решения  $z = 0, \eta = 0, \sigma = \sigma_0$ :

$$(58) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \eta(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = \sigma_0.$$

Используя функцию типа (50)

$$V = z^* H z + \frac{1}{2} \eta^2 + \int_{\sigma_1}^{\sigma} (\varphi(\sigma) - \gamma) d\sigma$$

(напомним, что теперь при  $t > \tau$  система (34) изменилась так, что вместо  $\varphi(\sigma)$  мы имеем  $\varphi(\sigma) - \gamma$ ) и рассуждения, которые были использованы при доказательстве теоремы 12, можно получить следующий результат.

*Теорема 14 [59]. Пусть выполнены все условия теоремы 12. Тогда для решения системы (34) с  $\varphi(\sigma) - \gamma$  вместо  $\varphi(\sigma)$  и с начальными данными  $z(\tau) = 0, \eta(\tau) = 0, \sigma(\tau) = 0$  имеют место соотношения (58), если*

$$\int_0^{\sigma_1} (\varphi(\sigma) - \gamma) d\sigma \geq 0.$$

Теорема 14 является обоснованием широко применяемого в инженерной практике метода площадей. Он формулируется очень просто: предельно допустимая (максимальная) мгновенная нагрузка на синхронную машину  $\gamma$  определяется так, чтобы заштрихованные на рисунке 14 площади были равны.

Часто уравнения синхронных машин рассматривают в других координатах, для которых более подходит следующая общая структура записи

$$(59) \quad \begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= -g(\eta, \sigma) + y^* C \frac{d\tilde{f}(\sigma)}{d\sigma} - \tilde{\varphi}(\sigma) \\ \frac{dy}{dt} &= Ay + \tilde{D}\tilde{f}(\sigma) + q. \end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{f}(\sigma)$  и  $\tilde{\varphi}(\sigma)$  —  $2\pi$ -периодические функции, удовлетворяющие тем же условиям, что и  $f(\sigma)$  и  $\varphi(\sigma)$ ,  $\tilde{D}$  — постоянная  $n \times m$ -матрица,  $q$  — постоянный  $n$ -вектор.

Эта система заменой Льебнера

$$y = z - A^{-1} \tilde{D} \tilde{f}(\sigma) - A^{-1} q$$

может быть приведена к виду (34) с  $D = A^{-1} \tilde{D}$ ,  $f(\sigma) = \frac{d\tilde{f}(\sigma)}{d\sigma}$ ,

$$\varphi(\sigma) = \tilde{\varphi}(\sigma) + \left[ \frac{d\tilde{f}(\sigma)}{d\sigma} \right]^* C^* A^{-1} \left[ \tilde{D} \tilde{f}(\sigma) + q \right].$$

Формально введенные передаточные матрицы

$$K(p) = C^*(A - pI)^{-1} D$$

и

$$\tilde{K}(p) = C^*(A - pI)^{-1} \tilde{D}$$

$$K(p) = p^{-1}(\tilde{K}(p) - \tilde{K}(0)).$$

Поэтому из теоремы 12 вытекает следующий результат.

*Теорема 15.* Пусть  $\mu_1 \geq 0$ , все стационарные точки системы (59) изолированы и выполнены следующие условия:

- 1) матрица  $\tilde{K}(0)$  – диагональна
- 2)  $\frac{\tilde{K}(i\omega)}{i\omega} + \left(\frac{\tilde{K}(i\omega)}{i\omega}\right)^* > 0, \forall \omega \in R^1,$
- 3)  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \left(\frac{\tilde{K}(i\omega)}{i\omega} + \left(\frac{\tilde{K}(i\omega)}{i\omega}\right)^*\right) > 0,$
- 4)  $\frac{d\tilde{f}(\sigma)}{d\sigma} \neq 0$  на любом  $(\theta_1, \theta_2),$
- 5)  $\int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(\sigma) d\sigma = 0.$

Тогда система (59) является системой градиентного типа.

Аналогичным образом здесь рассматривается задача о предельной нагрузке синхронной машины.

В качестве примера применения предложенных здесь методов рассмотрим следующие уравнения синхронной машины с нулевой нагрузкой [73, 59]:

$$(60) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma} &= \eta \\ \dot{\eta} &= (-\alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2) \sin \sigma + (\alpha_3 y_3 \cos \sigma - \alpha_4 \sin \sigma \cos \sigma) \\ \dot{y}_1 &= \alpha_5 - \alpha_6 y_1 + \alpha_7 y_2 + \alpha_8 \cos \sigma \\ \dot{y}_2 &= \alpha_9 y_1 - \alpha_{10} y_2 + \alpha_{11} \cos \sigma \\ \dot{y}_3 &= -\alpha_{12} y_3 + \alpha_{13} \sin \sigma. \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha_j$  ( $j = 1, \dots, 13$ ) – положительные параметры такие, что

$$\alpha_6 \alpha_{10} - \alpha_7 \alpha_9 > 0.$$

Покажем, что здесь выполнены все условия теоремы 15.

Здесь  $g(\eta, \sigma) \equiv 0, \tilde{\varphi}(\sigma) = \alpha_4 \sin \sigma \cos \sigma$

$$\tilde{f}(\sigma) = \begin{pmatrix} \cos \sigma \\ -\sin \sigma \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} \alpha_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 \\ 0 & -\alpha_3 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \alpha_8 & 0 \\ \alpha_{11} & 0 \\ 0 & -\alpha_{13} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_7 & 0 \\ \alpha_9 & -\alpha_{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{12} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{K}(p) = \begin{pmatrix} \tilde{K}_1(p) & 0 \\ 0 & \tilde{K}_2(p) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1(p) &= -[(\alpha_1 \alpha_8 + \alpha_2 \alpha_{11})p + \alpha_1 \alpha_8 \alpha_{10} + \\ &+ \alpha_1 \alpha_{11} \alpha_7 + \alpha_2 \alpha_{11} \alpha_6 + \alpha_2 \alpha_9 \alpha_8] [(p + \\ &+ \alpha_6)(p + \alpha_{10}) - \alpha_9 \alpha_7]^{-1}, \end{aligned}$$

$$\tilde{K}_2(p) = -\frac{\alpha_3 \alpha_{13}}{p + \alpha_{12}}.$$

Очевидно, что условия 1)–3) теоремы 15 эквивалентны соотношениям

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{\tilde{K}_j(i\omega)}{i\omega} \right] > 0, \quad \forall \omega \in R^1, \quad j = 1, 2,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \omega^2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\tilde{K}_j(i\omega)}{i\omega} \right] \right\} > 0, \quad j = 1, 2.$$

Нетрудно проверить, что эти условия всегда выполнены, и следовательно, система (59) является системой градиентного типа.

В случае наброса нагрузки из режима холостого хода можно для системы (59) воспользоваться описанным выше методом площадей (рис. 14).

## 8. Метод положительно инвариантных конусных сеток. Аналог кругового критерия

Этот метод был независимо предложен в работах [74, 75]. Он является достаточно универсальным и "красивым" с той точки зрения, что здесь используются только два свойства системы: наличие положительно инвариантного одномерного квадратичного конуса и инвариантность векторного поля системы (35) при сдвигах на вектор  $d_j$  (см. (36)).

Итак, предположим, что такой конус вида  $\Omega = \{x^* H x \leq 0\}$ , где  $H$  – симметричная матрица, имеющая одно отрицательное и остальные положительные собственные значения, обладает свойством положительной инвариантности. Последнее означает, что на границе конуса  $\partial\Omega = \{x H x = 0\}$  выполнено соотношение

$$\dot{V}(x(t)) < 0$$

при всех  $x(t)$  таких, что  $x(t) \neq 0$ ,  $x(t) \in \partial\Omega$  (рис. 15)

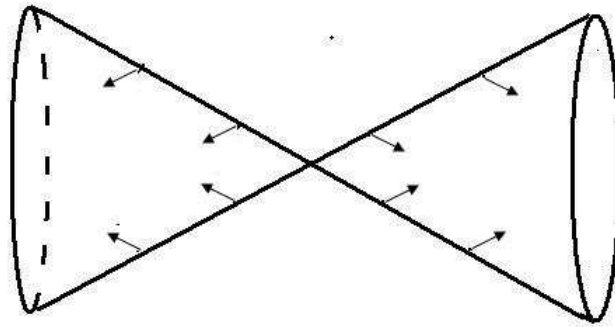


Рис. 15. Положительно инвариантный конус

Теперь за счет второго свойства – инвариантности векторного поля относительно сдвига на векторы  $kd_j$ ,  $k \in Z$  – размножим этот конус таким образом:

$$\Omega_k = \{(x - kd_j) H (x - kd_j) \leq 0\}.$$

Поскольку очевидно, что для конусов  $\Omega_k$  свойство положительной инвариантности сохраняется, получаем положительно инвариантную конусную сетку, изображенную на рис. 16.

Из этого рисунка сразу видно, что все решения  $x(t, t_0, x_0)$  системы, которая обладает двумя указанными выше свойствами, ограничены на  $[t_0, +\infty)$ .

Если конус  $\Omega$  таков, что он имеет только одну точку пересечения с гиперплоскостью  $\{d_j^* x = 0\}$  и все решения  $x(t)$ , для которых в момент  $t$  выполнено неравенство

$$x(t)^* H x(t) \geq 0$$

обладают свойством  $\dot{V}(x(t)) \leq -\varepsilon |x(t)|^2$ , (здесь  $\varepsilon$  – некоторое положительное число), то из рисунка 16 тоже сразу ясно, что система устойчива по Бакаеву.

Таким образом, предложенный здесь метод прост и универсален. Практическую эффективность доставляет ему частотная теорема Якубовича-Калмана [14, 59].

Рассмотрим здесь, например, систему

$$(61) \quad \frac{dx}{dt} = Px + q\varphi(t, \sigma), \quad \sigma = r^* x,$$

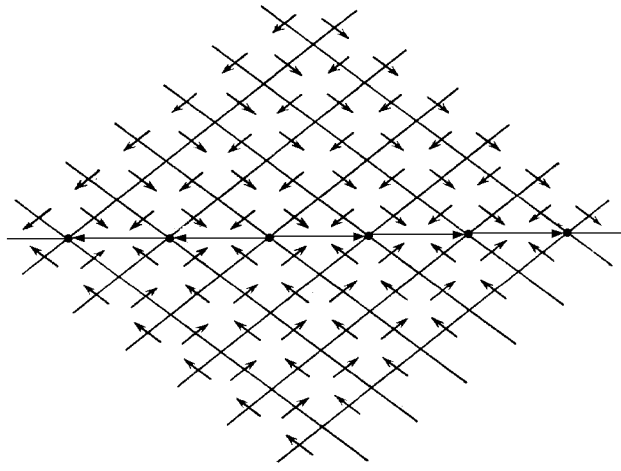


Рис. 16. Положительно инвариантная конусная сетка

где  $P$  – постоянная особая  $N \times N$ -матрица,  $q, r$  – постоянные  $N$ -мерные векторы,  $\varphi(t, \sigma)$  – непрерывная,  $2\pi$ -периодическая по  $\sigma$  функция:  $R^1 \times R^1 \rightarrow R^1$ , удовлетворяющая соотношениям

$$\mu_1 \leq \frac{\varphi(t, \sigma)}{\sigma} \leq \mu_2, \quad \forall t \in R^1, \quad \forall \sigma \neq 0.$$

Здесь  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – некоторые числа, которые в силу периодичности  $\varphi(t, \sigma)$  по  $\sigma$  можно не умаляя общности принять отрицательным:  $\mu_1 < 0$  и положительным:  $\mu_2 > 0$ .

Введем передаточную функцию системы (61)

$$\chi(p) = r^*(P - pI)^{-1}q,$$

предполагая ее невырожденной.

Рассмотрим теперь квадратичные формы  $V(x) = x^*Hx$  и

$$G(x, \xi) = 2x^*H[(P + \lambda I)x + q\xi] + (\mu_2^{-1}\xi - r^*x)(\mu_1^{-1}\xi - r^*x),$$

где  $\lambda$  – положительное число.

По теореме Якубовича-Калмана для существования симметричной матрицы  $H$ , имеющей одно отрицательное и  $N - 1$  положительной собственное значение, такой, что выполнено неравенство  $G(x, \xi) < 0, \forall x \in R^N, \xi \in R^1, x \neq 0$ , достаточно, чтобы

- 1) матрица  $P + \lambda I$  имела  $N - 1$  собственное значение с отрицательной вещественной частью,
- 2) выполнялось частотное неравенство

$$\mu_1^{-1}\mu_2^{-1} + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1})\text{Re}\chi(i\omega - \lambda) + |\chi(i\omega - \lambda)|^2 < 0, \quad \forall \omega \in R^1.$$

Легко видеть, что из условия  $G(x, \xi) < 0, \forall x \neq 0, \forall \xi$  следует соотношение

$$\frac{dV(x(t))}{dt} + 2\lambda V(x(t)) < 0, \quad \forall x(t) \neq 0.$$

Это неравенство и гарантирует положительную инвариантность конуса  $\Omega$ , о котором шла речь в начале этого раздела.

Таким образом, здесь имеет место следующий аналог широко известного кругового критерия.

*Теорема 16 [74, 14, 34, 59].* Если существует положительное число  $\lambda$ , для которого выполнены сформулированные выше условия 1) и 2), то любое решение  $x(t, t_0, x_0)$  системы (61) ограничено на интервале  $(t_0, +\infty)$ .

Более подробное доказательство этого факта имеется в [14, 34, 59].

Заметим также, что теорема остается справедливой при выполнении нестрогого неравенства в условии 2) и в случаях, когда  $\mu_1 = -\infty$  или  $\mu_2 = +\infty$  [14, 34, 59].

Покажем, как применять сформулированный здесь (с учетом сделанного выше замечания) аналог кругового критерия к самому простому случаю уравнения второго порядка

$$(62) \quad \ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \varphi(t, \theta) = 0,$$

где  $\alpha$  – положительный параметр. Это уравнение можно записать в виде системы (61) с  $N = 2$  и передаточной функцией

$$\chi(p) = \frac{1}{p(p + \alpha)}$$

Ясно, что условие 1) теоремы примет вид  $\lambda \in (0, \alpha)$ , а условие 2) при  $\mu_1 = -\infty$  и  $\mu_2 = \alpha^2/4$  эквивалентно неравенству

$$-\omega^2 + \lambda^2 - \alpha\lambda + \alpha^2/4 \leq 0, \quad \forall \omega \in R^1.$$

Это неравенство выполнено при  $\lambda = \alpha/2$ .

Таким образом, если в уравнении (62) функция  $\varphi(t, \sigma)$  периодична по  $\sigma$  и удовлетворяет неравенству

$$(63) \quad \frac{\varphi(t, \sigma)}{\sigma} \leq \frac{\alpha^2}{4},$$

то любое его решение  $\theta(t)$  ограничено на  $(t_0, +\infty)$ .

Легко показать (см. теорему 1), что при  $\varphi(t, \sigma) \equiv \varphi(\sigma)$  (т.е.  $\varphi(t, \sigma)$  не зависит от  $t$ ) уравнение (62) дихотомично. Отсюда следует, что в автономном случае при выполнении соотношения (63) любое решение (62) стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к некоторому состоянию равновесия.

Здесь возникает интересный аналог понятия абсолютной устойчивости для систем фазовой синхронизации. Если будем говорить, что система (61) абсолютно устойчива, когда для любой нелинейности  $\varphi$  из сектора  $[\mu_1, \mu_2]$  любое ее решение стремится к некоторому состоянию равновесия, то для уравнения (62) с  $\varphi(t, \sigma) \equiv \varphi(\sigma)$  таким сектором будет  $(-\infty, \alpha^2/4]$ .

В то же время в классической теории абсолютной устойчивости (без предположения периодичности  $\varphi$ ) мы имеем два сектора (при  $\varphi(t, \sigma) \equiv \varphi(\sigma)$ ): сектор абсолютной устойчивости  $(0, +\infty)$  и абсолютной неустойчивости  $(-\infty, 0)$ .

Таким образом, одна лишь периодичность  $\varphi$  позволяет в секторе абсолютной устойчивости охватить часть сектора абсолютной устойчивости и полностью сектор абсолютной неустойчивости:  $(-\infty, \alpha^2/4] \supset (-\infty, 0) \cup (0, \alpha^2/4]$  (см. рис. 17).

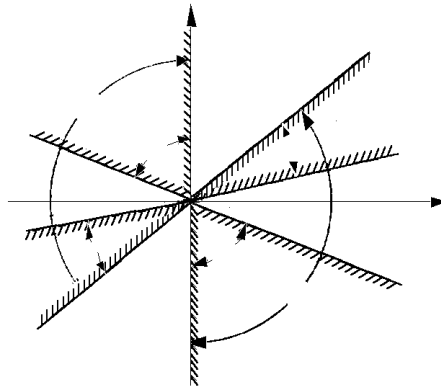


Рис. 17. Секторы устойчивости и неустойчивости

Более сложные примеры применения аналогов кругового критерия имеются в [14,34,59].

## 9. Метод нелокального сведения. Распространение результатов Трикоми на многомерные системы фазовой синхронизации

Здесь мы опишем основные этапы распространения теорем Трикоми и его последователей, полученных для уравнения

$$(64) \quad \ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \psi(\theta) = 0,$$

на системы более высокой размерности.

Рассмотрим вначале систему

$$(65) \quad \begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Az + b\psi(\sigma) \\ \frac{d\sigma}{dt} &= c^*z + \rho\psi(\sigma) \end{aligned},$$

описывающую типовую систему ФАП.

Здесь, как обычно, предположим, что  $\psi(\sigma)$  –  $2\pi$ -периодична,  $A$  – устойчивая  $n \times n$ -матрица,  $b$  и  $c$  – постоянные  $n$ -векторы,  $\rho$  – число.

Рассмотрим случай, когда уравнение (64) или эквивалентная ему система

$$(66) \quad \begin{aligned} \dot{\eta} &= -\alpha\eta - \psi(\theta) \\ \dot{\theta} &= \eta \end{aligned}$$

является системой градиентного типа. В этом случае можно показать [9] (а для  $\psi(\theta) = \sin \theta - \gamma$  это было сделано в самом начале статьи), что для эквивалентного (66) уравнения

$$(67) \quad \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{-\alpha\eta - \psi(\theta)}{\eta}$$

существует решение  $\eta(\theta)$  такое, что  $\eta(\theta_0) = 0$ ,  $\eta(\theta) \neq 0$ ,  $\forall \theta \neq \theta_0$ ,

$$(68) \quad \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \eta(\theta) = -\infty, \quad \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \eta(\theta) = +\infty.$$

Здесь  $\theta_0$  – некоторое число такое, что  $\psi(\theta_0) = 0$ ,  $\psi'(\theta_0) < 0$ .

Рассмотрим теперь функцию

$$V(z, \sigma) = z^*Hz - \frac{1}{2}\eta(\sigma)^2,$$

которая индуцирует конус  $\Omega = \{V(z, \sigma) \leq 0\}$  в фазовом пространстве  $\{z, \sigma\}$ . Это будет некоторое обобщение квадратичного конуса, изображенного на рисунке 15. Покажем, что при некоторых условиях такой конус будет положительно инвариантным. В самом деле, рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} + 2\lambda V &= 2z^*H[(A + \lambda I)z + b\psi(\sigma)] - \\ &- \lambda\eta(\sigma)^2 - \eta(\sigma)\frac{d\eta(\sigma)}{d\sigma}(c^*z + \rho\psi(\sigma)) = \\ &= 2z^*H[(A + \lambda I)z + b\psi(\sigma)] + \\ &- \lambda\eta(\sigma)^2 + \psi(\sigma)(c^*z + \rho\psi(\sigma)) + \alpha\eta(\sigma)(c^*z + \rho\psi(\sigma)) \end{aligned}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $\eta(\sigma)$  удовлетворяет уравнению (67).

Заметим, что если выполнены частотные неравенства

$$(69) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} K(i\omega - \lambda) - \varepsilon|K(i\omega - \lambda)|^2 &> 0, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2(\operatorname{Re} K(i\omega - \lambda) - \varepsilon|K(i\omega - \lambda)|^2) &> 0, \end{aligned}$$

где  $K(p) = c^*(A - pI)^{-1}b - \rho$ , то по частотной теореме Якубовича-Калмана существует  $H$  такая, что для всех  $z \neq 0$  и  $\xi$  выполнено соотношение

$$2z^*H[(A + \lambda I)z + b\xi] + \xi(c^*z + \rho\xi) + \varepsilon|(c^*z + \rho\xi)|^2 < 0.$$

Здесь  $\varepsilon$  – некоторое положительное число. Если же  $A + \lambda I$  – устойчивая матрица, то  $H > 0$ .

Таким образом, если  $A + \lambda I$  – устойчива, выполнены (69) и  $\alpha^2 \leq 4\lambda\varepsilon$ , то

$$\frac{dV}{dt} + 2\lambda V < 0, \quad \forall z(t) \neq 0,$$

и, следовательно,  $\Omega$  – положительно инвариантный конус.

Также, как и в предыдущем разделе, можно провести размножение конусов  $\Omega_k = \{z^* H z - \frac{1}{2}\eta_k(\sigma)^2 \leq 0\}$  и построить из них конусную сетку (рис. 16).

Здесь  $\eta_k(\sigma)$  – сдвинутое по оси  $\sigma$  на величину  $2k\pi$  решение  $\eta(\sigma)$ .

Конусная сетка доказывает ограниченность решений системы (65) на интервале  $(0, +\infty)$ .

В сделанных предположениях имеет место также дихотомичность. Это легко доказывается с помощью ляпуновской функции

$$z^* H z + \int_0^\sigma \psi(\sigma) d\sigma.$$

Таким образом, нами доказан следующий результат.

*Теорема 17.* Если для некоторых  $\lambda > 0$  и  $\varepsilon > 0$  матрица  $A + \lambda I$  устойчива, выполнены условия (69) и система (66) с  $\alpha = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$  является системой градиентного типа, то и система (65) также является системой градиентного типа.

Различные обобщения этой теоремы и многочисленные примеры применения метода нелокального сведения, в том числе и для синхронных машин, имеются в [76,61,60,14,17,18,59].

В рамках этого метода получены также различные критерии существования круговых решений и циклов второго рода [14,17,18,59].

Покажем здесь как этот метод может быть применен к оценке предельной нагрузки асинхронного электродвигателя, который описывается уравнениями (6).

Для этого предположим, что  $\gamma < 2c^2$  и введем обозначения

$$\psi(s) = -\frac{\gamma}{c}s^2 + as - c\gamma,$$

$$\Gamma = 2 \max_{\lambda \in (0, c)} \left[ \lambda \left( c - \lambda - \frac{\gamma^2}{4c^2(c - \lambda)} \right) \right]^{1/2}.$$

Здесь числа  $a, c$  и  $\gamma$  – параметры системы (6). Здесь предположим, что  $\gamma < a/2$ . В этом случае функция  $\psi(s)$  имеет два нуля:  $s_0 \in (0, c)$  и  $s_1 > c$ . Из неравенства  $\gamma < 2c^2$  следует, что  $\Gamma > 0$ .

Напомним, что задача о предельном набросе нагрузки для асинхронного двигателя ставилась в первом разделе настоящего обзора. Эта задача может быть решена с помощью следующего результата.

*Теорема 18 [77].* Пусть для решения уравнения

$$(70) \quad \ddot{\theta} + \Gamma \dot{\theta} + \psi(\theta) = 0$$

с начальными данными  $\dot{\theta}(0) = \theta(0) = 0$  выполнено условие

$$(71) \quad \theta(t) \leq s_1, \quad \forall t \geq 0.$$

Тогда решение системы (6) с начальными данными  $s(0) = y(0) = x(0) = 0$  удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = s_0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\frac{\gamma}{a},$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\frac{\gamma s_0}{ac}.$$

*Доказательство.* Сделаем замену  $\eta = ay + \gamma$ ,  $z = -x - \frac{\gamma}{ac}s$ , приведем систему (6) к виду

$$(72) \quad \begin{aligned} \dot{s} &= \eta \\ \dot{\eta} &= -c\eta + azs - \psi(s) \\ \dot{z} &= -cz - \frac{1}{a}s\eta - \frac{\gamma}{ac}\eta. \end{aligned}$$

Условие (71) влечет за собой существование решения  $F(\theta)$  уравнения

$$(73) \quad F \frac{dF}{d\theta} = -\Gamma F - \psi(\theta),$$

определенного на промежутке  $[s_2, s_1]$  и такого, что  $F(s_2) = F(s_1) = 0$ ,  $F(\theta) > 0$ ,  $\forall \theta \in (s_2, s_1)$ ,  $s_2 < 0$ .

Для функции

$$V(s, \eta, z) \doteq \frac{a^2}{2}z^2 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}F(s)^2, \quad s \in [s_2, s_1]$$

на решениях системы (72) имеем соотношения

$$\begin{aligned} \dot{V}(s(t), \eta(t), z(t)) &= -c\eta(t)^2 - \frac{a\gamma}{c}\eta(t)z(t) - \\ &- a^2cz(t)^2 - F'(s(t))F(s(t))\eta - \psi(s(t))\eta \leq \\ &\leq -2\lambda V(s(t), \eta(t), z(t)) + \frac{(F'(s(t))F(s(t)) + \psi(s(t)))^2}{4\varepsilon} - \\ &- \lambda F(s(t))^2 = -2\lambda V(s(t), \eta(t), z(t)). \end{aligned}$$

Здесь

$$\varepsilon = c - \lambda - \frac{\gamma^2}{4c^2}(c - \lambda)^{-1}$$

и мы воспользовались равенством (73) выбирая  $\lambda$  так, чтобы  $\Gamma = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$ .

Из соотношения

$$\dot{V}(s(t), \eta(t), z(t)) + 2\lambda V(s(t), \eta(t), z(t)) \leq 0.$$

здесь легко получить положительную инвариантность множества

$$\Omega = \{V(s, \eta, z) < 0, \quad s \in [s_2, s_1]\}.$$

С помощью функции

$$W(s, \eta, z) = \frac{a^2}{2}z^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \int_0^s \psi(\sigma)d\sigma$$

легко получить дихотомичность системы (72). Отсюда, из ограниченности и положительной инвариантности  $\Omega$  и из включений

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Omega \quad \begin{pmatrix} s_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Omega$$

следует утверждение теоремы.

Хорошо известно [9] (см. условие (8.19) на стр.107), что условие (71) выполнено, если  $\Gamma > 0$  и

$$(74) \quad 2 \int_0^{s_1} \psi(\sigma)d\sigma + \Gamma^2(s_1 - s_0)^2 \geq 0.$$

Последнее неравенство выполнено, если

$$2 \int_0^{s_1} \psi(\sigma)d\sigma = 2s_1 \left( -\frac{\gamma}{3c}s_1^2 + \frac{a}{2}s_1 - c\gamma \right) \geq 0.$$

Это соотношение можно переписать следующим образом

$$(75) \quad \frac{2\gamma}{3c}s_1 \geq \frac{a}{2}.$$

Поскольку  $\varphi(s_1) = 0$  и  $s_1 > c$  здесь выполнено равенство

$$s_1 = \frac{c(a + \sqrt{a^2 - 4\gamma^2})}{2\gamma}.$$

Отсюда следует, что неравенство (75) выполнено, если

$$(76) \quad \frac{\sqrt{3}}{4}a \geq \gamma.$$

Таким образом, допустимый наброс нагрузки может быть оценен неравенствами  $\gamma < 2c^2$  и (76).

Условие  $8c^2 > \sqrt{3}a$  выполнено для большого класса асинхронных электродвигателей. Поэтому, предполагая его выполнение, оценим предельно допустимый наброс нагрузки, используя (76).

Напомним, что максимальное значение статической характеристики (7) равно  $a/2$ . Поэтому, если обозначить через  $M_{\max}$  максимальную нагрузку, при которой система (6) имеет состояние равновесия (т.е. асинхронный двигатель имеет рабочие режимы), то допустимый резкопеременный наброс нагрузки на двигатель, работающий на холостом ходу, оценивается очень просто:

$$(77) \quad M \leq \frac{\sqrt{3}}{2}M_{\max}.$$

В случае массивного ротора, когда  $I$  – большое число по отношению к параметрам  $\beta, R, L, SB, M$ , можно записать параметры системы (6) следующим образом:  $a = \delta a_0$ ,  $\gamma = \delta \gamma_0$ , где  $\delta$  – достаточно малое по отношению к  $a_0, \gamma_0$  и  $c$  число. В этом случае легко видеть, что  $\Gamma = c + O(\delta)$  и условие (74) выполнено при  $a_0 > 2\gamma_0$ ,  $\delta \ll 1$ . Таким образом, в этом случае оценка допустимого резкопеременного наброса нагрузки имеет вид

$$(78) \quad M < M_{\max}, \quad \delta \ll 1.$$

Эта оценка совпадает с хорошо известным результатом асимптотического анализа, когда система (6) с малым параметром  $\delta$  сводится к уравнению первого порядка

$$\dot{s} = -\frac{a_0 c s}{c^2 + s^2} + \gamma_0.$$

Оценки (77) и (78) демонстрируют эффективность применения универсальных методов теории фазовой синхронизации к решению конкретных задач.

## 10. Заключение

Во второй половине двадцатого века на фундаменте трех прикладных теорий – теории синхронных и асинхронных электрических машин, теории систем фазовой автоподстройки частоты и теории самосинхронизации неуравновешенных роторов – была создана теория фазовой синхронизации. Ее основным принципом является рассмотрение задач фазовой синхронизации на трех уровнях: на уровне механической, электромеханической или электронной модели, на уровне фазовых и частотных соотношений и на уровне дифференциальных, разностных, интегральных и интегродифференциальных уравнений. При этом разность фаз колебаний трансформируется в управляющее воздействие, которое осуществляет синхронизацию.

Эти общие принципы мотивировали создание универсальных методов исследования систем фазовой синхронизации. Наиболее эффективными здесь оказались модификация прямого метода Ляпунова с построением периодических функций ляпуновского типа, метод положительно инвариантных конусных сеток и метод нелокального сведения. Последний, объединяя элементы прямого метода Ляпунова и теории бифуркаций, позволил распространить классические результаты Ф.Трикоми и его последователей на многомерные динамические системы.

1. *Tricomi F.* Integrazione di una equazione differenziale presentata in elettrotecnica // Annali della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa. 1933. V.2. N 2. P. 1–20.
2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
3. *Amerio L.* Determinazione delle condizioni di stabilita per gli integrali di una equazione interessante l'elettrotecnica // Annali di Matematica pura ed applicata. 1949. V.30. N 4. P. 75–90
4. *Seifert G.* On the existence of certain solutions of nonlinear differential equations // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 1952. V.3. N 6. S. 468–471
5. *Bohm C.* Nuovi criteri di esistenza di soluzioni periodiche di una nota equazione differenziale non lineare // Annali di Matematica pura ed applicata. 1953. V.35. N 4. P. 343–353
6. *Hayes W.D.* On the equation for a damped pendulum under constant torque // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 1953. V.4. N 5. S. 398–401
7. *Белюстина Л.Н., Быков В.В., Кивелева К.Г., Шалфеев В.Д.* О величине полосы захвата системы ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром // Известия ВУЗов. Радиофизика. 1970. Т.13. N 4. С. 561–567
8. *Губарь Н.А.* Исследование одной кусочно-линейной динамической системы с тремя параметрами // Прикладная математика и механика. 1961. Т.25. N 6. С. 1011–1023
9. *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.
10. *Иванов-Смоленский А.В.* Электрические машины. М.: Энергия, 1980.
11. *Хендель Ф.* Основные законы физики. М.: Физматгиз, 1959.
12. *Янко-Триницкий А.А.* Новый метод анализа работы синхронных двигателей при резком переменных нагрузках. М.: Госэнергоиздат. 1958.
13. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
14. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
15. *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
16. *Леонов Г.А., Селеджи С.М.* Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике. СПб.: Невский диалект. 2002.
17. *Leonov G.A., Popotarenko D.V., Smirnova V.B.* Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications. Singapore: World Scientific, 1996.
18. *Leonov G.A., Reitmann V., Smirnova V.B.* Nonlocal Methods for Pendulum-Like Feedback Systems. Stuttgart; Leipzig: Teubner Verlagsgesellschaft, 1992.
19. *Leonov G.A.* Mathematical Problems of Control Theory. Singapore: World Scientific, 2001.
20. *Белых В.Н., Лебедева Л.Н.* Изучение отображения окружности // Прикладная математика и механика. 1982, № 5. С. 611–615
21. *Шахтарин Б.И.* Устойчивость дискретных систем первого порядка // Радиотехника и электроника. 1977, № 11. С. 2418–2420
22. *Шахтарин Б.И., Архангельский В.А.* Динамические характеристики фазовых систем // Радиотехника и электроника. 1977, № 5. С. 978–987
23. *Osborne H.C.* Stability analysis of an Nth power digital phase locked loop. Part. I: First-order DPPL. IEEE Trans. Commun. 1980. V.28. P. 1343–1354
24. *Leonov G.A., Seledzhi S.M.* Stability and bifurcations of phase-locked loops for digital signal processors. International Journal of Bifurcations and Chaos. 2005. V. 15, N 4. P. 1347–1360
25. *Витерби Э.Д.* Принципы когерентной связи. М.: Сов. радио, 1970. [Viterbi A.J. Principles of Coherent Communications. New York: McGraw-Hill, 1966.]
26. *Gardner F.M.* Phase-Lock Techniques. New York: John Wiley, 1966.
27. *Гупта С.* Фазовая автоподстройка частоты // ТИИЭР. 1975. Т.63. С. 50–66. [Gupta S.C. Phase Locked Loops // Proceedings IEEE. 1975. V. 63. N2. P. 291–306.]

28. *Lindsey B.* Системы синхронизации в связи и управлении. М.: Сов.радио, 1978. [Lindsey W.C. Synchronization Systems in Communication and Control. New York : Prentice-Hall, 1972.]
29. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна и Л.Н. Белоусиной. М.: Радио и связь, 1982.
30. Системы фазовой автоподстройки частоты с элементами дискретизации. / Под ред. В.В. Шахгильдяна. М.: Связь, 1979.
31. *Borner H.* Phasenkopplungssysteme in der Nachrichten. Mess-und Regelungstechnik. Berlin: Verlag Technik, 1976.
32. *Nash G.* Phase Locked Loop, Design Fundamentals. Motorola Inc. Phoenix AZ, 1994.
33. *Leonov G.A., Burkin I.M., Shepeljavy A.I.* Frequency Methods in Oscillation Theory. Dordrecht: Kluwer, 1996.
34. *Леонов Г.А., Смирнова В.Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации. С.-Петербург: Наука, 2000.
35. *Шахтарин Б.И.* Анализ кусочно-линейных систем с фазовым регулированием. М.: Машиностроение, 1991.
36. *Lindsey W. C., Chie C. M.* A survey of digital phase locked loops // Proceedings of the IEEE. 1981. V. 69, №4. P. 671–685.
37. *Угрюмов Е.П.* Цифровая схемотехника. СПб., ВHV, 2000.
38. *Lapsley P., Bier J., Shoham A., Lee E. A.* DSP processor fundamentals architecture and features. New York, IEE Press, 1997.
39. *Smith S. W.* The scientist and engineers guide to digital signal processing. San Diego, 1999.
40. *Солонина А., Улахович Д., Яковлев Л.* Цифровые процессоры обработки сигналов фирмы Motorola. СПб., ВHV, 2000.
41. *Солонина А., Улахович Д., Яковлев Л.* Алгоритмы и процессоры цифровой обработки сигналов. СПб., ВHV, 2001.
42. *Леонов Г.А., Селедзхи С.М.* Методы коррекции расфазировок в цифровых сигнальных процессорах // Вестник СПбГУ. 2004. Сер. 10. Вып. 1-2. С. 36–47.
43. *Леонов Г.А., Селедзхи С.М.* Синтез блок-схемы и анализ устойчивости астатической системы фазовой автоподстройки для цифровых сигнальных процессоров // АиТ. 2005, № 3. С. 11–19.
44. *Leonov G.A., Seledzhi S.M.* Design of Phase-Locked Loops for Digital Signal Processors // International Journal of Innovative Computing Information and Control. 2005. V.1, N 4. P. 1-11
45. *Алексеенко А.Г.* Основы микросхемотехники. М.: Юнимедиастайл. 2002
46. *Таненбаум Э.* Архитектура компьютера. М.: Питер. 2003 [Tanenbaum A. Structured Computer Organization. New Jersey: Prentice Hall. 1999]
47. *Хоровиц П., Хилл У.* Искусство схемотехники. М.: Мир, 2003. [Horowitz P., Hill W. The Art of Electronics. Cambridge: Cambridge University Press. 1998]
48. *Абрамович И.М., Блехман И.И., Лавров Б.П., Плис Д.А.* Явление синхронизации вращающихся тел (роторов) // Открытия, изобретения. – 1988, № 1. Диплом № 333. Зарегистрировано Госкомизобретений 14 мая 1987 г.
49. *Блехман И.И.* Самосинхронизация вибраторов некоторых вибрационных машин // Инженерный сборник. 1953. Т.16.
50. *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
51. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М., Наука, 1981.
52. *Блехман И.И., Малахова О.З.* Экстремальные признаки устойчивости некоторых движений // Прикладная математика и механика. 1990. Т.54, № 1. С. 142–161.
53. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Физматгиз. 1994.
54. Selected Topics in Vibrational Mechanics. Edited by I.I. Blekhman. – Singapore: World Scientific, 2003.
55. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М., Наука, 1979.
56. *Stephenson A.A.* A new type of dynamical stability // Mem. Proc. Manchr. Cit. Philos. Soc. 1908. V. 52. P. 15–21.

57. *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1951. Т.21, вып.5. С. 588–598.
58. *Леонов Г.А., Шумафов М.М.* Методы стабилизации линейных управляемых систем. Изд-во СПбГУ. 2005.
59. *Yakubovich V.A., Leonov G.A., Gelig A.Kh.* Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities. Singapore, World Scientific. 2004.
60. *Леонов Г.А.* Об одном классе динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством // Сибирский матем. журнал. 1976. Т.17, № 1. С. 91–112.
61. *Леонов Г.А.* Второй метод Ляпунова в теории фазовой синхронизации // Прикладная математика и механика. 1976. Т.40, № 2. С. 238–244.
62. *Hale J.K.* Some examples of infinite dimensional systems // Contemporary Mathematics. 1987. V.58. P. 215–226.
63. *Blekhman, I.I., Fradkov A.L., Nijmeijer H. and A.Yu. Pogromsky A.Yu.* On self-synchronization and controlled synchronization // Systems and Control Letters. 1997. V.31. P. 299-305.
64. *Blekhman I.I., Fradkov A.L., Tomchina O.P., Bogdanov D.E.* Self-Synchronization and Controlled Synchronization: General Definition and Example Design // Mathematics and Computers in Simulation. 2002. V.58, Issue 4-6. P. 367-384.
65. *Blekhman I.I., Fradkov A.L.* On general definitions of synchronization// In: Selected topics in vibrational mechanics. Ed. I.I.Blekhman, Singapore, World Scientific. 2004. P. 179-188.
66. *Фрадков А.Л.* Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб:Наука. 2003.
67. *Rosenblum M. G., Pikovsky A.S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1996. 76. P. 1804-1807.
68. *Pikovsky A.S., Rosenblum M. G., Kurths J.* Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press. 2001.
69. *Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.* Об устойчивости движения в целом // ДАН СССР. 1952. Т.86, № 3. С. 453–459.
70. *Ла Салль Дж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир. 1964.
71. *Лефшец С.* Устойчивость нелинейных систем автоматического управления. М.Ж Мир, 1967 [Lefschetz S. Stability of Nonlinear Control Systems. New York, Academic Press, 1965]
72. *Бакаев Ю.Н.* Некоторые вопросы нелинейной теории фазовых систем // М.: Труды ВВИА им. Н.Е.Жуковского. 1959. Вып.800. 70 с.
73. *Fagioli E., Szegö G.P.* Qualitative analysis by modern methods of a stability problem in power-system analysis // J. Franklin Institute. 1970. V. 290, N 2. P. 103–111.
74. *Леонов Г.А.* Об ограниченности траекторий фазовых систем // Сибирский матем. журнал. 1974. Т.15, № 3. С. 687–692.
75. *Noldus E.* New direct Lyapunov-type method for studying synchronization problems // Automatika. 1977. V.13, N 2. P. 139–151.
76. *Леонов Г.А.* Устойчивость и колебания фазовых систем // Сибирский матем. журнал. 1975. Т.16, № 5. С. 1031–1052
77. *Leonov G.A.* Discontinuous Load Rating Problem for Inductor Motors // Technische Mechanik. 2004. B. 24, N 3–4. P. 271–276

г. Санкт-Петербург  
e-mail: leonov@math.spbu.ru

Поступила в редакцию

**ФАЗОВАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

Г.А. Леонов

**АВТОРЕФЕРАТ**

Дается обзор современного состояния теории фазовой синхронизации. Рассматриваются приложения этой теории для синхронных и асинхронных электрических машин, систем фазовой автоматической подстройки частоты, самосинхронизации неуравновешенных роторов. При исследовании глобальной устойчивости систем фазовой синхронизации широко применяется частотная теорема Якубовича-Калмана.

**ФАЗОВАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

Г.А. Леонов

**АННОТАЦИЯ**

Дается обзор современного состояния теории фазовой синхронизации. Рассматриваются приложения этой теории для синхронных и асинхронных электрических машин, систем фазовой автоматической подстройки частоты, самосинхронизации неуравновешенных роторов. При исследовании глобальной устойчивости систем фазовой синхронизации широко применяется частотная теорема Якубовича-Калмана.



**Сведения об авторе:**

(Статья: Леонов Г.А. Фазовая синхронизация. Теория и приложения)

Леонов Геннадий Алексеевич — доктор физ.-мат.наук, профессор  
математико-механического факультета  
Санкт-Петербургского государственного университета

Дом.адрес: 199053, г.Санкт-Петербург, Тучков переулок, д.3, кв.16

Дом. телефон: 3211448