

# *Мультиагентные системы*

## **Метод усредненных моделей в задаче достижения консенсуса<sup>1</sup>**

*Н. О. Амелина, аспирант*

*А. Л. Фрадков, д. т. н.<sup>2</sup>*

*Санкт-Петербургский государственный университет*

*Институт проблем машиноведения РАН*

*leishe@mail.ru, fradkov@mail.ru*

---

В статье исследуются свойства консенсусного мультиагентного управления, формируемого по протоколу (алгоритму) локального голосования с неубывающим до нуля размером шага, при случайно изменяющейся структуре связей в сети и наблюдениях со случайными задержками и помехами для агентов с нелинейной динамикой состояний. Для исследования поведения системы используется метод усредненных моделей.

*Ключевые слова:* достижение консенсуса, мультиагентные системы, метод усредненных моделей.

### **1. Введение**

Задачи управления и распределенного взаимодействия в сетях динамических систем привлекают в последнее десятилетие внимание все большего числа исследователей. Во многом это объясняется широким применением мультиагентных систем в разных областях науки, включая автоматическую подстройку параметров нейронных сетей распознавания, управление формациями, роение, распределенные сенсорные сети, управление перегрузкой в сетях связи, взаимодействие групп беспилотных летательных аппаратов, относительное выравнивание групп спутников, управление движением групп мобильных роботов, синхронизации в энергосистемах и др.

На современном этапе развития теория управления фокусируется на исследовании стохастических динамических систем, состоящих из объектов с нелинейностями в математических моделях, неопределенностями характеристик объектов управления и внешних воздействий, наличием задержек в измерениях состояний объ-

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ФЦП “Кадры” (госконтракт №16.740.11.0042 от 01.09.2010).

<sup>2</sup>©Н. О. Амелина, А. Л. Фрадков, 2012

ектов сети, переменной структурой сетевых связей, полной или частичной децентрализованностью регуляторов. В [1–5] заложены основы теоретического описания, методов анализа и синтеза децентрализованного адаптивного мультиагентного управления и дан широкий круг возможных практических приложений в управлении сложными производственными, энергетическими и техническими системами.

Несмотря на большое количество публикаций по этой тематике, пока удовлетворительные решения получены лишь для ограниченного класса практически важных задач, так как решение таких проблем существенно усложняется, с одной стороны, из-за обмена неполной информацией, которая, кроме того, обычно измеряется с задержками и помехами, а, с другой, из-за эффектов квантования (дискретизации), свойственных всем цифровым системам.

Предположения о доступности для измерения всех состояний объектов сети и возможности использования централизованного регулятора являются ограничительными при практическом использовании синтезированных результатов на практике, особенно при большой размерности пространства состояний объектов и большом количестве объектов в сети.

В [6–10] изучают алгоритмы управления в вычислительных, производственных сетях, сетях обслуживания, транспортных и логистических сетях, в узлы которых выполняют определенные действия параллельно. Зачастую качество работы достаточно простых адаптивных алгоритмов оказывается удовлетворительным, но остаются открытыми вопросы их теоретического обоснования.

Для решения задачи достижения консенсуса группой взаимодействующих агентов, обменивающихся информацией, в [5, 11–15] предлагается использовать алгоритмы типа стохастического градиента, которые ранее положительно зарекомендовали себя в адаптивных системах [16–21]. Работоспособность алгоритмов стохастической аппроксимации с постоянным размером шага в условиях нестационарных функционалов качества исследовалась в [22–25], причем была показана их применимость для балансировки загрузки узлов централизованной вычислительной сети. При динамических внешних изменениях состояний агентов с течением времени (поступлении новых заданий и т. п.) алгоритмы стохастической аппроксимации с уменьшающимся до нуля размером шага неработоспособны.

Для исследования динамики работы стохастической дискретной системы применяется метод усредненных моделей, [27–31], который позволяет свести изучение динамики стохастического дискретного уравнения к изучению соответствующей дискретной усредненной или непрерывной модели. Этот метод имеет широкое применение в современной теории управления, теории динамических систем, нелинейной механики и т. д.

Указанные проблемы актуализируют необходимость исследования свойств алгоритма типа стохастической аппроксимации при малом постоянном или неуменьшающемся до нуля размере шага при нелинейной постановке задачи в условиях переменной структуры связей в сети, наблюдениях с задержками и помехами.

## 2. Основные сведения из теории графов

В работе будут использоваться сведения из теории графов. Основные определения взяты из [32].

*Граф* — это пара  $(N, E)$ , где  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  — множество узлов или вершин и  $E$  — множество ребер или дуг. Предполагаем, что граф *простой*, т. е.  $(i, i) \notin E, \forall i$  отсутствуют петли и между узлами может быть максимум одна дуга. Пара  $(N, E')$ , где  $E'$  — подмножество  $E$ , называется *частичным графом* графа  $(N, E)$ .

Элемент множества  $E$ , определяемый парой  $(i, j)$ , называется ребром или дугой из  $i$  в  $j$  и представляется в виде стрелки с началом в  $i$  и концом в  $j$ . Говорят, что ребро  $(i, j)$  исходящее по отношению к узлу  $i$ , и входящее по отношению к  $j$ ; узел  $i$  называется *родителем*, а узел  $j$  — *дочерним*.

*Полустепенью захода* вершины  $i$  называется количество входящих в нее ребер, а *полустепенью исхода* вершины  $i$  — количество выходящих ребер.

*Множеством соседей* узла  $i$  называется множество  $N^i = \{j : (j, i) \in E\}$ , т. е. множество узлов с ребрами входящими в  $i$ . Число соседей  $|N^i|$  узла  $i$  равно его полустепени захода.

Если  $(i, j) \in E \Rightarrow (j, i) \in E, \forall i, j$ , тогда граф называется *дву направленным* (неориентированным), иначе граф называется *ориентированным* (или орграфом). Если полустепень захода совпадает с полустепенью исхода  $\forall i \in N$ , тогда граф называется *сбалансированным*.

*Направленный путь* из узла  $i_1$  в узел  $i_s$  состоит из последо-

вательности узлов  $i_1, \dots, i_s$ ,  $s \geq 2$  таких, что  $(i_k, i_{k+1}) \in E, k \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ .

Говорят, что узел  $i$  *связан* с узлом  $j$ , если есть направленный путь из  $i$  в  $j$ . *Расстояние от  $i$  до  $j$*  — это длина кратчайшего пути из  $i$  в  $j$ . Граф называется *сильно связанным*, если  $i$  и  $j$  связаны для всех различных узлов  $i, j \in N$ . Для двунаправленных графов, если есть направленный путь из  $i$  в  $j$ , тогда есть направленный путь из  $j$  в  $i$ . Такой граф называется *связанным*.

Связный граф, в котором число дуг на одну меньше числа вершин, называется *деревом*. Дерево, являющееся частичным графом связного графа, называется *остовным деревом*. Назовем *множеством корней* или *множеством лидеров* графа набор узлов, которые являются корнями для всех остовых деревьев. Если граф сильно связан, он содержит по крайней мере одно остовное дерево. На самом деле, если граф сильно связан, тогда все узлы являются узлами-лидерами.

Сопоставим каждому ребру  $(j, i) \in E$  вес  $a^{i,j}$ . (Здесь и далее верхние индексы показывают соответствующие номера узлов, а не показатели степени). Предположим, что все веса строго положительны. Граф может быть представлен *матрицей смежности (или связности)*  $A = [a^{i,j}]$  с весами  $a^{i,j} > 0$ , если  $(j, i) \in E$ , и  $a^{i,j} = 0$  в противном случае. Отметим, что  $a^{i,i} = 0$ . Для графа, который представлен матрицей смежности  $A$ , будем использовать обозначение  $\mathcal{G}_A$ .

Определим *взвешенную полустепень захода вершины  $i$*  как сумму  $i$ -й строки матрицы  $A$ :  $d^i(A) = \sum_{j=1}^n a^{i,j}$  и *взвешенную полустепень исхода вершины  $i$*  как сумму  $i$ -го столбца матрицы  $A$ :  $d_0^i(A) = \sum_{j=1}^n a^{j,i}$ .

Если  $a^{i,j} = a^{j,i}, \forall i, j \in N$ , т. е. веса ребер  $(i, j)$  и  $(j, i)$  совпадают, то граф является неориентированным (двунаправленным). При этом матрица его смежности симметрична.

Граф называется *сбалансированным по весам*, если взвешенная полустепень захода совпадает с взвешенной полустепенью исхода для всех узлов  $i$ . Если все ненулевые веса ребер равны 1, это то же самое, что и определение сбалансированного графа. Неориентированный граф является сбалансированным по весам, так как  $A = A^T$  и сумма  $i$ -й строки равна сумме по  $i$ -му столбцу. (Здесь и далее  $\cdot^T$  — обозначение операции транспонирования матрицы или вектора.) В дальнейшем, говоря о полустепени захода или исхода, а также

о сбалансированности графа, будем подразумевать взвешенные полустанции захода или исхода и сбалансированность по весам.

Для графа  $\mathcal{G}_A$  определим *диагональную матрицу степеней вершин графа*  $D(A) = \text{diag}\{d^i(A)\}$  из полустанций захода и *лапласиан* графа  $\mathcal{L}(A) = D(A) - A$ . Заметим, что суммы по строкам элементов лапласиана равны нулю. Следовательно, любой вектор, составленный из одинаковых констант является правым собственным вектором, соответствующим нулевому собственному значению  $\mathcal{L}(A)$ .

В дальнейшем будет важен факт из теории графов.

**Л е м м а 1.** [12, 33] *Лапласиан  $\mathcal{L}(A)$  графа  $\mathcal{G}_A$  имеет ранг равный  $n - 1$  тогда и только тогда, когда граф  $\mathcal{G}_A$  имеет остовное дерево.*

Отметим важное следствие:

**С л е д с т в и е 1.** *Если граф  $\mathcal{G}_A$  сильно связный, то его лапласиан  $\mathcal{L}(A)$  имеет ранг равный  $n - 1$ .*

Обозначим  $d_{\max}(A)$  максимальную полустанцию захода графа  $\mathcal{G}_A$ . Применив круговой критерий Гершгорина [34], можно вывести еще одно важное свойство лапласиана: *все собственные числа матрицы  $\mathcal{L}(A)$  имеют неотрицательную вещественную часть и лежат в круге с центром на вещественной оси в точке  $d_{\max}(A)$  и радиусом  $d_{\max}(A)$ .*

Обозначим  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — собственные числа матрицы  $\mathcal{L}(A)$ , упорядочив их по возрастанию модулей вещественных частей:  $0 \leq |Re(\lambda_1)| \leq |Re(\lambda_2)| \leq \dots \leq |Re(\lambda_n)|$ . Если у графа есть остовное дерево, тогда  $\lambda_1 = 0$  — простое собственное число, а все остальные собственные значения  $\mathcal{L}$  находятся в открытой правой полосине комплексной плоскости.

Второе собственное число  $\lambda_2$  матрицы  $\mathcal{L}$  играет важную роль во многих приложениях. Его часто называют “собственным числом Фидлера (Fiedler)”. Для неориентированного графа в [26] показано:

$$Re(\lambda_2) \leq \frac{n}{n-1} \min_{i \in N} d^i(A),$$

а для связного неориентированного графа  $G_A$

$$Re(\lambda_2) \geq \frac{1}{\text{diam}G_A \cdot \text{vol}G_A},$$

где  $\text{diam}G_A$  — наибольшее расстояние между двумя узлами,  $\text{vol}G_A = \sum_{i \in N} d^i(A)$ .

В дальнейшем тексте будут использоваться нормы векторов или матриц  $M$ , понимаемые в смысле *нормы Фробениуса*:

$$\|M\| = [\text{Tr}(M^T M)]^{1/2},$$

где  $\text{Tr}(\cdot)$  — след (сумма диагональных элементов) матрицы. В некоторых случаях для матрицы  $A$  будет использоваться ее векторная норма, т. е. квадратный корень из суммы квадратов всех ее элементов, которую будем обозначать  $\|A\|_2$ .

### 3. Задача о достижении консенсуса

Рассмотрим динамическую сеть из набора узлов (агентов), которые сотрудничают, чтобы добиться того, что каждый не может достичь в одиночку.

Для описания топологии сети будем использовать понятия теории графов. Будем считать, что топология динамической сети моделируется с помощью последовательности орграфов  $\{(N, E_t)\}_{t \geq 0}$ , где  $E_t \subset E$  меняется во времени, и обозначим  $A_t$  соответствующие матрицы смежности. Если  $(j, i) \in E_t$ , то говорим, что узел  $i$  в момент времени  $t$  получает информацию от узла  $j$  для целей управления с обратной связью. Обозначим максимальное множество каналов связи  $E_{\max} = \{(i, j) : \sup_{t \geq 0} ((i, j) \in E_t) > 0\}$ .

Для определения понятия динамических агентов сопоставим каждому узлу  $i$  графа изменяющиеся во времени состояние  $x_t^i \in \mathbb{R}$ . Переменными состояния узлов могут быть, например, физические характеристики (высота, положение, температура, напряжение и др.) или другие данные.

Пример графа  $\mathcal{G}_{\max}$  приведен на рис. 1 (слева). На рис. 1 (справа) сплошными линиями показан граф  $\mathcal{G}_{A_t}$  в некоторый момент времени  $t$ .

Пусть  $u_t^i \in \mathbb{R}$  — управляющие воздействия, которые в момент времени  $t$  действуют на узел  $i$ . Будем считать, что изменения состояний узлов описываются разностными уравнениями:

$$x_{t+1}^i = x_t^i + f^i(x_t^i, u_t^i), \quad i \in N, \quad (1)$$

при дискретном времени  $t = 0, 1, 2, \dots, T$ , или обыкновенными дифференциальными

$$\dot{x}_t^i = f^i(x_t^i, u_t^i), \quad i \in N, \quad (2)$$

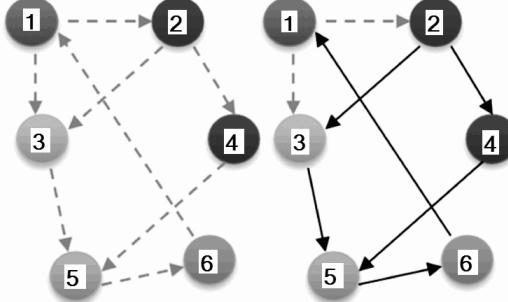


Рис. 1: Пример системы из  $n = 6$  узлов с переключающейся топологией.

при непрерывном времени  $t \in [0; T]$ , в которых  $f^i(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторые функции.

Для формирования стратегии управления каждый узел  $i \in N$  имеет информацию о своем собственном состоянии

$$y_t^{i,i} = x_t^i + w_t^{i,i}, \quad (3)$$

(может быть и зашумленную) и, если  $N_t^i \neq \emptyset$ , зашумленные наблюдения о состояниях соседей:

$$y_t^{i,j} = x_{t-d_t^{i,j}}^j + w_t^{i,j}, \quad j \in N_t^i, \quad (4)$$

где  $w_t^{i,i}, w_t^{i,j}$  — помехи, а  $0 \leq d_t^{i,j} \leq \bar{d}$  — целочисленная задержка,  $\bar{d}$  — максимально возможная задержка. Так как система начинает работу при  $t = 0$ , неявным требованием к множеству соседей будет:

$$j \in N_t^i \Rightarrow t - d_t^{i,j} \geq 0. \quad (5)$$

Для удобства предположим, что величины  $w_t^{i,j}$  и  $d_t^{i,j}$  определены для всех  $(j, i) \in E_{\max}$ . Если  $(j, i)$  не появляется в  $E_t$ , тогда (4) физически не работает, а  $w_t^{i,j}$  и  $d_t^{i,j}$  можно считать нулями.

**Определение 1.** Будем называть протоколом (алгоритмом) управления с топологией  $(N, E_t)$  обратную связь по наблюдениям состояний

$$u_t^i = K_t^i(y_t^{i,j_1}, \dots, y_t^{i,j_{m_i}}), \quad (6)$$

где множество  $\{j_1, \dots, j_{m_i}\} \in \{i\} \cup \overline{N}_t^i$ ,  $\overline{N}_t^i \subseteq N_t^i$ .

Широко используется протокол управления, известный под на-  
званием “протокол локального голосования”:

$$u_t^i = \alpha_t \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} (y_t^{i,j} - y_t^{i,i}), \quad (7)$$

в котором управляющий вход каждого узла зависит от взвешенной суммы разницы его состояния и информации о состояниях его соседей. Здесь  $\alpha_t > 0$  — размеры шагов протокола управления (7),  $b_t^{i,j} > 0 \forall j \in \bar{N}_t^i$ . Положив  $b_t^{i,j} = 0$  для всех остальных пар  $i, j$ , определим  $B_t = [b_t^{i,j}]$  — матрицу протокола управления (7).

Заметим, если состояние узла  $i$  и всех его соседей равны, то  $u_t^i = 0$  по протоколу (7). При этом в тех случаях, когда  $f^i(x_t^i, u_t^i) = u_t^i$ , состояние узла  $i$  не изменяется. Далее будет показано, что при некоторых условиях этот протокол приводит все состояния к одинаковым значениям.

**Определение 2.** Узлы  $i$  и  $j$  называются согласованными в сети в момент времени  $t$  тогда и только тогда, когда  $x_t^i = x_t^j$ .

Под консенсусным управлением будем понимать управление, обеспечивающее достижение консенсуса. Задача о достижении консенсуса — это согласование всех узлов между собой, т. е. требуется найти такой протокол управления, который переводит все состояния в одно и то же постоянное значение  $x^* = x^i \forall i \in N$ , называемое значением консенсуса.

**Определение 3.**  $n$  узлов достигают консенсуса в момент времени  $t$ , если существует величина  $x^* : x^* = x_t^i$  для всех  $i \in N$ .

Рассмотрим частный случай динамических систем на графах, когда для всех узлов  $i$  правые части уравнения динамики (1) полностью определяются только управлением:  $f^i(x_t^i, u_t^i) = u_t^i$ , и все наблюдения производятся без помех и задержек:  $y_t^{i,j} = x_t^j, j \in N_t^i$ .

Обозначив  $\bar{x}_t = [x_t^1; \dots; x_t^n]$  и  $\bar{u}_t = [u_t^1; \dots; u_t^n]$  соответствующие векторы-столбцы, полученные вертикальным соединением  $n$  чисел, можно переписать в матричном виде протокол управления (7):

$$\bar{u}_t = \alpha_t B_t - D(\alpha_t B_t) \bar{x}_t = -\mathcal{L}(\alpha_t B_t) \bar{x}_t \quad (8)$$

и уравнение динамики (1) в дискретном времени:

$$\bar{x}_{t+1} = \bar{x}_t + \bar{u}_t, t = 0, 1, 2, \dots, T, \quad (9)$$

а также и в непрерывном

$$\dot{\bar{x}}_t = \bar{u}_t, \quad t \in [0, T]. \quad (10)$$

При этом замкнутая система в дискретном времени принимает вид:

$$\bar{x}_{t+1} = (I - \mathcal{L}(\alpha_t B_t))\bar{x}_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots, T, \quad (11)$$

где  $I$  — матрица размерности  $n \times n$  из нулей и единиц на диагонали, а в непрерывном

$$\dot{\bar{x}}_t = -\mathcal{L}(\alpha_t B_t)\bar{x}_t, \quad t \in [0, T]. \quad (12)$$

**Определение 4.** *n узлов достигают асимптотического консенсуса, если существует величина  $x^*$  :  $x^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x_t^i$  для всех  $i \in N$ .*

Покажем, что протокол управления (7) с  $\alpha_t = \alpha$  и  $B_t = A$  асимптотически обеспечивает консенсус как для дискретной, так и для непрерывной модели.

Действительно, в дискретном случае уравнение (11) превращается в

$$\bar{x}_{t+1} = (I - \mathcal{L}(\alpha A))\bar{x}_t \equiv P\bar{x}_t, \quad (13)$$

где матрица Перрона  $P = I - \mathcal{L}(\alpha A)$  имеет одно простое собственное значение равное единице, а все остальные — внутри единичного круга, если

$$\alpha < \frac{1}{d_{\max}}. \quad (14)$$

Так как сумма элементов строк матрицы лапласиана  $\mathcal{L}$  равна нулю, то сумма элементов строк матрицы  $P$  равна единице, т. е. вектор  $\underline{1}$ , составленный из единиц, является правым собственным вектором матрицы  $P$ , соответствующим единичному собственному значению, которое является простым, если у графа есть оставное дерево. Все остальные собственные значения лежат внутри единичного круга. Следовательно, если у графа есть оставное дерево, то, обозначив  $\bar{z}_1 = [z^1, \dots, z^n]$  левый собственный вектор матрицы  $P$ , ортогональный  $\underline{1}$ , в пределе при  $t \rightarrow \infty$  получаем

$$\bar{x}_t \rightarrow \underline{1}(\bar{z}_1^T \bar{x}_0), \quad (15)$$

т. е. достигается асимптотический консенсус. Значение консенсуса  $x^*$  равно нормализованной линейной комбинации начальных состояний с весами равными элементам левого собственного вектора матрицы  $P$

$$x^* = \frac{\bar{z}_1^T \bar{x}_0}{\bar{z}_1^T \underline{1}} = \frac{\sum_{i=1}^n z^i x_0^i}{\sum_{i=1}^n z^i}. \quad (16)$$

Это значение зависит от топологии графа и, следовательно, от того, как узлы связаны между собой.

**Лемма 2.** *Если граф  $\mathcal{G}_A$  имеет оствное дерево и в протоколе управления (7) выбраны  $B_t = A$  и  $\alpha_t = \alpha$  так, что выполнено условие (14), то протокол управления (7) обеспечивает асимптотический консенсус для дискретной системы (9) и его значение  $x^*$  определяется формулой (16).*

Если граф сбалансированный, тогда суммы по строкам лапласиана  $\mathcal{L}$  равны суммам по соответствующим столбцам, и это свойство передается матрице  $P$ . Тогда  $\bar{z}_1 = c\underline{1}$  и значение консенсуса равно среднему значению начальных значений

$$x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_0^i$$

и не зависит от топологии графа.

В непрерывном случае имеем

$$\dot{\bar{x}} = -\mathcal{L}\bar{x}. \quad (17)$$

Обозначим  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — собственные числа матрицы  $\mathcal{L}$ , упорядочив их по возрастанию модулей вещественных частей:  $0 \leq |Re(\lambda_1)| < |Re(\lambda_2)| < \dots < |Re(\lambda_n)|$ , и пусть  $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n$  и  $\bar{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\underline{1}, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$  соответствующие им левые и правые ортонормированные собственные вектора матрицы  $\mathcal{L}$ . Если у графа есть оствное дерево, тогда  $\lambda_1 = 0$  — простое собственное число, а все остальные собственные значения  $\mathcal{L}$  находятся в открытой правой половине комплексной плоскости. т. е. система (17) частично устойчива с одним полюсом в начале координат и остальными в открытой левой полуплоскости.

Для первого левого собственного вектора  $\bar{z}_1 = [\bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n]$  матрицы  $\mathcal{L}$  несложно вывести

$$\frac{d}{dt}(\bar{z}_1^T \bar{x}_t) = \bar{z}_1^T \dot{\bar{x}}_t = -\bar{z}_1^T \mathcal{L} \bar{x}_t = 0,$$

т. е. величина  $\tilde{x} \equiv \bar{z}_1^T \bar{x}_t = \sum_{i=1}^n z_1^i x_t^i$  — инвариант — постоянна и не зависит от состояний узлов. Таким образом,  $\sum_{i=1}^n \bar{z}_1^i x_0^i = \sum_{i=1}^n \bar{z}_1^i x_t^i, \forall t$ .

Применяя модальное разложение можно записать вектор состояний через собственные числа и собственные векторы матрицы  $\mathcal{L}$ . Если все собственные значения матрицы  $\mathcal{L}$  простые (фактически важно только то условие, что  $\lambda_1$  — простое), то

$$\bar{x}_t = e^{-\mathcal{L}t} \bar{x}_0 = \sum_{j=1}^n \bar{r}_j e^{-\lambda_j t} \bar{z}_j^T \bar{x}_0 = \sum_{j=2}^n (\bar{z}_j^T \bar{x}_0) e^{-\lambda_j t} \bar{r}_j + \frac{\tilde{x}}{\sqrt{n}} \underline{1}. \quad (18)$$

В пределе при  $t \rightarrow \infty$  получаем  $x^t \rightarrow \frac{\tilde{x}}{\sqrt{n}} \underline{1}$  или  $x_i^t \rightarrow x^* = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{n}}, \forall i \in N$ , т. е. достигается асимптотический консенсус.

**Лемма 3.** *Если граф  $\mathcal{G}_A$  имеет основное дерево, то протокол управления (7) с  $\alpha_t = \alpha$  и  $B_t = A$  обеспечивает асимптотический консенсус для непрерывной системы (10) и его значение  $x^*$  определяется формулой*

$$x^* = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \bar{z}_1^i x_0^i \quad (19)$$

по вектору начальных данных  $\bar{x}_0$  и ортонормированному первому левому собственному вектору матрицы  $\mathcal{L}$ .

На конечном интервале времени можно говорить о достижении приближенного  $\varepsilon$ -консенсуса ( $\varepsilon > 0$ ).

**Определение 5.** *n узлов достигают  $\varepsilon$ -консенсуса в момент времени  $t$ , если существует такая величина  $x^*$ , что  $\|x_t^i - x^*\|^2 \leq \varepsilon$  для всех  $i \in N$ .*

**Определение 6.** *Величину  $T(\varepsilon)$  будем называть временем достижения  $\varepsilon$ -консенсуса, если для всех  $t \geq T(\varepsilon)$  все n узлов достигают  $\varepsilon$ -консенсуса.*

Из формулы (18), оценив квадрат нормы первого слагаемого

$$\left\| \sum_{j=2}^n (\bar{z}_j^T \bar{x}_0) e^{-\lambda_j t} \bar{r}_j \right\|^2 \leq e^{-2Re(\lambda_2)t} \|\bar{x}_0 - x^* \underline{1}\|^2,$$

можно получить выражение для временем достижения  $\varepsilon$ -консенсуса в системе (17)

$$T(\varepsilon) = \frac{1}{2Re(\lambda_2)} \ln \left( \frac{(n-1)\|x_0 - x^* \underline{1}\|^2}{\varepsilon} \right). \quad (20)$$

**Л е м м а 4.** *Если граф  $\mathcal{G}_A$  имеет основное дерево, то управление (7) с  $\alpha_t = \alpha$  и  $B_t = A$  обеспечивает  $\varepsilon$ -консенсус для непрерывной системы (10) для любого  $t \geq T(\varepsilon)$ , где  $T(\varepsilon)$  определено в (20), и его значение  $x^*$  определяется формулой (19).*

Похожая оценка для времени достижения  $\varepsilon$ -консенсуса может быть получена и для дискретной системы (13).

Неопределенности и задержки в наблюдениях могут существенно сказаться на характере поведения траектории замкнутой стохастической динамической системы. При анализе свойств получающихся решений для дискретных стохастических систем использование метода усредненных моделей Деревицкого-Фрадкова-Льюнга (ДФЛ-схемы) [27, 30] во многих случаях позволяет свести решение к исследованию свойств соответствующей детерминированной задачи.

#### 4. Основные предположения

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  — основное вероятностное пространство.

Рассмотрим динамическую сеть из  $n \in \mathbb{N}$  узлов (агентов)  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Обозначим  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  — множество узлов.

Пусть изменения в дискретном времени  $t = 0, 1, 2, \dots$  состояний узлов описываются разностными уравнениями (1):

$$x_{t+1}^i = x_t^i + f^i(x_t^i, u_t^i), \quad i \in N, \quad t = 0 \dots T,$$

в которых  $x_t^i \in \mathbb{R}$  — состояния узла  $i$  в момент времени  $t$ ,  $f^i(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторые функции:

**A1.**  $\forall i \in N$  функции  $f^i(x, u)$  гладкие и липшицевы по  $x$  и  $u$ :  $|f^i(x, u) - f^i(x', u')| \leq L_1(L_x|x - x'| + |u - u'|)$ , скорость роста ограничена:  $|f^i(x, u)|^2 \leq L_2(L_c + L_x|x|^2 + |u|^2)$ , при любом  $x$  верно  $E f^i(x, u) = f^i(x, E u)$  и  $f^i(x, 0) = 0$ ;

$u_t^i \in \mathbb{R}$  — управляющие воздействия, которые в момент времени  $t$  воздействуют на узел  $i$  и формируются по протоколу (7)

$$u_t^i = \alpha_t \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} (y_t^{i,j} - y_t^{i,i})$$

по зашумленной информации  $y_t^{i,i}$  (см. (3)) о состоянии самого узла  $i$  и, если  $\bar{N}_t^i \neq \emptyset$ , о состояниях соседей  $y_t^{i,j}$  (см. (4)).

Обозначим  $\bar{w}_t \in \mathbb{R}^{n^2}$  — вектор составленный из элементов  $w_t^{i,j}$ ,  $i, j \in N$  (матрица  $n \times n$  из помех наблюдений или нулей, расписанная по строкам в виде вектора).

При невырожденных помехах в наблюдениях  $\bar{w}_t$ , если  $\alpha_t$  не стремится к нулю, то асимптотический консенсус, как правило, не достигается. Будем рассматривать задачу о достижении приближенного среднеквадратического консенсуса.

**Определение 7.**  *$n$  узлов достигают среднеквадратического  $\varepsilon$ -консенсуса в момент времени  $t$ , если  $E\|x_t^i\|^2 < \infty$ ,  $i \in N$  и существует случайная переменная  $x^*$  такая, что  $E\|x_t^i - x^*\|^2 \leq \varepsilon$  для всех  $i \in N$ .*

Сформулируем достаточные условия о статистических характеристиках неопределенностей, при которых протокол локального голосования (7) обеспечивает выполнение  $\varepsilon$ -консенсуса.

**A2. а)**  $\forall i \in N, j \in N^i$  помехи наблюдений  $w_t^{i,j}$  — центрированные, независимые одинаково распределенные случайные величины с ограниченными дисперсиями:  $E(w_t^{i,j})^2 \leq \sigma_w^2$ .

**б)**  $\forall i \in N, j \in N^i$  появление переменного ребра  $(i, j)$  в графе  $\mathcal{G}_{A_t}$  — независимое случайное событие, вероятность которого  $p_a^{i,j}$  (т. е. матрицы  $A_t$  — независимые одинаково распределенные случайные матрицы).

**в)**  $\forall i \in N, j \in N^i$  веса  $b_t^{i,j}$  в протоколе управления — ограниченные случайные величины:  $\underline{b} \leq b_t^{i,j} \leq \bar{b}$  с вероятностью единица, и существуют пределы  $b^{i,j} = \lim_{t \rightarrow \infty} E b_t^{i,j}$ .

**г)**  $\forall i \in N, j \in N^i$  существует конечная величина  $\bar{d} \in \mathbb{N}$ :  $d_t^{i,j} \leq \bar{d}$  с вероятностью 1 и целочисленные задержки  $d_t^{i,j}$  — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения  $k = 0, \dots, \bar{d}$  с вероятностями  $p_k^{i,j}$ .

Кроме того, все эти случайные величины и матрицы независимы между собой и их элементы имеют ограниченные дисперсии.

Для  $t = 1, 2, \dots$  определим расширяющиеся последовательности  $\sigma$ -алгебр вероятностных событий  $\tilde{\mathcal{F}}_t$ , порождаемых случайными элементами  $A_1, \dots, A_{t-1}; d_1^{ij}, \dots, d_{t-1}^{ij}, b_1^{ij}, \dots, b_{t-1}^{ij}, w_1^{ij}, \dots, w_t^{ij}$ ,  $i, j \in N$ , и  $\mathcal{F}_t = \sigma\{\mathcal{F}_t^A, A_t; b_t^{ij}, d_t^{ij}, i, j \in N\}$ .

Для случайной величины  $X$  и  $\sigma$ -алгебры вероятностных событий  $\mathcal{F}$  введем обозначение  $E_{\mathcal{F}} X$  для условного математического ожидания  $X$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}$ .

Заметим, что случайные величины  $\bar{x}_t$  измеримы относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_{t-1}$ , т. е.  $E_{\mathcal{F}_{t-1}} \bar{x}_t = \bar{x}_t$ .

При  $\bar{d} > 0$  добавим к рассматриваемой топологии сети  $n\bar{d}$  новых узлов, включив новых “фиктивных” агентов с состояниями в момент времени  $t$ , равным соответствующим состояниям действительных агентов в предшествующие  $\bar{d}$  моментов времени:  $t-1, t-2, \dots, t-\bar{d}$ . Обозначим  $\bar{n} = n(\bar{d}+1)$  и определим матрицу  $A_{\max}$  размерности  $\bar{n} \times \bar{n}$  по правилу:

$$a_{\max}^{i,j} = p_{j \div \bar{d}}^{i,j \bmod \bar{d}} p_a^{i,j \bmod \bar{d}} b^{i,j \bmod \bar{d}}, \quad i \in N, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{n},$$

$$a_{\max}^{i,j} = 0, \quad i = n+1, n+2, \dots, \bar{n}, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{n}.$$

Здесь операции  $\bmod$  и  $\div$  — остаток от деления и деление нацело соответственно.

Заметим, что при  $\bar{d} = 0$  это определение топологии сети (матрицы  $A_{\max}$  размерности  $n \times n$ ) имеет вид

$$a_{\max}^{i,j} = p_a^{i,j} b^{i,j}, \quad i \in N, \quad j \in N.$$

Если рассмотреть последовательность случайных матриц  $\bar{A}_t$  с элементами, задающими связи в момент времени  $t$ , то они все одинаково распределены, а матрица  $A_{\max}$  фактически является ее математическим ожиданием (усреднением).

Будем считать, что для матрицы топологии сети выполняется следующее условие:

**А3.** Граф  $\{N, E_{\max}\}$  имеет остовное дерево и для любого ребра  $(j, i) \in E_{\max}$  среди элементов  $a_{\max}^{i,j}, a_{\max}^{i,j+n}, \dots, a_{\max}^{i,j+\bar{d}n}$  матрицы  $A_{\max}$  найдется хотя бы один ненулевой.

## 5. Применение метода непрерывной модели при отсутствии задержек

Перепишем уравнение динамики состояний сети в векторно-матричном виде:

$$\bar{x}_{t+1} = \bar{x}_t + F(\alpha_t, \bar{x}_t, \bar{w}_t), \quad (21)$$

где  $F(\alpha_t, \bar{x}_t, \bar{w}_t)$  — вектор размерности  $n$ :

$$F = \begin{pmatrix} \dots \\ f^i(x_t^i, \alpha_t \sum_{j \in N_t^i} b_t^{ij} ((x_t^j - x_t^i) + (w_t^{i,j} - w_t^{i,i}))) \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Применение метода усредненных моделей (см. [27, 30]) состоит в приближенной замене исходного стохастического разностного уравнения (21), описывающего динамику сети, обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dX}{d\tau} = R(\alpha, \bar{x}), \quad (23)$$

в котором

$$R(\alpha, \bar{x}) = R \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \frac{1}{\alpha} f^i(x^i, \alpha s^i(\bar{x})) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$s^i(\bar{x}) = \sum_{j \in N^i} a_{\max}^{i,j} (x^j - x^i) = -d^i(A_{\max}) x^i + \sum_{j=1}^n a_{\max}^{i,j} x^j, \quad i \in N.$$

Условия близости точек траекторий  $\{\bar{x}_t\}$  из (21)-(22) и  $\{\bar{x}(\tau_t)\}$ ,  $\tau_t = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{t-1}$ , (в частности, если  $\forall t \alpha_t = \alpha = \text{const}$ , тогда  $\tau_t = T\alpha$ ), из (23)-(24) на конечном промежутке времени следуют из соответствующих результатов [27, 28].

**Т е о р е м а 1.** *Если выполнены условия А1, А2а–в и  $0 < \alpha_t < \bar{\alpha}$ , тогда существует  $\tilde{\alpha}$  такое, что при  $\bar{\alpha} < \tilde{\alpha}$  справедлива следующая оценка:*

$$E \max_{0 \leq \tau_t \leq \tau_{\max}} \|\bar{x}_t - \bar{x}(\tau_t)\|^2 \leq C_1 e^{C_2 \tau_{\max}} \bar{\alpha}, \quad (25)$$

где  $C_1 > 0$ ,  $C_2 > 0$  — некоторые константы.

*Доказательство.* В дальнейших доказательствах будут полезны два факта.

**П р е д л о ж е н и е 1.** Для  $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$  и матрицы  $A_{\max}$  выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j \in N^i} a_{\max}^{ij} z^j \right)^2 \leq \|A_{\max}\|_2^2 \|\bar{z}\|^2.$$

*Доказательство.* Используя неравенство Коши-Буняковского получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j \in N^i} a_{\max}^{ij} z^j \right)^2 &\leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j \in N^i} a_{\max}^{ij} \right)^2 \left( \sum_{j \in N^i} z^j \right)^2 \leq \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{\max}^{ij} \right) \left( \sum_{j=1}^n z^j \right)^2 \leq \|A_{\max}\|_2^2 \|\bar{z}\|^2. \end{aligned}$$

□

**П р е д л о ж е н и е 2.**

$$\|\bar{s}(\bar{z})\|^2 \leq 2\|\mathcal{L}(A_{\max})\|_2^2 \|\bar{z}\|^2.$$

*Доказательство.* Используя результат Предложения 1, выводим

$$\begin{aligned} \|\bar{s}(\bar{z})\|^2 &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{\max}^{ij} (z^j - \bar{z}^j) \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \left( d^i(A_{\max}) |z^i| + \left| \sum_{j \in N^i} a_{\max}^{ij} z^j \right| \right)^2 \leq \\ &\leq 2 \left( \sum_{i=1}^n d^i(A_{\max})^2 + \|A_{\max}\|_2^2 \right) \|\bar{z}\|^2 = 2\|\mathcal{L}(A_{\max})\|_2^2 \|\bar{z}\|^2. \end{aligned}$$

□

**П р е д л о ж е н и е 3.** При выполнении условий **А2**  $s^i(\bar{x}) = \frac{1}{\alpha_t} E_{\mathcal{F}_{t-1}} u_t^i$  и справедлива оценка

$$\frac{1}{\alpha_t^2} E_{\mathcal{F}_{t-1}} u_t^i \leq (n-1)\bar{b}^2 \|\bar{x}_t - x_t^i \underline{1}\|^2 + n\bar{b}^2 \sigma_w^2, \quad i \in N.$$

*Доказательство.* В силу определения протокола(7)

$$\frac{1}{\alpha_t} u_t^i = \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} ((x_t^j - x_t^i) + (w_t^{ij} - w_t^{ii})).$$

Из условий **A2** следует, что  $s^i(\bar{x}) = \frac{1}{\alpha_t} E_{\mathcal{F}_{t-1}} u_t^i$ .

В силу центрированности помех наблюдений (по условию **A2a**) последовательно выводим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_t^2} E_{\mathcal{F}_{t-1}} u_t^{i2} &= E_{\mathcal{F}_{t-1}} \left( \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{ij} ((x_t^j - x_t^i) + (w_t^{ij} - w_t^{ii})) \right)^2 = \\ &= E_{\mathcal{F}_{t-1}} \left( \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{ij} (x_t^j - x_t^i) \right)^2 + E_{\mathcal{F}_{t-1}} \left( \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{ij} (w_t^{ij} - w_t^{ii}) \right)^2 \leq \\ &\leq \|\bar{x}_t - x_t^i\|^2 E_{\mathcal{F}_{t-1}} \sum_{j \in \bar{N}_t^i} (b_t^{ij})^2 + E_{\mathcal{F}_{t-1}} \left( \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{ij} (w_t^{ij} - w_t^{ii}) \right)^2 \\ &\leq (n-1)\bar{b}^2 \|\bar{x}_t - x_t^i\|^2 + n\bar{b}^2 \sigma_w^2. \end{aligned}$$

□

**П р е д л о ж е н и е 4.** При выполнении условий **A2** справедлива оценка

$$E_{\mathcal{F}_{t-1}} \left| \frac{1}{\alpha_t} u_t^i - s^i(\bar{x}) \right|^2 \leq (n-1)\bar{b}^2 \|\bar{x}_t - x_t^i\|^2 + n\bar{b}^2 \sigma_w^2, \quad i \in N.$$

*Доказательство.* В силу условий **A2**, взяв условное математическое ожидание относительно  $\sigma$ -алгебры  $\tilde{\mathcal{F}}_t$  следует, что  $s^i(\bar{x}) = Eu_t^i$ .

В силу центрированности помех наблюдений (по условию **A2a**), обозначив

$$\tilde{s}_t^i = \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{ij} (x_t^j - x_t^i), \quad \tilde{w}_t^i = \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{ij} (w_t^{ij} - w_t^{ii})$$

последовательно выводим

$$\begin{aligned} E_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \left| \frac{1}{\alpha_t} u_t^i - s^i(\bar{x}) \right|^2 &= E_{\tilde{\mathcal{F}}_t} |\tilde{s}_t^i + \tilde{w}_t^i - s^i(\bar{x})|^2 = E_{\tilde{\mathcal{F}}_t} (\tilde{s}_t^i)^2 + \\ &+ E_{\tilde{\mathcal{F}}_t} (\tilde{w}_t^i)^2 + (s^i(\bar{x}))^2 - 2s^i(\bar{x}) E_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \tilde{w}_t^i - 2s^i(\bar{x}) E_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \tilde{s}_t^i + 2E_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \tilde{s}_t^i \tilde{w}_t^i = \end{aligned}$$

$$= E_{\tilde{\mathcal{F}}_t}(\tilde{s}_t^i)^2 + E_{\tilde{\mathcal{F}}_t}(\tilde{w}_t^i)^2 - (s^i(\bar{x}))^2 = E_{\tilde{\mathcal{F}}_t}(\tilde{s}_t^i)^2 - (s^i(\bar{x}))^2 + n\bar{b}^2\sigma_w^2.$$

Взяв условное математическое ожидание относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_{t-1}$ , получаем

$$E_{\mathcal{F}_{t-1}}(\tilde{s}_t^i)^2 - (s^i(\bar{x}))^2 + n\bar{b}^2\sigma_w^2 \leq (n-1)\bar{b}^2\|\bar{x}_t - x_t^i \underline{1}\|^2 + n\bar{b}^2\sigma_w^2.$$

□

Для доказательства справедливости утверждения Теоремы 1 необходимо показать, что выполняются условия Липшица и роста из формулировки Теоремы 1 из [36].

Первое является прямым следствием из липшицевости функции  $f^i(x, u)$  и вида вектор-функции  $R(\alpha, \bar{z})$ . Пусть  $\bar{z}, \bar{z}' \in \mathbb{R}^n$ . В силу предположения Предложения 1 имеем

$$\begin{aligned} \|R(\alpha, \bar{z}) - R(\alpha, \bar{z}')\| &= \left( \frac{L_1^2}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n (L_x |z^i - z'^i| + |\alpha s^i(\bar{z} - \bar{z}')|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq L_1 \sqrt{2} \sqrt{\frac{L_x}{\alpha^2} + 2\|\mathcal{L}(A_{\max})\|_2^2} \|(\bar{z} - \bar{z}')\| = \bar{L}_1 \|\bar{z} - \bar{z}'\|. \end{aligned}$$

Аналогично выводим

$$\begin{aligned} \|R(\alpha, \bar{z}) - R(\alpha', \bar{z})\| &= \left( \sum_{i \in N} \left( \frac{1}{\alpha} f^i(z^i, \alpha s^i(\bar{z})) - \frac{1}{\alpha'} f^i(z^i, \alpha' s^i(\bar{z})) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left( \sum_{i \in N} \left( \frac{1}{\alpha} (f^i(z^i, \alpha s^i(\bar{z})) - f^i(z^i, \alpha' s^i(\bar{z}))) - \left( \frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\alpha} \right) f^i(z^i, \alpha' s^i(\bar{z})) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &= \left( 2 \sum_{i \in N} \frac{L_1^2(\alpha - \alpha')^2}{\alpha^2} |s^i(\bar{z})|^2 + L_2 \left( \frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\alpha} \right)^2 (L_c + L_x |z^i|^2 + \alpha'^2 |s^i(\bar{z})|^2) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \bar{L}_\alpha (1 + \|\bar{z}\|) |\alpha - \alpha'|. \end{aligned}$$

Докажем выполнение условия роста. Пусть  $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ . В силу ограниченности скорости роста  $f^i(x, u)$  и липшицевости по  $u$  (по предположению **A1**) имеем

$$E \left\| \frac{1}{\alpha_t} F(\alpha_t, \bar{z}, \bar{w}_t) - R(\alpha, \bar{z}) \right\|^2 = \sum_{i \in N} E \left| \frac{1}{\alpha_t} f^i(z^i, \alpha_t \tilde{s}_t^i) - \frac{1}{\alpha} f^i(z^i, \alpha s^i(\bar{z})) \right|^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in N} E \left| \frac{1}{\alpha_t} (f^i(z^i, \alpha_t \tilde{s}_t^i) - f^i(z^i, \alpha s^i(\bar{z})) ) - \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_t} \right) f^i(z^i, \alpha s^i(\bar{z})) \right|^2 \leq \\
&\leq 2 \sum_{i \in N} E \frac{1}{\alpha_t^2} |f^i(z^i, \alpha_t \tilde{s}_t^i) - f^i(z^i, \alpha s^i(\bar{z}))|^2 + \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_t} \right)^2 |f^i(z^i, \alpha s^i(\bar{z}))|^2 \leq \\
&\leq 2 \sum_{i \in N} E \frac{L_1}{\alpha_t^2} |\alpha_t \tilde{s}_t^i - \alpha s^i(\bar{z})|^2 + L_2 \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_t} \right)^2 (L_c + L_x |z^i|^2 + |s^i(\bar{z})|^2) \leq \\
&\leq \gamma_t (n L_c + L_x \|\bar{z}\|^2) + \sum_{i \in N} E 4 L_1 |\tilde{s}_t^i - s^i(\bar{z})|^2 + \left( \frac{4 L_1 (\alpha - \alpha_t)^2}{\alpha_t^2} + \gamma_t \right) s^i(\bar{z})^2,
\end{aligned}$$

где  $\gamma_t = 2 L_2 (1/\alpha - 1/\alpha_t)^2$ .

Учитывая результаты Предложений 2, 3 и 4, обозначая  $\beta_t = (4 L_1 ((\alpha - \alpha_t)^2 - 1)/\alpha_t^2 + \gamma_t)$  последовательно выводим

$$\begin{aligned}
&E \left| \left| \frac{1}{\alpha_t} F(\alpha_t, \bar{z}, \bar{w}_t) - R(\alpha, \bar{z}) \right| \right|^2 \leq \gamma_t (n L_c + L_x \|\bar{z}\|^2) + \\
&+ \sum_{i \in N} \left( 4 \frac{L_1}{\alpha_t^2} (E(\tilde{s}_t^i)^2 - s^i(\bar{z})^2) + \left( \frac{4 L_1 (\alpha - \alpha_t)^2}{\alpha_t^2} + \gamma_t \right) s^i(\bar{z})^2 \right) = \\
&= \gamma_t (n L_c + L_x \|\bar{z}\|^2) + 4 \frac{L_1}{\alpha_t^2} E \|\tilde{s}_t\|^2 + \beta_t \|\bar{s}(\bar{z})\|^2 \leq n \gamma_t L_c + 4 \frac{L_1}{\alpha_t^2} n^2 \bar{b}^2 \sigma_w^2 + \\
&+ (\gamma_t L_x + 8n(n-1) \bar{b}^2 \frac{L_1}{\alpha_t^2} + 2\beta_t \|\mathcal{L}(A_{\max})\|_2^2) \|\bar{z}\|^2 = \bar{L}_2 (1 + \|\bar{z}\|^2).
\end{aligned}$$

□

Заметим, что в том случае, когда  $\alpha_t \equiv \alpha = const$  и  $L_x = 0$ , при фиксированном правом конце интервала для непрерывной модели  $\tau_{\max}$  константы  $C_1$  и  $C_2$  не зависят от  $\alpha$ , а, значит, за счет выбора малого  $\alpha$  возможно достижение сколь угодно малого расхождения траекторий.

Вернемся к задаче о достижении консенсуса. Будем считать, что в непрерывной модели (23)-(24) с течением времени достигается  $\frac{\varepsilon}{4}$ -консенсус, т. е. все компоненты вектора  $\bar{x}(\tau)$  становятся близки к некоторому общему для всех  $i \in N$  значению  $x^*$ . Условия достижения  $\varepsilon$ -консенсуса для траекторий  $\{\bar{x}_t\}$  из (21)-(22) даны в следующей теореме.

**Т е о р е м а 2.** Пусть выполнены условия **A1**, **A2а–в**,  $0 < \alpha_t < \bar{\alpha}$  и для непрерывной модели (23)-(24) достигается  $\frac{\varepsilon}{4}$ -консенсус за время  $\mathcal{T}(\frac{\varepsilon}{4})$ . Если параметры протокола консенсуса  $\{\alpha_t\}$  выбраны таким образом, что  $\tau_{\max} = \sum_{t=0}^T \alpha_t > \mathcal{T}(\frac{\varepsilon}{4})$  и для констант  $C_1, C_2$  выполнено неравенство

$$C_1 e^{C_2 \tau_{\max}} \max_{\tau_t \leq \tau_{\max}} \alpha_t \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

тогда в стохастической дискретной системе (21)-(22) в моменты времени  $t : \mathcal{T}(\frac{\varepsilon}{4}) \leq t \leq \tau_{\max}$  достигается среднеквадратический  $\varepsilon$ -консенсус.

*Доказательство.* Обозначим  $x^*$  — значение консенсуса непрерывной системы. Из первых условий Теоремы 2 выполняются условия Теоремы 1, т. е. ее результат справедлив. Из остальных условий Теоремы 2 и результата Теоремы 1 получаем

$$E\|\bar{x}_t - x^* \underline{1}\|^2 \leq 2E\|\bar{x}_t - \bar{x}(\tau)\|^2 + 2\|\bar{x}(\tau) - x^* \underline{1}\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

□

Рассмотрим важный частный случай  $\forall i \in N f^i(x, u) = u$ .

Из Теоремы 2 можно получить важное следствие. В Лемме 4 для времени достижения  $\frac{\varepsilon}{4}$ -консенсуса в непрерывной модели (23)-(24) получена оценка сверху

$$\mathcal{T}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \frac{1}{2\operatorname{Re}(\lambda_2)} \ln \left( \frac{4(n-1)\|\bar{x}_0 - x^* \underline{1}\|^2}{\varepsilon} \right). \quad (26)$$

**Т е о р е м а 3.** Если  $f^i(x, u) = u$  для любого  $i \in N$  и выполнены условия **A2а–в**, **A3**, тогда для всякого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon > 0$  для любого  $\tau_{\max} > \mathcal{T}(\frac{\varepsilon}{4})$ , определяемого по (26), при выборе достаточно малых

$$\max_{\tau_t \leq \tau_{\max}} \alpha_t \leq \frac{\varepsilon}{4C_1 e^{C_2 \tau_{\max}}}$$

в моменты времени  $t : \mathcal{T}(\frac{\varepsilon}{4}) \leq t \leq \tau_{\max}$   $n$  узлов достигают среднеквадратического  $\varepsilon$ -консенсуса. Здесь константы  $C_1, C_2, \bar{\alpha}$  из Теоремы 6, а  $\lambda_2$  — ближайшее к мнимой оси собственное число матрицы  $\mathcal{L}$  с ненулевой вещественной частью.

*Доказательство.* В условиях Теоремы 3  $R(\alpha, \bar{x})$  — линейная функция. Т. е. динамическая система (23) имеет вид (17):

$$\dot{\bar{x}} = -\mathcal{L}(A_{\max})\bar{x},$$

где  $\mathcal{L}(A_{\max})$  — матрица, являющаяся лапласианом матрицы  $A_{\max}$ . Все суммы по строкам элементов матрицы  $\mathcal{L}(A_{\max})$  равны нулю и, более того, все диагональные элементы положительны и равны по абсолютной величине сумме всех остальных элементов в строке. Вектор из единиц  $\underline{1}$  является ее правым собственным вектором, соответствующим нулевому собственному значению. Полученная непрерывная система является частично устойчивой при  $h = \underline{1}^T \bar{x}$ .

При выполнении условия **A3** в Лемме 3 было установлено, что в такой непрерывной системе достигается асимптотический консенсус, а в Лемме 4 —  $\varepsilon$ -консенсус и получена формула (20) для времени его достижения.  $\square$

Рассмотрим случай бесконечного интервала времени:  $T = \infty$ .

**Определение 8.** *n* узлов достигают асимптотического среднеквадратического  $\varepsilon$ -консенсуса, если  $E\|x_t^i\|^2 < \infty$ ,  $t = 0, 1, \dots$ ,  $i \in N$  и существует случайная переменная  $x^*$  такая, что  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} E\|x_t^i - x^*\|^2 \leq \varepsilon$  для всех  $i \in N$ .

Теорема 2 не дает сведений об асимптотическом поведении системы. Условия достижимости асимптотического среднеквадратического  $\varepsilon$ -консенсуса даны в следующей теореме.

**Теорема 4.** *Пусть выполнены условия **A1**, **A2a–b**,  $0 < \alpha_t < \bar{\alpha}$  и непрерывная модель (23)-(24) экспоненциально устойчива, тогда n узлов достигают асимптотического среднеквадратического  $\varepsilon$ -консенсуса с  $\varepsilon = C_3 \bar{\alpha}^\mu$  для некоторых независящих от  $\bar{\alpha}$  констант  $C_3$  и  $\mu$ :  $0 < \mu < 1$ .*

*Доказательство.* При доказательстве Теоремы 2 было показано, что выполнении условий **A1**, **A2a–b** влечет выполнение условий Теоремы 1 из [36]. Т. к. по условию Теоремы 4 непрерывная модель (23)-(24) экспоненциально устойчива, то выполнены все условия Теоремы 1 из [36]. Следовательно, для оценки близости траекторий стохастической дискретной системы и непрерывной можно

воспользоваться неравенством

$$E\|\bar{x}_t - \bar{x}(\tau_t)\|^2 \leq C_3 \bar{\alpha}^\mu,$$

из которого непосредственно следует заключение Теоремы 4, так как  $\|\bar{x}(\tau_t)\|^2 \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  в силу экспоненциальной устойчивости непрерывной модели (23)-(24).  $\square$

В случае, если непрерывная система (23)-(24) не является экспоненциально устойчивой, то для анализа достижимости консенсуса Теорему 4 использовать нельзя.

Одним из новых направлений является изучение точности непрерывных моделей на бесконечном промежутке времени при предположении частичной устойчивости системы (23) вместо асимптотической устойчивости.

Следуя [35] введем определения.

**Определение 9.** Пусть  $\Omega, \Omega_0$ ,  $\Omega \subseteq \Omega_0$  — замкнутые подмножества множества  $\mathbb{R}^n$  и  $\Omega$  состоит из равновесия (23). Множество  $\Omega$  называется  $\Omega_0$ -поточечно устойчивым для системы (23), если оно устойчиво по Ляпунову и любое решение, начинаясь с  $\Omega_0$ , стремится к точке из  $\Omega$  когда  $t \rightarrow \infty$ .

**Определение 10.** Система (23) называется частично  $h$ -устойчивой, если существуют гладкое отображение  $\bar{y} = h(\bar{z})$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  и ограниченное множество  $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^n$  такие, что  $\text{rank}_{\frac{\partial y}{\partial z}} = l$  для  $\bar{z} \in \Omega = \{\bar{z} \in \Omega_0 : h(\bar{z}) = 0\}$  и множество  $\Omega$  является  $\Omega_0$ -поточечно устойчивым.

При предположении частичной  $h$ -устойчивости системы (23)-(24) возможно получение результатов о достижении консенсуса на основе Теоремы 1 из [36].

**Теорема 5.** Пусть условия **A1**, **A2a–b** выполнены, система (23)-(24) частично  $h$ -устойчива, а также существуют дважды непрерывная дифференцируемая функция  $V(\bar{z})$  и положительные числа  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  такие, что

$$\dot{V}(\bar{z}) \leq -\kappa_1 V(\bar{z}), \quad \left| \frac{\partial^2 V(\bar{z})}{\partial \bar{z}^{(i)} \partial \bar{z}^{(j)}} \right| \leq \kappa_3, V(\bar{z}) \geq \kappa_2 \|h(\bar{z})\|^2. \quad (27)$$

Если в непрерывной модели (23)-(24) достигается асимптотический консенсус тогда в дискретной стохастической системе (21)-(22) достигается асимптотический среднеквадратический  $\varepsilon$ -консенсус с

$$\varepsilon = C_4 \tilde{\alpha}^\mu, \quad (28)$$

где константы  $C_4 > 0$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $\tilde{\alpha} : 0 < \alpha_t \leq \tilde{\alpha}$ .

*Доказательство.* При доказательстве Теоремы 2 установлены выполнение условий Липшица для функции  $R(\alpha, \bar{x})$  и ограниченности скорости роста. В силу этого заключение Теоремы 5 прямо следует из Теоремы 1 из [36], в которой установлена равная величине  $\varepsilon$  из (28) верхняя среднеквадратическая оценка расстояния между текущим состоянием непрерывной системы и предельным многообразием, которому принадлежит точка, соответствующая консенсусу, достигаемому в непрерывной системе в силу предположения Теоремы 5.  $\square$

## 6. Условия достижения консенсуса при задержках в наблюдениях

Теперь рассмотрим случай, когда  $\bar{d} \geq 0$ . Для формирования стратегии управления каждый узел  $i \in N$  имеет зашумленную информацию о своем собственном состоянии

$$y_t^{i,i} = x_t^i + w_t^{i,i}$$

и, если  $\bar{N}_t^i \neq \emptyset$ , зашумленные наблюдения о состояниях соседей в текущий или предшествующие моменты времени

$$y_t^{i,j} = x_{t-d_t^{i,j}}^j + w_t^{i,j}, \quad j \in \bar{N}_t^i,$$

где  $d_t^{i,j}$  — случайная задержка в момент времени  $t$  в наблюдении  $i$ -м агентом состояния  $j$ -го агента,  $w_t^{i,i}, w_t^{i,j}$  — помехи наблюдений.

Положим  $\bar{x}_t \equiv 0$  для  $-\bar{d} \leq t < 0$ , и определим  $\bar{X}_t \in \mathbb{R}^{n\bar{d}}$  — расширенный вектор состояний  $\bar{X}_t = [\bar{x}_t, \tilde{x}_{t-1}, \dots, \tilde{x}_{t-\bar{d}}]$ , где  $\tilde{x}_{t-k}$  — вектор, состоящий из таких  $x_{t-k}^i$ , что  $\exists j \in N^i \exists k' \geq k : p_{k'}^{ij} > 0$ , т. е. это значение с положительной вероятностью участвует в формировании хотя бы одного из управляющих воздействий. В дальнейшем

для простоты будем считать, что так введенный расширенный вектор состояний равен  $\bar{X}_t = [\bar{x}_t, \bar{x}_{t-1}, \dots, \bar{x}_{t-\bar{d}}]$ , т. е. в него входят все компоненты со всевозможными задержками, не превосходящими  $\bar{d}$ .

Перепишем динамику обобщенных состояний сети в векторном виде:

$$\bar{X}_{t+1} = U\bar{X}_t + F(\alpha_t, \bar{X}_t, \bar{w}_t), \quad (29)$$

где  $U$  — матрица размерности  $\bar{n} \times \bar{n}$ , имеющая вид:

$$U = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

в котором  $I$  — единичная матрица размерности  $n \times n$ , а  $F(\alpha_t, \bar{X}_t, \bar{w}_t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\bar{n}} \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{\bar{n}}$  — вектор-функция соответствующих аргументов:

$$F = \begin{pmatrix} f^i(x_t^i, \alpha_t \sum_{j \in N_t^i} b_t^{ij} ((x_{t-d_t^{ij}}^j - x_t^i) + (w_t^{ij} - w_t^{ii})) & \dots \\ \dots & 0_{n\bar{d}} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

содержащая ненулевые компоненты только на первых  $n$  местах.

Рассмотрим соответствующую (29) усредненную дискретную модель

$$\bar{Z}_{t+1} = U\bar{Z}_t + G(\alpha_t, \bar{Z}_t), \quad \bar{Z}_0 = \bar{X}_0, \quad (32)$$

где

$$G(\alpha, \bar{Z}) = G \begin{pmatrix} \alpha, & z^1 \\ & \vdots \\ & z^{n(\bar{d}+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^i(z^i, \alpha s^i(\bar{Z})) \\ \dots \\ 0_{n\bar{d}} \end{pmatrix}, \quad (33)$$

$$s^i(\bar{Z}) = \sum_{j \in N^i} p_a^{ij} b^{ij} \left( \left( \sum_{k=0}^{\bar{d}} p_k^{ij} z^{j+k\bar{n}} \right) - z^i \right) = -d^i(A_{\max}) z^i + \sum_{j=1}^{n(\bar{d}+1)} a_{\max}^{i,j} z^j,$$

$$i \in N.$$

Оказывается, что, как и в случае без случайных задержек в измерениях, траектории решения исходной системы  $\{\bar{X}_t\}$  из (29) в момент времени  $t$  близки в среднеквадратическом смысле к траекториям усредненной дискретной системы (32).

**Т е о р е м а 6.** *Если выполнены условия **A1, A2**,  $0 < \alpha_t < \bar{\alpha}$ , тогда существует  $\tilde{\alpha}$  такое, что при  $\bar{\alpha} < \tilde{\alpha}$  справедлива следующая оценка:*

$$E \max_{0 \leq t \leq T} \|\bar{X}_t - \bar{Z}_t\|^2 \leq c_1 \tau_T e^{c_2 \tau_T^2} \bar{\alpha}, \quad (34)$$

где  $\tau_T = 2^{\bar{d}}(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{T-1})$ ,  $c_1, c_2 > 0$  – некоторые константы:

$$c_1 = 8n \left( \tilde{c} + \hat{c} \left( \frac{nL_2 L_c + \bar{\alpha}^2 \tilde{c}}{c_3} + \|\bar{X}_0\|^2 \right) e^{T \ln(c_3+1)} \right), \quad \tilde{c} = n^2 L_1^2 \bar{b}^2 \sigma_w^2,$$

$$c_2 = 2^{1-\bar{d}} L_1^2 \left( \frac{L_x}{\underline{\alpha}} + 2\bar{\alpha}^2 \|\mathcal{L}(A_{\max})\|_2^2 \right), \quad c_3 = \tilde{d} + L_x (2^{1+\bar{d}/2} L_1 + L_2) + \bar{\alpha} c',$$

$$\hat{c} = 2L_1^2 n(n-1)\bar{b}^2, \quad c' = 2^{1+\bar{d}/2} L_1 \|\mathcal{L}(A_{\max})\|_2 + \bar{\alpha} (L_2 \|\mathcal{L}(A_{\max})\|_2^2 + \hat{c}),$$

$$\underline{\alpha} = \min_{1 \leq t \leq T} \alpha_t, \quad \tilde{d} = 0, \text{ если } \bar{d} = 0, \text{ или } \tilde{d} = 1, \text{ если } \bar{d} > 0.$$

Заметим, что при отсутствии задержек в измерении ( $\tilde{d} = 0$ ) и при  $L_x = 0$  определенная в Теореме (6) константа  $c_3$  оценивается величиной пропорциональной  $\bar{\alpha}$ , и, следовательно, константа  $c_1$  оценивается величиной пропорциональной  $\tau_T$ , что соответствует полученному ранее для этого случая результату из [27, 28].

*Доказательство.* Обозначим

$$v_t = F(\alpha_t, \bar{X}_t, \bar{w}_t) - G(\alpha_t, \bar{X}_t). \quad (35)$$

Заметим, что в силу условия **A2** усредняя последовательно относительно  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_t^d$  и  $\mathcal{F}_t$  несложно получить, что  $E_{\mathcal{F}_t} v_t = 0$ .

При доказательстве Теоремы 6 будут использованы следующие четыре вспомогательных предложения:

#### П р е д л о ж е н и е 5.

$$\|U\bar{X}\|^2 \leq 2^{\tilde{d}} \|\bar{X}\|^2, \dots, \|U^{\bar{d}} \bar{X}\|^2 \leq 2^{\bar{d}} \|\bar{X}\|^2, \dots, \|U^k \bar{X}\|^2 \leq 2^{\bar{d}} \|\bar{X}\|^2,$$

*Доказательство.* В силу определения матрицы  $U$  несложно получить первое неравенство, а далее получаем индукцией по  $k$ , учитывая

$$\forall k > \bar{d} \quad U^k = U^{\bar{d}} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

□

**Предложение 6.** *При выполнении условий **A2** справедлива оценка*

$$E \max_{1 \leq t \leq T} \left\| \sum_{i=1}^t v_t \right\|^2 \leq 4n \sum_{t=1}^T E \|v_t\|^2.$$

*Доказательство.* При выполнении условий **A2** случайные элементы  $v_t$  являются мартингальными разностями, т. е. они центрированы при условном усреднении относительно предыстории:  $E_{\mathcal{F}_{t-1}} v_t = 0$ . Следовательно, применима Лемма 1 из параграфа 3 работы [37]. Размерность векторов  $v_t$  равна  $n\bar{d}$ , но так как только первые  $n$  компонент векторов  $v_t$  отличны от нуля, то в формуле для оценки можно вместо  $n\bar{d}$  можно использовать величину  $n$ . □

**Предложение 7.** *Пусть последовательность чисел  $\mu_t \geq 0$ ,  $t = 0, 1, \dots, T$  удовлетворяет неравенствам*

$$\mu_{t+1} \leq \bar{\alpha} c_1 \tau_t + c_2 2^{\bar{d}} \tau_t \sum_{k=1}^t \gamma_k \mu_k, \quad c_1, c_2 \geq 0,$$

*тогда*

$$\mu_t \leq c_1 \tau_t e^{c_2 \tau_t^2} \bar{\alpha}.$$

*Доказательство.* Утверждение предложения непосредственно следует из соответствующего результата в [38]. □

**Предложение 8.** *При выполнении условий **A1–A6***

$$E \|\bar{X}_t\|^2 \leq \left( \frac{2nL_2 + \bar{\alpha}^2 \tilde{c}}{c_3} + \|\bar{X}_0\|^2 \right) e^{t \ln(c_3 + 1)}.$$

*Доказательство.* Запишем уравнение (29) в виде

$$\bar{X}_{t+1} = U\bar{X}_t + G(\alpha_t, \bar{X}_t) + v_t. \quad (37)$$

Для квадрата нормы  $\bar{X}_{t+1}$  имеем

$$\|\bar{X}_{t+1}\|^2 = \|U\bar{X}_t + G(\alpha_t, \bar{X}_t)\|^2 + 2(U\bar{X}_t + G(\alpha_t, \bar{X}_t))^T v_t + \|v_t\|^2. \quad (38)$$

Взяв условное математическое ожидание от обеих частей (38) по  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}_{t-1}$  (т. е. при фиксированном  $\bar{X}_t$ ), в силу условной центрированности  $v_t$  получаем

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{F}_{t-1}} \|\bar{X}_{t+1}\|^2 &= \|U\bar{X}_t + G(\alpha_t, \bar{X}_t)\|^2 + E_{\mathcal{F}_{t-1}} \|v_t\|^2 = \\ &= \|U\bar{X}_t\|^2 + 2(U\bar{X}_t)^T G(\alpha_t, \bar{X}_t) + \|G(\alpha_t, \bar{X}_t)\|^2 + E_{\mathcal{F}_{t-1}} \|v_t\|^2. \end{aligned} \quad (39)$$

В силу вида  $v_t$  и липшицевости по  $u$  функций  $f^i(u)$  (по предложению **A1**) для  $\|v_t\|^2$  имеем

$$\begin{aligned} \|v_t\|^2 &= \sum_{i \in N} |f^i(x_t^i, \alpha_t \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} (x_{t-d_t^{i,j}}^j - x_t^i + w_t^{i,j} - w_t^{i,i})) - \\ &\quad - f^i(x_t^i, \alpha_t s_t^i(\bar{X}_t))|^2 \leq L_1^2 \|\bar{u}_t - \alpha_t^2 \bar{s}_t\|^2. \end{aligned}$$

При выполнении условий **A2** случайные величины  $E_{\mathcal{F}_{t-1}} u_t^i$ ,  $i \in N$  удовлетворяют условиям Предложения 3

$$E_{\mathcal{F}_{t-1}} \|v_t\|^2 = \alpha_t^2 L_1^2 (2n(n-1)\bar{b}^2 \|\bar{X}_t\|^2 + n^2 \bar{b}^2 \sigma_w^2). \quad (40)$$

Далее, последовательно оценивая все три слагаемых в правой части (39), учитывая результаты Предложений 5, 2 и 3, выводим

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{F}_t} \|\bar{X}_{t+1}\|^2 &\leq 2^{\tilde{d}} \|\bar{X}_t\|^2 + 2^{1+\tilde{d}/2} \|\bar{X}_t\| L_1 (L_x \|\bar{X}_t\| + \alpha_t \|\bar{s}\|) + \\ &+ L_2 (nL_c + L_x \|\bar{X}_t\|^2 + \alpha_t^2 \|\bar{s}\|^2) + \alpha_t^2 L_1^2 (2n(n-1)\bar{b}^2 \|\bar{X}_t\|^2 + n^2 \bar{b}^2 \sigma_w^2) \leq \\ &\leq (2^{\tilde{d}} + 2^{1+\tilde{d}/2} L_1 L_x + L_2 L_x + \alpha_t 2^{1+\tilde{d}/2} L_1 \|\mathcal{L}(A_{\max})\|_2 + \\ &+ \alpha_t^2 (L_2 \|\mathcal{L}(A_{\max})\|_2^2 + 2n(n-1)L_1^2 \bar{b}^2)) \|\bar{X}_t\|^2 + nL_2 L_c + \alpha_t^2 n^2 L_1^2 \bar{b}^2 \sigma_w^2 \leq \\ &\leq \bar{c} + \bar{c}_3 \|\bar{X}_t\|^2, \end{aligned}$$

где  $\bar{c} = nL_2 L_c + \alpha_t^2 \tilde{c}$ ,  $\bar{c}_3 = c_3 + 1$ .

Взяв безусловное математическое ожидание от обеих частей последнего неравенства, последовательно итерируя по  $t$ , получаем заключение Предложения 8

$$\begin{aligned} E\|\bar{X}_t\|^2 &\leq \bar{c} + \bar{c}_3 E\|\bar{X}_{t-1}\|^2 \leq \bar{c} + \bar{c}\bar{c}_3 + \bar{c}_3^2 E\|\bar{X}_{t-2}\|^2 \leq \\ &\leq \bar{c}(1 + \bar{c}_3 + \bar{c}_3^2 + \dots + \bar{c}_3^{t-1}) + \bar{c}_3^t \|\bar{X}_0\|^2 \leq \bar{c} \frac{\bar{c}_3^t - 1}{\bar{c}_3} + \bar{c}_3^t \|\bar{X}_0\|^2 \leq \\ &\leq \left( \frac{\bar{c}}{\bar{c}_3} + \|\bar{X}_0\|^2 \right) \bar{c}_3^t \leq (\bar{c}_4 + \|\bar{X}_0\|^2) e^{t \ln \bar{c}_3}, \end{aligned}$$

где  $\bar{c}_4 = \bar{c}/c_3$ .  $\square$

Перейдем к непосредственному доказательству Теоремы (6). Итерируя соотношение (29) для  $t, t-1, \dots, t-d+1$  получим

$$\begin{aligned} \bar{X}_{t+1} &= U\bar{X}_t + G(\alpha_t, \bar{X}_t) + v_t = \\ &= U^2\bar{X}_{t-1} + UG(\alpha_{t-1}, \bar{X}_{t-1}) + G(\alpha_t, \bar{X}_t) + Uv_{t-1} + v_t = \quad (41) \\ &= \dots = U^{t+1}\bar{X}_0 + \sum_{k=0}^t U^{t-k}G(\alpha_k, \bar{X}_k) + \sum_{k=0}^t U^{t-k}v_k. \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\bar{Z}_{t+1} = U^{t+1}\bar{X}_0 + \sum_{k=0}^t U^{t-k}G(\alpha_k, \bar{Z}_k). \quad (42)$$

Оценим величину  $\|\bar{X}_t - \bar{Z}_t\|^2$ ,  $t = 1, \dots, T$ . Вычитая (42) из (41) и возводя результат в квадрат, получаем

$$\begin{aligned} \|\bar{X}_t - \bar{Z}_t\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^t U^{t-k}v_k + \sum_{k=1}^t U^{t-k}(G(\alpha_k, \bar{X}_k) - G(\alpha_k, \bar{Z}_k)) \right\|^2 \leq \\ &\leq 2 \left\| \sum_{k=1}^t U^{t-k}v_k \right\|^2 + 2 \left\| \sum_{k=1}^t U^{t-k}(G(\alpha_k, \bar{X}_k) - G(\alpha_k, \bar{Z}_k)) \right\|^2 \leq \\ &\leq 2 \left\| \sum_{k=1}^t U^{t-k}v_k \right\|^2 + 2 \frac{\tau_t}{2^d} \sum_{k=1}^t \frac{1}{\alpha_t} \|U^{t-k}(G(\alpha_k, \bar{X}_k) - G(\alpha_k, \bar{Z}_k))\|^2. \quad (43) \end{aligned}$$

Для слагаемых во второй сумме в (43), используя Предложение 2, 5 и липшицевость  $f^i(\cdot, \cdot)$  (предположение **A1**), выводим

$$\begin{aligned} \|U^{t-k}(G(\alpha_k, \bar{X}_k) - G(\alpha_k, \bar{Z}_k))\|^2 &\leq 2^{\bar{d}} L_1^2 \sum_{i=1}^n (L_x |x_k^i - z_k^i| + \\ &+ \alpha_k |s(x_k^i) - s(z_k^i)|)^2 \leq 2^{1+\bar{d}} L_1^2 \sum_{i=1}^n L_x |x_k^i - z_k^i|^2 + \alpha_k^2 s(x_k^i - z_k^i)^2 \leq \\ &\leq 2^{1+\bar{d}} L_1^2 (L_x + 2\alpha_k^2 \|\mathcal{L}(A_{\max})\|_2^2) \|\bar{X}_k - \bar{Z}_k\|^2 \end{aligned}$$

Взяв математическое ожидание от обеих частей (43) и обозначив  $\mu_T = \max_{0 \leq t \leq T} E\|\bar{X}_t - \bar{Z}_t\|^2$ , применив Предложение 6 к первому слагаемому и полученному выше оценку второго, получим

$$\mu_T \leq 2^{3+\bar{d}} n \sum_{k=1}^T E\|v_k\|^2 + 2\tau_T L_1^2 \sum_{k=1}^t (\frac{L_x}{\underline{\alpha}} + 2\alpha_k \|\mathcal{L}(A_{\max})\|_2^2) \mu_k. \quad (44)$$

Для оценки  $E\|v_k\|^2$ , воспользовавшись полученным ранее соотношением (40) и результатом Предложения 8, выводим

$$E\|v_k\|^2 \leq \alpha_k^2 (\tilde{c} + \hat{c}(\bar{c}_4 + \|\bar{X}_0\|^2) e^{k \ln(c_3+1)})$$

и, следовательно,

$$2^{3+\bar{d}} n \sum_{k=1}^T E\|v_k\|^2 \leq \bar{\alpha} 8 n \tau_T (\tilde{c} + \hat{c}(\bar{c}_4 + \|\bar{X}_0\|^2) e^{T \ln(c_3+1)}). \quad (45)$$

В силу простого соотношения  $2^{\bar{d}} \sum_{k=1}^t \alpha_k^2 \leq \bar{\alpha} 2^{\bar{d}} \sum_{k=1}^t \alpha_k = \bar{\alpha} \tau_t$ , учитывая оценки (45) из (44), имеем

$$E\mu_T \leq \bar{\alpha} c_1 \tau_T + c_2 \tau_T 2^{\bar{d}} \sum_{k=1}^T \alpha_k E\mu_k. \quad (46)$$

Из последнего неравенства (46), применив Предложение 7, получаем заключение Теоремы 6  $\square$

**Т е о р е м а 7.** *Если выполнены условия **A1, A2**,  $0 < \alpha_t < \bar{\alpha}$ , а в усредненной дискретной системе (32) в момент времени  $T$*

достигается  $\frac{\varepsilon}{4}$ -консенсус и для констант  $c_1, c_2$  из формулировки Теоремы 6 справедлива оценка

$$c_1 \tau_T e^{c_2 \tau_T^2} \bar{\alpha} \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

**тогда** в стохастической дискретной системе (29) достигается  $\varepsilon$ -консенсус в момент времени  $t$ .

**Доказательство.** Обозначим  $x^*$  — значение консенсуса усредненной дискретной системе (32). Из первых условий Теоремы 7 следует выполнение условия Теоремы 6, т. е. ее результат справедлив. Из остальных условий Теоремы 7 и результата Теоремы 6 получаем

$$E\|\bar{X}_t - x^* \underline{1}\|^2 \leq 2E\|\bar{X}_t - \bar{Z}_t\|^2 + 2\|\bar{Z}_t - x^* \underline{1}\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

□

Рассмотрим важный частный случай  $\forall i \in N f^i(x, u) = u$  и  $\alpha_t = \alpha = const$ , в котором дискретная усредненная система имеет вид (32):

$$\bar{Z}_{t+1} = (I - ((I - U) - \mathcal{L}(\alpha A_{\max}))) Z_t. \quad (47)$$

**Теорема 8.** Если  $\alpha_t = \alpha > 0$  и  $f^i(x, u) = u$  для любого  $i \in N$ , а также выполнены условия **A2** и **A3** вместе с (14) для матрицы  $A_{\max}$ , **тогда** в усредненной дискретной системе (47)  $n$  узлов достигают асимптотического среднеквадратического консенсуса.

Кроме того, если за время  $T(\frac{\varepsilon}{4})$  в усредненной дискретной системе (47) достигается  $\frac{\varepsilon}{4}$ -консенсус и существует  $T > T(\frac{\varepsilon}{4})$ , для которого параметр  $\alpha$  обеспечивает выполнение условия

$$\bar{C}_1 e^{\bar{C}_2 \alpha} \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\bar{C}_1 = 8n \left( \tilde{c} + \hat{c} \left( \frac{\alpha^2 \tilde{c}}{c_3} + \|\bar{X}_0\|^2 \right) e^{T \ln(c_3 + 1)} \right) \tau_t,$$

$$\bar{C}_2 = 2^{2-\bar{d}} \alpha^2 \|\mathcal{L}(A_{\max})\|_2^2, \quad \tilde{c} = n^2 \bar{b}^2 \sigma_w^2, \quad \hat{c} = 2n(n-1) \bar{b}^2 \tau_t^2,$$

$$c_3 = 2^{1+\bar{d}} + 2\alpha^2 (\|\mathcal{L}(A_{\max})\|_2^2 + \hat{c}),$$

где  $\tilde{d} = 0$ , если  $\bar{d} = 0$ , или  $\tilde{d} = 1$ , если  $\bar{d} > 0$ .

**тогда** в стохастической дискретной системе (29) достигается  $\varepsilon$ -консенсус в моменты времени  $t$ :  $T(\frac{\varepsilon}{4}) \leq t \leq T$ .

*Доказательство.* Результат Теоремы 8 является непосредственным следствием Теоремы 7.

Все суммы по строкам элементов матрицы  $\bar{\mathcal{L}} = (I - U) - \mathcal{L}(\alpha A_{\max})$  равны нулю и, более того, все диагональные элементы положительны и равны по абсолютной величине сумме всех остальных элементов в строке, которые отрицательны. Следовательно, матрица  $\bar{\mathcal{L}}$  является лапласианом некоторого графа и вектор из единиц  $\underline{1}$  является ее правым собственным вектором, соответствующим нулевому собственному значению.

При выполнении условия **A3** граф, соответствующий лапласиану  $\bar{\mathcal{L}}$ , имеет оставное дерево, т. к. граф из первых  $n$  вершин имеет оставное дерево по условию **A3**, а стоящие по  $(n + 1)$ -й диагонали единицы связывают последовательно  $\bar{n}$ -ю вершину с  $(\bar{n} - \bar{d})$ -ой,  $(\bar{n} - 1)$ -ю вершины с  $(\bar{n} - \bar{d} - 1)$ -ой и т. д. Следовательно, по Лемме 2 в такой дискретной системе достигается асимптотический консенсус, т. к. условие (14) выполнено в силу предположений Теоремы 8.

Для выполнения условий Теоремы 7 осталось показать, что константы  $\bar{C}_1$  и  $\bar{C}_2$  совпадают с соответствующими константами из Теоремы 6. Это следует из того, что в рассматриваемом случае  $L_1 = L_2 = 1$ ,  $L_x = L_c = 0$ .

□

Заметим, что в [11] при некоторых предположениях, близких к условиям Теоремы 8, доказано необходимое и достаточное условие достижения среднеквадратического консенсуса в случае, если размеры шагов  $\alpha_t$  стремятся к нулю. Выше был рассмотрен более общий случай вида функций  $f^i(x_t^i, u_t^i)$  и не стремящиеся к нулю  $\alpha_t$ .

## 7. Балансировка загрузки узлов сети

Рассмотрим практический пример приложения описанных теоретических результатов.

Рассмотрим модель децентрализованной системы распределения заданий между  $n$  агентами (узлами), выполняющими параллельно однотипные задания, в которой допускается перераспределение заданий между агентами на основе обратных связей. Каждый агент  $i \in N = \{1, \dots, n\}$  выполняет поступающие задания по принципу очереди. Задания поступают в систему в различные дискретные моменты времени  $t = 1, 2, \dots, T$  на разные узлы. Связь между

узлами определяется, как и ранее, структурой связи динамической сети.

В момент времени  $t$  поведение каждого агента  $i \in N$  описывается двумя характеристиками:

- $q_t^i$  — загруженность или длина очереди из атомарных элементарных заданий узла  $i$  в момент времени  $t$ ;
- $r_t^i$  — производительность узла  $i$  в момент времени  $t$ .

При достаточно общих предположениях можно считать, что динамика изменений загруженности агентов описывается следующими уравнениями:

$$q_{t+1}^i = q_t^i - r_t^i + z_t^i + u_t^i; \quad i \in N, \quad t = 0, 1, \dots, T. \quad (48)$$

Если  $N_t^i \neq \emptyset$ , то будем считать, что в момент времени  $t$  узел  $i$  получает данные о производительности соседей и зашумленные наблюдения об их загруженности:  $y_t^{i,j} = q_{t-d_t^{i,j}}^j + w_t^{i,j}$ ,  $j \in N_t^i$ . Кроме того, в каждый момент времени  $t$  узел  $i$  имеет зашумленные данные о своей загруженности  $y_t^{i,i} = q_t^i + w_t^{i,i}$ .

Требуется поддерживать равномерную загрузку всех узлов сети.

**Л е м м а 5.** (об оптимальной стратегии управления) Из всех возможных вариантов распределения общего количества заданий, необработанных к моменту времени  $t$ , наименьшее время работы системы соответствует тому, при котором

$$q_t^i / r_t^i = q_t^j / r_t^j, \quad \forall i, j \in N. \quad (49)$$

Следовательно, если взять  $x_t^i = q_t^i / r_t^i$  в качестве состояния узла  $i$ , то цель управления — достижение консенсуса — будет соответствовать приведенному выше соображениям об оптимальном распределении заданий между узлами.

Предположим, что  $r_t^i \neq 0 \forall i$ . Рассмотрим протокол управления (7), в котором  $\forall i \in N, \forall t$  определим  $\bar{N}_t^i = N_t^i$  и  $b_t^{i,j} = r_t^j / r_t^i, j \in N_t^i$ .

В действительности, применение протокола (7) на практике требует большей аккуратности. Здесь идеализировано предполагается мгновенный обмен соответствующими потоками входных данных.

Кроме того, надо дополнительно проверять согласованность пересылок пакетов, так как возможны различные коллизии за счет задержек и получения информации с помехами.

Динамика замкнутой системы (48) для протокола (7) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$x_{t+1}^i = x_t^i - 1 + z_t^i/r_t^i + \alpha_t \sum_{j \in N_t^i} b_t^{i,j} (y_t^{i,j}/r_t^j - y_t^{i,i}/r_t^i). \quad (50)$$

При постоянных размерах шагов  $\alpha = \alpha_t$ , отсутствии задержек и помех в наблюдениях необходимым условием достижения консенсуса будет выполнение неравенства:  $\alpha < \max_{i \in N} \sum_{j \in N_t^i} r_t^j/r_t^i$ . Для рассматриваемого в работе более общего случая со случайными неопределенностями в измерениях, структуре связей в сети и в протоколе управления Теорема 8 из предыдущего раздела позволяет свести исследование динамики балансировки загрузки узлов к исследованию свойств соответствующей усредненной дискретной модели.

**Т е о р е м а 9.** *При достаточно малом  $\alpha$ , если данные о производительности узлов с течением времени стабилизируют-ся:  $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} Er_t^i = \bar{r}^i > 0$ ,  $\forall i \in N$ , а также выполнены условия **A2**, **A3** вместе с (14) для матрицы  $A_{\max}$  и в усредненной дискретной системе за время  $T(\frac{\varepsilon}{4})$  достигается  $\frac{\varepsilon}{4}$ -консенсус и существует  $T > T(\frac{\varepsilon}{4})$ , для которого параметр  $\alpha$  обеспечивает выполнение условия*

$$\bar{C}_1 e^{\bar{C}_2 \alpha} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

*с постоянными  $\bar{C}_1, C_2, a^{i,j}$ ,  $i \in N$ ,  $j = 1, 2, \dots, \bar{n}$  из формулировки Теоремы 8,*

*тогда в стохастической дискретной системе  $n$  узлов достигают  $\varepsilon$ -консенсуса в моменты времени  $t$ :  $T(\frac{\varepsilon}{4}) \leq t \leq T$ .*

## 8. Заключение

Для агентов с нелинейной динамикой состояний были исследованы свойства консенсусного мультиагентного управления, формируемого по протоколу (алгоритму) локального голосования с неубывающим до нуля размером шага, при случайно изменяющейся структуре связей в сети и наблюдениях со случайными задержками и помехами.

Для исследования поведения системы был применен метод усредненных моделей. Использование метода усредненных моделей позволяет существенно снизить объем вычислений. В дальнейшей работе будет проанализировано влияние “цветных” помех на работу алгоритма. Также теоретические результаты будут расширены на случай многомерных состояний узлов.

## Список литературы

- [1] Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю. Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов) // Управление большими системами. Спец. выпуск 30.1 “Сетевые модели в управлении”. 2010. С. 470–505.
- [2] Ren W., Beard R. W. Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control: Theory and Applications — Communication and Control Engineering Series. Springer Verlag. New York. 2007. 319 p.
- [3] Cortes J., Bullo F. Coordination and geometric optimization via distributed dynamical systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 2005. Vol. 44. No. 5. P. 1543–1574.
- [4] Миркин Б.М. Адаптивное децентрализованное управление с модельной координацией // Автоматика и Телемеханика. 1999. № 1. С. 90-100.
- [5] Olfati-Saber R., Murray R.M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays // IEEE Trans. Automatic Control. Sept. 2004. Vol. 49. P. 1520–1533.
- [6] Armbruster D., Mikhailov A.S., Kaneko K. (eds.) Networks of Interacting Machines: Production Organization in Complex Industrial Systems and Biological Cells — World Scientific. Singapore. 2005. 267 p.
- [7] Glashenko A., Inozemtzev S., Grachev I., Skobelev P. Magenta Technology: case studies of Magenta i-scheduler for road transportation // Proc. of Int. Conf. on Autonomous Agents and Multi Agent Systems (AAMAS-6). Hawaii. 2007. P. 1385–1392.

- [8] Городецкий В.И., Грушинский М.С., Хабалов А.В. Многоагентные системы (обзор) // Новости искусственного интеллекта. 1998. №2. С. 64–116.
- [9] Калляев И.А., Мельник Э.В. Децентрализованные системы компьютерного управления. — Ростов на Дону: ЮНЦ РАН. 2011. 196 с.
- [10] Амелина Н., Лада А., Майоров И., Скobelев П., Царев А. Исследование моделей организации грузовых перевозок с применением мультиагентной системы адаптивного планирования грузовиков в реальном времени // Проблемы управления. 2011. № 6. С. 31–37.
- [11] Huang M. Stochastic Approximation for Consensus with General Time-Varying Weight Matrices // Proc. of IEEE Conf. on Decision and Control (CDC-49). 2010. Atlanta. USA. P. 7449–7454.
- [12] Ren W., Beard R.W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies // IEEE Trans. Automat. Control. 2005. Vol. 50. No. 5. P. 655–661.
- [13] Tsitsiklis J.N., Bertsekas D.P., Athans M. Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms // IEEE Trans. Autom. Contr. 1986. Vol. 31. No. 9. P. 803–812.
- [14] Kar S., Moura J.M.F. Distributed consensus algorithms in sensor networks with imperfect communication: link failures and channel noise // IEEE Trans. Sig. Process. 2009. Vol. 57. No. 1. P. 355–369.
- [15] Li T., Zhang J.-F. Mean square average-consensus under measurement noises and fixed topologies // Automatica. 2009. Vol. 45. No. 8. P. 1929–1936.
- [16] Цыпкин Я.З. Информационная теория идентификации. — М.: Наука. 1995. 336 с.
- [17] Границин О.Н., Поляк Б.Т. Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. — М.: Наука. 2003. 291 с.

- [18] Поляк Б. Т., Цыбаков А. Б. Оптимальные порядки точности поисковых алгоритмов стохастической аппроксимации // Проблемы передачи информации. 1990. № 2. С. 126–133.
- [19] Фомин В.Н. Методы управления линейными дискретными объектами. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1985. 336 с.
- [20] Spall J.C. Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation // IEEE Trans. Automat. Contr. 1992. Vol. 37. No. 3. P. 332–341.
- [21] Kushner H.J., Yin G.G. Stochastic Approximation Algorithms and Applications. — New York: Springer–Verlag. 2002. 415 p.
- [22] Granichin O., Vakhitov A., Vlasov V. Adaptive control of SISO plant with time-varying coefficients based on random test perturbation // Proc. of American Control Conf. (ACC-2010). 2010. Baltimore USA. P. 4004–4009.
- [23] Вахитов А.Т., Граничин О.Н., Гуревич Л.С. Алгоритм стохастической аппроксимации с пробным возмущением на входе в нестационарной задаче оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2009. №11. С. 70–79.
- [24] Granichin O., Gurevich L., Vakhitov A. Discrete-time minimum tracking based on stochastic approximation algorithm with randomized differences // Proc. of IEEE Conf. on Decision and Control (CDC-48). 2009. Shanghai. P.R. China. P. 5763–5767.
- [25] Borkar V.S. Stochastic Approximation: a Dynamical Systems Viewpoint — New York: Cambridge University Press. 2008. 164 p.
- [26] Chai Wah Wu Synchronization in complex networks of nonlinear dynamical systems — World Scientific Publishing Company. 2007. 168 p.
- [27] Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л. Две модели для анализа динамики алгоритмов адаптации // Автоматика и телемеханика. 1974. № 1. С. 67–75.
- [28] Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л. Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. — М.: Наука. 1981. 216 с.

- [29] Kushner H.J. Convergence of recursive adaptive and identification procedures via weak convergence theory // IEEE Trans. Aut. Control. 1977. No. 6. P. 921–930.
- [30] Ljung L. Analysis of recursive stochastic algorithms // IEEE Trans. Aut. Control. 1977. No. 4. P. 551–575.
- [31] Meerков C.M. Об упрощении описания медленных марковских блужданий I, II // Автоматика и Телемеханика. 1972. № 3. С. 6–75. № 5. С. 63–67.
- [32] Романовский И.В. Дискретный анализ. — СПб: Невский Диалект, БХВ-Петербург. 4-е изд. 2008. 320 с.
- [33] Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю. Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения // Автоматика и Телемеханика. №9. 2000. С. 15–43.
- [34] Гершгорин C.A. Über die abgrenzung der eigenwerte einer matrix // Изв. АН СССР, отд. физ.-мат. наук. 1931. С. 749–754.
- [35] Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. — М.: Наука. 1978. 400 с.
- [36] Fradkov A.L. Continuous-time averaged models of discrete-time stochastic systems: survey and open problems // Proc. of IEEE Conf. on Decision and Control (CDC-50). Orlando. USA. 2011. P. 2076–2081.
- [37] Гихман И.И., Скороходов А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наук. думка. 1968. 356 с.
- [38] Бернштейн С.Н. Стохастические уравнения в конечных разностях и стохастические дифференциальные уравнения. // Сбор. соч. в 4-х т. М.: Наука. 1964. Т. 4. С. 484–542.