

Г.А.Леонов

СЕМЕЙСТВА ТРАНСВЕРСАЛЬНЫХ КРИВЫХ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**Введение ¹**

А.Пуанкаре широко использовал трансверсальные кривые и поверхности для качественного исследования дифференциальных уравнений. Впоследствии такие поверхности были названы сечениями Пуанкаре. А.М.Ляпуновым было замечено, что линии уровня некоторых функций являются трансверсальными по отношению к векторным полям дифференциальных уравнений. Функции, индуцирующие таким образом семейства трансверсальных поверхностей, впоследствии были названы функциями Ляпунова, а методы построения таких функций – прямым (или – вторым) методом Ляпунова. Этим методом было решено большое число задач в теории устойчивости и в качественной теории дифференциальных уравнений. Однако для двумерных систем дифференциальных уравнений часто оказываются более эффективными другие методы построения семейств трансверсальных кривых.

В настоящем обзоре мы опишем два эффективных метода построения семейств трансверсальных кривых для двумерных систем: метод систем сравнения, когда трансверсальными кривыми являются траектории некоторых, более простых, чем исходная система, систем сравнения, и метод сшивания трансверсальной кривой из линий уровня нескольких отличных друг от друга функций ляпуновского типа. Различные элементы этих методов содержатся во многих работах, однако только в последнее время стало ясно, что с их помощью можно получить значительное продвижение в решении многих прикладных задач. Здесь мы опишем некоторые из них.

1. Проблема Айзермана. Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости двумерных систем.

В 1949 году М.А.Айзерман сформулировал следующую проблему [1].

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B\varphi(Cx), \quad (1)$$

где A – постоянная $n \times n$ -матрица, B и C – постоянные n -мерные вектор-столбец и вектор-строка, $\varphi(\sigma)$ – непрерывная функция.

Наряду с системой (1) рассмотрим линейные системы

$$\frac{dy}{dt} = (A + kBC)y \quad (2)$$

и предположим, что при

$$\alpha < k < \beta$$

эти системы являются устойчивыми в целом. Будет ли нулевое решение системы (1) устойчиво в целом, если выполнено условие

$$\alpha < \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \beta$$

¹© Г. А. Леонов, 2006

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 04-01-00250А и Программы Dutch Russian research cooperation NWO

для всех $\sigma \neq 0$?

Напомним, что нулевое решение системы (1) устойчиво в целом, если оно устойчиво по Ляпунову и любое решение системы (1) стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Говорят также, что система (1) абсолютно устойчива в классе функций $\varphi(\sigma)$, если ее нулевое решение устойчиво в целом для любой $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей сформулированным выше условиям.

М.А.Айзерман высказал гипотезу, что поставленный выше вопрос всегда имеет положительное решение [1].

Рассмотрим эту гипотезу для случая $n = 2$ [2–4], $CB \neq 0$. Здесь систему (1) можно линейным неособым преобразованием привести к специальному виду

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1) + \beta x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \gamma x_2,\end{aligned}\tag{3}$$

где $f(x_1) = \mu\varphi(x_1) + \alpha x_1$, $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ – некоторые числа.

Для того, чтобы доказать существование такого неособого линейного преобразования рассмотрим передаточные функции [5, 6] соответственно систем (1) и (3):

$$W_1(p) = C(A - pI)^{-1}B = \frac{a_1p + a_2}{p^2 + \alpha_1p + \alpha_2p},$$

$$W_2(p) = \frac{-\mu(p - \gamma)}{p^2 - (\alpha + \gamma)p + \alpha\gamma - \beta}.$$

Здесь a_j и α_j – некоторые числа, $a_1 \neq 0$. Легко видеть, что $W_1(p) = W_2(p)$ при

$$\mu = -a_1, \quad \gamma = -a_2/a_1, \quad \alpha = -\alpha_1 + a_2/a_1,$$

$$\beta = -\alpha_2 + (\alpha_1 - a_2/a_1)a_2/a_1.$$

Хорошо известно, что в этом случае (т.е., когда $W_1(p) = W_2(p)$) искомое линейное преобразование существует [5, 6].

Для системы (3) проблема Айзермана может быть решена с помощью построения функции Ляпунова [2–4]

$$V(x_1, x_2) = (\gamma x_1 - \beta x_2)^2 - \beta x_1^2 + 2\gamma \int_0^{x_1} f(s) ds.\tag{4}$$

Легко видеть, что

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2 \left(\frac{f(x_1)}{x_1} + \gamma \right) \left(\beta - \frac{f(x_1)}{x_1} \gamma \right) x_1^2.\tag{5}$$

Из соотношений (4), (5) по теореме Ла-Салля [5, 7] следует устойчивость в целом нулевого решения системы (3), если

$$\gamma \frac{f(\sigma)}{\sigma} - \beta > 0, \quad \forall \sigma \neq 0,\tag{6}$$

$$\frac{f(\sigma)}{\sigma} + \gamma < 0, \quad \forall \sigma \neq 0,\tag{7}$$

$$\int_0^\sigma [\gamma f(s) - \beta s] ds \rightarrow +\infty\tag{8}$$

при $|\sigma| \rightarrow \infty$.

Необходимые и достаточные условия устойчивости в целом нулевого решения линейной системы (3) при $f(\sigma) = k\sigma$ имеют вид

$$\gamma k - \beta > 0 \quad (9)$$

$$k + \gamma < 0. \quad (10)$$

Сравнивая условия (6), (7) и (9), (10), заключаем, что гипотеза Айзермана здесь справедлива при дополнительном условии (8). В приложениях это условие, как правило, выполнено. Н.Н.Красовский показал [8], что невыполнение условия (8) может привести к потере свойства устойчивости в целом.

Аналогичным образом рассматривается случай $CB = 0$, $n = 2$.

Таким образом, для системы (1) необходимые и достаточные условия устойчивости в целом получены в рамках прямого метода Ляпунова. Различные обобщения такого подхода для $n > 2$ имеются в [5,6,9–11].

Рассмотрим теперь систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B\varphi(t, Cx), \quad (11)$$

где A – постоянная $n \times n$ -матрица, B и C – постоянные n -мерные вектор-столбец и вектор-строка, $\varphi(t, \sigma)$ – кусочно-непрерывная и липшицева по второму аргументу функция.

Также как и для уравнения (1) для системы (11) можно поставить вопрос о необходимых и достаточных условиях устойчивости в целом. Прямой метод Ляпунова и полученный в его рамках широко известный круговой критерий дают только достаточные условия устойчивости в целом [9–11]. Приведем здесь для $n = 2$ необходимые и достаточные условия устойчивости в целом, полученные другим методом – методом построения систем сравнения.

Будем предполагать здесь, что выполнено условие

$$0 \leq \frac{\varphi(t, \sigma)}{\sigma} \leq k, \quad \forall t \in R^1, \quad \forall \sigma \neq 0, \quad (12)$$

где k – некоторое положительное число.

Введем в рассмотрение передаточную функцию системы (11)

$$W(p) = C(A - pI)^{-1}B = \frac{ap + b}{p^2 + \alpha p + \beta}$$

Не умаляя общности здесь можно принять, что $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a \geq 0$, $\beta + bk > 0$, $|a| + |b| > 0$. Предположим также, что

$$b^2 - \alpha ab + a^2\beta \neq 0.$$

Введем в рассмотрение множества

$$\Omega_1 = \{x_2 \geq 0, ax_2 + bx_1 \geq 0\} \subset \{x_1, x_2\},$$

$$\Omega_2 = \{x_2 \geq 0, ax_2 + bx_1 \leq 0\} \subset \{x_1, x_2\}$$

и линейные системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\lambda x_2 - \mu x_1, \end{aligned} \quad (13)$$

которые будут играть роль систем сравнения.

На множестве Ω_1 будем рассматривать систему (13) с $\lambda = \alpha$, $\mu = \beta$ на Ω_2 -систему (13) с $\lambda = \alpha + ak$, $\mu = \beta + bk$.

Рассмотрим решения $x_1(t), x_2(t)$ и $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t)$ этих систем с начальными данными

$$x_1(0) = -1, \tilde{x}_1(0) = 1, x_2(0) = \tilde{x}_2(0) = 0.$$

Теорема 1. *Если*

$$ax_2(t) + bx_1(t) \neq 0, \quad \forall t > 0$$

или

$$a\tilde{x}_2(t) + b\tilde{x}_1(t) \neq 0, \quad \forall t < 0,$$

то нулевое решение системы (11) устойчиво в целом.

Рассмотрим теперь случай существования чисел $T > 0$ и $\tau < 0$, для которых выполнены соотношения

$$\begin{aligned} ax_2(T) + bx_1(T) &= 0, \\ ax_2(t) + bx_1(t) &\neq 0, \quad \forall t \in (0, T), \\ a\tilde{x}_2(\tau) + b\tilde{x}_1(\tau) &= 0, \\ a\tilde{x}_2(t) + b\tilde{x}_1(t) &\neq 0, \quad \forall t \in (\tau, 0). \end{aligned}$$

(Рис.1).

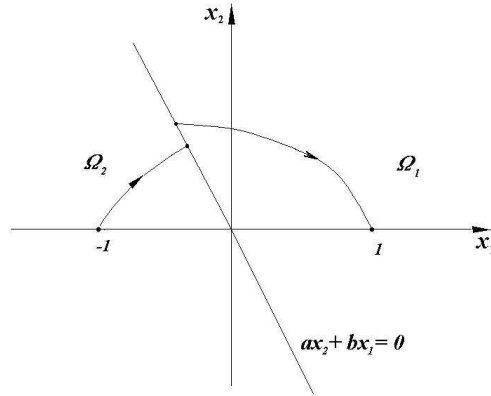


Рис. 1. Случай существования чисел T и τ .

Теорема 2. *Если $x_2(T) < \tilde{x}_2(\tau)$, то нулевое решение системы (11) устойчиво в целом. Если $x_2(T) > \tilde{x}_2(\tau)$, то существует функция $u(t) \in [0, k]$, $\forall t \in \mathbb{R}^1$, такая, что нулевое решение системы (11) с $\varphi(t, \sigma) = u(t)\sigma$ не является устойчивым в целом.*

Заметим, что решения линейных систем сравнения легко записать в элементарных функциях. Поэтому величины $\tau, T, x_2(\tau), x_2(T)$ также легко вычислить и можно записать условия теорем 1 и 2 в терминах элементарных функций. Это сделано в работе [12]. Здесь мы приведем пример таких вычислений.

Пусть $b > 0, \lambda_1 < \lambda_2 < 0$ – вещественные корни полинома $p^2 + \alpha p + \beta = 0$. Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2(\tau) &= \frac{\beta}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[\left(\frac{a\beta + b\lambda_1}{a\beta + b\lambda_2} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{a\beta + b\lambda_1}{a\beta + b\lambda_2} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right]. \end{aligned}$$

Поэтому из теорем 1 и 2 следует, что имеет место устойчивость в целом при любом $k > 0$, если

$$\lambda_2 - \lambda_1 < \frac{a\beta}{b} \left[\left(\frac{a\beta + b\lambda_1}{a\beta + b\lambda_2} \right) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \left(\frac{a\beta + b\lambda_1}{a\beta + b\lambda_2} \right) \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right].$$

Если выполнено противоположное неравенство, то существует кусочно-непрерывная функция $u(t) \geq 0, \forall t \in R^1$, такая, что нулевое решение системы (11) с $\varphi(t, \sigma) = u(t)\sigma$ не является устойчивым в целом.

В случае $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$ отсюда следует, что устойчивость в целом имеет место при любом $k > 0$, если

$$a(4 + 2\sqrt{2}) > b.$$

Если

$$a(4 + 2\sqrt{2}) < b,$$

то для некоторой $\varphi(t, \sigma) = u(t)\sigma, u(t) \geq 0, \forall t \in R^1$, нулевое решение системы (11) не является устойчивым в целом.

Использование кругового критерия [9–11] дает следующее условие устойчивости в целом при любом $k > 0$:

$$3a > b.$$

Для доказательства теорем 1 и 2 разовьем здесь некоторую специальную форму метода двумерных систем сравнения. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \beta x_1 - \varphi(t, ax_2 + bx_1) \end{aligned} \quad (14)$$

Очевидно, что передаточные функции систем (11) и (14) совпадают. Поэтому существует неособое линейное преобразование, которое преобразует систему (11) к виду (14).

Рассмотрим теперь систему (13) с $\lambda = \alpha - \varepsilon, \mu = \beta$ на Ω_1 и с $\lambda = \alpha + ak - \varepsilon, \mu = \beta + bk$ на Ω_2 . Здесь ε – некоторое малое положительное число. Заметим, что в силу непрерывной зависимости решений линейных систем от параметра ε при достаточно малых ε сохраняются условия теорем 1 и 2.

Хорошо известно, что система (13) эквивалентна уравнению

$$F \frac{dF}{dx_1} = -\lambda F - \mu x_1. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь решение $x_1(t), x_2(t)$ системы (14), удовлетворяющее условию

$$x_2(t) = F(x_1(t)) > 0$$

для некоторого $t > 0$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_2(t)}{\dot{x}_1(t)} &= \frac{-\alpha F(x_1(t)) - \beta x_1(t) - \varphi(t, aF(x_1(t)) + bx_1(t))}{F(x_1(t))} < \\ &< \frac{-\lambda F(x_1(t)) - \mu x_1(t)}{F(x_1(t))} = \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_1(t)}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали условие (12). Следовательно, кривая $x_2 = F(x_1)$ трансверсальна по отношению к векторному полю системы (14). При этом решение $x_1(t), x_2(t)$ пересекает эту кривую "сверху вниз" (рис. 2) Это свойство кривой является основой для доказательства теорем 1 и 2.

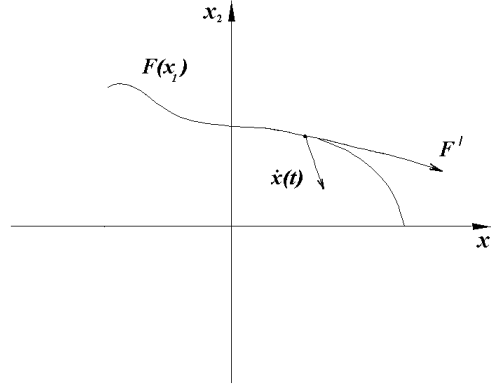


Рис. 2. Трансверсальность кривой $x_2 = F(x_1)$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим здесь следующее семейство замкнутых непрерывных кривых:

$$x_2 = F(x_1, c) \text{ на } [-c, c], F(c, c) = 0,$$

$F(x_1, c)$ – решение уравнения (15);

$$x_2 = F(x_1, -c) \text{ на } [-c, c], F(-c, -c) = 0,$$

$F(x_1, -c)$ – решение уравнения (15);

$$\{x_1 = c, x_2 \in [F(c, -c), 0]\},$$

$$\{x_1 = -c, x_2 \in [0, F(-c, c)]\}.$$

(Рис. 3)

Такое семейство трансверсальных при $x_2 \neq 0$, замкнутых, непрерывных кривых заполняет все множество $R^2 \setminus \{0\}$. Отсюда следует устойчивость в целом системы (14). \square

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим здесь случай $b > 0$ и следующее семейство замкнутых, трансверсальных при $x_2 \neq 0$, непрерывных кривых: (Рис. 4)

$$x_2 = F(x_1, c) \text{ на } [c\tilde{x}_1(\tau), c], F(c, c) = 0,$$

$F(x_1, c)$ – решение уравнения (15);

$$x_2 = F(x_1, -c) \text{ на } [-c, cx_1(T)], F(-c, -c) = 0,$$

$F(x_1, -c)$ – решение уравнения (15);

$$x_2 = -F(-x_1, -c) \text{ на } [-cx_1(T), c],$$

$$x_2 = -F(-x_1, c) \text{ на } [-c, -c\tilde{x}_1(\tau)],$$

$$\{ax_2 + bx_1 = 0, x_1 \in [c\tilde{x}_1(\tau), cx_1(T)]\},$$

$$\{ax_2 + bx_1 = 0, x_1 \in [-cx_1(T), -c\tilde{x}_1(\tau)]\}.$$

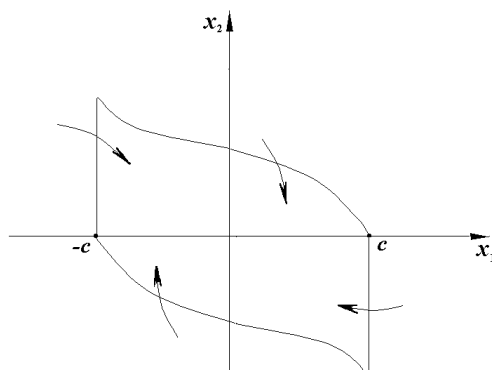


Рис. 3.

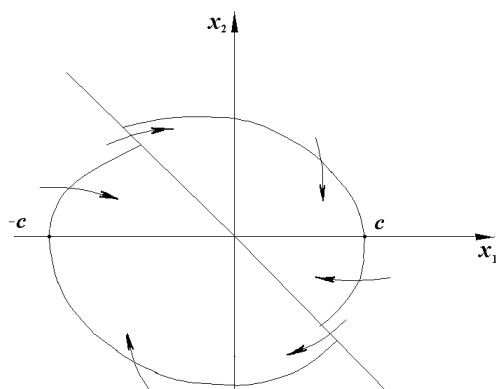


Рис. 4.

Такое семейство трансверсальных при $x_2 \neq 0$, замкнутых, непрерывных кривых, заполняющих все множество $R^2 \setminus \{0\}$ доказывает устойчивость в целом системы (14).

Случай $b \leq 0$ рассматривается аналогично.

Рассмотрим теперь случай, когда $x_2(T) > \tilde{x}_2(\tau)$. Здесь мы построим специальную функцию $\varphi(t, \sigma) = u(t)\sigma$ следующим образом

$$u(t) = \begin{cases} k & \text{при } t \in (\tau_{2k}, \tau_{2k+1}) \\ 0 & \text{при } t \in (\tau_{2k+1}, \tau_{2k+2}). \end{cases}$$

Числа τ_j выберем следующим образом: $\tau_0 = 0, \tau_1 = T, \tau_2$ – такое, что

$$x_1(\tau_2) \geq 0, \quad x_2(\tau_2) = 0,$$

$$x_2(t) > 0, \quad \forall t \in (\tau_1, \tau_2).$$

Здесь $x_1(t), x_2(t)$ решение системы (14) с начальными данными $x_1(0) = -1, x_2(0) = 0$.

Число τ_3 выберем так, что

$$ax_2(\tau_3) + bx_1(\tau_3) = 0,$$

$$ax_2(t) + bx_1(t) \neq 0, \forall t \in (\tau_2, \tau_3).$$

Число τ_4 выберем так, что

$$x_1(\tau_4) \leq 0, \quad x_2(\tau_4) = 0,$$

$$x_2(t) < 0, \quad \forall t \in (\tau_3, \tau_4),$$

(рис. 5) и так далее.

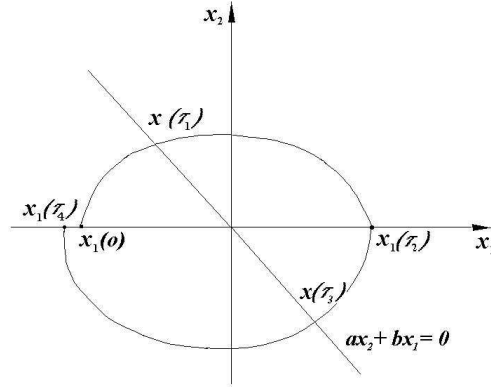


Рис. 5.

Легко видеть, что

$$\dots < x(\tau_8) < x_1(\tau_4) < x_1(0).$$

Поэтому

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_1(\tau_j) = \infty.$$

Отсюда следует, что нулевое решение системы (14) не является устойчивой в целом. Теорема 2 доказана. \square

Заметим, что в частном случае $a = 0$ теоремы 1 и 2 доказаны в [13–16].

Еще раз подчеркнем здесь, что метод двумерных систем сравнения часто более эффективен и прост в применении, чем метод функций Ляпунова. При этом оба метода имеют близкую геометрическую интерпретацию. В основе ее мы имеем семейства трансверсальных, замкнутых, непрерывных поверхностей. Только в прямом методе Ляпунова эти поверхности индуцируются функциями Ляпунова, а в методе двумерных систем сравнения – траекториями этих систем сравнения.

В работе Е.С.Пятницкого [17] для получения необходимых и достаточных условий абсолютной устойчивости двумерной системы вида (11) применен принцип максимума Понтрягина, где для анализа двумерной системы (11) требуется рассмотрение системы четвертого порядка. В сравнении с подходом Е.С.Пятницкого описанная здесь методика эффективнее и проще.

Для демонстрации этого рассмотрим пример системы (11), приведенный в [17, 18], с передаточной функцией

$$\chi(p) = \frac{-(p+1)}{p^2 + p + 1}$$

и нелинейностью $\psi(t, \sigma)$, удовлетворяющей условию

$$0 \leq \frac{\psi(t, \sigma)}{\sigma} \leq k, \quad \forall t \in R^1, \quad \forall \sigma \neq 0.$$

Сделав замену $\varphi(t, \sigma) = k\sigma - \psi(t, \sigma)$, приведем рассматриваемую систему к виду (11), (12) с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{p+1}{p^2 + (1-k)p + (1-k)}.$$

Применим теперь теорему 2.

Здесь легко видеть, что

$$x_2(T) = \exp\left(-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right),$$

$$\tilde{x}_2(\tau) = \sqrt{1-k} \exp\left(\sqrt{\frac{1-k}{3+k}} \left(\pi - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3+k}{1-k}}\right)\right).$$

Отсюда сразу следует, что абсолютная устойчивость имеет место, если $k < k_0$, и система (11) не является абсолютно устойчивой при $k > k_0$. Здесь k_0 определяется из соотношения

$$\sqrt{1-k_0} \exp\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1-k_0}{3+k_0}} \left(\pi - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3+k_0}{1-k_0}}\right)\right) = 1.$$

Этот результат подправляет формулу, полученную в [17, 18].

2. Проблема Колониуса-Хинрихсена-Вирта.

Здесь, используя доказанные выше теоремы 1 и 2, покажем совпадение старших показателей Ляпунова и Флоке для классов двумерных линейных управляемых систем. Тем самым здесь для важного в теории управления случая решена проблема, сформулированная Ф.Колониусом, Д.Хинрихсеном и Ф.Виртом [19].

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = (A + u(t)BC)x, \quad (16)$$

где A постоянная $n \times n$ -матрица, B и C – постоянные $n \times 1$ и $1 \times n$ -матрицы (т.е. вектор–столбец и вектор–строка) $u(t)$ – кусочно–непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$k_1 \leq u(t) \leq k_2, \quad \forall t \in R^1. \quad (17)$$

Здесь k_1 и k_2 – некоторые числа.

Напомним, что старшим ляпуновским показателем системы (16) называется число

$$\lambda(u(\cdot)) = \sup_{|z|=1} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |x(t, z)|.$$

Здесь $x(t, z)$ – решение системы (1) с начальными данными $x(0, z) = z$.

Старшим показателем Ляпунова класса систем (16) с функциями, удовлетворяющими условию (17), назовем число (или символ $+\infty$)

$$\Lambda_L = \sup_u \lambda(u(\cdot)),$$

где супремум берется на множестве кусочно–непрерывных функций $u(\cdot)$, удовлетворяющих условию (17).

Старшим показателем Флоке класса систем (16) с периодическими, кусочно-непрерывными функциями, удовлетворяющими условию (17), назовем число (или $+\infty$)

$$\Lambda_F = \sup_u \lambda(u(\cdot)).$$

Здесь супремум берется на описанном выше множестве всех периодических функций.

Заметим, что здесь рассматривается класс функций со всеми периодами.

Здесь мы покажем, что для $n = 2$ в предположении полной управляемости и наблюдаемости системы (16) имеет место равенство

$$\Lambda_L = \Lambda_F. \quad (18)$$

Введем в рассмотрение передаточную функцию системы (16)

$$W(p) = C(A - pI)^{-1}B = \frac{ap + b}{p^2 + \alpha p + \beta},$$

где a, b, α, β – некоторые числа.

Заметим вначале, что для решения сформулированной выше задачи не умаляя общности можно принять, что $k_1 = 0$, $k_2 = k > 0$ и что система (16) абсолютно устойчива при условии (17).

Напомним, что система (16) называется абсолютно устойчивой при условии (17), если ее нулевое решение устойчиво в целом для любой функции $u(t)$, удовлетворяющей условию (17).

В самом деле, произведя замену

$$x = z \exp(\nu t)$$

получим систему

$$\dot{z} = (A - \nu I + u(t)BC)z \quad (19)$$

с передаточной функцией $W(p + \nu)$.

Поскольку при больших ν матрица $A - \nu I$ – гурвицева и

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}W(i\omega + \nu) > 0, \quad \forall \omega \in R^1$$

согласно круговому критерию [9–11] система (19) абсолютно устойчива. При этом показатели Ляпунова и Флоке примут вид $\Lambda_L - \nu$ и $\Lambda_F - \nu$.

Ясно также, что из абсолютной устойчивости системы (16) следует, что

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + ak > 0, \quad \beta + bk > 0. \quad (20)$$

Не умаляя общности можно также принять, что $a \geq 0$ и $b > 0$ при $a = 0$.

Предположим также, что

$$b^2 - \alpha ab + a^2 \beta \neq 0. \quad (21)$$

Это неравенство эквивалентно полной управляемости пары (A, B) и полной наблюдаемости пары (A, C) .

В первом параграфе было доказано, что систему (16) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \beta x_1 - u(t)(ax_2 + bx_1). \end{aligned} \quad (22)$$

Напомним, что не умаляя общности, мы рассматриваем абсолютно устойчивую систему (16). Сделаем теперь замену

$$x = y \exp(\rho t)$$

так, чтобы при всех $\rho > R$ система

$$\dot{y} = (A - \rho I + u(t)BC)y \quad (23)$$

была абсолютно устойчивой, а при $\rho = R$ система (23) не являлась абсолютно устойчивой.

Из теорем 1 и 2 следует, что система (23) с $\rho = R$, преобразованная к виду (22), обладает следующим свойством.

Либо система (13) с $\lambda = \alpha$, $\mu = \beta$ на Ω_1 и с $\lambda = \alpha + ak$, $\mu = \beta + bk$ на Ω_2 обладает в полуплоскости $\{x_2 \geq 0\}$ лучом $L = \{x_2 = Kx_1, K < 0\}$, целиком состоящем из состояний равновесия (рис. 6), либо для решений $x_1(t), x_2(t)$ и $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t)$ этой системы

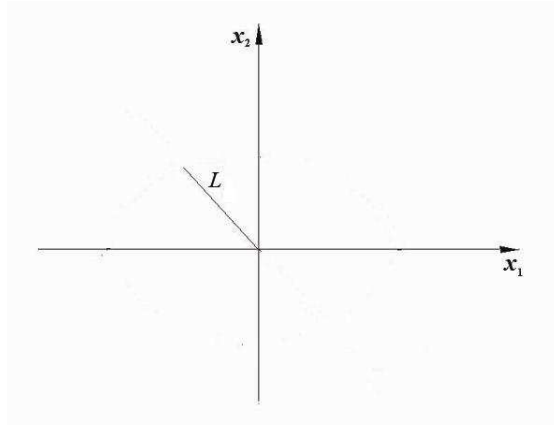


Рис. 6

с начальными данными $x_1(0) = -1, \tilde{x}_1(0) = 1, x_2(0) = \tilde{x}_2(0) = 0$ справедливо равенство

$$x_2(T) = \tilde{x}_2(\tau)$$

(рис. 7).

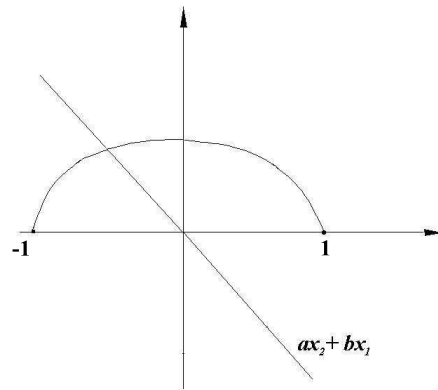


Рис. 7

В первом случае также как при доказательстве теоремы 1 строим семейство кривых, изображенных на рис.3. Отличием от предыдущих рассуждений является лишь тот факт, что здесь вместо трансверсальности имеется более слабое соотношение при $x_2(t) = F(x_1(t)) > 0$:

$$\frac{\dot{x}_2(t)}{\dot{x}_1(t)} \leq \frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x=x_1(t)}$$

Однако выполненное на всем семействе кривых, заполняющих все пространство $R^2 \setminus \{0\}$, оно позволяет доказать ограниченность любого решения системы (22).

Применяя аналогичную схему к случаю $x_2(T) = \tilde{x}_2(\tau)$, получим, что решения системы (22) не смогут покинуть области, ограниченные кривыми

$$\begin{aligned} x_2 &= F(x_1, c) \text{ на } [c\tilde{x}_1(\tau), c], \\ x_2 &= F(x_1, -c) \text{ на } [-c, cx_1(T)], \\ x_2 &= -F(-x_1, -c) \text{ на } [-cx_1(T), c], \\ x_2 &= -F(-x_1, c) \text{ на } [-c, -c\tilde{x}_1(\tau)] \end{aligned}$$

(Рис. 8).

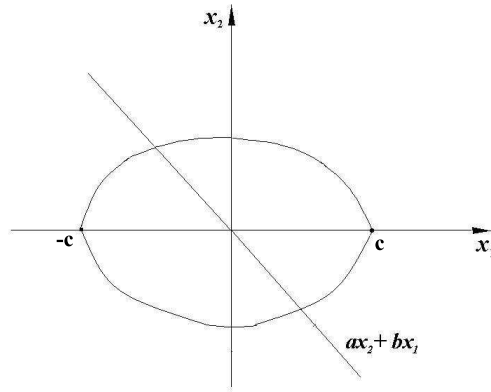


Рис. 8

Таким образом, $\Lambda_L \leq R$.

Однако легко видеть, что в первом случае (рис. 6) имеем для системы (22) либо при $u(t) \equiv 0$ либо при $u(t) \equiv k$ соотношение $\lambda(u(\cdot)) = 0$.

Во втором случае (рис. 7) при $b > 0$ определим $2(T - \tau)$ -периодическую функцию $u(t)$ следующим образом:

$$u(t) = \begin{cases} k & \text{при } t \in (0, T) \\ 0 & \text{при } t \in (T, T - \tau) \\ k & \text{при } t \in (T - \tau, 2T - \tau) \\ 0 & \text{при } t \in (2T - \tau, 2T - 2\tau). \end{cases}$$

Ясно, что для этой периодической системы $\lambda(u(\cdot)) = 0$. Аналогичные рассуждения проводятся и для случая $b \leq 0$.

Из приведенных здесь рассуждений вытекает следующий результат.

Теорема 3. Если выполнено неравенство (21), то для системы (16) при $n = 2$ имеет место равенство (18).

Заметим, что для системы (16) аналогичным образом решается задача о совпадении младших показателей Ляпунова и Флоке, которые определяются как величины

$$\inf_u \inf_{|z|=1} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} \ln |x(t, z)| \right)$$

соответственно на классах функций $u(\cdot)$, удовлетворяющих условию (17), и на классах периодических функций $u(\cdot)$, удовлетворяющих условию (17).

Заметим также, что различные сужения классов функций $u(\cdot)$, удовлетворяющих условию (17) приводят к нарушению равенства (18). Так, например, для уравнения

$$\dot{x} = (\sin \ln t + \cos \ln t)x$$

легко видеть, что $\lambda = 1$, а для уравнения

$$\dot{x} = \sum_k (a_k \sin kt + b_k \cos kt)x$$

при любых a_k и b_k имеем $\lambda = 0$.

3. Локализация аттракторов уравнения Лъенара. Гипотеза Одани.

Применение "естественной" функции Ляпунова к локализации аттрактора уравнения Лъенара (в [20] это уравнение названо уравнением Картрайт-Литтлвуда)

$$\ddot{x} + \mu[F(\dot{x})] + x = \mu E(t), \quad (24)$$

где μ – положительное число, $F(y)$, $E(t)$ – удовлетворяющие условию Липшица функции, встретилось со следующими трудностями.

Рассмотрение функции Ляпунова в виде интеграла энергии

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - \mu[F(y) - E(t)] \end{aligned} \quad (25)$$

дает следующее выражение для ее производной

$$\dot{V}(x(t), y(t)) = -2\mu y(t)[F(y(t)) - E(t)].$$

Отсюда сразу получаем устойчивость в целом системы (25) при $E(t) \equiv 0$, $F(y)y > 0$, $\forall y \neq 0$.

Для классических колебательных систем – Рэлея и Ван-дер-Поля – функция $F(y)$ имеет следующий вид

$$F(y) = -\alpha y + \beta y^3. \quad (26)$$

Здесь α и β – положительные числа.

Для системы (25) с нелинейной функцией (26) и равномерно ограниченной $E(t)$: $|E(t)| \leq c$, $\forall t \in \mathbb{R}^1$, хорошо известно свойство диссипативности по Левинсону.

Напомним, что система (25) диссипативна по Левинсону [20–22], если существует число R , для которого любое решение $x(t), y(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} (x(t)^2 + y(t)^2) \leq R. \quad (27)$$

В классическом подходе к доказательству этого факта поступают следующим образом [20–22]. Вначале проводят оценку производной $\dot{V}(x(t), y(t))$ на множестве $\{x \in \mathbb{R}^1, |y| \geq \nu\}$:

$$\dot{V}(x(t), y(t)) \leq -\varepsilon.$$

Здесь ν и ε – некоторые положительные числа. Такую оценку легко получить для функции $F(y)$ вида (26).

Внутри полосы $\{x \in R^1, |y| \leq \nu\}$ производная $\dot{V}(x(t), y(t))$ в некоторых точках может принимать и положительные значения. Здесь обычно получают оценку

$$\dot{V}(x(t), y(t)) \leq L,$$

где L – некоторое положительное число.

Однако при большом удалении от начала координат $(x(t)^2 + y(t)^2 > M, M$ – большое число) решение $x(t), y(t)$ "проскакивает" рассматриваемую полосу очень быстро (за время $\tau(M) \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$). После этого на большом временном промежутке $[\tau, \tau + T]$ рассматриваемое решение $x(t), y(t)$ находится на множестве $\{x \in R^1, |y| \geq \nu\}$. Поэтому оказывается возможным оценить приращение

$$V(x(\tau + T), y(\tau + T)) - V(x(0), y(0)) \leq -\varepsilon T + \tau L,$$

которое является отрицательным при больших $x(t)^2 + y(t)^2$.

Такие рассуждения позволяют установить существование числа R , для которого выполнено неравенство (27). Подробное и аккуратное изложение описанной выше схемы имеется в книгах [20, 22]. В этом направлении возможны обобщения на системы более высокого порядка [23, 24]. Однако следует отметить, что описанная выше схема достаточно трудоемка, а локализационные оценки (например, оценка R) оказываются весьма грубыми.

Применим теперь к рассматриваемой задаче методику построения не функций Ляпунова, а систем сравнения. Для этого предположим, что для некоторых положительных чисел α и k выполнено неравенство

$$\frac{(F(y) - E(t))}{y} > \alpha - k \frac{\text{sign } y}{y}, \quad \forall t \in R^1, \forall y \neq 0. \quad (28)$$

Это предположение традиционно для системы (25) [17].

Введем в рассмотрение систему сравнения

$$\dot{x} = y, \dot{y} = \mu(-\alpha y + k \text{sign } y) - x. \quad (29)$$

При $\alpha\mu \geq 2$ рассмотрим положительную полутраекторию системы (29) с начальными данными $y(0) = 0, x(0) = -\mu k$ и положительную полутраекторию с начальными данными $y(0), x(0) = \mu k$. Этим полутраекториям соответствуют графики функций $y = G_1(x) \geq 0$ и $y = G_2(x) \leq 0, G_1(-\mu k) = G_2(\mu k) = 0$.

При $\alpha\mu < 2$ система (29) имеет единственный предельный цикл $x(t), y(t)$ с начальными данными $x(0) = \rho, y(0) = 0$. Здесь

$$\rho = \frac{1 + \exp(-\lambda\pi/\omega)}{1 - \exp(-\lambda\pi/\omega)} \mu k, \quad \lambda = \frac{\alpha\mu}{2}, \quad \omega = \sqrt{1 - \lambda^2}.$$

Пусть график функции $y = G_1(x)$ совпадает с положительными значениями предельного цикла, а график функции $y = G_2(x)$ – с отрицательными.

Введем в рассмотрение множество

$$\Omega(\alpha, k) = \{x \in [-\mu k, \mu k], G_2(x) \leq y \leq G_1(x)\}$$

при $\alpha\mu \geq 2$ и

$$\Omega(\alpha, k) = \{x \in [-\rho, \rho], G_2(x) \leq y \leq G_1(x)\}$$

при $\alpha\mu < 2$.

С помощью введенной здесь системы сравнения (29) очень легко доказать следующий результат.

Теорема 4 [25]. Для любого решения $x(t), y(t)$ системы (25) существует число T такое, что при всех $t \geq T$ это решение принадлежит множеству $\Omega(\alpha, k)$.

Доказательство. Пусть неравенство (28) выполнено для некоторого $\alpha > 0$ и $k = k_0$. Очевидно, что оно выполнено также и для всех $k \geq k_0$. Но тогда для любой точки (x_0, y_0) множества $R^2 \setminus \Omega(\alpha, k_0)$ существует число $k \geq k_0$ такое, что (x_0, y_0) принадлежит границе $\Omega(\alpha, k)$. Таким образом, границы $\Omega(\alpha, k)$ образуют семейство замкнутых непрерывных кривых, покрывающих множество $R^2 \setminus \Omega(\alpha, k_0)$.

Для доказательства теоремы остается показать, что эти кривые всюду за исключением точек $x \in R^1, y = 0$ трансверсальны и решения системы (25) "прошивают" эти кривые снаружи внутрь. Эти свойства вытекают из соотношений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\mu(F(y) - E(t)) - x}{y} < \frac{-\mu(\alpha y - k \operatorname{sign} y) - x}{y} = \frac{dG_j}{dx}.$$

Теорема доказана. \square

Таким образом, доказательство диссипативности по Левинсону системы (25) с помощью систем сравнения вида (29) "почти очевидно" и занимает несколько строк. Здесь оказалось, что траектории систем сравнения образуют семейство трансверсальных, замкнутых, непрерывных кривых, которые и обеспечивают свойство диссипативности. Построить же функцию Ляпунова, линии уровня которой обладали бы аналогичным свойством замкнутости, бесконтактности и непрерывности в рассматриваемом случае оказывается делом очень трудным.

Заметим, что вычисление и эффективные оценки функций $G_1(x)$ и $G_2(x)$ являются также делом незатруднительным. Поэтому преимущество метода систем сравнения для локализации глобальных аттракторов системы (25) и различных ее обобщений также весьма очевидно. Развитие такого подхода имеется в работах [25–31].

С его помощью доказана, в частности, справедливость следующей интересной гипотезы Одани [35–37] о том, что на решениях $x(t), y(t)$ аттрактора системы Ван дер Поля (25) с $E(t) \equiv 0, F(y) = y^3/3 - y$ имеет место оценка

$$\max_t |y(t)| \leq 2.0235$$

при всех $\mu > 0$. Подробное доказательство этого факта, который улучшает широко известные оценки Картрайт [32], Ван Хорсена [33], Алсхолма [34] и Одани [35–37] имеется в [31].

4. Уравнение Льенара и аттракторы квадратичных систем

Здесь мы получим условие ограниченности аттракторов квадратичной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 + \alpha_1 x + \beta_1 y \\ \dot{y} &= a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 + \alpha_2 x + \beta_2 y \end{aligned} \quad (30)$$

где $a_i, b_i, c_i, \alpha_i, \beta_i$ – вещественные числа, сведя исследование системы (30) к некоторому специальному уравнению Льенара. Здесь мы будем следовать работам [38, 39].

Предложение 1. Не умаляя общности можно считать, что $c_1 = 0$.

Доказательство. Предположим для определенности, что $a_2 \neq 0$ (в противном случае, сделав переобозначения $x \rightarrow y, y \rightarrow x$, сразу получим $c_1 = 0$). Введем далее линейное преобразование $x_1 = x + \nu y, y_1 = y$. Для доказательства предложения 1

достаточно показать, что для некоторых чисел ρ, κ, ν справедливо тождество

$$(x + \nu y)^\bullet = (a_1 + \nu a_2)x^2 + (b_1 + \nu b_2)xy + (c_1 + \nu c_2)y^2 + (\alpha_1 + \nu \alpha_2)x + (\beta_1 + \nu \beta_2)y = \rho(x + \nu y)y + \kappa(x + \nu y)^2 + (\alpha_1 + \nu \alpha_2)x + (\beta_1 + \nu \beta_2)y$$

Это тождество эквивалентно следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} \kappa &= a_1 + \nu a_2, \\ \kappa \nu^2 + \rho \nu &= c_1 + \nu c_2, \\ \rho + 2\kappa \nu &= b_1 + \nu b_2. \end{aligned} \quad (31)$$

Эти соотношения выполнены, если

$$(a_1 + \nu a_2)\nu^2 - \nu(b_1 + \nu b_2) + (c_1 + \nu c_2) = 0.$$

Поскольку $a_2 \neq 0$ это уравнение третьей степени относительно ν всегда имеет вещественный корень. Таким образом, система уравнений (31) всегда имеет вещественное решение. \square

Далее будем предполагать, что $c_1 = 0$.

Предложение 2. Пусть $b_1 \neq 0$. Прямая линия $\beta_1 + b_1x = 0$ на плоскости $\{x, y\}$ либо является инвариантной, либо трансверсальна для траекторий системы (30).

Доказательство. Это утверждение следует из равенства

$$(\beta_1 + b_1x)^\bullet = b_1[(b_1x + \beta_1)y + a_1x^2 + \alpha_1x] = \left[a_1 \left(\frac{\beta_1}{b_1} \right)^2 - \alpha_1 \left(\frac{\beta_1}{b_1} \right) \right] b_1$$

при $x = -\beta_1/b_1$. Отсюда следует, что если

$$a_1 \left(\frac{\beta_1}{b_1} \right)^2 - \alpha_1 \left(\frac{\beta_1}{b_1} \right) = 0$$

то прямая $\beta_1 + b_1x = 0$ инвариантна и если

$$a_1 \left(\frac{\beta_1}{b_1} \right)^2 - \alpha_1 \left(\frac{\beta_1}{b_1} \right) \neq 0$$

то прямая $\beta_1 + b_1x = 0$ трансверсальна. \square

Исключая далее из рассмотрения тривиальный случай, когда правая часть первого уравнения системы (30) не зависит от y , будем предполагать, что

$$|b_1| + |\beta_1| \neq 0. \quad (32)$$

Отсюда и из предложения 2 следует, что траектории системы (30) являются также траекториями системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \frac{a_1x^2 + \alpha_1x}{\beta_1 + b_1x}, \\ \dot{y} &= \frac{a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + \alpha_2x + \beta_2y}{\beta_1 + b_1x}. \end{aligned} \quad (33)$$

Введем в рассмотрение следующее преобразование

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y + \frac{a_1x^2 + \alpha_1x}{\beta_1 + b_1x}, \\ \bar{x} &= x. \end{aligned}$$

В этих новых фазовых переменных (здесь мы опускаем черточки над переменными: $\bar{x} \rightarrow x, \bar{y} \rightarrow y$) система (33) запишется в виде

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -Q(x)y^2 - R(x)y - P(x), \quad (34)$$

где

$$Q(x) = \frac{-c_2}{\beta_1 + b_1 x},$$

$$R(x) = -\frac{(b_1 b_2 - 2a_1 c_2 + a_1 b_1)x^2 + (b_2 \beta_1 + b_1 \beta_2 - 2\alpha_1 c_2 + 2a_1 \beta_1)x + \alpha_1 \beta_1 + \beta_1 \beta_2}{(\beta_1 + b_1 x)^2},$$

$$P(x) = -\left(\frac{a_2 x^2 + \alpha_2 x}{\beta_1 + b_1 x} - \frac{(b_2 x + \beta_2)(a_1 x^2 + \alpha_1 x)}{(\beta_1 + b_1 x)^2} + \frac{c_2(a_1 x^2 + \alpha_1 x)^2}{(\beta_1 + b_1 x)^3} \right).$$

Из предложения 2 и условия (32) следует, что траектории системы (34) являются также траекториями системы

$$\dot{x} = ye^{p(x)}, \quad \dot{y} = [-Q(x)y^2 - R(x)y - P(x)]e^{p(x)},$$

где $p(x)$ — некоторый интеграл функции $Q(x)$.

Из этой системы с помощью замены $\bar{x} = x$, $\bar{y} = ye^{p(x)}$ получим

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x)y - g(x), \quad (35)$$

Здесь вновь после указанного выше преобразования опущены черточки над переменными x и y .

Итак, при $b_1 \neq 0$ система (30) может быть приведена с помощью указанных выше невырожденных замен к уравнению Лъенара (35) с функциями

$$f(x) = R(x)e^{p(x)} = R(x)|\beta_1 + b_1 x|^q,$$

$$g(x) = P(x)e^{2p(x)} = P(x)|\beta_1 + b_1 x|^{2q}$$

Здесь при $b_1 \neq 0$, $q = -\frac{c_2}{b_1}$.

Рассмотрим теперь систему (35), где будем предполагать, что функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на интервале $(a, +\infty)$ и для некоторых чисел $a < \nu_1 \leq x_0 \leq \nu_2$ выполнены следующие условия

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_{x_0}^x g(z) dz = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x g(z) dz = +\infty, \quad (36)$$

$$2) \quad f(x) > 0, \quad \forall x \in (a, \nu_1) \cup (\nu_2, +\infty),$$

$$\int_{\nu_2}^{\nu_1} f(x) dx \leq 0. \quad (37)$$

Теорема 5. Если выполнены условия 1) и 2), то глобальный минимальный аттрактор системы (35) в фазовом пространстве

$$\{x \in (a, +\infty), y \in R^1\}$$

является ограниченным множеством.

Доказательство. Рассмотрим сначала пару чисел $\mu_1 \in (a, \nu_1)$ и $\mu_2 \in (\nu_2, +\infty)$, таких, что μ_1 – достаточно близко к a , μ_2 – достаточно большое и

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} g(x)dx = 0. \quad (38)$$

В дальнейшем, не умаляя общности, примем, что

$$g(x) < 0, \quad \forall x \in [\mu_1, \nu_1],$$

$$g(x) > 0, \quad \forall x \in [\nu_2, \mu_2].$$

Введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} V_1(x, y) &= y^2 + 2 \int_{x_0}^x g(z)dz, \\ V_2(x, y) &= \left(y + \int_{\nu_1}^x f(z)dz \right)^2 + 2 \int_{x_0}^x g(z)dz, \\ V_3(x, y) &= \left(y + \int_{\nu_2}^x f(z)dz \right)^2 + 2 \int_{x_0}^x g(z)dz, \\ V_4(x, y) &= V_2(x, y) - \varepsilon(x - \nu_1) \\ V_5(x, y) &= V_3(x, y) - \varepsilon(x - \nu_2) \\ V_6(x, y) &= V_3(x, y) + \varepsilon(x - \nu_2) \\ V_7(x, y) &= V_2(x, y) + \varepsilon(x - \nu_1). \end{aligned}$$

Здесь ε – некоторое достаточно малое число.

Определим теперь множества Ω_j следующим образом (рис. 9)

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in [\mu_1, \nu_1], y \geq 0, V_1(x, y) \leq V_1(\mu_1, 0)\}, \\ \Omega_2 &= \{x \in [\nu_1, x_0], y \geq 0, V_4(x, y) \leq V_2(\nu_1, y_1)\}, \\ \Omega_3 &= \{x \in [x_0, \nu_2], y \geq 0, V_5(x, y) \leq V_3(\nu_2, y_2)\}, \\ \Omega_4 &= \{x \in [\nu_2, \mu_2], y \geq 0, V_3(x, y) \leq V_3(\mu_2, 0)\}, \\ \Omega_5 &= \{x \in [\nu_2, \mu_2], y \leq 0, V_1(x, y) \leq V_1(\mu_2, 0)\}, \\ \Omega_6 &= \{x \in [x_0, \nu_2], y \leq 0, V_6(x, y) \leq V_3(\nu_2, y_3)\}, \\ \Omega_7 &= \{x \in [\nu_1, x_0], y \leq 0, V_7(x, y) \leq V_2(\nu_1, y_4)\}, \\ \Omega_8 &= \{x \in [\mu_1, \nu_1], y \leq 0, V_2(x, y) \leq V_2(\mu_1, 0)\}. \end{aligned}$$

Здесь $y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 < 0, y_4 < 0$ – решения квадратных уравнений

$$\begin{aligned} V_1(\nu_1, y_1) &= V_1(\mu_1, 0), \\ V_3(\nu_2, y_2) &= V_3(\mu_2, 0), \\ V_1(\nu_2, y_3) &= V_1(\mu_2, 0), \\ V_2(\nu_1, y_4) &= V_2(\mu_1, 0) \end{aligned}$$

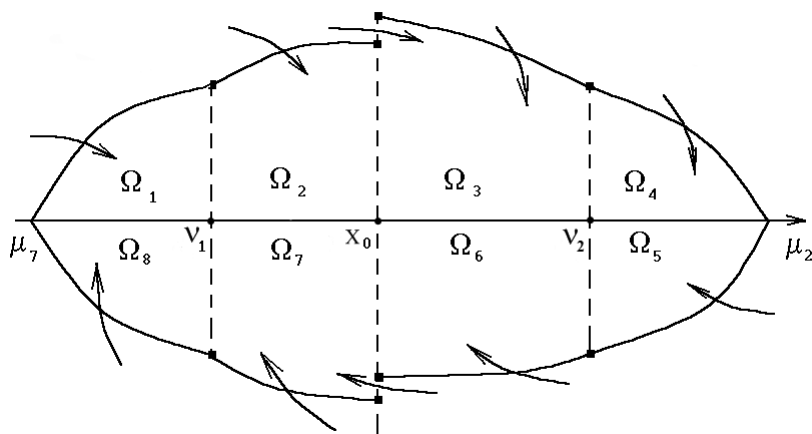


Рис. 9

Легко видеть, что для производных функций $V_j(x, y)$ в силу системы (35) имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= -f(x)y^2, & \dot{V}_2 &= -2g(x) \int_{\nu_1}^x f(z)dz, & \dot{V}_3 &= -2g(x) \int_{\nu_2}^x f(z)dz, \\ \dot{V}_4 &= -2g(x) \int_{\nu_1}^x f(z)dz - \varepsilon y, & \dot{V}_5 &= -2g(x) \int_{\nu_2}^x f(z)dz - \varepsilon y, \\ \dot{V}_6 &= -2g(x) \int_{\nu_2}^x f(z)dz + \varepsilon y, & \dot{V}_7 &= -2g(x) \int_{\nu_1}^x f(z)dz + \varepsilon y.\end{aligned}$$

Поэтому при сделанных предположениях относительно μ_1 и μ_2 и при $y \neq 0, x \neq \nu_j$ имеем неравенства

$$\dot{V}_1 < 0 \text{ на } \Omega_1 \cup \Omega_5, \quad \dot{V}_4 < 0 \text{ на } \Omega_2, \quad \dot{V}_5 < 0 \text{ на } \Omega_3, \quad \dot{V}_3 < 0 \text{ на } \Omega_4, \quad \dot{V}_6 < 0 \text{ на } \Omega_6, \quad \dot{V}_7 < 0 \text{ на } \Omega_7, \quad \dot{V}_2 < 0 \text{ на } \Omega_8.$$

Отметим, что из условий 2), (38) и для достаточно малых ε имеем неравенства $y_5 < y_6$ и $y_7 > y_8$, где y_5 – положительное решение уравнения

$$V_4(x_0, y_5) = V_2(\nu_1, y_1),$$

y_6 – положительное решение уравнения

$$V_5(x_0, y_6) = V_3(\nu_2, y_2),$$

y_7 – отрицательное решение уравнения

$$V_6(x_0, y_7) = V_3(\nu_2, y_3),$$

y_8 – отрицательное решение уравнения

$$V_7(x_0, y_8) = V_2(\nu_1, y_4).$$

(Рис.9).

Таким образом, здесь построено семейство трансверсальных замкнутых кривых, которое и доказывает утверждение теоремы. \square

Поясним выполнение соотношений $\dot{V}_4 < 0, \dot{V}_5 < 0, \dot{V}_6 < 0, \dot{V}_7 < 0$ соответственно на множествах $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_6, \Omega_7$.

Зафиксировав произвольное $\varepsilon > 0$, выберем здесь μ_1 и μ_2 настолько близкими к a и к $+\infty$, что минимальные значения $|y|$ на пересечении замкнутой кривой (рис. 9) с полосой $\{x \in [\nu_1, \nu_2]\}$ будут больше, чем

$$\frac{1}{\varepsilon} \max_{x \in [\nu_1, \nu_2]} 2 \left| g(x) \int_{\nu_1}^x f(z) dz \right|$$

и

$$\frac{1}{\varepsilon} \max_{x \in [\nu_1, \nu_2]} 2 \left| g(x) \int_{\nu_2}^x f(z) dz \right|.$$

Отсюда и следуют требуемые неравенства $\dot{V}_j < 0$. Таким образом здесь $\mu_j = \mu_j(\varepsilon)$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_1(\varepsilon) = a, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_2(\varepsilon) = +\infty.$$

Выпишем теперь условия 1) и 2) в терминах квадратичной системы.

Здесь

$$a = -\frac{\beta_1}{b_1}, \quad b_1 \neq 0.$$

Не умаляя общности будем считать, что $b_1 > 0$. Условия 1) и 2) выполнены, если

$$\begin{aligned} 0 < 2c_2 < b_1, \quad \beta_1 > 0, \\ \frac{a_1 \beta_1}{b_1} &> \alpha_1 \\ \frac{a_1(2c_2 - b_1)}{b_1} &> b_2 \\ \frac{a_1(b_1 b_2 - a_1 c_2)}{b_1^2} &> a_2. \end{aligned} \tag{39}$$

Кроме того, из условий (39) следует положительная инвариантность полуплоскости $\{x \geq a\}$ для квадратичной системы (30).

Заметим, что здесь $c_1 = 0$ и параметры α_2 и β_2 не входят в условия (39).

Заметим также, что аналогичные рассуждения можно провести и для полупространства $\{x < a\}$. Однако здесь при делении обоих уравнений квадратичной системы (30) на $\beta_1 + b_1 x$ изменяется направление движения по траекториям. Таким образом, можно сформулировать следующий результат.

Теорема 6. Пусть выполнены условия (39). Тогда любое решение системы (30) с начальными данными такими, что $x(0) > a$ стремится при $t \rightarrow +\infty$ к ограниченному аттрактору, расположенному в полуплоскости $\{x > a\}$.

Теорема 6 позволяет локализовать поиск предельных циклов квадратичных систем (30). Заметим также, что трансверсальные кривые, построенные с помощью функций V_j , могут применяться для доказательства существования и оценок циклов. Так, например, если в полуплоскости $\{x > a\}$ имеется единственное неустойчивое по Ляпунову фокусное состояние равновесия системы (30) (или системы (35)) и для нее выполнены условия (39) (или условия 1) и 2) для системы (35)), то система (30) (или (35)) имеет периодическое решение, расположенное в полуплоскости $\{x > a\}$.

Кроме того, в этих предположениях $f(x) > 0$ при $x < a$. Поэтому с помощью функции Ляпунова

$$V(x, y) = y^2 + \int_{2a}^x g(z) dz$$

легко доказать, что решение системы (30) с начальными данными $x(0) < a$ либо стремится при $t \rightarrow +\infty$ к состоянию равновесия, либо к бесконечности, либо покидает за конечное время полуплоскость $\{x < a\}$.

Используя этот факт и теорему 6 сформулируем следующий результат.

Теорема 7. Пусть выполнены условия (39) и в полуплоскости $\{x > a\}$ система (30) имеет единственное неустойчивое по Ляпунову фокусное состояние равновесия. Тогда любое решение системы (30) с начальными данными такими, что $x(0) < a$, либо стремится при $t \rightarrow +\infty$ к состоянию равновесия, либо – к бесконечности, либо – к ограниченному аттрактору, расположенном в полуплоскости $\{x > a\}$. Любое решение системы (30) с начальными данными такими, что $x(0) \geq a$, стремится при $t \rightarrow +\infty$ к ограниченному аттрактору, расположенному в полуплоскости $\{x > a\}$. Этот аттрактор имеет по крайней мере один цикл.

Условия теоремы 7 эффективно выделяют в пространстве параметров системы (30) множество положительной лебеговой меры, где существуют циклы. На актуальность² получения результатов такого типа указано в [40].

Разовьем теперь предложенную здесь методику для случая, когда функция $f(x)$ меняет знак только один раз на интервале $(a, +\infty)$.

Предположим здесь, что для функции $g(x)$ выполнены условия (36), а функция $f(x)$ такова, что

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \forall x > x_0 \\ f(x) &< 0 \quad \forall x \in (a, x_0). \end{aligned} \tag{40}$$

Предположим также, что

$$g(x_0) = 0, \quad g(x) \neq 0, \quad \forall x \neq x_0, \quad x \in (a, +\infty). \tag{41}$$

Рассмотрим функцию $W_1(x, y) = V_1(x, y)$ на множестве $\Phi_1 = \{x > x_0, y < 0\}$,

$$W_2(x, y) = \left(y + \int_{x_0}^x f(z) dz \right)^2 + 2 \int_{x_0}^x g(z) dz$$

²В [40] В.И.Арнольд пишет: "Чтобы оценить число предельных циклов квадратных векторных полей на плоскости, А.Н.Колмогоров раздал несколько сотен таких полей (со случайно выбранными коэффициентами многочленов второй степени) нескольким сотням студентов механико-математического факультета МГУ в качестве математического практикума.

Каждый студент должен был найти число предельных циклов своего поля.

Результат этого эксперимента был совершенно неожиданным: ни у одного поля не оказалось ни одного предельного цикла!

При малом изменении коэффициентов поля предельный цикл сохраняется. Поэтому системы с одним, двумя, тремя (и даже, как стало известно позже, четырьмя) предельными циклами образуют в пространстве коэффициентов открытые множества, так что вероятности попасть в них при случайном выборе коэффициентов многочленов положительны.

Тот факт, что этого не случилось, подсказывает, что упомянутые вероятности, по-видимому, малы."

– на $\Phi_2 = \{x > x_0, y > 0\}$ и

$$W_3(x, y) = \left(y + \int_{\mu_1}^x f(z) dz \right)^2 + 2 \int_{x_0}^x g(z) dz$$

на $\Phi_3 = \{x \in (\mu_1, x_0), y \in R^1\}$.

Ясно, что на рассматриваемых множествах выполнены неравенства $\dot{W}_1 < 0$, $\dot{W}_2 < 0$, $\dot{W}_3 < 0$.

Рассмотрим некоторое число $\mu > x_0$ и построим по нему трансверсальную при $y \neq 0$ кривую

$$\begin{aligned} W_1(x, y) &= W_1(\mu, 0) \text{ на } \Phi_1, \\ W_2(x, y) &= W_2(\mu, 0) \text{ на } \Phi_2, \\ W_3(x, y) &= W_3(x_0, y(\mu)) \text{ на } \Phi_3, \end{aligned}$$

где

$$y(\mu) = - \sqrt{2 \int_{x_0}^{\mu} g(z) dz}.$$

Построенная нами кривая будет трансверсальной, если выбрать число μ_1 так, чтобы

$$W_3(\mu_1, 0) = W_3(x_0, y(\mu_1)). \quad (42)$$

Величина

$$y_1(\mu) = \sqrt{2 \int_{x_0}^{\mu} g(z) dz + \left(\int_{x_0}^{\mu} f(z) dz \right)^2}$$

является решением уравнения

$$W_2(x_0, y_1(\mu)) = W_2(\mu, 0),$$

а величина

$$y_2(\mu) = \sqrt{2 \int_{x_0}^{\mu} g(z) dz - 2 \int_{\mu_1}^{x_0} f(z) dz}$$

– решением уравнения

$$W_3(x_0, y(\mu)) = W_3(x_0, y_2(\mu)).$$

Если

$$y_1(\mu) > y_2(\mu) \quad (43)$$

с μ_1 , удовлетворяющим (42), то получим трансверсальную кривую, изображенную на рис. 10.

Условия (43) и (42) можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} & \sqrt{2 \int_{x_0}^{\mu} g(z) dz + \left(\int_{x_0}^{\mu} f(z) dz \right)^2} - \\ & - \sqrt{2 \int_{x_0}^{\mu} g(z) dz} > -2 \int_{\mu_1}^{x_0} f(z) dx, \end{aligned} \quad (44)$$

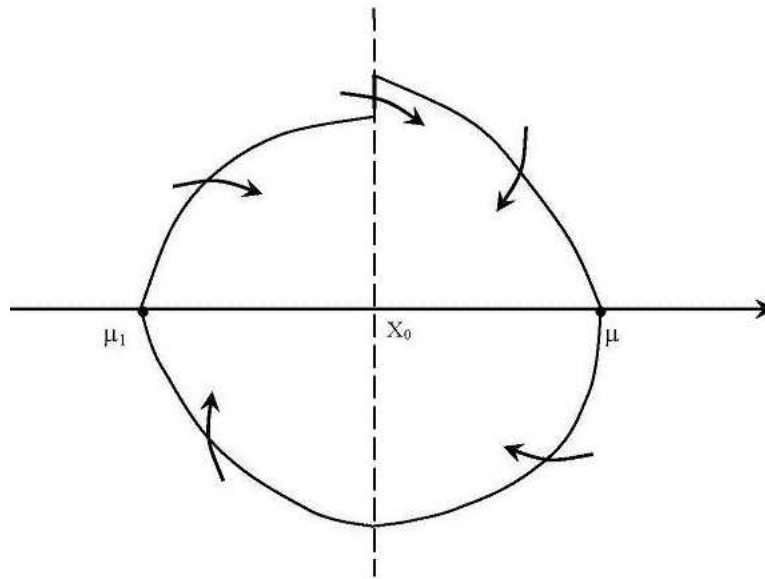


Рис. 10

где μ_1 удовлетворяет равенству

$$\sqrt{2 \int_{x_0}^{\mu_1} g(z) dz} = \sqrt{2 \int_{x_0}^{\mu} g(z) dz - \int_{\mu_1}^{x_0} f(z) dz}. \quad (45)$$

Будем предполагать, что уравнение (45) имеет решения $\mu_1(\mu)$.

Заметим, что применяя методику, развитую для доказательства теоремы 5, здесь можно снять ограничение (41).

Таким образом, здесь имеет место следующий результат

Теорема 8. Если при достаточно большом μ выполнены условия (36), (40), (44), (45), то глобальный минимальный аттрактор системы (35) в фазовом пространстве

$$\{x \in (a, +\infty), y \in R^1\}$$

является ограниченным множеством. Если, кроме того, в полуплоскости $\{x > a\}$ система (35) имеет только одно неустойчивое по Ляпунову фокусное состояние равновесия, то этот аттрактор имеет цикл.

Запишем теперь условия теоремы 8 для системы (30). Учитывая вид функций $f(x)$ и $g(x)$ при достаточно больших μ получим следующие асимптотические соотношения

$$\begin{aligned}\int_{\mu_1}^{x_0} f(z)dz &\approx \frac{-A}{(\beta_1 + b_1\mu_1)^{1-q}} \\ 2 \int_{x_0}^{\mu_1} g(z)dz &\approx \frac{B}{(\beta_1 + b_1\mu_1)^{2(1-q)}} \\ \int_{x_0}^{\mu} f(z)dz &\approx C\mu^{(q+1)} \\ 2 \int_{x_0}^{\mu_1} g(z)dz &\approx D\mu^{2(q+1)}.\end{aligned}$$

Здесь числа A, B, C, D легко выписываются через коэффициенты системы (30):

$$\begin{aligned}A &= \frac{-1}{b_1(q-1)}(b_1b_2 - 2a_1c_2 + a_1b_1) \left(\frac{\beta_1}{b_1}\right)^2 - \\ &\quad - (b_1\beta_1 + b_1\beta_2 - 2\alpha_1c_2 + 2a_1\beta_1) \left(\frac{\beta_1}{b_1}\right) + \\ &\quad + \alpha_1\beta_1 + \beta_1\beta_2 \\ B &= \frac{1}{b_1(q-1)} \left(-c_2 \left(a_1 \left(\frac{\beta_1}{b_1} \right)^2 - \alpha_1 \left(\frac{\beta_1}{b_1} \right) \right)^2 \right) \\ C &= \frac{b_1^q}{1+q} \left(\frac{2a_1c_2 - b_1b_2 - a_1b_1}{b_1^2} \right) \\ D &= \frac{b_1^{2q}}{1+q} \left(-\frac{a_2}{b_1} + \frac{a_1b_2}{b_1^2} - \frac{c_2a_1^2}{b_1^3} \right).\end{aligned}$$

Будем предполагать, что выполнено условие $0 < 2c_2 < b_1$. Тогда условия (36), (40), (45) и (44) примут вид $A > 0, B > 0, C > 0, D > 0$,

$$\frac{\sqrt{B}}{(\beta_1 + b_1\mu_1)^{(1-q)}} = \sqrt{D}\mu^{(1+q)} + \frac{A}{(\beta_1 + b_1\mu_1)^{1-q}}.$$

$$\sqrt{D + C^2} - \sqrt{D} > \frac{2A\sqrt{D}}{\sqrt{B} - A}, \quad \sqrt{B} > A. \quad (46)$$

Таким образом, если A, B, C, D – положительны, выполнено условие (46) и в полуплоскости $\{x > a\}$ единственным состоянием равновесия является неустойчивый фокус, то справедлива теорема 8. Кроме того, если система (35) имеет по одному неустойчивому фокусу в полуплоскостях $\{x > a\}$ и $\{x < a\}$, то в этих полуплоскостях глобальные минимальные аттракторы ограничены и в них существует по крайней мере по одному циклу. (Рис. 11)

Последнее утверждение вытекает из того факта, что из условий (46) следует выполнение аналогов соотношений (44) и (45) для $x \in (-\infty, a)$.

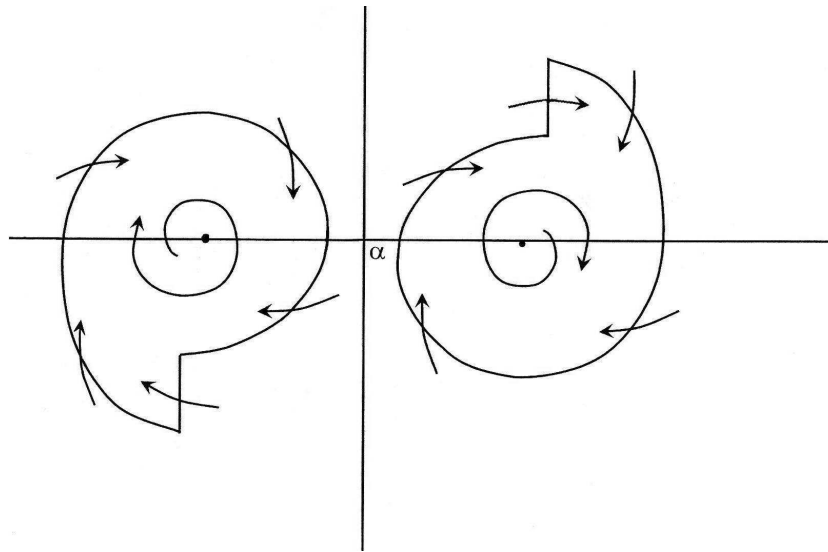


Рис. 11

Заметим, что предложенная здесь методика позволяет получать условия существования большого количества циклов для системы (35).

Приведем, например, условия существования по крайней мере двух различных циклов в полуплоскости $\{x > a\}$.

Будем предполагать здесь, что выполнены условия (36) и (40). Предположим также, что для некоторого числа $x_1 > x_0$ выполнены условия

$$g(x_1) \neq 0, \quad g(x) \neq 0, \quad \forall x \neq x_0, \quad x \in (a, +\infty). \quad (47)$$

Рассмотрим функции

$$W_4(x, y) = y^2 + 2 \int_{x_1}^x g(z) dz,$$

$$W_5(x, y) = \left(y + \int_{x_0}^x f(z) dz \right)^2 + 2 \int_{x_1}^x g(z) dz,$$

$$W_6(x, y) = \left(y + \int_{\nu}^x f(z) dz \right)^2 + 2 \int_{x_1}^x g(z) dz$$

соответственно на множествах

$$\{x \in (a, x_0), y < 0\},$$

$$\{x \in (a, x_1), y > 0\} \cup \{x \in (x_0, x_1), y < 0\},$$

$$\{x \in (x_1, \nu), y \in \mathbb{R}^1\}.$$

Легко видеть, что в сделанных предположениях на этих множествах $\dot{W}_4 > 0, \dot{W}_5 > 0, \dot{W}_6 > 0$.

Поэтому для существования трансверсальной кривой, изображенной на рис. 12, получим следующие аналоги условий (44), (45).

$$\begin{aligned} & \sqrt{2 \int_{x_1}^{\nu_1} g(z) dz + \left(\int_{x_0}^{\nu_1} f(z) dz \right)^2} - \\ & - \sqrt{2 \int_{x_1}^{\nu_1} g(z) dz} > -2 \int_{\nu}^{x_0} f(z) dz, \end{aligned} \quad (48)$$

где ν_1 удовлетворяет равенству

$$\sqrt{2 \int_{x_1}^{\nu_1} g(z) dz} = \sqrt{2 \int_{x_1}^{\nu} g(z) dz - \int_{x_0}^{\nu} f(z) dz}. \quad (49)$$

Будем предполагать, что уравнение (49) имеет решения $\nu_1(\nu)$.

В этом случае можно сформулировать следующий результат

Теорема 9. *Если при достаточно большом μ выполнены условия (44), (45), при некотором $\nu > x_1$ выполнены условия (48), (49) и в полуплоскости $\{x > a\}$ единственным состоянием равновесия является фокус, то в полуплоскости $\{x > a\}$ система (35) имеет не менее двух различных циклов.*

Доказательство теоремы 9 иллюстрирует рисунок 13.

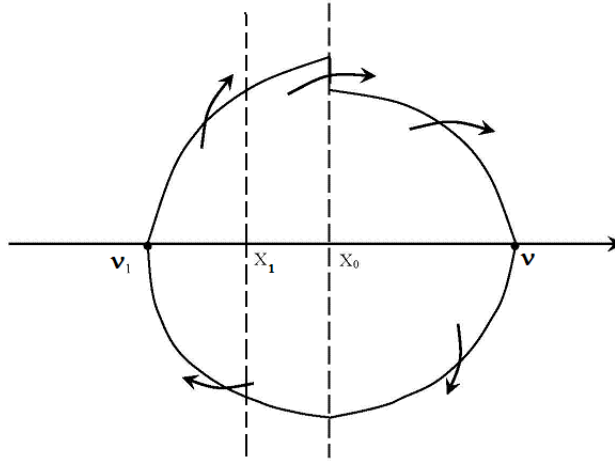


Рис. 12

Легко получить аналог теоремы 9 для системы (35) в полуплоскости $\{x < a\}$. Легко также предъявить функции $f(x)$ и $g(x)$, для которых выполнены условия теоремы 9 и ее аналога в полуплоскости $\{x < a\}$. Тем самым, можно выделить классы систем вида (35) у которых существует по два цикла, окружающих каждое из состояний равновесия.

Естественным образом здесь возникает следующее предположение.

Гипотеза. *Существуют параметры квадратичной системы (30), для которой выполнены все условия теоремы 9 и ее аналога в полуплоскости $\{x < a\}$.*

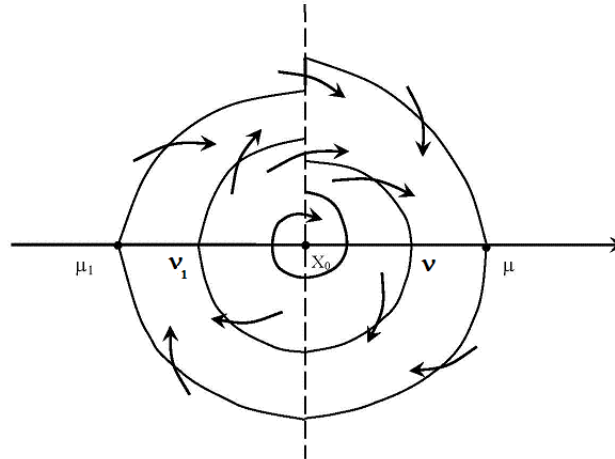


Рис. 13

Напомним, что исследование предельных циклов квадратичных систем (30) стимулировалось 16-й проблемой Гильберта и различными ее вариантами [40–45].

5. Системы сравнения в задачах синхронизации

Приведем здесь один изящный результат [46, 47], который имеет различные обобщения [47–51] и который явился первой наглядной демонстрацией преимущества метода двумерных систем сравнения.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \sin x = p(t), \quad (50)$$

где α – положительное число, $p(t)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$p_1 < p(t) < p_2, \quad \forall t \in \mathbb{R}^1 \quad (51)$$

Здесь p_1 и p_2 – числа, такие, что $-1 < p_1 \leq p_2 < 1$.

Уравнение (50) описывает движение маятника под действием нестационарной силы, динамику синхронной машины с переменной нагрузкой, систему фазовой автоподстройки частоты с нестабильным эталонным генератором [49].

Предположим, что все решения уравнений

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \sin x = p_1, \quad (52)$$

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \sin x = p_2 \quad (53)$$

ограничены на $[0, +\infty)$.

Теорема 10 [46, 47]. Если ограничены при $t \geq 0$ все решения уравнений (52) и (53), то также ограничено при $t \geq 0$ любое решение $x(t)$ уравнения (50).

Доказательство. Рассмотрим следующие системы, эквивалентные соответственно уравнениям (50), (52) и (53)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \sin x_1 + p(t). \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \sin x_1 + p_1. \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \sin x_1 + p_2. \end{aligned} \quad (56)$$

Хорошо известно [9–11], что из ограниченности всех решений систем (55) и (56) следует существование решений $F_k(\sigma)$ и $G_k(\sigma)$ уравнений

$$F'F + \alpha F + \sin \sigma = p_1, \quad (57)$$

$$G'G + \alpha G + \sin \sigma = p_2, \quad (58)$$

удовлетворяющих следующим соотношениям (рис. 14):

$$\begin{aligned} F_k(\sigma_1 + 2\pi k) &= 0, \\ F_k(\sigma) &< 0, \quad \forall \sigma > \sigma_1 + 2k\pi, \\ F_k(\sigma) &> 0, \quad \forall \sigma < \sigma_1 + 2k\pi, \\ \lim_{\sigma \rightarrow \infty} |F_k(\sigma)| &= +\infty, \\ G_k(\sigma_2 + 2k\pi) &\leq 0, \\ G_k(\sigma) &< 0, \quad \forall \sigma > \sigma_2 + 2k\pi, \\ G_k(\sigma) &> 0, \quad \forall \sigma < \sigma_2 + 2k\pi, \\ \lim_{\sigma \rightarrow \infty} |G_k(\sigma)| &= +\infty. \end{aligned}$$

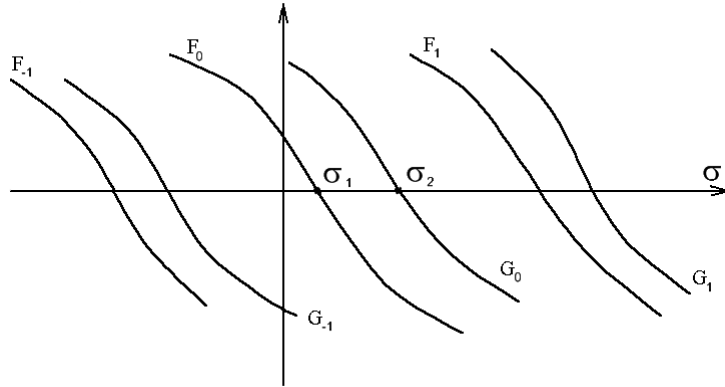


Рис. 14

Здесь σ_1 и σ_2 – соответственно нули функций $\sin \sigma - p_1$ и $\sin \sigma - p_2$ на множестве $[0, 2\pi)$ такие, что $\cos \sigma_1 < 0$ и $\cos \sigma_2 < 0$. Рассмотрим теперь решение $x_1(t), x_2(t)$ системы (54), удовлетворяющее при некотором t условию

$$x_2(t) = G_k(x_1(t)) > 0.$$

Очевидно, что

$$\frac{\dot{x}_2(t)}{\dot{x}_1(t)} = \frac{-\alpha G_k(x_1(t)) - \sin x_1(t) + p_2(t)}{G_k(x_1(t))} <$$

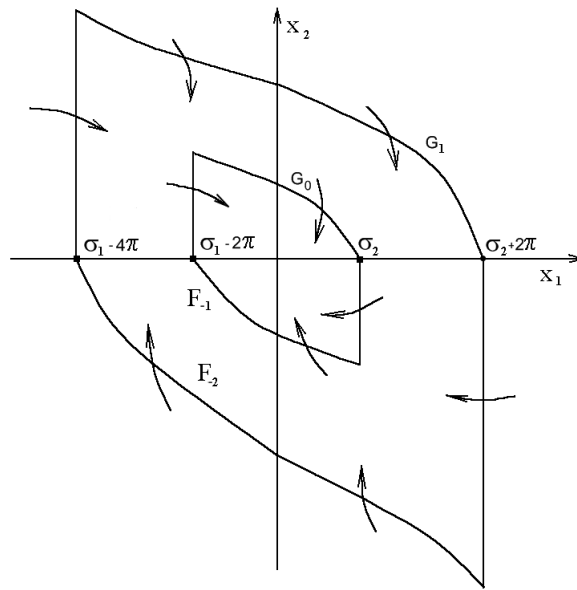


Рис. 15

$$\lt \frac{-\alpha G_k(x_1(t)) - \sin x_1(t) + p_2}{G_k(x_1(t))} = \frac{dG_k(x)}{dx} \Big|_{x=x_1(t)}.$$

Следовательно, кривая $x_2 = G_k(x_1)$, $x_2 > 0$ трансверсальна по отношению к векторному полю системы (54) и решение $x_1(t), x_2(t)$ пересекает эту кривую "сверху вниз".

Аналогичным образом доказывается, что кривая $x_2 = F_k(x_1)$, $x_2 < 0$ трансверсальна по отношению к векторному полю системы (54) и решение $x_1(t), x_2(t)$ пересекает эту кривую "снизу вверх".

Таким образом, здесь имеется семейство замкнутых трансверсальных кривых, которые изображены на рисунке 15. Это семейство зависит от целого параметра k и для любой точки пространства $\{x_1, x_2\}$ найдется замкнутая трансверсальная кривая, содержащая внутри эту точку.

Существование такого семейства замкнутых трансверсальных кривых и доказывает ограниченность решений системы (54) при $t \geq 0$. \square

Все обобщения этого результата на многомерный случай дают более грубые условия ограниченности [48–52].

Поэтому здесь можно сформулировать некоторый аналог проблемы Айзермана.

Доказать или опровергнуть следующую гипотезу.

Если все решения системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B(\sin(Cx) + p) \quad (59)$$

ограничены при $t \geq 0$ для любого числа $p \in (p_1, p_2)$, то также будут ограничены при $t \geq 0$ все решения системы

$$\frac{dy}{dt} = Ay + B(\sin(Cy) + p(t)) \quad (60)$$

для любой функции $p(t)$, удовлетворяющей условиям

$$p_1 < p(t) < p_2, \quad \forall t \geq 0.$$

Здесь A – постоянная $n \times n$ -матрица, B и C – соответственно n -мерные вектор-столбец и вектор-строка.

Литература

1. Айзерман М.А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости в большом динамических систем // Успехи математических наук. 1949. Т.4, вып. 4. С.187–188
2. Малкин И.Г. Об устойчивости систем автоматического регулирования // Прикладная математика и механика, 1952. Т.16, вып. 4. С.495–499
3. Еругин Н.П. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования // Прикладная математика и механика. 1952. Т.16, вып.5. С.620–628
4. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
5. Леонов Г.А. Теория управления. Петербург: Изд-во Санкт-Петербургского университета. 2006
6. Leonov G.A. Mathematical Problems of Control Theory. Singapore. World Scientific, 2001
7. Lefschetz S. Stability of Nonlinear Control Systems. New York, Academic Press, 1965
8. Красовский Н.Н. Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений // Прикладная математика и механика. 1952. Т.16, вып. 5. С.547–554
9. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука. 1978
10. Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V.B. Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications. Singapore. World Scientific. 1996.
11. Yakubovich V.A., Leonov G.A., Gelig A.Kh. Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities. Singapore. World Scientific. 2004.
12. Леонов Г.А. Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости двумерных нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. 2005. № 7. С.43–53
13. Левин А.Ю. Об устойчивости решений уравнений второго порядка // Доклады АН СССР, 1961. Т.141, № 6. С.1298–1301
14. Александров В.В., Жермоленко В.Н. Об абсолютной устойчивости систем второго порядка // Вестник МГУ. Математика, механика. 1972, 5. С.102–109
15. Филиппов А.Ф. Условия устойчивости однородных систем с произвольными переключениями режимов // Автоматика и телемеханика. 1980, № 8. С.48–55
16. Александров В.В., Морозова О.И. О необходимых и достаточных условиях абсолютной устойчивости систем второго порядка // Автоматика и телемеханика. 1985, № 8. С.161–164
17. Пятницкий Е.С. Критерий абсолютной устойчивости нелинейных регулируемых систем второго порядка с одним нелинейным нестационарным элементом // Автоматика и телемеханика. 1971. № 1. С. 5–16
18. Молчанов А.П., Пятницкий Е.С. Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления. II // Автоматика и телемеханика. 1986. № 4. С. 5–15
19. Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. New York: Springer. 1999

20. Lefschetz S. *Differential Equations: Geometric Theory*, N. Y.: L.: Interscience, 1957.= Лefшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр.лит., 1961
21. Cesari L. *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*. Berlin. Springer. 1959.= Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964
22. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Л.: Наука, 1964
23. Leonov G.A., Reitman V. *Attraktoreingrenzung für nichtlineare Systeme*. Leipzig: Teubner, 1987
24. Leonov G.A., Reitmann V. Das Rossler-System ist nicht dissipativ in Sinne von Levinson // *Mathematische Nachrichten*. 1986. V. 129. S. 185–196
25. Леонов Г.А. О локализации аттракторов уравнения Лъенара // *Прикладная математика и механика*, 2002. Т.66, вып.3. С.396-401
26. Леонов Г.А. Колебания в системах с нелинейным демпфированием // *Прикладная математика и механика*, 1993. Т.57, вып.5. С.183–184
27. Леонов Г.А. Локализация аттракторов неавтономного уравнения Лъенара методом разрывных систем сравнения // *Прикладная математика и механика*, 1996. Т.60, вып.2. С.332-336
28. Леонов Г.А. Оценка снизу числа циклов двумерных динамических систем // *Вест. С.-Петербургского ун-та. Сер.1*, 1994, вып.1, № 1. С.42-46.
29. Леонов Г.А. Глобальная устойчивость двумерных систем управления угловой ориентацией // *Прикладная математика и механика*, 2000. Т.64, вып. 5. С.890–896
30. Leonov G.A., Burkin I.M., Shepelyavi A.I. *Frequency Methods in Oscillation Theory*. Dordrecht. Kluwer. 1996.
31. Leonov G.A., Sundkvist E.A. Localization of the Lienard Equatiopn’s Attractors and Cycles // *Differential Equations and Dynamical Systems*. 2005. Vol. 13, N 3–4. P.275–294
32. Cartwright M.L. Van der Pol’s equation for relaxation oscillation // *Contribution to the Theory of Non-linear Oscillations*. e.g. ed. S.Lefschetz. *Ann. of Math. Studies* N 29, vol. 11. PP. 3–18. Princeton Univ. Press. Princeton. 1952
33. Van Horssen W.T. A perturbation method based on integrating factors. *SIAM J. Appl. Math.*, 58 (1999). P. 1427–1443
34. Alsholm P. Existence of limit cycles for generalized Lienard equations // *J. Math. Anal. Appl.*, 1992. V.171. №1. P.242-255
35. Odani K. Existence of exactly N periodic solutions for Lienard systems // *Funkcialaj Ekvacioj*, 1996. V.39. №2. P.217-234
36. Odani K. On the limit cycle of the van der Pol equation. // *Equadiff99 CD-ROM: Papers*, Z. Dosl. J. Kuben. J. Vosmansk. eds. Masaryk Univ., Czech. 1998. P.229–235
37. Odani K. On the limit cycle of the Lienard equation // *Arch. Math. (Brno)* 36 (2000). P.25–31
38. Leonov G.A. Two-Dimensional Quadratic Systems as a Lienard Equation // *Differential Equations and Dynamical Systems*. 1997. Vol. 5. N 3/4. P. 289–297
39. Леонов Г.А. Проблема оценки числа циклов двумерных квадратичных систем с точки зрения нелинейной механики // *Украинский математический журнал*. 1998. Т. 50, N 1. С.48–57.
40. Арнольд В.И. *Экспериментальная математика*. М. Фазис. 2005.
41. Hilbert D. *Mathematical problems*. Bull. Amer. Math. Soc. 1902. V.8. P.437–479
42. Lloyd N.G. Limit cycles of polynomial systems – some recent developments. In book: *New Direction in Dynamical Systems*. Cambridge University Press. 1988. P.192–234

43. Blows T.R., Perko L.M. Bifurcation of limit cycles from centers and separatix cycles of planar analytic systems. SIAM Review. 1994. Vol. 36. N 3. P.341–376
44. Pyashenko Yu. Centennial history of Hilbert's 16th problem Bulletin of the AMS. 2002. Vol. 39, N 3. P.301–354
45. Гринь А.А., Черкас Л.А. Экстремумы функции Андронова-Хопфа полиномиальной системы Лъенара // Дифференциальные уравнения. 2005. Т.41, N 1. С.50–60
46. Белоусина Л.Н., Белых В.Н. Качественное исследование динамической системы на цилиндре // Дифференциальные уравнения, 1973. Т.9, № 3. С.403-415
47. Белых В.Н. Анализ непрерывных СФС методом двумерных систем сравнения. В книге: Системы фазовой синхронизации. Под ред. Шахгильдяна В.В., Белоусиной Л.Н. М.: Радио и связь, 1982. С.45-55
48. Белых В.Н., Некоркин В.И. Качественные исследования системы трех дифференциальных уравнений теории фазовой синхронизации // Прикладная математика и механика. 1975. Т.39, вып. 4. С.642-649
49. Леонов Г. А., Смирнова В. Б. Математические проблемы теории фазовой синхронизации. СПб., 2000.
50. Leonov G.A., Tschschijowa T.L., Reitmann V. Eine Frequenzvariante der Vergleichsmethode von Belych-Nekorkin in der Theorie der Phasensynchronisation // Wissenschaftliche Zeitschrift der Techniscge Universitat Dresden. 1983. Vol. 32, N 1. S. 51–58
51. Леонов Г.А. Теорема сведения для нестационарных нелинейностей // Вестник Ленинградского университета. 1977. № 7. С. 38–42
52. Леонов Г.А. Об ограниченности решений неавтономных дифференциальных уравнений // Вестник Ленинградского университета. 1983. № 7. С. 24–26

РЕФЕРАТ

УДК 531.36:534.1

Л е о н о в Г. А. Семейства трансверсальных кривых для двумерных систем дифференциальных уравнений // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2006. Вып. (N). С. 00–00.

Описаны два эффективных метода построения семейств трансверсальных кривых для двумерных систем: метод систем сравнения, когда трансверсальными кривыми являются траектории некоторых, более простых, чем исходная система, систем сравнения, и метод сшивания трансверсальной кривой из линий уровня нескольких отличных друг от друга функций ляпуновского типа. С помощью этих методов решена проблема получения необходимых и достаточных условий абсолютной устойчивости двумерных нестационарных систем, проблема Колониуса-Хинрихсена-Вирта для линейных двумерных управляемых систем, проблема локализации аттракторов уравнения Лъенара и проблема Одани. Библиогр. 52 назв. Ил. 15.

АННОТАЦИЯ

Л е о н о в Г. А. Семейства трансверсальных кривых для двумерных систем дифференциальных уравнений

Рассмотрены проблема необходимых и достаточных условий абсолютной устойчивости двумерных нестационарных систем, проблема Колониуса–Хинрихсена–Вирта для двумерных систем, проблема локализации аттракторов уравнения Лянара.

SUMMARY

Leonov G. A. Sets of transversal curves for two-dimensional differential equations.

Problem of necessary and sufficient conditions of absolute stability for two-dimensional time varying systems, problem Colonius-Hinrichsen-Wirth for two-dimensional linear control systems and problem of localization of attractors of Lienard equation are solved.

Сведения об авторах:

(Статья: Леонов Г.А. Семейства трансверсальных кривых для двумерных систем дифференциальных уравнений)

Леонов Геннадий Алексеевич — доктор физ.-мат.наук, профессор
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета

Дом.адрес: 199053, г.Санкт-Петербург, Тучков переулок, д.3, кв.16

Дом. телефон: 3211448