Успехи механики, 2003, N 3

ПРОБЛЕМА ОБОСНОВАНИЯ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ[1]

Г.А.Леонов
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: leonov@math.spbu.ru

УДК 517.9

Дан обзор современного состояния проблемы обоснования первого приближения в теории устойчивости движения.

Рассмотрены соотношения между характеристическими показателями и ляпуновскими экспонентами. Изложены оценки нормы матрицы Коши через характеристические показатели и коэффициенты неправильности. Описаны эффекты Перрона инверсии знаков характеристических показателей решений исходной системы и системы первого приближения при одних и тех же начальных данных.

Проведено обобщение теоремы Малкина о разрешимости матричного уравнения Ляпунова для нестационарных матричных коэффициентов. Решения уравнения Ляпунова оценены через коэффициенты неправильности. На основе проведенных обобщений показано, что для уравнения первого порядка информация о знаке характеристического показателя полностью решает задачу об устойчивости в некритическом случае.

На основе лемм Беллмана – Гронуолла и Бихари доказаны два критерия устойчивости по первому приближению: Персидского и Малкина – Четаева – Массера, которые в настоящее время являются наилучшими условиями устойчивости для нестационарных линеаризаций. Показано, что замена условия правильности требованием сохранения отрицательности характеристических показателей системы первого приближения при малых вариациях начальных данных исходной системы полностью решает задачу об асимптотической устойчивости.

На основе метода триангуляции Перрона – Винограда доказаны критерии неустойчивости по Красовскому и по Ляпунову.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время проблема обоснования нестационарных линеаризаций для сложных, непериодических движений поразительно напоминает ситуацию стодвадцатилетней давности. Основатели теории автоматического регулирования Д.К.Максвелл (1868 [1]) и И.А.Вышнеградский (1876 [2]) смело проводили линеаризацию в окрестности стационарных движений, оставив обоснование такой линеаризации А.Пуанкаре (1886 [3]) и А.М.Ляпунову (1892 [4]).

В настоящее время среди широкого круга специалистов по хаотической динамике возникло стойкое убеждение, что положительность старшего характеристического показателя линейной системы первого приближения влечет за собой неустойчивость решений исходной системы (см., например [5], стр.227, [6], стр.72, [7], стр.26, [8], стр.323,

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (N 01-01-00317), Программы “Университеты России”, Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2257.2003.1), ИПМАШ РАН и программа № 19 Президиума РАН (проект 1.4).

[9]). Более того, существует огромное количество компьютерных экспериментов, где используются различные численные методики вычисления характеристических показателей и ляпуновских экспонент линейных систем первого приближения. При этом авторы, как правило, совершенно игнорируя обоснование процедуры линеаризации, строят из полученных численных значений показателей и экспонент различные численные характеристики аттракторов исходных нелинейных систем (ляпуновские размерности, метрические энтропии и т.д.). И снова, как и сто двадцать лет назад, такие смелые линеаризации нуждаются в строгом математическом обосновании.

Цель настоящего обзора — описание современного состояния проблемы обоснования нестационарных линеаризаций.

Напомним сначала основные понятия теории устойчивости движения. Здесь мы в основном следуем книгам и обзорам [4, 10-20].

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = F(x,t), \quad t \geq 0, \quad x \in R^n, \tag{1.1}$$

где $F(x,t)$ – непрерывная вектор-функция.

Определение 1.1. *Решение $x(t,t_0,x_0)$ системы (1.1) называется устойчивым по Ляпунову, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ существует число $\delta(\varepsilon,t_0)$ такое, что*

1) все решения $x(t,t_0,y_0)$, удовлетворяющие условию

$$|x_0 - y_0| \leq \delta,$$

определены при $t \geq t_0$,

2) для этих решний справедливо неравенство

$$|x(t,t_0,x_0) - x(t,t_0,y_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Если $\delta(\varepsilon,t_0)$ не зависит от t_0, то устойчивость по Ляпунову называтся равномерной.

Определение 1.2. *Решение $x(t,t_0,x_0)$ называется асимптотически устойчивым по Ляпунову, если оно устойчиво по Ляпунову и для любого $t_0 \geq 0$ существует число $\Delta(t_0) > 0$ такое, что решение $x(t,t_0,y_0)$, удовлетворяющее условию $|x_0 - y_0| \leq \Delta$ обладат свойством*

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t,t_0,x_0) - x(t,t_0,y_0)| = 0.$$

Определение 1.3. *Решение $x(t,t_0,x_0)$ называется устойчивым по Красовскому, если сушествуют такие положительные числа $\delta(t_0)$ и $R(t_0)$, что для любого y_0, удовлетворяющего условию*

$$|x_0 - y_0| \leq \delta(t_0)$$

решение $x(t,t_0,y_0)$ определено при $t \geq t_0$ и выполнено неравенство

$$|x(t,t_0,x_0) - x(t,t_0,y_0)| \leq R(t_0)|x_0 - y_0|, \quad \forall t \geq t_0.$$

Если δ и R не зависят от t_0, то устойчивость по Красовскому называется равномерной.

Определение 1.4. *Решение $x(t,t_0,x_0)$ называется экспоненциально устойчивым, если существуют такие положительные числа $\delta(t_0)$, $R(t_0)$ и $\alpha(t_0)$, что для любого y_0, удовлетворяющего условию*

$$|x_0 - y_0| \leq \delta(t_0)$$

решение $x(t,t_0,y_0)$ определено при всех $t \geq t_0$ и выполнено неравенство

$$|x(t,t_0,x_0) - x(t,t_0,y_0)| \leq R(t_0)\exp(-\alpha(t_0)(t-t_0))|x_0 - y_0|, \quad \forall t \geq t_0.$$

Если δ, R и α не зависят от t_0, то устойчивость называют равномерной.

Пусть теперь система (1.1) автономна:

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad t \geq 0, \quad x \in R^n, \tag{1.2}$$

Через $x(t, x_0)$ будем обозначать решение системы (1.2), проходящее через точку x_0 : $x(0, x_0) = x_0$.

Введем следующее обозначение

$$L^+(x_0) = \{x(t, x_0) \,|\, t \in [0, +\infty)\}.$$

Определение 1.5. *Траектория $x(t, x_0)$ системы (1.2) называется устойчивой по Пуанкаре (или орбитально устойчивой), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех y_0, удовлетворяющих неравенству $|x_0 - y_0| \leq \delta(\varepsilon)$, решение $x(t, y_0)$ определено при всех $t \geq 0$ и выполнено соотношение*

$$\rho(L^+(x_0), x(t, y_0)) \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

Если, кроме того, для некоторого числа δ_0 и всех y_0, удовлетворяющих неравенству $|x_0 - y_0| \leq \delta_0$, выполнено соотношение

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(L^+(x_0), x(t, y_0)) = 0,$$

то говорят, что траектория асимптотически устойчива по Пуанкаре (или асимптотически орбитально устойчива).

Здесь $\rho(K, x)$ – расстояние от точки x до множества K, которое определяется по формуле

$$\rho(K, x) = \inf_{z \in K} |z - x|.$$

Введем теперь определение устойчивости по Жуковскому для системы (1.2). Для этого потребуется рассмотрение следующего множества гомеоморфизмов:

$$Hom\{\tau(\cdot) |\, \tau \,:\, [0, \infty) \to [0, +\infty), \tau(0) = 0\}.$$

Функции из множества Hom будут играть роль перепараметризации времени для траектории системы (1.2).

Определение 1.6. *Траектория $x(t, x_0)$ системы (1.2) называется устойчивой по Жуковскому, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого вектора y_0, удовлетворяющего неравенству $|x_0 - y_0| \leq \delta(\varepsilon)$, решение $x(t, y_0)$ определено при всех $t \geq 0$ и найдется функция $\tau(\cdot) \in Hom$, при которой выполнено неравенство*

$$|x(t, x_0) - x(\tau(t), y_0)| \leq \varepsilon, \quad t \geq 0.$$

Если,кроме того, для некоторого числа $\delta_0 > 0$ и любого y_0 из шара $\{y \,|\, |x_0 - y_0| \leq \delta_0\}$ найдется функция $\tau(\cdot) \in Hom$, при которой выполнено соотношение

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t, x_0) - x(\tau(t), y_0)| = 0,$$

то будем говорить, что траектория $x(t, x_0)$ асимптотически устойчива по Жуковскому.

Другими словами, устойчивость по Жуковскому – это устойчивость по Ляпунову при подходящей перепараметризации каждой из возмущенных траекторий.

Напомним, что по определению неустойчивость по Ляпунову (по Красовскому, по Пуанкаре, по Жуковскому) – это отрицание соответствующего вида устойчивости.

Для непрерывных динамических систем из устойчивости по Ляпунову следует устойчивость по Жуковскому, а из устойчивости по Жуковскому следует устойчивость по Пуанкаре.

Первой процедурой, которую применяют обычно [10] при исследовании устойчивости по Ляпунову решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1.1) является следующее преобразование

$$x = y + x(t, t_0, x_0). \tag{1.3}$$

После такой замены получим следующее уравнение

$$\frac{dy}{dt} = F(y + x(t, t_0, x_0), t) - F(x(t, t_0, x_0), t), \tag{1.4}$$

которое часто называют дифференциальным уравнением возмущенного движения. Очевидно, что задача об исследовании устойчивости решения $x(t, t_0, x_0)$ преобразуется в задачу об исследовании устойчивости тривиального решения $y(t) \equiv 0$ уравнения (1.4).

При этом считают, что правая часть (1.4) известна, поскольку известны $F(x, t)$ и решение $x(t, t_0, x_0)$. В настоящее время трудности вычисления $x(t, t_0, x_0)$ часто преодолеваются с помощью численных методов и проведения компьютерных экспериментов.

При исследовании устойчивости по Красовскому и экспоненциальной устойчивости поступают аналогичным образом. Для исследования устойчивости по Жуковскому и по Пуанкаре обычно используют другие приемы. Они описаны в [20]. В настоящем обзоре мы ограничимся исследованиями устойчивости, которые используют замену (1.3).

2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ И ЛЯПУНОВСКИЕ ЭКСПОНЕНТЫ

Фундаментальные понятия характеристического числа, нормальной системы решений и правильной линейной системы дифференциальных уравнений были введены А.М.Ляпуновым [4]. Здесь мы определим эти понятия

2.1. **Характеристические показатели**.

Определение 2.1. *Число (или символ $+\infty, -\infty$), определяемое формулой*

$$\lambda = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |f(t)|$$

будем называть характеристическим показателем вектор-функции $f(t)$.

Определение 2.2. *Будем называть характеристический показатель λ вектор-функции $f(t)$ строгим, если существует конечный предел*

$$\lambda = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln |f(t)|.$$

Величину

$$\lambda = \underline{\lim}_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln |f(t)|$$

часто называют нижним характеристическим показателем вектор-функции $f(t)$.

Введенное А.М.Ляпуновым характеристическое число — это взятый с обратным знаком характеристический показатель.

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x \in R^n \tag{2.1}$$

с непрерывной и ограниченной на $[0, +\infty)$ $n \times n$ -матрицей $A(t)$.

Пусть $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ – фундаментальная матрица системы (2.1) (т.е. $\det X(0) \neq 0$).

Хорошо известно [13], что в сделанных предположениях характеристические показатели λ_j решений $x_j(t)$ являются числами.

Определение 2.3. *Фундаментальная матрица $X(t)$ называется нормальной, если сумма $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j$ характеристических показателей вектор-функций $x_j(t)$ является наименьшей по сравнению с другими фундаментальными матрицами.*

Хорошо известны следующие важные и почти очевидные результаты [13].

Теорема 2.1 (Ляпунова о нормальной фундаментальной матрице). *Для любой фундаментальной матрицы $X(t)$ существует постоянная матрица C $(\det C \neq 0)$ такая, что матрица*

$$X(t)C \tag{2.2}$$

является нормальной фундаментальной матрицей системы (2.1).

Теорема 2.2. *Для всех нормальных фундаментальных матриц $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ количество решений $x_j(t)$ с одним и тем же характеристическим показателем одно и то же.*

Используя эти результаты можно ввести следующие определения.

Определение 2.4. *Множество характеристических показателей $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ решений $x_1(t), \dots, x_n(t)$ некоторой нормальной фундаментальной матрицы $X(t)$ называется полным спектром линейной системы (2.1), а числа λ_j – характеристическими показателями системы (2.1).*

Таким образом, всякая нормальная фундаментальная матрица реализует весь спектр системы (2.1).

В дальнейшем через $\sum = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j$ будем обозначать сумму характеристических показателей системы (2.1).

Хорошо известно следующее неравенство Ляпунова [13]

$$\sum \geq \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mathrm{Tr} A(\tau)\, d\tau \tag{2.3}$$

Если справедливо равенство

$$\sum = \underline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mathrm{Tr} A(\tau)\, d\tau$$

то система (2.1) называется правильной (регулярной).

Хорошо известно [13], что каждый характеристический показатель правильной системы является строгим.

Число

$$\Gamma = \Sigma - \underline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{Tr}\, A(\tau)\, d\tau$$

называют коэффициентом (мерой) неправильности системы (2.1).

2.2. **Ляпуновские экспоненты.**

Пусть $X(t)$ – фундаментальная матрица системы (2.1).

Введем в рассмотрение сингулярные числа $\alpha_1(X(t)) \geq \ldots \geq \alpha_n(X(t)) \geq 0$ матрицы $X(t)$. Напомним, что сингулярное число $\alpha_j(X(t))$ матрицы $X(t)$ – это квадратный корень из собственных значений матрицы $X(t)^*X(t)$. Хорошо известна следующая геометрическая интерпретация сингулярных чисел: $\alpha_j(X(t))$ совпадают с главными полуосями эллипсоида $X(t)B$, где B – шар единичного радиуса .

Определение 2.5. *Ляпуновской экспонентой μ_j называется число [21]*

$$\mu_j = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \alpha_j(X(t)).$$

Будем называть экспоненту μ_j строгой, если существует конечный предел

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \alpha_j(X(t)).$$

В дальнейшем примем, что $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Число λ_1 будем называть старшим характеристическим показателем.

Покажем, что старший характеристический показатель λ_1 и ляпуновская экспонента μ_1 совпадают.

Для этого напомим, что из геометрической интерпретации сингуляpых чисел следует равенство $|X(t)| = \alpha_1(X(t))$. Отсюда и из соотношения

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |X(t)| = \lambda_1.$$

получим равенство $\lambda_1 = \mu_1$.

Покажем, что существуют системы, для которых $\lambda_2 \neq \mu_2$.

Рассмотрим систему (2.1) с матрицей

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\ln t) + \cos(\ln t) \\ \sin(\ln t) + \cos(\ln t) & 0 \end{pmatrix}, \quad t > 1,$$

и фундаментальной нормальной матрицей

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{\gamma(t)} & e^{-\gamma(t)} \\ e^{\gamma(t)} & -e^{-\gamma(t)} \end{pmatrix},$$

где $\gamma(t) = t\sin(\ln t)$. Очевидно, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и

$$\alpha_1(X(t)) = \sqrt{2}\max(e^{\gamma(t)}, e^{-\gamma(t)})$$

$$\alpha_2(X(t)) = \sqrt{2}\min(e^{\gamma(t)}, e^{-\gamma(t)})$$

Отсюда следуют равенства $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$. Таким образом, $\lambda_2 \neq \mu_2$.

Ляпуновские экспоненты оказались удобным инструментом для формулировки понятия ляпуновской размерности и оценки хаусдорфовой и фрактальной размерности аттракторов [20, 21]. При таких оценках также возникают линеаризации и анализируется первое приближение. Однако рассмотрение ансамблей траекторий на инвариантных множествах позволяет избежать здесь эффектов перроновского типа [22] (см. теорему 5.3, § 5 настоящего обзора).

2.3. **Оценка нормы матрицы Коши через характеристические показатели и коэффициент неправильности.**

Рассмотрим нормальную фундаментальную матрицу $X(t)$ системы (2.1) и введем обозначения

$$\Lambda = \max_j \lambda_j, \quad \lambda = \min_j \lambda_j.$$

Здесь λ_j — полный спектр системы (2.1).

Матрицу $X(t)X(\tau)^{-1}$ будем называть матрицей Коши системы (2.1).

Хорошо известен и часто используется следующий результат.

Теорема 2.3. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $C > 0$ такое, что выполнены неравенства*

$$\begin{gathered} |X(t)X(\tau)^{-1}| \leq C \exp[(\Lambda + \varepsilon)(t - \tau) + (\Gamma + \varepsilon)\tau], \\ \forall\, t \geq \tau \geq 0 \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered} |X(t)X(\tau)^{-1}| \leq C \exp[\lambda(t - \tau) + (\Gamma + \varepsilon)\tau], \\ \forall\, \tau \geq t \geq 0 \end{gathered} \tag{2.5}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad \widetilde{x}_j(t) = x_j(t) \exp[-\lambda_j - \varepsilon)t]$$

$$X(t)^{-1} = \begin{pmatrix} u_1(t)^* \\ \vdots \\ u_n(t)^* \end{pmatrix}, \quad \widetilde{u}_j(t) = u_j(t) \exp[(\lambda_j + \varepsilon)t].$$

Из определения λ_j и из правила обращения матриц следует, что для некоторого числа $L > 0$ выполнено неравенство

$$|(\widetilde{x}_1(t), \dots, \widetilde{x}_n(t))^{-1} \det(\widetilde{x}_1(t), \dots, \widetilde{x}_n(t))| \leq L, \ \forall\, t \geq 0. \tag{2.6}$$

Из соотношения (2.6) сразу следует оценка

$$\begin{gathered} |(\widetilde{x}_1(t), \dots, \widetilde{x}_n(t))^{-1}| \leq L \exp\left[(\Sigma + n\varepsilon)t - \int_0^t \operatorname{Tr} A(\tau)\, d\tau\right] \leq \\ \leq L_1 \exp[(2n\varepsilon + \Gamma)t], \ \forall t \geq 0. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь L_1 — некоторое достаточно большое число.

Запишем следующие очевидные соотношения

$$\begin{gathered} |X(t)X(\tau)^{-1}| = |\sum_j x_j(t) u_j(\tau)^*| = \\ = |\sum_j \widetilde{x}_j(t) \exp[(\lambda_j + \varepsilon)t - (\lambda_j + \varepsilon)\tau] \widetilde{u}_j(\tau)^*|. \end{gathered}$$

Учитывая ограниченность при $t \geq 0$ вектор–функций $\widetilde{x}_j(t)$ отсюда получим оценку

$$|X(t)X(\tau)^{-1}| \leq L_2 \sum_j \exp[(\lambda_j + \varepsilon)(t - \tau)] |\widetilde{u}_j(\tau)|. \tag{2.8}$$

для некоторого достаточно большого числа L_2. Поскольку

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u}_1(t)^* \\ \vdots \\ \widetilde{u}_n(t)^* \end{pmatrix} = (\widetilde{x}_1(t), \dots, \widetilde{x}_n(t))^{-1}$$

из соотношений (2.7) и (2.8) сразу следуют оценки (2.4) и (2.5).

3. ЭФФЕКТЫ ПЕРРОНА

В 1930 году О.Перрон [23] показал, что отрицательность старшего характеристического показателя системы первого приближения не всегда влечет за собой устойчивость нулевого решения исходной системы. Более того в сколь угодно малой окрестности нуля могут существовать решения исходной системы с положительным характеристическим показателем. Эти результаты О.Перрона произвели большое впечатление на специалистов по теории устойчивости движения.

Эффект смены знака характеристического показателя решений системы первого приближения и исходной системы при одних и тех же начальных условиях будем называть эффектом Перрона.

Приведем теперь знаменитый контрпример Перрона.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \tfrac{dx_1}{dt} &= -ax_1 \\ \tfrac{dx_2}{dt} &= [\sin(\ln(t+1)) + \cos(\ln(t+1)) - 2a]x_2 + x_1^2, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где a — число, удовлетворяющее неравенствам

$$1 < 2a < 1 + \frac{1}{2}\exp(-\pi). \tag{3.2}$$

Решение уравнения первого приближения имеет вид

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \exp[-at]x_1(o) \\ x_2(t) &= \exp[(t+1)\sin(\ln(t+1)) - 2at]x_2(0). \end{aligned}$$

Ясно, что при условии (3.2) для системы первого приближения $\lambda_1 < 0$.

Запишем теперь решение системы (3.1)

$$\begin{aligned} &x_1(t) = \exp[-at]x_1(0), \\ &x_2(t) = \exp[(t+1)\sin(\ln(t+1)) - 2at](x_2(0)+ \\ &+x_1(0)^2 \int\limits_0^t \exp[-(\tau+1)\sin(\ln(\tau+1))]d\tau). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Полагая $t = \exp[(2k + \frac{1}{2})\pi] - 1$, где k — целое число, получим соотношения

$$\begin{gathered} \exp[(t+1)\sin(\ln(t+1)) - 2at] = e(\exp[(1-2a)t]), \\ (1+t)e^{-\pi} - 1 > 0, \\ \int\limits_0^t \exp[-(\tau+1)\sin(\ln(\tau+1))]d\tau) > \\ > \int\limits_{f(k)}^{g(k)} \exp[-(\tau+1)\sin(\ln(\tau+1))]\,d\tau > \\ > \int\limits_{f(k)}^{g(k)} \exp[\tfrac{1}{2}(\tau+1)]\,d\tau > \int\limits_{f(k)}^{g(k)} \exp[\tfrac{1}{2}(t+1)\exp(-\pi)]\,d\tau = \\ = \exp[\tfrac{1}{2}(t+1)\exp(-\pi)](t+1)(\exp(-\tfrac{2\pi}{3}) - \exp[-\pi]), \end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered} f(k) = (1+t)\exp[-\pi] - 1, \\ g(k) = (1+t)(\exp\left[-\frac{2\pi}{3}\right] - 1. \end{gathered}$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{gathered} \exp[(t+1)\sin(\ln(t+1)) - 2at]\int\limits_0^t \exp[-(\tau+1)\sin(\ln(\tau+1))]d\tau > \\ > \exp[\tfrac{1}{2}(2+\exp(-\pi)](\exp(-\tfrac{2\pi}{3}) - \exp(-\pi))\exp[(1-2a+\tfrac{1}{2}\exp(-\pi))t]. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Из последнего неравенства и условия (3.2) вытекает, что характеристический показатель λ решений системы (3.1) при $x_1(0) \neq 0$ является положительным.

Таким образом, все характеристические показатели системы первого приближения отрицательны, а почти все решения исходной системы (3.1) экспоненциально стремятся к бесконечности при $k \to +\infty$.

Приведем аналогичный эффект смены знака характеристических показателей "в другую сторону": решение системы первого приближения имеет положительный характеристический показатель, а решение исходной системы с теми же начальными данными — отрицательный показатель [24].

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 \\ \dot{x}_2 &= -2ax_2 \\ \dot{x}_3 &= [\sin(\ln(t+1)) + \cos(\ln(t+1)) - 2a]x_3 + x_2 - x_1^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

на инвариантном многообразии

$$M = \{x_3 \in R^1,\ x_2 = x_1^2\}.$$

Здесь число a удовлетворяет условию (3.2).

Решения системы (3.5) на многообразии M имеют вид

$$\begin{aligned} &x_1(t) = \exp[-at]x_1(0) \\ &x_2(t) = \exp[-2at]x_2(0) \\ &x_3(t) = \exp[(t+1)\sin(\ln(t+1)) - 2at]x_3(0), \\ &x_1(0)^2 = x_2(0). \end{aligned}$$

Очевидно, что эти решения имеют отрицательные характеристические показатели.

Рассмотрим теперь систему первого приближения в окрестности нулевого решения системы (3.5)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 \\ \dot{x}_2 &= -2ax_2 \\ \dot{x}_3 &= [\sin(\ln(t+1)) + \cos(\ln(t+1)) - 2a]x_3 + x_2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Решения этой системы имеют вид

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \exp[-at]x_1(0) \\ x_2(t) &= \exp[-2at]x_2(0) \\ x_3(t) &= \exp[(t+1)\sin(\ln(t+1)) - 2at](x_3(0)+ \\ &\quad +x_2(0)\int\limits_0^t \exp[-(\tau+1)\sin(\ln(\tau+1))]d\tau). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Сравнивая формулы (3.7) и (3.3) и применяя оценку (3.4) получим, что при $x_2(0) \neq 0$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |x_3(t)| > 0.$$

Легко видеть, что для решений систем (3.5) и (3.6) имеет место соотношение

$$(x_1(t)^2 - x_2(t)) = -2a(x_1(t)^2 - x_2(t)).$$

Поэтому

$$x_1(t)^2 - x_2(t) = \exp[-2at](x_1(0)^2 - x_2(0)).$$

Отсюда следует, что многообразие M — инвариантное экспоненциально притягивающее множество для решений систем (3.5) и (3.6). Последнее означает, что из соотношения $x_1(0)^2 = x_2(0)$ следует равенство $x_1(t)^2 = x_2(t)$ при всех $t \in R^1$ и что для любых начальных условий

$$|x_1(t)^2 - x_2(t)| \leq \exp[-2at]|x_1(0)^2 - x_2(0)|.$$

Таким образом, системы (3.5) и (3.6) имеют одно и то же инвариантное, экспоненциально притягивающее многообразие M, на котором почти все решения системы первого приближения (3.6) имеют положительный характеристический показатель, а все решения исходной системы (3.5) имеют отрицательные характеристические показатели.

Здесь эффект Перрона наблюдается на целом многообразии

$$\{x_3 \in R^1,\ x_2 = x_1^2 \neq 0\}.$$

Для того, чтобы построить экспоненциально устойчивую систему, первое приближение которой имеет положительный характеристический показатель, изменим систему (3.5) следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= G(x_1, x_2) \\ \dot{x}_3 &= [\sin(\ln(t+1)) + \cos(\ln(t+1)) - 2a]x_3 + x_2 - x_1^2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь функции $F(x_1, x_2)$ и $G(x_1, x_2)$ имеют вид:

$$\text{при } x_1 > 0,\quad x_2 > x_1^2 \quad F(x_1, x_2) = 2x_2 - ax_1, \qquad G(x_1, x_2) = -x_1 - \varphi(x_1, x_2)$$

$$\text{при } x_1 > 0,\quad x_2 < x_1^2 \quad F(x_1, x_2) = -2x_2 - ax_1, \quad G(x_1, x_2) = x_1 - \varphi(x_1, x_2)$$

$$\text{при } x_1 < 0,\quad x_2 > x_1^2 \quad F(x_1, x_2) = -2x_2 - ax_1, \quad G(x_1, x_2) = x_1 - \varphi(x_1, x_2)$$

$$\text{при } x_1 < 0,\quad x_2 < x_1^2 \quad F(x_1, x_2) = 2x_2 - ax_1, \qquad G(x_1, x_2) = -x_1 - \varphi(x_1, x_2).$$

Функция $\varphi(x_1, x_2)$ определена следующим образом:

$$\begin{array}{lll} \text{при} & x_2 > 2x_1^2 & \varphi(x_1, x_2) = 4ax_2 \\ \text{при} & -2x_1^2 < x_2 < 2x_1^2 & \varphi(x_1, x_2) = 2ax_2 \\ \text{при} & x_2 < -2x_1^2, & \varphi(x_1, x_2) = 4ax_2. \end{array}$$

Решения системы (3.8) понимаются в смысле А.Ф. Филиппова [25]. Согласно этому определению для данных функций F и G система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= G(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{3.9}$$

на линиях разрыва $\{x_1 = 0\}$ и $\{x_2 = x_1^2\}$ имеет скользящие решения, которые описываются уравнениями

$$x_1(t) \equiv 0, \quad \dot{x}_2(t) = -4ax_2(t)$$

и

$$\dot{x}_1(t) = -ax_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = -2ax_2(t), \quad x_2(t) \equiv x_1(t)^2$$

При этом решения системы (3.9) с начальными данными $x_1(0) \neq 0$, $x_2(0) \in R^1$ попадают на кривую $\{x_2 = x_1^2\}$ через конечное время не превосходящее 2π.

Из приведенных здесь соображений следует, что для решений системы (4) с начальными данными $x_2(0) \in R^1$, $x_1(0) \neq 0$, $x_3(0) \in R^1$ при $t \geq 2\pi$ имеют место равенства $F(x_1(t), x_2(t)) = -ax_1(t)$, $G(x_1(t), x_2(t)) = -2ax_2(t)$. Поэтому на этих решениях система (3.5) является системой первого приближения при $t \geq 2\pi$.

Как было показано выше, эта система имеет положительный характеристический показатель. В то же время все решения системы (3.8) экспоненциально стремятся к нулю.

Описанная здесь методика позволяет строить различные классы нелинейных систем, для которых проявляются эффекты перроновского типа.

4. МАТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛЯПУНОВА

Матричным уравнением Ляпунова называют уравнение

$$\dot{H}(t) + P(t)^* H(t) + H(t)P(t) = -G(t) \tag{4.1}$$

отнсительно симметричной дифференцируемой матрицы $H(t)$. Здесь $P(t)$ и $G(t)$ непрерывные и ограниченные при $t \geq 0$ $n \times n$-матрицы, $G^*(t) = G(t)$, $\forall t \geq 0$.

Обозначим через $X(t)$ фундаментальную матрицу системы

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x. \tag{4.2}$$

Если для некоторых постоянных $\alpha > 0$, $C > 0$, $\gamma \geq 0$ справедлива оценка

$$|X(s)X(t)^{-1}| \leq C \exp[-\alpha(s-t) + \gamma t], \quad \forall s \geq t \geq 0, \tag{4.3}$$

то решением уравнения (4.1) будет являться матрица

$$H(t) = \int\limits_t^{+\infty} (X(s)X(t)^{-1})^* G(s)(X(s)X(t)^{-1})\, ds. \tag{4.4}$$

Этот факт проверяется подстановкой (4.4) в уравнение (4.1) с привлечением тождества

$$(X(t)^{-1})^\bullet = -X(t)^{-1}P(t).$$

Здесь $(\ )^\bullet$ — операция дифференцирования. Сходимость интеграла (4.4) следует из оценки (4.3). Кроме того, из оценки (4.3) следует неравенство

$$|H(t)| \leq C^2 \sup_{t \geq 0} |G(t)| \int\limits_t^{+\infty} \exp 2[-\alpha(s-t) + \gamma t] ds.$$

Таким образом, существует число R, для которого

$$|H(t)| \leq R \exp[2\gamma t], \quad \forall\, t \geq 0. \tag{4.5}$$

Для матрицы Коши часто бывает полезна следующая простая оценка [13, 14].

Лемма 4.1. *Если $P(t)$ ограничена на R^1, то существует число ν, для которого при всех t и τ выполнена оценка*

$$|X(t)X(\tau)^{-1}| \leq \exp[\nu|t-\tau|]. \tag{4.6}$$

Наряду с оценкой (4.5) важную роль играет оценка снизу квадратичной формы $z^* H(t) z$, которая дается следующей теоремой.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены оценки (4.3) и*

$$z^* G(t) z \geq \delta |z|^2, \quad \forall t \geq 0,\ \forall z \in R^n \tag{4.7}$$

с некоторым положительными числом δ. Тогда существует число $\varepsilon > 0$, для которого выполнено следующее неравенство

$$z^* H(t) z \geq \varepsilon |z|^2, \quad \forall\, t \geq 0, \quad \forall z \in R^n. \tag{4.8}$$

Доказательство. Из условия (4.7) получим оценку

$$z^* H(t) z \geq \delta \int\limits_t^{+\infty} |X(s)X(t)^{-1} z|^2 ds \geq$$

$$\geq \delta \int\limits_t^{+\infty} \frac{|z|^2}{|(X(s)X(t)^{-1})^{-1}|^2} ds = \delta |z|^2 \int\limits_t^{+\infty} \frac{1}{|X(t)X(s)^{-1}|^2} ds.$$

Отсюда и из (4.6) получим соотношения

$$z^* H(t) z \geq \delta |z|^2 \int\limits_t^{+\infty} \exp[2\nu(t-s)]\, ds = \varepsilon |z|^2,$$

где

$$\varepsilon = \delta 2(\nu)^{-1}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dt} = Q(t)y \tag{4.9}$$

с положительным нижним характеристическим показателем $\rho > 0$:

$$\rho = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln |y(t)|.$$

Поскольку это уравнение можно записать в следующей форме

$$\frac{dx}{dt} = -Q(t)x, \quad x(t) = y(t)^{-1},$$

из теоремы 2.3 следует, что для любого $\alpha \in (0, \rho)$ и некоторого $\gamma > 0$ будет выполнена оценка (4.3). Поэтому для $P(t) = -Q(t)$ существует решение уравнения Ляпунова $H(t)$ со свойствами (4.5), (4.8).

Полагая далее $M(t) = H(t)^{-1}$ и $G(t) \equiv 1$ получим следующий результат.

Следствие 4.1. *Если $\rho > 0$, то существует непрерывно дифференцируемая, ограниченная при $t \geq 0$, положительная функция $M(t)$ такая, что*

$$\dot{M}(t) + 2Q(t)M(t) = M(t)^2, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Отметим, что при $\gamma = 0$ существование $H(t)$ со свойствами (4.1), (4.5), (4.8) было доказано И.Г. Малкиным [11].

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x) \tag{4.10}$$

с $n = 1$. Здесь $A(t)$ – непрерывная, ограниченная на $[0, +\infty)$ функция. Функция $f(t,x)$ – непрерывна и в некоторой окресности точки $x = 0$ удовлетворяет неравенству

$$|f(t,x)| \leq \varkappa |x|, \quad \forall\, t \geq 0, \tag{4.11}$$

с некоторым числом $\varkappa$.

Будем предполагать, что характеристический показатель λ уравнения

$$\dot{x} = A(t)x \tag{4.12}$$

отрицателен: $\lambda < 0$. В этом случае уравнение (4.10) можно представить в виде

$$\dot{x} = (P(t) - a)x + f(t,x), \tag{4.13}$$

где $a \in (0, -\lambda)$. Тогда для уравнения (4.2) при некоторых C и γ справедлива оценка (4.3). Поэтому существует функция $H(t)$, удовлетворяющая соотношениям (4.1), (4.5) и (4.8) при $G(t) \equiv 1$. Отсюда следует что для $V(t) = x(t)H(t)x(t)$ имеет место соотношение:

$$\dot{V}(t) \leq -|x(t)|^2 - 2\alpha V(t) + 2x(t)H(t)f(t, x(t)).$$

Из оценки (4.11) следует, что при $\varkappa < a$ выполнено неравенство

$$V(t) \leq V(0) \exp[-2(a - \varkappa)t].$$

Отсюда и из (4.8) получим соотношение

$$|x(t)|^2 \leq \varepsilon^{-1}|H(0)||x(0)|^2 \exp[-2(a-\varkappa)t].$$

Таким образом, для уравнения первого порядка из отрицательности характеристического показателя системы первого приближения следует экспоненциальная устойчивость нулевого решения исходной системы.

Рассмотрим теперь уравнение (4.10), предполагая, что нижний характеристический показатель $\lambda > 0$. В этом случае уравнение (4.10) представим в виде (4.13) с $a \in (-\lambda, 0)$.

Используя следствие 4.1 и функцию $V(t) = x(t)M(t)x(t)$ получим оценку

$$\dot{V}(t) \geq -2aV(t) + 2M(t)x(t)f(t, x(t)).$$

Из оценки (4.11) следует, что при $\varkappa < |a|$ выполнено неравенство

$$V(t) \geq V(0) \exp[-2(a+\varkappa)t].$$

Отсюда и из ограниченности $M(t)$ следует существование числа L, для которого

$$|x(t)| \geq L|x(0)| \exp[-(a+\varkappa)t].$$

Таким образом, для уравнения первого порядка из положительности нижнего характеристического показателя системы первого приближения следует экспоненциальная неустойчивость нулевого решения исходной системы.

Рассмотрим теперь уравнение (4.10) с произвольным n и функцией $f(t,x)$ специального вида

$$f(t,x) = \varphi(t,x)x,$$

где $\varphi(t,x)$ — непрерывная функция со скалярными значениями: $\varphi(t,x) \,:\, R^1 \times R^n \to R^1$. Будем предполагать, что в некоторой окрестности точки $x = 0$ выполнено неравенство

$$|\varphi(t,x)| \leq \varkappa \quad \forall t \geq 0, \ \ \forall x \in R^n. \tag{4.14}$$

Будем предполагать, что старший характеристический показатель Λ системы (4.12) отрицателен, а ее коэффициент неправильности $\Gamma \geq 0$.

Представим систему (4.10) в виде

$$\dot{x} = (P(t) - aI)x + f(t,x), \tag{4.15}$$

где $a \in (0, -\Lambda)$. Тогда в силу теоремы 2.3 имеет место оценка (4.3) с $\alpha = -\Lambda - a - \varepsilon,\ \gamma = \Gamma + \varepsilon$. В этом случае для $G(t) \equiv I$ существует матрица $H(t)$, удовлетворяющая соотношениям (4.1), (4.5), (4.8).

Следовательно, используя (4.14), получим оценку для $V(t) = x(t)^*H(t)x(t)$

$$\dot{V}(t) \leq -|x(t)|^2 - 2aV(t) + 2\varkappa V(t)$$

Отсюда следует, что при $a > \varkappa$

$$V(t) \leq V(0) \exp[-2(a-\varkappa)t].$$

Но тогда по теореме 4.1 получим оценку

$$|x(t)|^2 \leq \varepsilon^{-1} V(0) \exp[-2(a-\varkappa)t].$$

Из последней оценки следует, что для асимптотической устойчивости по Ляпунову нулевого решения системы (4.10) с функцией $f(t,x)$, удовлетворяющей условию (4.14) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\Lambda + \varkappa < 0.$$

5. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Приведем здесь два наиболее известных критерия устойчивости по первому приближению для системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \quad t \geq 0, \quad x \in R^n. \tag{5.1}$$

Здесь $A(t)$ – непрерывная, ограниченная при $t \geq 0$ $n \times n$-матрица, $f(t,x)$ – непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая в некоторой окрестности $\Omega(0)$ точки $x = 0$ условию

$$|f(t,x)| \leq \kappa |x|^\nu, \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \Omega(0). \tag{5.2}$$

Здесь κ и ν – некоторые положительные числа, $\nu \geq 1$.

Системой первого приближения будем называть систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x. \tag{5.3}$$

Будем предполагать, что для матрицы Коши $X(t)X(\tau)^{-1}$ системы (5.3) имеет место оценка

$$|X(t)X(\tau)^{-1}| \leq C \exp[-\alpha(t-\tau) + \gamma\tau], \quad \forall t \geq \tau \geq 0, \tag{5.4}$$

где $\alpha > 0$, $\gamma \geq 0$. Об этой оценке уже шла речь в § 2 и 4.

Сформулированные ниже теоремы являются в настоящее время наилучшими критериями устойчивости по первому приближению.

Теорема 5.1 (Персидский [26,10]). *Если выполнены условия (5.4) с* $\gamma = 0$, *(5.2) с* $\nu = 1$ *и достаточно малым* κ, *то решение* $x(t) \equiv 0$ *системы (5.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 5.2 (Четаев [11], Малкин [10,15], Массера [27]). *Если выполнены условия (5.4), (5.2) и неравенство*

$$(\nu - 1)\alpha - \gamma > 0, \tag{5.5}$$

то решение $x(t) \equiv 0$ *системы (5.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 5.2 усиливает широко известную теорему Ляпунова об устойчивости по первому приближению для правильных систем [4].

Для доказательства этих двух теорем нам потребуются хорошо известные леммы Беллмана – Гронуолла и Бихари [13].

Лемма 5.1 (Беллмана – Гронуолла). *Если для неотрицательных и непрерывных при* $t \geq 0$ *функций* $u(t)$ *и* $v(t)$ *и числа* $C > 0$ *выполнено неравенство*

$$u(t) \leq C + \int_0^t v(\tau)u(\tau)\,d\tau, \quad \forall t \geq 0, \tag{5.6}$$

то имеет место оценка

$$u(t) \leq C \exp[\int_0^t v(\tau)\,d\tau], \quad \forall t \geq 0, \tag{5.7}$$

Лемма 5.2 (Бихари). *Если для неотрицательных и непрерывных при* $t \geq 0$ *функций* $u(t)$ *и* $v(t)$ *и числа* $C > 0$, *выполнены неравенства*

$$u(t) \leq C + \int_0^t v(\tau)[u(\tau)]^\nu\,d\tau, \quad \forall t \geq 0, \tag{5.8}$$

$$(\nu-1)C^{\nu-1}\int\limits_0^t v(\tau)\,d\tau < 1, \quad \forall t \ge 0, \tag{5.9}$$

то имеет место оценка

$$u(t) \le C[1-(\nu-1)C^{\nu-1}\int\limits_0^t v(\tau)\,d\tau]^{-1/(\nu-1)}, \quad \forall t \ge 0, \tag{5.10}$$

Доказательство теоремы 5.1. Представим решение системы (5.1) в следующем виде

$$x(t) = X(t)(x(0) + \int\limits_0^t X(\tau)^{-1} f(\tau, x(\tau))\,d\tau) \tag{5.11}$$

Из соотношений (5.2), (5.4) и (5.11) вытекает оценка

$$|x(t)| \le C\exp^{-\alpha t} x(0) + C\int\limits_0^t \exp[-\alpha(t-\tau)]\kappa|x(\tau)|\,d\tau.$$

Эту оценку можно переписать следующим образом

$$(e^{\alpha t}|x(t)|) \le C|x(0)| + C\kappa\int\limits_0^t (\exp^{\alpha\tau}|x(\tau)|)\,d\tau.$$

Применяя лемму 5.1, получим оценку

$$|x(t)|) \le C|x(0)|\exp[(-\alpha + C\kappa)t], \quad \forall t \ge 0.$$

Из этого неравенства при $\kappa < \alpha/C$ следует утвеждение теоремы.

Доказательство теоремы 5.2. Из соотношений (5.2), (5.4) и (5.11) вытекает оценка

$$|x(t)|) \le Ce^{-\alpha t}|x(0)| + C\int\limits_0^t \exp[-\alpha(t-\tau) + \gamma\tau]\kappa|x(\tau)|^\nu\,d\tau.$$

Эту оценку можно переписать следующим образом

$$(e^{\alpha t}|x(t)|) \le C|x(0)| + C\kappa\int\limits_0^t \exp[((1-\nu)\alpha+\gamma)\tau](e^{\alpha\tau}|x(\tau)|)^\nu\,d\tau.$$

Применяя лемму 5.2, получим оценку

$$|x(t)| \le C|x(0)|\exp[-\alpha t][1-(\nu-1)(C|x(0)|)^{(\nu-1)}(C\kappa)\times$$

$$\times\int\limits_0^t \exp[((1-\nu)\alpha+\gamma)\tau]\,d\tau]^{-1/(\nu-1)}, \quad \forall\, t \ge 0.$$

Из этого неравенства и из условия (5.5) при достаточно малых $|x(0)|$ получим утверждение теоремы.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = F(x,t), \quad t \ge 0, \quad x \in R^n, \tag{5.12}$$

где $F(x,t)$ – дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция.

Будем здесь предполагать, что для решений системы (5.12) с начальными данными $y = x(0, y)$ из некоторой области Ω выполнено следующее условие.

Максимальное сингулярное число $\alpha_1(t, y)$ фундаментальной матрицы $X(t, y)$ линейной системы

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y \tag{5.13}$$

удовлетворяет неравенству

$$\alpha_1(t, y) \leq \alpha(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall y \in \Omega \tag{5.14}$$

Здесь матрица

$$A(t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}|_{x=x(t,y)}$$

является матрицей Якоби вектор-функции $F(x, t)$ на решении $x(t, y)$, $X(0, y) = I$.

Теорема 5.3 [22]. *Пусть функция* $\alpha(t)$ *ограничена на интервале* $(0, +\infty)$. *Тогда решение* $x(t, y)$, $y \in \Omega$, *устойчиво по Ляпунову.*

Если, кроме того,

$$\lim_{t \to +\infty} \alpha(t) = 0,$$

то решение $x(t, y)$, $y \in \Omega$, *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Хорошо известно, что

$$\frac{\partial x(t, y)}{\partial y} = X(t, y), \quad \forall t \geq 0.$$

Также хорошо известно [28], что для любых векторов y, z и числа $t \geq 0$ существует вектор w, для которого выполнены соотношения

$$|w - y| \leq |y - z|,$$

$$|x(t, y) - x(t, z)| \leq |\frac{\partial x(t, w)}{\partial w}||y - z|.$$

Поэтому для любого вектора z из шара с центром в y и целиком расположенного в Ω справедлива оценка

$$|x(t, y) - x(t, z)| \leq |y - z| \sup \alpha_1(t, w)| \leq \alpha(t)|y - z|, \quad \forall t \geq 0. \tag{5.15}$$

Здесь супремум берется по всем w из шара $\{w| \, |w - y| \leq |y - z|\}$.

Из оценки (5.15) сразу следуют утверждения теоремы 5.3.

Обсудим теперь условия теоремы 5.3. Теорема 5.3 устанавливает асимптотическую устойчивость решений с начальными данными из Ω, если соответствующие уравнения (5.13) имеют отрицательные ляпуновские экспоненты (или отрицательные характеристические показатели). Здесь требование равномерной по Ω отрицательности ляпуновских экспонент заменяет требование малости коэффициента неправильности в теореме 5.2. Таким образом, перроновские эффекты, описанные в §3, возможны только на границах устойчивого по первому приближению потока.

6. КРИТЕРИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x), \quad t \geq 0, \quad x \in R^n. \tag{6.1}$$

где $A(t)$ – непрерывная, ограниченная на $[0,\infty)$ $n\times n$-матрица. Будем предполагать, что вектор-функция $f(t,x)$ непрерывна и в некоторой окрестности $\Omega(0)$ точки $x=0$ выполнено неравенство

$$|f(t,x)|\le \kappa|x|^{\nu}, \forall t\ge 0, \quad \forall x\in\Omega(0). \tag{6.2}$$

Здесь числа κ и ν таковы,что $\kappa>0$, $\nu>1$.

Введем в рассмотрение нормальную фундаментальную матрицу

$$Z(t)=(z_1(t),\ldots,z_n(t)), \tag{6.3}$$

состоящую из линейно независимых решений $z_j(t)$ линейной системы первого приближения

$$\frac{dz}{dt}=A(t)z. \tag{6.4}$$

Для анализа неустойчивости одним из основных подходов является приведение линейной части системы (6.1) к треугольному виду. Здесь наиболее эффективным оказывается метод Перрона – Винограда [13,16] триангуляции линейной системы. Опишем здесь этот метод.

6.1 Метод триангуляции Перрона – Винограда.

Проведем процедуру ортогонализации Шмидта для решений $z_j(t)$, образующих матрицу (6.3).

$$\begin{array}{l} v_1(t)=z_1(t)\\ v_2(t)=z_2(t)-v_1(t)^*z_2(t)\frac{v_1(t)}{|v_1(t)|^2}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ v_n(t)=z_n(t)-v_1(t)^*z_n(t)\frac{v_1(t)}{|v_1(t)|^2}-\ldots-v_{n-1}(t)^*z_n(t)\frac{v_{n-1}(t)}{|v_{n-1}(t)|^2}\end{array} \tag{6.5}$$

Из соотношений (6.5) сразу следуют равенства

$$v_i(t)^*v_j(t)=0, \quad \forall j\ne i, \tag{6.6}$$

$$|v_j(t)|^2=v_j(t)^*z_j(t) \tag{6.7}$$

Из равенства (6.7) сразу вытекает следующее утверждение

Лемма 6.1. *Имеет место оценка*

$$|v_j(t)|\le|z_j(t)|, \quad \forall t\ge 0. \tag{6.8}$$

Насколько сильно могут уменьшиться вектор-функции $v_j(t)$ по сравнению с исходной системой векторов $z_j(t)$? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Лемма 6.2. *Если для некоторого числа C выполнено неравенство*

$$\prod_{j=1}^{n}|z_j(t)|\le C\exp\int\limits_0^t Tr\,A(s)\,ds \quad \forall\, t\ge 0, \tag{6.9}$$

то существует число $r>0$, для которого имеет место оценка

$$|z_j(t)|\le r|v_j(t)|, \quad \forall t\ge 0,\ \ j=1,\ldots,n. \tag{6.10}$$

Доказательство. Из формулы Остроградского–Лиувилля [17] и неравенства (6.9) имеем соотношения

$$\left|\det\left(\tfrac{z_1(t)}{|z_1(t)|},\dots,\tfrac{z_n(t)}{|z_n(t)|}\right)\right| =$$
$$= (|z_1(t)|,\dots,|z_n(t)|)^{-1}|\det(z_1(0),\dots,z_n(0))|\cdot$$
$$\cdot\exp\int\limits_0^t \mathrm{Tr}\ A(s)ds \geq C^{-1}|\det(z_1(0),\dots,z_n(0))|,\ \ \forall\, t\geq 0.$$

Отсюда следует, что для линейного подпространства $L(t)$, натянутого на вектора $z_1(t),\dots,z_m(t)$ $(m<n)$ найдется число $\varepsilon\in(0,1)$, такое, что выполнена оценка

$$\frac{|z_{m+1}(t)^* e(t)|}{|z_{m+1}(t)|}\leq 1-\varepsilon,\quad \forall t\geq 0, \tag{6.11}$$

для всех $e(t)\in L(t)$, удовлетворяющих равенству $|e(t)|=1$.

Соотношения (6.5) можно переписать следующим образом

$$\frac{v_j(t)}{|z_j(t)|}=\prod_{i=1}^{j-1}\left(I-\frac{v_i(t)v_i(t)^*}{|v_i(t)|^2}\right)\frac{z_j(t)}{|z_j(t)|}. \tag{6.12}$$

Предположим теперь, что утверждение леммы не имеет места. В этом случае существует последовательность $t_k\to+\infty$, для которой

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{v_j(t_k)}{|z_j(t_k)|}=0.$$

Но тогда из равенства (6.12) получим, что существует число $l<j$, для которого

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\frac{z_j(t_k)}{|z_j(t_k)|}-\frac{v_l(t_k)}{|v_l(t_k)|}\right]=0. \tag{6.13}$$

Поскольку $v_l(t)\in L(t)$ соотношения (6.11) и (6.13) противоречат друг другу. Полученное противоречие доказывет оценку (6.10).

Из приведенных здесь рассуждений легко видеть, что условие (6.9) является необходимым и достаточным условием существования числа $r>0$, для которого выполнена оценка (6.10).

Заметим, что условие (6.9) является необходимым и достаточным условием невырожденности при $t\to+\infty$ нормированной фундаментальной матрицы системы первого приближения (6.4):

$$\varliminf_{t\to+\infty}\left|\det\left(\frac{z_1(t)}{|z_1(t)|},\cdots,\frac{z_n(t)}{|z_n(t)|}\right)\right|>0.$$

Опишем теперь процедуру триангуляции Перрона – Винограда.

Введем в рассмотрение унитарную матрицу

$$U(t)=\left(\frac{v_1(t)}{|v_1(t)|},\cdots,\frac{v_n(t)}{|v_n(t)|}\right)$$

и сделаем следующую замену в системе (6.4): $z=U(t)w$.

Из унитарности матрицы $U(t)$ следует, что для столбцов $w_j(t)$ матрицы $W(t)=(w_1(t),\dots,w_n(t))=U(t)^*Z(t)$ выполнены соотношения $|w_j(t)|=|z_j(t)|$.

Из соотношений (6.7) и (6.12) вытекает, что матрица $W(t)$ имеет следующий треугольный вид

$$W(t)=\begin{pmatrix}|v_1(t)| & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & |v_n(t)|\end{pmatrix}. \tag{6.14}$$

Матрица $W(t)$ является фундаментальной матрицей для системы

$$\frac{dw}{dt} = B(t)w \tag{6.15}$$

где

$$B(t) = U(t)^{-1}A(t)U(t) - U(t)^{-1}\dot{U}(t). \tag{6.16}$$

Из того факта, что $W(t)$ — верхняя треугольная матрица, следует, что и $W(t)^{-1}$, $\dot{W}(t)$ — верхние треугольные матрицы. Поэтому матрица

$$B(t) = \dot{W}(t)W(t)^{-1}$$

является верхней треугольной матрицей вида

$$B(t) = \begin{pmatrix} (\ln|v_1(t)|)^\bullet & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & (\ln|v_n(t)|)^\bullet \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

Покажем, что если $A(t)$ ограничена при $t \geq 0$, то и матрицы $B(t)$, $U(t)$ и $\dot{U}(t)$ также ограничены при $t \geq 0$. Ограниченность матрицы $U(t)$ имеет место всегда и очевидна. Поэтому ограничена также матрица $U(t)^{-1}A(t)\; U(t) = U(t)^*A(t)U(t)$.

Из унитарности $U(t)$ следует тождество

$$\Big(U(t)^{-1}\dot{U}(t)\Big)^* = -U(t)^{-1}\dot{U}(t). \tag{6.18}$$

Отсюда, из соотношений (6.16) и (6.17) следует, что модуль элемента матрицы $U(t)^{-1}\dot{U}(t)$ совпадает с модулем некоторого элемента матрицы $U(t)^{-1}A(t)U(t)$. Таким образом, матрица $U(t)^{-1}\dot{U}(t)$ ограничена при $t \geq 0$. Отсюда и из равенства (6.16) следует ограниченность $B(t)$. Из ограниченности $B(t)$ и равенства $\dot{U}(t) = AU(t) - U(t)B(t)$ следует ограниченность $\dot{U}(t)$.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 6.1 (Перрона о триангуляции линейной системы). *Систему (6.4) с помощью унитарного преобразования $z = U(t)w$ можно привести к системе (6.15) с матрицей $B(t)$ вида (6.17).*

Если матрица $A(t)$ ограничена при $t \geq 0$, то и матрицы $B(t)$, $U(t)$, $\dot{U}(t)$ также ограничены при $t \geq 0$.

Докажем теперь еще одну полезную оценку для вектор–функции $v_n(t)$.

Лемма 6.3. *Имеет место оценка*

$$\frac{|v_n(t)|}{|v_n(\tau)|} \geq \exp\left[\int\limits_\tau^t \mathrm{Tr}\; A(s)\,ds\right] \prod_{j=1}^{n-1} \frac{|v_j(\tau)|}{|z_j(t)|}. \tag{6.19}$$

Доказательство. Из соотношения (6.14) следует равенство

$$\frac{|v_n(t)|}{|v_n(\tau)|} = \frac{\det W(t) \prod_{j=1}^{n-1}|v_j(\tau)|}{\det W(\tau) \prod_{j=1}^{n-1}|v_j(t)|}.$$

Из формулы Остроградского–Лиувилля, (6.15), (6.16) и (6.18) имеем равенства

$$\det W(t) = \det W(\tau) \exp \int\limits_\tau^t \mathrm{Tr}\; B(s)\,ds =$$

$$= \det W(\tau) \exp \int\limits_\tau^t \mathrm{Tr}\; A(s)\,ds.$$

Из этих равенств и оценки (6.8) сразу следует утверждение леммы.

6.2. Теоремы о неустойчивости.

Описанный выше метод триангуляции и лемма 6.3 позволяют сделать почти очевидным следующий результат.

Теорема 6.2. *Если выполнено неравенство*

$$\sup_k \varliminf_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{t}\left(\int\limits_0^t Tr\,A(s)ds-\sum_{j\neq k}\ln|z_j(t)|\right)\right]>0, \tag{6.20}$$

то решение $x(t)\equiv 0$ системы (6.1) неустойчиво по Красовскому.

Доказательство. Не умаляя общности можно считать, что в (6.20) супремум по k достигается при $k=n$.

Сделаем замену $x=U(t)y$ в системе (6.1):

$$\frac{dy}{dt}=B(t)y+g(t,y), \tag{6.21}$$

где $B(t)$ определяется по формуле (6.16) и $g(t,y)$ имеет вид

$$g(t,y)=U(t)^{-1}f(t,U(t)y).$$

Таким образом, последнее уравнение системы (6.21) примет вид

$$\dot y_n=(\ln|v_n(t)|)^{\bullet}y_n+g_n(t,y). \tag{6.22}$$

Здесь y_n и g_n — n-е компоненты векторов y и g.

Предположим теперь, что решение $x(t)\equiv 0$ устойчиво по Красовскому. Это означает существование для некоторой окрестности $x=0$ числа $R>0$ такого что выполнена оценка

$$|x(t,x_0)|\le R|x_0|,\quad \forall t\ge 0. \tag{6.23}$$

Здесь $x(0,x_0)=x_0$.

Из условий (6.2) и (6.23) следует оценка

$$|g(t,y(t))|\le \kappa R^{\nu}|y(0)|^{\nu}. \tag{6.24}$$

Из условия (6.20) по лемме 3 получим существование такого числа $\mu>0$, что при достаточно больших значениях t выполнена оценка

$$\ln|v_n(t)|\ge \mu t. \tag{6.25}$$

Заметим, что решение $y_n(t)$ уравнения (6.22) можно представить в форме

$$y_n(t)=\frac{|v_n(t)|}{|v_n(0)|}\left(y_n(0)+\int\limits_0^t\frac{|v_n(0)|}{|v_n(s)|}g(s,y(s))ds\right). \tag{6.26}$$

Из оценки (6.25) следует существование числа $\rho>0$ такого, что выполнено неравенство

$$\int\limits_0^t\frac{|v_n(0)|}{|v_n(s)|}ds\le\rho,\quad \forall t\ge 0. \tag{6.27}$$

Возьмем теперь начальные условия $x_0=U(0)y(0)$ так, чтобы $y_n(0)=|y(0)|=\delta$, где число δ удовлетворяет неравенству

$$\delta>\rho\kappa R^{\nu}\delta^{\nu}.$$

В этом случае из соотношений (6.24)–(6.27) получим при достаточно больших $t \geq 0$ оценку

$$y_n(t) \geq \exp(\mu t)(\delta - \rho\kappa R^{\nu}\delta^{\nu}).$$

Отсюда сразу следует соотношение

$$\varliminf_{t\to+\infty} y_n(t) = +\infty.$$

Последнее противоречит предположению об устойчивости по Красовскому тривиального решения системы (6.1). Теорема доказана.

Сделаем следующее замечание относительно метода доказательства теоремы 6.1.

Если бы мы предположили наличие устойчивости по Ляпунову и попытались вывести к этому противоречие, также как это было сделано в доказательстве по отношению к устойчивости по Красовскому, то в этом случае необходимо было бы доказать неравенство

$$y_n(0) + \int\limits_0^{+\infty} \frac{|v_n(0)|}{|v_n(s)|} g(s, y(s))\, ds \neq 0. \tag{6.28}$$

Это неравенство легко обеспечить, когда речь идет об устойчивости по Красовскому, и необходимость его доказательства является труднопреодолимым препятствием при рассмотрении устойчивости по Ляпунову.

Аналогичная схема сведения задачи к одному скалярному уравнению типа (6.22) была использована Н.Г.Четаевым [11,12] при получении критериев неустойчивости. И аналогичная трудность в доказательстве неравенства (6.28) имеется в схеме, предложенной Н.Г.Четаевым. Поэтому метод Н.Г.Четаева в настоящее время дает возможность получения критериев неустойчивости по Красовскому.

Методика получения критериев неустойчивости по Ляпунову требует дальнейшего развития. Такое развитие с некоторыми дополнительными ограничениями будет дано в теореме 6.2.

Условие (6.20) теоремы 6.1 выполнено, если имеет место неравенство

$$\Lambda - \Gamma > 0. \tag{6.29}$$

Здесь Λ — максимальный характеристический показатель, Γ — коэффициент неправильности. Напомним, что

$$\Gamma = \Sigma - \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \operatorname{Tr} A(s)\, ds\,.$$

Условие неустойчивости по Красовскому (6.29) было получено Н.Г.Четаевым [11,12] при более сильном требовании аналитичности функции $f(t, x)$.

Заметим также, что для системы (3.6) $\Gamma = \Lambda + 2a + 1$. Поэтому условие (6.29) для этой системы не выполняется.

Напомним здесь условие устойчивости (5.5) теоремы 5.2, которое согласно теореме 2.3 может быть записано следующим образом

$$(\nu - 1)\Lambda + \Gamma < 0.$$

Поскольку теоремы 5.1 и 5.2 являются также критериями устойчивости по Красовскому, то можно сформулировать следующий результат:

Теорема 6.3. *Если*

$$\Lambda < \frac{-\Gamma}{(\nu - 1)},$$

то решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво по Красовскому, если

$$\Lambda > \Gamma,$$

то решение $x(t) \equiv 0$ неустойчиво по Красовскому.

Для правильных систем, когда $\Gamma = 0$, теорема 6.3 полностью решает задачу об устойчивости по Красовскому в некритическом случае ($\Lambda \neq 0$).

Теорема 6.4 *Будем предполагать, что для некоторых чисел $C > 0$, $\beta > 0$, $\alpha_j < \beta$ $(j = 1, \ldots, n-1)$ выполнены следующие условия:*

1) при $n > 2$

$$\prod_{j=1}^{n} |z_j(t)| \leq C \exp \int_0^t Tr\ A(s)\, ds, \quad \forall t \geq 0 \tag{6.30}$$

2)

$$\begin{gathered} |z_j(t)| \leq C \exp(\alpha_j (t-\tau)) |z_j(\tau)|, \\ \forall\, t \geq \tau \geq 0, \quad \forall j = 1, \ldots, n-1 \end{gathered} \tag{6.31}$$

3)

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{(t-\tau)} \int_\tau^t Tr\ A(s)\, ds > \beta + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j, \\ \forall\, t \geq \tau \geq 0. \end{gathered} \tag{6.32}$$

Тогда нулевое решение системы (6.1) неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Напомним что фундаментальная матрица $W(t)$ системы (6.15) имеет вид (6.14). Вектор–столбцы этой матрицы $w_j(t)$ имеют вид

$$w_1(t) = \begin{pmatrix} w_{11}(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, w_{n-1}(t) = \begin{pmatrix} w_{n-1,1}(t) \\ \vdots \\ w_{n-1,n-1}(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица

$$\widetilde{W}(t) = \begin{pmatrix} w_{11}(t) & \cdots & w_{n-1,1}(t) \\ 0 & \cdots & \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & w_{n-1,n-1}(t) \end{pmatrix}$$

является фундаментальной матрицей системы

$$\dot{\widetilde{w}} = \widetilde{B}(t)\widetilde{w}, \ \ \widetilde{w} \in R^{n-1}$$

с матрицей

$$\widetilde{B}(t) = \begin{pmatrix} (\ln |v_1(t)|)^\bullet & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & (\ln |v_{n-1}(t)|)^\bullet \end{pmatrix}.$$

Из условия (6.30) и тождеств $|w_j(t)| \equiv |z_j(t)|$, которые вытекают из унитарности матрицы $U(t)$, следуют оценки

$$\begin{gathered} |\widetilde{w}_j(t)| \leq C \exp(\alpha_j (t-\tau)) |\widetilde{w}_j(\tau)|, \\ \forall t \geq \tau \geq 0, \quad \forall\, j = 1, \ldots, n-1. \end{gathered} \tag{6.33}$$

Кроме того, из условия (6.30) по лемме 6.2 следуют оценки (6.10), а из условий (6.31) и (6.32) по лемме 6.3 вытекает оценка

$$\frac{|v_n(t)|}{|v_n(\tau)|} \geq \exp(\beta(t-\tau))C^{1-n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{|v_j(\tau)|}{|z_j(\tau)|} \tag{6.34}$$

$$\forall\, t \geq \tau \geq 0.$$

Из (6.10) и (6.34) получим неравенство

$$\frac{|v_n(t)|}{|v_n(\tau)|} \geq \exp(\beta(t-\tau))(Cr)^{1-n}, \quad \forall t \geq \tau \geq 0. \tag{6.35}$$

Поскольку при $n = 2$ $v_1(t) = z_1(t)$ из (6.34) получим оценку

$$\frac{|v_2(t)|}{|v_2(\tau)|} \geq \exp(\beta(t-\tau))C^{-1}, \quad \forall t \geq \tau \geq 0,$$

без предположения (6.30).

Сделаем теперь для системы (6.1) следующую замену

$$x = e^{dt}U(t)y. \tag{6.36}$$

Здесь число $d > 0$ выберем таким, чтобы

$$\alpha < d < \beta,$$

где $\alpha = \max \alpha_j,\ j = 1, \ldots, n-1$. В результате замены получим систему

$$\frac{dy}{dt} = (B(t) - dI)y + g(t, y), \tag{6.37}$$

где

$$g(t, y) = e^{-dt}U(t)^{-1}f(t, e^{dt}U(t)y).$$

Из условия (6.2) следует, что для любого числа $\rho > 0$ существует окрестность $\Phi(0)$ точки $y = 0$ такая, что

$$|g(t, y)| \leq \rho|y|, \quad \forall t \geq 0,\ \forall y \in \Phi(0). \tag{6.38}$$

Заметим, что для системы

$$\dot{\widetilde{y}} = (\widetilde{B}(t) - dI)\widetilde{y}, \quad \widetilde{y} \in R^{n-1} \tag{6.39}$$

в силу соотношений (6.33) имеем оценку

$$|\widetilde{y}(t)| \leq C\exp[(\alpha - d)(t-\tau)]|\widetilde{y}(\tau)|,\ \forall t \geq \tau.$$

Поэтому по теореме 4.1 существует непрерывно дифференцируемая, ограниченная на $[0, +\infty)$ матрица $H(t)$ и положительные числа ρ_1 и ρ_2, для которых

$$\begin{gathered} \widetilde{y}^*(\dot{H}(t) + 2H(\widetilde{B}(t) - dI))\widetilde{y} \leq -\rho_1|\widetilde{y}|^2, \\ \forall \widetilde{y} \in R^{n-1}, \quad \forall t \geq 0 \end{gathered} \tag{6.40}$$

$$\widetilde{y}^*H(t)\widetilde{y} \geq \rho_2|\widetilde{y}|^2, \quad \forall \widetilde{y} \in R^{n-1},\ \forall t \geq 0. \tag{6.41}$$

Для скалярного уравнения

$$\dot{y}_n = [(\ln|v_n(t)|)^{\bullet} - d]y_n, \quad y_n \in R^1$$

из соотношения (6.35) имеем оценку

$$|y_n(t)| \geq (Cr)^{1-n}\exp[(\beta - d)(t-\tau)]|y_n(\tau)|,\ \forall t \geq \tau \geq 0.$$

При $n = 2$ аналогичная оценка имеет вид

$$|y_2(t)| \geq C^{-1}\exp[(\beta - d)(t-\tau)]|y_2(\tau)|,\ \forall t \geq \tau \geq 0.$$

Поэтому в силу следствия 4.1 существует непрерывно дифференцируемая, ограниченная на $[0, +\infty)$ функция $h(t)$ и положительные числа ρ_3 и ρ_4, для которых

$$\begin{gathered} \dot{h}(t) + 2h(t)[(\ln|v_n(t)|)^\bullet - d] \le -\rho_3 \\ h(t) \le -\rho_4, \quad \forall t \ge 0. \end{gathered} \tag{6.42}$$

Покажем теперь, что функция

$$V(t, y) = \widetilde{y}^* H(t) \widetilde{y} + \omega h(t) y_n^2$$

при достаточно большом ω будет функцией Ляпунова, удовлетворяющей для системы (6.37) всем условиям классической теоремы Ляпунова о неустойчивости.

В самом деле, систему (6.37) можно записать в виде

$$\begin{gathered} \dot{\widetilde{y}} = (\widetilde{B}(t) - dI)\widetilde{y} + q(t) y_n + \widetilde{g}(t, \widetilde{y}, y_n) \\ \dot{y}_n = ((\ln|v_n(t)|)^\bullet - d) y_n + g_n(t, \widetilde{y}, y_n), \end{gathered} \tag{6.43}$$

где $q(t)$ — некоторая ограниченная на $[0, +\infty)$ вектор–функция, $\widetilde{g}$ и g_n таковы, что

$$g(t, y) = \begin{pmatrix} \widetilde{g}(t, y) \\ g_n(t, y) \end{pmatrix}.$$

Поэтому из оценок (6.40), (6.42) следуют неравенства

$$\begin{aligned} &\dot{V}(t, y) \le -\rho_1 |\widetilde{y}|^2 - \omega \rho_3 y_n^2 + \\ &+ 2\widetilde{y}^* H(t) q(t) y_n + 2\widetilde{y}^* H(t) \widetilde{g}(t, \widetilde{y}, y_n) + \\ &+ 2\omega h(t) y_n g_n(t, \widetilde{y}, y_n) \le \\ &\le -\rho_1 |\widetilde{y}|^2 - \omega \rho_3 y_n^2 + 2[|y_n||\widetilde{y}| \sup_t |H(t)||q(t)| + \\ &+ |\widetilde{y}| \sup_t |H(t)| \rho(|\widetilde{y}| + |y_n|) + \\ &+ \omega |y_n| \sup_t |h(t)| \rho(|\widetilde{y}| + |y_n|)]. \end{aligned}$$

Из этих неравенств и ограниченности при $t \ge 0$ матрицы-функции $H(t)$, вектор-функции $q(t)$ и функции $h(t)$ следует, что при достаточно большом ω и достаточно малом ρ найдется положительное число θ, для которого

$$\dot{V}(t, y) \le -\theta |y|^2. \tag{6.44}$$

Из ограниченности $H(t)$, $h(t)$ следует существование числа a, для которого

$$|y|^2 \ge -a V(t, y), \quad \forall t \ge 0, \quad \forall y \in R^n.$$

Поэтому отсюда и из (6.44) вытекает неравенство

$$\dot{V}(t, y) \le a\theta V(t, y), \quad \forall t \ge 0, \quad \forall y \in R^n. \tag{6.45}$$

Возьмем теперь начальные условия $y(0)$ так, чтобы $V(0, y(0)) < 0$. Тогда из (6.44) следует, что

$$V(t, y(t)) < 0, \quad \forall\, t \ge 0,$$

и в силу (6.45) имеем оценку

$$-V(t, y(t)) \ge e^{a\theta t}(-V(0, y(0))).$$

Отсюда, из (6.41) и (6.42) вытекает неравенство

$$-\omega h(t) y_n(t)^2 \ge e^{a\theta t}(-V(0, y(0))), \quad \forall t \ge 0.$$

Таким образом,

$$y_n(t)^2 \ge \frac{e^{a\theta t}}{\omega \sup\limits_t (-h(t))} (-V(0, y(0))). \tag{6.46}$$

Из этого неравенства следует неустойчивость по Ляпунову решения $y(t) \equiv 0$. Более того, из оценки (6.46) следует, что в окрестности $y = 0$ возрастание решения $y(t)$ с начальными данными $V(0, y(0)) < 0$ имеет экспоненциальный характер.

Поскольку $d > 0$ и $U(t)$ – унитарная матрица, нулевое решение системы (6.1) также неустойчиво по Ляпунову.

Естественным образом возникает задача ослабления условий неустойчивости, полученных в теоремах 6.1 и 6.2. Однако эффекты Перрона ставят границы таких ослаблений.

Продолжим теперь рассмотрение ансамбля решений $x(t, t_0, x_0)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = F(x,t), \quad t \geq 0, \quad x \in R^n, \tag{6.47}$$

где $F(x,t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, начатое в конце параграфа 5. Здесь $x_0 \in \Omega$, где Ω – некоторое ограниченное, открытое множество в R^n, t_0 – некоторое фиксированное неотрицательное число.

Будем предполагать, что для фундаментальной матрицы $X(t, t_0, x_0)$ системы

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=x(t,t_0,x_0)} z \tag{6.48}$$

с начальным условием $X(t_0, t_0, x_0) = I$ и некоторой вектор-функции $\xi(t)$ выполнены следующие соотношения

$$|\xi(t)| = 1, \quad \forall t \geq 0, \quad \max_j \inf_\Omega |X_j(t, t_0, x_0)\xi(t)| \geq \alpha(t). \tag{6.49}$$

Здесь $X_j(t, t_0, x_0)$ – j-ая строка матрицы $X(t, t_0, x_0)$, $\alpha(t)$ – некоторая функция.

Теорема 6.5 [22]. *Пусть для функции $\alpha(t)$ выполнено соотношение*

$$\varliminf_{t \to +\infty} \alpha(t) = +\infty. \tag{6.50}$$

Тогда любое решение $x(t, t_0, x_0)$ с $x_0 \in \Omega$ неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Зафиксировав некоторую пару $x_0 \in \Omega$ и $t \geq t_0$, выберем в любой δ – окрестности точки x_0 вектор y_0 так, чтобы

$$x_0 - y_0 = \delta \xi(t).$$

Будем рассматривать число δ настолько малым, что шар радиуса δ с центром в x_0 целиком расположен в Ω.

Хорошо известно [28], что для любых фиксированных чисел t, j и векторов x_0, y_0 существует вектор $w_j \in R^n$, для которого

$$|x_0 - w_j| \leq |x_0 - y_0|,$$
$$x_j(t, t_0, x_0) - x_j(t, t_0, y_0) = X_j(t, t_0, w_j)(x_0 - y_0).$$

Здесь $x_j(t, t_0, x_0)$ – j-ая компонента вектор-функции $x(t, t_0, x_0)$.

Используя последнее соотношение, получим оценку

$$|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, y_0)| = \sqrt{\sum_j |X_j(t, t_0, w_j)(x_0 - y_0)|^2} \geq$$
$$\geq \delta \max\{|X_1(t, t_0, w_1)\xi(t)|, \ldots, |X_n(t, t_0, w_n)\xi(t)|\} \geq$$
$$\geq \delta \max_j \inf |X_j(t, t_0, w)\xi(t)| \geq \alpha(t).$$

Здесь инфимум берется на множестве $\{w \mid |w - x_0| \leq |x_0 - y_0|\}$.

Из последней оценки и условия (6.50) теоремы следует, что для любых положительных чисел ε и δ существуют вектор y_0 и число $t \geq t_0$, при которых

$$|x_0 - y_0| \leq \delta, \quad |x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, y_0)| > \varepsilon.$$

Последнее и означает, что решение $x(t, t_0, x_0)$ неустойчиво по Ляпунову.

Обсудим теперь условия теоремы 6.5.

Условия теоремы 6.5 – это по существу требование положительности хотя бы одной из ляпуновских экспонент линеаризаций потока решений с начальными данными из Ω с небольшим добавлением: "неустойчивые направления $\xi(t)$"(или – неустойчивые многообразия) этих решений непрерывно зависят от начальных данных x_0. В самом деле, если это свойство имеет место, то рассматривая, если это необходимо, область Ω как объединение областей Ω_i сколь угодно малого диаметра, на которых выполнены условия (6.49) и (6.50), получим неустойчивость по Ляпунову всего потока решений с начальными данными из Ω.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несмотря на усилия в течение более ста лет многих известных исследователей, проблема обоснования первого приближения еще далека от полного своего разрешения.

Существенное продвижение имеется для правильных (регулярных) линеаризаций индивидуальных траекторий и для ансамблей траекторий, сохраняющих отрицательность характеристических показателей систем первого приближения при малых вариациях начальных данных.

Эффекты Перрона показывают сложности, возникающие для неправильных линеаризаций. Здесь возможна инверсия знаков характеристических показателей решений исходной системы и системы первого приближения при одних и тех же начальных условиях.

Однако потребности развития теории хаотических колебаний являются новым мощным стимулом исследований по проблеме обоснования нестационарных линеаризаций.

Литература

1. *А.А. Андронов, И.Н. Вознесенский (редакторы)*
   Классики науки: *Максвелл Д.К., Вышнеградский И.А. и СтодолаА.*, Теория автоматического регулирования (Линеаризованные задачи). М.: Изд-во АН СССР, 1949. 431 с.
2. *Вышнеградский И.А.*
   О регуляторах прямого действия. Изв. Санкт-Петербургского технологического института, 1877, с.21–62.
3. *Пуанкаре А.*
   О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.,Л., ГИТТЛ, 1947. 392 с.
4. *Ляпунов А.М.*
   Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892, 250 с.
5. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.*
   Стохастические и хаотические колебания. М., Наука, 1987, 423 с.
6. *Moon F.*
   Chaotic Vibrations. John Wiley. N. Y., 1987.
   Мун Ф.
   Хаотические колебания. М., Мир, 1990, 312 с.
7. *Landa P.S.*
   Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems. Kluwer. Dordrecht, 536 p.
8. *Berge P., Pomeau Y., Vidal C.* L'ordre dans le chaos. Paris, Hermann, 1984.
   Берже П., Помо И., Видаль К.
   Порядок в хаосе. М., Мир, 1991, 366 с.
9. *Ryabov V.B.*
   Using Lyapunov exponents to predict the onset of chaos in nonlinear oscillators. Physical Review E, 66, 2002, p. 16214–16231.
10. *Малкин И.Г.*
    Теория устойчивости движения. М., Наука, 1966, 525 с.
11. *Четаев Н.Г.*
    Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955, 207 с.
12. *Четаев Н.Г.*
    О некоторых вопросах об устойчивости и неустойчивости для неправильных систем. ПММ, 1948, т.12, №6, с. 639–642.
13. *Демидович Б.П.*
    Лекции по математической теории устойчивости. М., Наука,1967,472 с.
14. *Cesari L.*
    Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. Berlin: Springer Verlag, 1959.
    Чезари Л.
    Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Мир, 1964, 477 с.
15. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.*
    Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М., Наука, 1966, 576 с.
16. *Lefschetz S.*
    Differential Equations: Geometric Theory.N.Y.;L.; Interscience, 1957.

Лефшец С.
Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит, 1961, 388 с.

17. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.*
Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., Наука, 1970, 534 с.
18. *Hartmann F.* Ordinary Differential Equations. N.Y.London, Sydney, John Wiley, 1964.
Хартман Ф.
Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука,1970,720с.
19. *Румянцев В.В.*
Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения. В кн.: Механика в СССР за 50 лет. I. М., Наука, 1968, с.7–66.
20. *Леонов Г.А.*
Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения. Успехи механики. 2002, т.1, N 3, с. 3–42.
21. *Temam R.*
Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. N.Y. Springer-Verlag, 1988, 500 p.
22. *Леонов Г.А.*
Об устойчивости по первому приближению. ПММ, 1998, т.69, вып. 4, с. 548–555.
23. *Perron O.*
Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen. Mathematische Zeitschrift, 1930, bd.32, N 5, s.702–728.
24. *Леонов Г.А.*
Об одной модификации контрпримера Перрона. Дифференциальные уравнения, 2003, т.39, N 11.
25. *Филиппов А.Ф.*
Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., Наука, 1985, 224 с.
26. *Персидский К.П.*
О характеристических числах дифференциальных уравнений. Изв.АН Казахской ССР, 1947, сер.мат.и мех., вып.1.
27. *Массера Х.Л.*
К теории устойчивости. Сб.переводов "Математика", ИЛ, **1:4** (1957), с.81-101.
28. *Зорич В.А.*
Математический анализ. Ч. I, II. М., Наука, 1981, 543 с.; 1984, 640 с.