Новые рандомизированные алгоритмы в управлении и обработке данных[1]

К. С. Амелин, аспирант,
О. Н. Граничин, д. ф.-м. н.[2]
Санкт-Петербургский государственный университет,
Институт проблем машиноведения РАН
Oleg_granichin@mail.ru, konstantinamelin@mail.ru

Рандомизация во многих случаях позволяет "обогатить" данные наблюдений и разработать "быстрые" алгоритмы, существенно сокращающие количество операций и "подавляющие" влияние систематических ошибок (эффект смещения при произвольных помехах), точность которых обычно несущественно зависит от размерности данных.

Рандомизированный алгоритм не что иное, как процедура, при которой один или несколько шагов основаны на случайном выборе правила, т. е. при использовании рандомизированных алгоритмов на каком-то этапе вместо того, чтобы самим принять решение, мы призываем "судьбу" (случай) выбирать за нас. Но тогда естественно возникает вопрос: зачем прибегать к "судьбе" мудрому человеку? "Судьба" не является специалистом ни в чем, выбор делается случайно. Итак, *почему от рандомизированных алгоритмов может быть польза?* Сознательное использование рандомизированных методов требует ответов себе на этот вопрос, часть из которых обсуждается в статье.

Ключевые слова: рандомизированные алгоритмы, оптимизация и оценивание, управление.

1. Введение

В последнее время в научной литературе активно развиваются *рандомизированные* методы решения. С одной стороны, в задачах, требующих большого объема "перебора" вариантов, алгоритмы, основанные на случайном выборе, позволяют за ограниченное время добиваться хороших результатов с определенной вероятностью. С другой стороны, возможность рандомизации процессов наблюдений позволяет во многих случаях компенсировать негативное влияние систематических погрешностей.

[1]Работа выполнена в рамках исследований в СПбГУ по теме №6.38.71.2011 "Изучение свойств и возможностей применения рандомизированных алгоритмов кластеризации, оптимизации и оценивания".

Традиционный подход к процессу конструирования самых разнообразных систем и алгоритмов управления представляет собой выполнение детерминированных алгоритмов, состоящих из последовательности детерминированных шагов. Этот подход, однако, может быть обобщен включением *рандомизации*. В рандомизированных алгоритмах один или несколько шагов основываются на случайном правиле, при котором среди многих детерминированных правил одно выбирается в соответствии с некоторой случайной схемой. Рандомизация позволяет ввести новый термин "вероятностно успешный алгоритм". Во многих случаях, когда детерминистической успешности достичь невозможно, вероятностная успешность предлагается как значимая альтернатива. Рандомизация становится мощным средством для решения целого ряда задач организации работы сложных систем, считающихся неразрешимыми с помощью детерминированных методов.

В этой статье будут описаны общие идеи перспективности использования рандомизированных алгоритмов в управлении и обработке данных. Ее цель — не составление всеобъемлющего обзора, а только (как и в [1]) попытка формулировки нескольких ответов на вопрос: *почему от рандомизированных алгоритмов может быть польза?*

Статья организована следующим образом. В разделе 2 отмечены трудности в управлении и обработке данных в условиях реального времени. В разделах 3-4 формулируются некоторые перспективные черты рандомизированных алгоритмов. В разделе 5 дается краткий исторический обзор появления рандомизированных алгоритмов в управлении и обработке данных. В разделах 6-8 собраны наиболее характерные примеры теоретических результатов по использованию рандомизированных алгоритмов в различных приложениях (оптимизации функционалов среднего риска (mean-risk), адаптивное управление, распознавание образов, конструирование робастных регуляторов). В заключении подводятся итоги.

2. Управление и обработка данных "на лету"

Развитие средств контроля и вычислительной техники позволяет в настоящее время перейти к решению многих практических задач "на лету", встраивая "умные" блоки в контуры управления простых и сложных систем, в технологические процессы, в разно-

образные системы поддержки принятия решений и т. п.

Обычно в условиях реального времени для “извлечения” из данных информации имеем:

- существенные ограничения в ресурсах;
- недостаточное количество данных с необходимым разнообразием.

В связи с этим какие новые трудности возникают в процессах управления и обработки данных и в какой степени возможно их преодоление?

2.1. Адекватность математических моделей физических явлений и наблюдений

Для многих практических задач управления теория до сих пор не может предложить удовлетворительных решений. Среди них: проблемы организации динамически реконфигурируемого интеллектуального управления, асинхронного управления, управления через Интернет, управления командой роботов, программирование системы управления бактерией и многие другие. Одна из основных трудностей связана, в частности, с недостатками в подходах к составлению формального математического описания задач.

Точное решение любой проблемы возможно при точной постановке задачи, но связи и отношения в реально существующем мире настолько сложны и многообразны, что практически невозможно математически строго описать многие явления. Типичным подходом в теории является выбор близкой к реальным процессам математической модели и включение в нее различных *помех*, относящихся, с одной стороны, к грубости математической модели и, с другой, характеризующих неконтролируемые внешние возмущения объекта или системы. Традиционные методы описания динамических систем предполагают выбор некоторого пространства состояний $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N}$ и составление уравнения динамики

$$\dot{x} = F(x, u, w, \theta)$$

для зависящей от времени переменной состояния $x \in \mathbb{X}$. Управляющая переменная u характеризует контролируемые внешние воздействия на систему (играет роль “посредника” с внешним миром),

неконтролируемые воздействия характеризуются переменной w. Вид уравнений динамики обычно задается с точностью до некоторого набора констант $\theta \in \Theta$ (обычно конечномерного), называемого параметрами системы.

После удачного и обоснованного выбора математической модели одной из основных задач, возникающих при анализе динамических систем, является получение или уточнение информации о реальных параметрах системы (идентификация системы). Эта информация может в дальнейшем использоваться при прогнозировании поведения системы или при формировании закона управления. Для всех математических моделей результатом эксперимента является математический объект — число, множество чисел, кривая и т. п. Наряду с описанием динамики процесса выбирают ту или иную модель наблюдений. Любые измерения дают всегда значения величин, заведомо усредненные как по некоторой пространственной области, так и по некоторому промежутку времени. Обычно набор наблюдений y может быть представлен как двойной интеграл по некоторому условному распределению $\mathrm{P}_y(\cdot)$

$$y(t) = \int_{t-\delta}^{t} dt' \int_{\mathbb{M}} \mathrm{P}_y(dx|\, t', u, w),$$

где продолжительность интервала времени δ и некоторое подмножество пространства состояний $\mathbb{M} \subset \mathbb{X}$ (обычно $\mathbb{M} \subset \partial\mathbb{X}$) определяются характеристиками регистрирующих приборов. Принципы построения современных вычислительных устройств наиболее адекватны обработке последовательных наблюдений, получаемых в дискретные моменты времени. После дискретизации и некоторых упрощающих предположений для модели наблюдений можно получить выражение вида

$$y_k = D_k(x_k, u, \theta) + v_k,\ k = 1, 2, \ldots,$$

в котором $D_k(\cdot)$ — некоторые функции, а $v_k = \tilde{v}_k + \widehat{v}_k(\theta)$ понимается как стандартная ошибка в наблюдении (помеха), состоящая обычно из статистической (случайной) погрешности $\tilde{v}_k$ и систематической $\widehat{v}_k(\theta)$ (погрешности модели). На практике необходимость учитывать как статистические, так и систематические погрешности возникает из-за того, что реальные системы редко исчерпывающе описываются ограниченными математическими моделями.

Процесс выбора характеристик (параметров) модели из заданного класса для наилучшего описания результатов, называемый *оцениванием*, часто удается связать с какой-нибудь количественной характеристикой качества оценивания $f(\cdot) : \Theta \to \mathbb{R}$, и при выборе оценок естественно стараться минимизировать отрицательное влияние погрешностей

$$f \to \min .$$

Возможность внесения в систему внешних управляющих воздействий u дает еще более широкую основу для постановки оптимизационных задач. Увеличение быстродействия современных вычислительных устройств до скоростей близких к длительностям характерных явлений в микромире может позволить подступиться к решению задач управления не только макроскопическими объектами, но и на уровне микромира, в процессе зарождения и развития сложных динамических процессов. Но на этом пути традиционные представления о динамических моделях представляют собой серьезный барьер. Иллюстрацией этого являются трудности в описании явлений турбулентности в механике и моделей поведения групп людей в изменяющейся внешней обстановке. Общим ограничением традиционных подходов является предположение о выборе конечномерного пространства состояний $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$.

В реальных системах число степеней свободы бесконечно, и гипотеза о конечномерности фазового пространства правомерна только тогда, когда из всех степеней свободы выделяется конечное, обычно небольшое, число характеристик порядка, определяющих поведение системы в конкретных условиях с достаточной точностью. Наиболее трудными для формального описания являются "переходные" динамические процессы в системах, возникающие при быстром изменении "внешних" условий. Обычные подходы к описанию таких неравновесных процессов неэффективны, поскольку сама структура пространства состояний зависит от времени [2]. Экспериментальные наблюдения за протеканием неравновесных процессов подтверждают зарождение в системе новых структур мезоскопического (промежуточного между микро и макро) масштаба, которые в значительной степени и определяют динамическое изменение типа формальной модели. Примерами такого рода структурообразования могут служить:

- образование многомасштабных вихревых структур в турбу-

лентных течениях жидкости и пластических течениях твердых материалов при импульсном нагружении,

- кластеризация в потоках концентрированных дисперсных смесей,
- иерархии структур в живых системах,
- а также похожие явления при самоорганизации в мультиагентных системах.

В настоящее время известно, что синергетические процессы формирования динамических структур мезоскопического масштаба в открытых термодинамических системах связаны с возникновением информационно-управленческой обратной связи, внутреннего управления, которое вместе с внешним управлением через наложенные на систему граничные условия и приводит к дискретизации пространства и времени неравновесной системы. При этом физическими носителями информации являются элементы динамических структур. Другими словами, для адекватного описания динамики поведения таких систем недостаточно выбрать ту или иную динамическую модель с фиксированным числом параметров порядка и привязанную только к одному масштабному уровню. Необходимо рассматривать новый класс моделей, предполагающих возможность изменения со временем структуры пространства состояний. Более точно, пусть задано некоторое множество возможных структур пространства состояний Σ и некоторое пространство $\mathcal{L}$, может быть и бесконечномерное, в которое вкладываются все промежуточные пространства состояний. Обозначив текущую структуру пространства состояний через $s \in \Sigma$ и $\mathbb{X}_s \subset \mathcal{L}$ — текущее пространство состояний, вместо одного уравнения динамики будем рассматривать два: для переменных в текущем пространстве состояний

$$\dot{x} = F_s(x, u, w, \theta_s),\ x(t) \in \mathbb{X}_{s(t)},$$

и для динамики изменения структуры пространства состояний

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{\mathbb{X}_{s(t')}} \mathrm{P}_s(dx|\, t', u, w).$$

Интегральная зависимость структуры пространства состояний от всей предыстории развития процесса, подсказываемая физически-

ми соображениями, позволяет говорить о “медленном” времени процесса изменения структуры по сравнению с “быстрой” динамикой переменных состояния. Если по аналогии с описанным выше определить дискретизированный процесс наблюдения, то приведенная схема иллюстрирует очень серьезную трудность в использовании традиционных методов оценивания и оптимизации. В модели наблюдения трудно исключить из рассмотрения систематическую погрешность $\widehat{v}_k(\theta_s)$, так как по логике составления новой модели невозможно с уверенностью говорить о том, какова же в данный момент структура пространства состояний, и соответственно предпринимать те или иные меры, направленные на “погашение” систематической погрешности. Этот пример трудностей в использовании стандартных подходов приводит к необходимости поиска алгоритмов, обеспечивающих высокое качество оценивания при минимальных предположениях о статистических свойствах помех.

Возможна ли такая постановка задачи в принципе?

Далее будет описан один из возможных подходов, позволяющих с оптимизмом смотреть на перспективы решения такого типа задач. Ключевой особенностью этого подхода является возможность включения рандомизации в модель таким образом, чтобы она была независимой с внешними помехами. Для рассмотренной выше модели динамики “в быстром времени” без существенного ограничения общности систематическую погрешность $\widehat{v}_k(\theta_s)$ можно рассматривать как внешнюю помеху, которая слабо связана с изменением текущих (мгновенных) переменных.

При рассмотрении проблем оптимизации стохастическая постановка не только является наиболее адекватной реальным процессам, но и часто позволяет предлагать обоснованные решения для вычислительно “сложных” или плохо обоснованных задач.

Во многих случаях для анализа поведения траекторий оправдан и обратный переход от стохастических дискретных моделей к непрерывным [3–6] (схема ДФЛ, Деревицкий-Фрадков-Льюнг).

3. Возможно ли осмысленное оценивание при произвольных внешних помехах?

Уже в школьной программе каждый сталкивается с физическими экспериментами, в которых измеряется результат того или иного воздействия на систему. Например, прикладывая к пружине раз-

ные усилия, получаем разные длины растяжения или сжатия. Но полученные результаты — это не произвольные числа, а они определяются характеристиками (параметрами) самой пружины (коэффициентом упругости) и некоторыми внешними помехами.

Рассмотрим для примера простейшую задачу оценивания неизвестного параметра θ^* по наблюдениям:

$$y_t = \theta^\star \cdot u_t + v_t, \tag{1}$$

в которой

- можно выбирать входы (управления) $u_t,\ t = 1, 2, ..., N$,
- измерять выходы y_t (см. рис. 1).

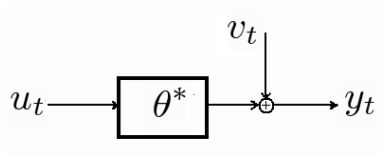

Рис. 1: Модель наблюдений.

Требуется по последовательности входов и выходов $\{u_t, y_t\}$ оценить (определить) неизвестный параметр $\theta^\star \in \mathbb{R}$ при отсутствии каких-либо ограничений на последовательность помех $\{v_t\}$.

Не кажется ли такая постановка задачи абсурдной?

С детерминистской точки зрения, конечно! Не может быть никакого детерминированного алгоритма, дающего хотя бы в каком-то смысле здравый ответ (кроме бессмысленного решения — вся числовая ось). Предложив в качестве ответа любое из чисел или даже какой-то интервал при конечном (или счетном) числе наблюдений, всегда можно будет подобрать такие v_t, что при следующем наблюдении предложенный ответ будет неверным.

Алгоритм последовательного оценивания неизвестного параметра $\theta^\star$ из (1) состоит из двух шагов:

1. Выбор входа (управления) u_t.
2. Оценивание параметра $\theta^\star$ на основе полученных данных u_t, y_t (вычисление, например, оценки $\widehat{\theta}_t$ или множества $\widehat{\Theta}_t$, содержащего $\theta^\star$).

Если бы в условиях задачи дополнительно можно было бы предположить случайную (вероятностную) природу помех v_t, то при выполнении условий усиленного закона больших чисел [7] можно было бы говорить об оценивании неизвестного параметра $\theta^\star$ путем простого усреднения данных наблюдения. Результаты моделирования с истинным параметром $\theta^\star = 3$ и наблюдениями, которые производились с равномерно распределенной на интервале $[-0.5; 0.5]$ помехой v_t, приведены в табл. 1 (строка 5), показывают близость оценки $\widehat{\theta}_7 = 2.99$ к истинному параметру $\theta^\star = 3$.

Таблица 1.

t	1	2	3	4	5	6	7
u_t	1	1	1	1	1	1	1
$v_t = rand() - 0.5$							
y_t	2.9	2.8	3.2	3.3	2.6	3.4	2.7
$\widehat{\theta}_t$	2.9	2.85	2.97	3.05	2.96	3.03	2.99
$v_t = rand() - 0.5 + m,\ m = 1$							
y_t	3.9	3.8	4.2	4.3	3.6	3.9	4.2
$\widehat{\theta}_t$	3.9	3.85	3.97	4.05	3.96	4.03	3.99

Если наблюдения проводились бы также со случайной помехой, но у которой математическое ожидание $m = E\{v_t\}$ (например, $m = 1$, табл. 1, строка 6) было бы неизвестно, то результаты моделирования (табл. 1, строка 8) показывают ошибочность работы алгоритма, $\widehat{\theta}_7 = 3.99$ и существенно превосходит $\theta^\star = 3$.

Несмотря на кажущуюся абсурдность постановки задачи оценивания при произвольных внешних помехах, из практических потребностей (см. раздел 2) часто ее все-таки приходится решать.

В детерминированном алгоритме каждый шаг задается детерминированным правилом с использованием результатов предыдущих шагов, и полученная новая информация о системе (выход) возвращается для использования в последующих шагах алгоритма. Такая точка зрения, однако, может быть обобщена до следующего определения рандомизированных алгоритмов:

Определение 1. *Рандомизированным называется алгоритм, в котором выполнение одного или несколько шагов основано на случайном правиле (т. е. среди многих детерминированных правил одно выбирается случайно в соответствии с вероятностью P).*

В зависимости от специфики конкретной задачи вероятность

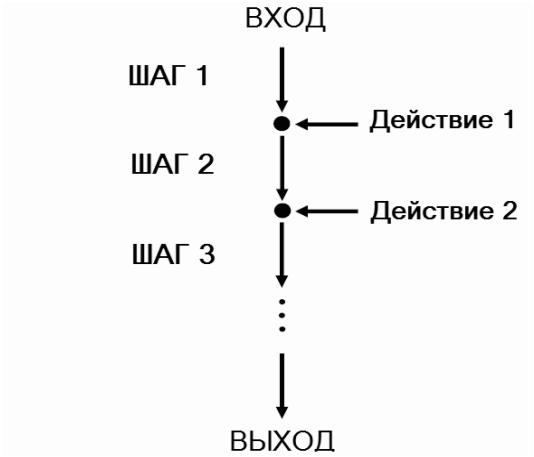

Рис. 2: Модель детерминированного алгоритма.

или является искусственным элементом, вводимым в алгоритм для улучшения разрешимости проблемы, или в рассматриваемой системе могут присутствовать измеряемые случайные элементы. Выбор этой вероятности P является частью конструирования алгоритма.

Рассмотрим следующее правило случайного выбора для первого шага рандомизированного алгоритма последовательного оценивания неизвестного параметра $\theta^\star$ из (1):

$$u_t = \begin{cases} +1, \text{с вероятностью } \frac{1}{2}, \\ -1, \text{с вероятностью } \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{2}$$

т. е. на первом шаге случайно выбирается один из 2^7 возможных наборов входов (управлений).

На втором шаге по известным парам значений (u_t, y_t) формируем величины

$$\bar{y}_t = u_t \cdot y_t.$$

Для “новой” последовательности наблюдений справедлива похожая на (1) модель

$$\bar{y}_t = \theta^\star \cdot \bar{u}_t + \bar{v}_t,$$

в которой $\bar{u}_t = u_t^2$ и $\bar{v}_t = u_t \cdot v_t$.

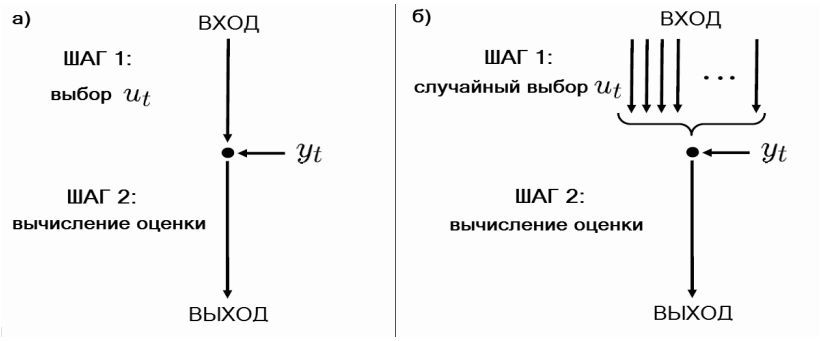

Рис. 3: Детерминированный (а) и рандомизированный (б) алгоритмы.

Пусть, как и ранее при моделировании, v_t — случайные помехи с неизвестным математическим ожиданием. Если v_t — внешние помехи, то естественно считать, что они независимы с нашим рандомизированным правилом выбора входов (управлений) на шаге 1. Следовательно,

$$E\{\bar{v}_t\} = E\{u_t \cdot v_t\} = E\{u_t\} \cdot E\{v_t\} = 0 \cdot m = 0,$$

т. е. "в новой модели" наблюдений задача об оценивании неизвестного параметра $\theta^\star$ из (1), не имевшая решения, превращается при использовании случайного правила выбора входов (управлений) на шаге 1 рандомизированного алгоритма в "стандартную" задачу об оценивании неизвестного параметра $\theta^\star$, наблюдаемого на фоне независимых центрированных помех.

В табл. 2 сведены соответствующие результаты имитационного моделирования.

Таблица 2.

t	1	2	3	4	5	6	7
u_t	-1	1	-1	1	1	1	-1
$v_t = rand() - 0.5 + m,\ m = 1$							
y_t	-2.1	3.8	-1.8	4.3	3.6	4.4	-2.3
$\bar{u}_t$	1	1	1	1	1	1	1
$\bar{y}_t$	2.1	3.8	1.8	4.3	3.6	4.4	2.3
$\widehat{\theta}_t$	2.1	2.95	2.57	3.00	3.12	3.33	3.19

Как видно, полученные в строке 7, табл. 2, результаты существенно лучше, чем в строке 8, табл. 1, но в отличие от результатов

более соответствующей им строке 5, табл. 1, качество оценок получилось ниже, так как “новые ошибки” $\bar{v}_t$ имеют большую дисперсию по сравнению с v_t.

Более строгий математический результат о гарантированном множестве возможных значений неизвестного параметра $\theta^\star$ можно получить для произвольных внешних помех v_t, следуя методу, детально описанному в разделе 7 и обоснованному М. Кампи в [1] (см. [8] на русском языке). Опуская технические детали, опишем метод построения доверительного интервала:

1. Пусть $M = 8$ и выберем случайно семь $(= M - 1)$ разных групп по четыре индекса $T_1, \ldots, T_7$.
2. Вычислим семь частичных сумм $\bar{s}_i = \sum_{j \in T_i} \bar{y}_j,\ i = 1, \ldots, 7$.
3. Сформируем доверительный интервал

$$\widehat{\Theta} = [\min_{i \in 1:7} \bar{s}_i; \max_{i \in 1:7} \bar{s}_i],$$

содержащий $\theta^\star$ с вероятностью $p = 75\%$ $(= 1 - 2 \cdot 1/M)$.

Доверительный интервал является стохастическим, поскольку зависит от случайного выбора входного сигнала. Доверительная вероятность $p = 75\%$ означает, что при 75 наборах входов из 100 получающийся доверительный интервал будет содержать $\theta^\star$, причем эта вероятность точная, а не нижняя граница, и этот результат справедлив для любой последовательности шумов $\{v_t\}$.

По описанному методу для данных $\{(u_t, y_t)\}$ из табл. 2 получаем:

Таблица 3.

i	T_i	$\bar{s}_i$
1	{2, 3, 4, 5}	3.375
2	{1, 3, 4, 6}	3.15
3	{2, 3, 5, 6}	3.4
4	{1, 2, 6, 7}	3.15
5	{1, 4, 5, 7}	3.075
6	{2, 3, 5, 7}	2.875
7	{1, 4, 6, 7}	3.275

и, следовательно,

- интервал $\widehat{\Theta} = [2.875; 3.4]$ содержит неизвестный параметр $\theta^\star$ с вероятностью $p = 75\%$,

что вполне соотносится с условиями задачи, т. к. при моделировании использовалось фактическое значение $\theta^\star = 3$. Взяв вместо семи пятнадцать ($M = 16$) частичных сумм $\bar{s}_i$, можно вдвое сократить вероятность ошибки, получив $p = 87.5\%$, но при этом, вообще говоря, получится больший доверительный интервал $\widehat{\Theta}$.

Итак, дать утвердительный ответ на вопрос, вынесенный в заголовок этого раздела, оказывается вполне возможно.

Для казалось бы абсурдной задачи об оценивании параметра при произвольных внешних помехах, с которой принципиально не может справиться ни один детерминированный алгоритм, внесение рандомизации в процесс выбора входных данных позволяет получить вполне осмысленные результаты.

Введя искусственно вероятность в рассматриваемую задачу, можно при характеристике качества работы алгоритма говорить о его вероятностной успешности.

Определение 2. *Рандомизированный алгоритм называется вероятностно-успешным с вероятностью p, если вероятность его правильного результата не менее p.*

Достижение успешных результатов с высокой степенью вероятности в отличие от детерминированного случая соответствует осмысленному выбору компромисса: если полностью гарантированного результата получить невозможно, то лучше иметь 75%-ю гарантию вместо ничего.

Конечно, не во всех задачах компромисс возможен. Во многих случаях ответ нужен гарантированный на 100%. Но "защищая" рандомизированные алгоритмы, надо отметить, что уровень достоверности p обычно является параметром алгоритма, который может быть настроен пользователем. Параметр p в определении 2 ослабляет понятие детерминированной разрешимости, для которой вероятность успеха может быть только 0 или 1, образно выражаясь, результат "черный" или "белый". Переходя к рандомизированным алгоритмам, становится непрерывным параметром, пробегающим интервал $[0; 1]$, задавая тот или иной оттенок "серого".

Замечание. Альтернативный вероятностный подход к решению задачи оценивания — байесовский, при котором присутствующим в системе помехам v_t априори приписывается вероятностная природа Q, но его невозможно применить при произвольных внешних помехах (в худшем случае), т. к. все выводы имеют вероятност-

ную основу предположений о системе. По смыслу байесовский и рандомизированний подходы совершенно различны с практической точки зрения. В байесовском — Q описывает вероятность того или иного значения помехи v_t по сравнению с другими, т. е. выбор Q является частью модели задачи. В отличие от этого, вероятность P в рандомизированном подходе является тем, что мы искусственно выбрали и используем. P существует только в нашем алгоритме, и, следовательно, нет традиционной проблемы плохой модели, как это может случиться с Q при байесовском подходе.

4. Рандомизированные алгоритмы как способ снижения вычислительной сложности

Многие авторы выступают за использование рандомизированных алгоритмов для уменьшения сложности вычислений по сравнению с более традиционными детерминированными подходами.

Идея состоит в следующем: предположим, что детерминированный алгоритм требует чрезмерных вычислений для обработки всей доступной информации. Тогда можно сознательно отказаться от части информации и перейти к решению упрощенной задачи с частичной информацией. При этом, однако, детерминированной разрешимости, может быть, достичь невозможно, но как и ранее можно рассмотреть рандомизированный подход к определению решения с высокой вероятностью успеха. Конечный результат: компромисс между полной гарантией успеха и вычислительной реализуемостью (возможностью получить ответ за реальное ограниченное время).

Заметим, что причина обращения к рандомизированным методам осталась та же: это недостаток информации. Однако здесь другая подоплека: информацию вполне возможно собрать и всю, но ее часть сознательно отбрасывается для увеличения вычислительной реализуемости, делая при этом ее недостаточной для решения проблемы традиционным детерминированным способом.

В рамках этой логики впечатляющие результаты были получены для рандомизированных подходов в основных областях теории управления и систем. Это относится, например, к выпуклым проблемам робастного управления, включая в том числе широкий класс задач управления, сводящихся к параметро-зависимым линейным матричным неравенствам (LMIs). Как известно, многие из

этих проблем являются NP-трудными в детерминированной постановке, см., например, [9–11].

Успеху рандомизированных алгоритмов способствует еще и то, что производительность и вероятность успеха рандомизированных алгоритмов может быть достаточно точно оценена аналитическими методами, например, с помощью неравенства Хефдинга [12].

5. Исторический обзор

Рождение рандомизированных методов восходит к появлению метода статистического моделирования Монте-Карло (МК), предложенного в Лос-Аламосе Н. Метрополисом и С. Уламом в ходе работ над Манхэттенским проектом [13]. Метод МК задает простую схему для оценки среднего значения (математического ожидания) $E\{F(X)\}$ на основе случайной выборки образцов x_k случайной величины X (рандомизации X). Первоначально стохастический подход использовали для аппроксимации многомерных интегралов в уравнениях переноса, возникших в связи с задачей о движении нейтрона в изотропной среде. Более подробное описание МК можно найти, например, в книге С.М. Ермакова [14].

Идея использования случайных входных сигналов для устранения эффекта смещения была выдвинута Р. Фишером [15] в виде рандомизированного принципа планирования эксперимента. Рекуррентные алгоритмы оценивания параметров регрессии при случайных входных сигналах рассматривались также в книгах А. Алберта, Л. Льюнга, Т. Сёдерстрёма, П. Юнга [5, 16–18], но при стандартных предположениях о помехах, а именно, считалось, что они представляют собой последовательности случайных величин с нулевым средним, независимых или слабозависимых. О.Н. Граничиным, А.В. Гольденшлюгером и Б.Т. Поляком в [19–21] были предложены рандомизированные алгоритмы оценки параметров линейной регрессии, состоятельные при почти произвольных помехах.

Детальному анализу возможностей рандомизированных алгоритмов в задачах оценивания и оптимизации при произвольных помехах посвящена книга О.Н. Граничина и Б.Т. Поляка [22]. Рассматриваемый в этой книге новый тип рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации (РАСА), называемых в англоязычной литературе Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation (SPSA), был предложен в работах О.Н. Граничина [23,25],

Б.Т. Поляка и А.Б. Цыбакова [5], Дж. Спалла [26], и Х.-Ф. Чена, Т. Дункан и Б. Пасик-Дункан [27]. Они основаны на аппроксимации градиента вдоль случайно выбранного направления — рандомизации, которая опирается на некоторые контролируемые случайные величины, влияющие на результаты наблюдений, существующие в системе или добавляемые экспериментатором. Эти алгоритмы относятся к более широкому классу методов случайного поиска, которые ранее в русскоязычной литературе исследовались, например, в работах Л.А. Растригина [28], Ю.А. Сушкова [29], А. Жилинскаса и А.А. Жиглявского [30]. При решении задач глобальной оптимизации в настоящее время активно используются алгоритмы имитации отжига [31–34] и генетические алгоритмы [35], в основе которых также лежат рандомизированные правила.

Параллельно, начиная с работ В.Н. Вапника и А.Я. Червоненкиса, в научной литературе развивалась *статистическая теория восстановления зависимостей по эмпирическим данным* [36, 37], направленная на установку условий равномерной сходимости эмпирических средних к математическим ожиданиям. Вместо оценки $E\{F(X)\}$ цель превратилась в гораздо более технически сложную задачу: оценки $E\{F(\theta, X)|X\}$, где X является случайной величиной, в отношении которой берется математическое ожидание, а θ — параметр. Эта проблема равномерной сходимости тесно связана с задачами обучения: если имеет место равномерная сходимость, то решение задачи минимизация эмпирической ошибки по отношению к θ возвращает почти минимум соответствующей ошибки математического ожидания $E\{F(\theta, X)|X\}$ (см., например, [38, 39]), т. е. может служить хорошей оценкой для решения задачи

$$E\{F(\theta, X)|X\} \to \min .$$

В работе М. Видьясагара [40] методы из теории обучения было предложено использовать в задачах робастного управления, в которых традиционное *конструирование для "худшего" случая*, с одной стороны, приводит к необходимости решения NP-сложных задач, а с другой — часто привносит в систему чрезмерный консерватизм, поскольку вынуждает фокусироваться на всех вырожденных случаях, вероятность появления которых на практике невелика. Появилась совершенно новая область приложения рандомизированных методов, ориентированных на среднее качество синтеза регулятора: для заданного множества объектов X, ассоциированного с

некоторой вероятностной мерой, описывающей возможность проявления различных объектов, ожидаемое качество контроллера определяется параметром θ и может быть записано как $E\{F(\theta, X)|X\}$. Следовательно, задачу оптимизации выбора контроллера можно решить путем рандомизации на X при условии, что имеет место равномерная сходимость. Использование рандомизации не ограничивается задачами, где показатель качества задается математическим ожиданием $E\{F(\theta, X)|X\}$. Рандомизация может быть применена и при решении минимаксных проблем при условии, что возможно ослабление требования "макс" в вероятностном смысле. Более точно, если можно довольствоваться решением задачи

$$\max_{x \in \bar{X}} F(\theta, x) \ \rightarrow \ \min,$$

где множество объектов $\bar{X} \subset X$ должно иметь достаточно большую вероятность, например, $Prob\{\bar{X}\} > 1 - \varepsilon$, ("chance-constrained" problem [41]), т. е. позволено игнорировать те объекты из X, шанс появления которых не более ε. Когда ε уменьшают к нулю, это задача возвращается к стандартной формулировке минимаксной робастности. Широкий обзор использования рандомизированных методов в системах управления в очерченных здесь общих рамках дан в работах Р. Темпо, Дж. Калафиоре и Ф. Даббене [42,43]. Без каких-либо претензий на полноту перечисления в дополнение к авторам упомянутого обзора отметим работы в этой области Р. Стенгеля, Л. Рэя, П. Каргонекара, А. Тикку, Э.-В. Бая, Б. Бармиша, К. Лагоа, Ю. Оиши, Х. Кимура, Б.Т. Поляка, Ю. Фуджисаки, П.С. Щербакова, С. Канева, Т. Башара, Х. Ишии [44–54].

Кроме приложений в задачах теории управления сценарный подход может быть использован и при обнаружении неисправностей, "разладки" или нетрадиционного поведения в самых разнообразных системах. В [55] описана идея рандомизированного подхода к обнаружению разрывов функции, инспирированная сценарным подходом. В дальнейшем ее развитие привело к новому рандомизированному алгоритму устойчивой кластеризации, который состоит в построении по небольшому случайно выбранному количеству точек нескольких равномерных аппроксимаций индексной функции специального вида, имеющей "скачок" в точке, соответствующей истинному количеству кластеров [56–59]. Имитационные эксперименты показывают работоспособность нового алгоритма при определении нескольких тысяч кластеров в условиях неопределенности,

на порядок превышающей их действительное количество. При этом использование нового алгоритма позволяет существенно сократить общую вычислительную сложность процесса поиска кластеров.

Другая проблема, с которой сталкиваются при синтезе законов управления, — недостаточная *вариативность* последовательности наблюдений: *"управляющие воздействия должны быть в известной мере изучающими, но в известной мере направляющими"* (А.А. Фельдбаум, [60]). Например, если цель адаптивного управления состоит в минимизации отклонения вектора состояния системы от заданной траектории, то это часто приводит к вырожденной последовательности наблюдений, в то время, как для успешного проведения идентификации неизвестных параметров системы должно быть обеспечено "разнообразие" наблюдений. Учитывая возможности прямого влияния на управляемые процессы через входные переменные системы, в 1986 г. О.Н. Граничиным совместно с В.Н. Фоминым [61] и Х.-Ф.Ченом с Л.Гао [62] было предложено и обосновано при синтезе адаптивного асимптотически-оптимального управления (минимаксного и среднеквадратического соответственно) дополнительно к основному управлению включать в канал управления пробное рандомизированное возмущение. В итоге получается рандомизированная стратегия адаптивного оптимального управления. В современных работах М. Кампи, Э. Вейера [63] и Дж. Калафиоре, Л. Фаджиано [64] рассматриваются перспективы использования такого же типа рандомизированных стратегий управления для идентификации и синтеза робастного оптимального управления на конечном интервале времени.

В близких по постановкам задачах фильтрации при произвольных ограниченных помехах в наблюдениях рандомизированные модификации стандартных алгоритмов рассматривались в работах [65–71].

В связи с массовым переходом к обработке потоков двумерных (2-D) и трехмерных (3-D) данных резко увеличились объемы обрабатываемой информации. Сложность традиционных методов квантования сигналов возрастает по экспоненциальному закону с ростом размерности. Квантование 1-D сигналов при $N = 10^3$ отсчетов соответствует 10^6 в случае 2-D , а в 3-D — 10^9, что уже чрезвычайно велико. В современных приложениях для цифровых фото- и видеокамер традиционное требование о необходимой частоте (скорости, Nyquist Rate) измерения настолько высоко, что слиш-

ком большое количество получающихся данных надо существенно сжимать перед хранением или пересылкой. В других приложениях, включая системы отображения (медицинские сканеры, радары) и быстродействующие аналого-цифровые конвертеры, увеличение частоты измерений оказывается очень дорогостоящим. С практической точки зрения чрезвычайно интересно исследовать возможности восстановления $\theta \in \mathbb{R}^d$ по $y \in \mathbb{R}^m$ при $m << d$, что, конечно же, нереализуемо в общем случае. Но в последнее время на помощь традиционной теории обработки сигналов приходит новая парадигма *compressive sensing* ("опознание со сжатием"), позволяющая достаточно точно восстанавливать "разреженную" (sparse) информацию θ [72, 73]. При этом используются рандомизированные измерения, по результатам которых информация восстанавливается, например, на основе применения методов ℓ_1-оптимизации: x находится как решение некоторой задачи вида

$$||\theta||_1 = \sum_j |\theta[j]| \to \min \ : \quad y = \sum_{j=1}^{N} \theta[j]u[j].$$

Более детальное описание новой парадигмы и много примеров можно найти в [74–76].

6. Минимизация функционалов типа среднего риска

Проблема оптимизации того или иного функционала встает во многих практических приложениях. Иногда экстремальные значения можно найти аналитически, однако зачастую инженеры имеют дело с неизвестным функционалом, значение которого можно только вычислять в задаваемых точках. При этом возможно появление неконтролируемых неопределенностей различной природы, как статистических, так и нерегулярных (например, неизвестных, но ограниченных, для которых традиционные предположения о статистической природе, независимости и центрированности не выполнены).

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, и $F(\theta, w) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая по первому аргументу функция, $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^d$.

Будем считать, что в каждый момент времени $i = 1, 2, \ldots$ в выбираемых экспериментатором точках измерения $x_1, x_2, \ldots$ (план

наблюдения) доступно наблюдению с аддитивной помехой v_i значение функции

$$y_i = F(x_i, w_i) + v_i, \tag{3}$$

где $w_i \in \mathbb{W}$ — неконтролируемая последовательность независимых случайных векторов, имеющих одинаковое, вообще говоря, неизвестное распределение $\mathrm{P}_w(\cdot)$.

Рассмотрим задачу о построении по наблюдениям $y_1, y_2, \ldots$ последовательности оценок $\{\widehat{\theta}_i\}$ неизвестного вектора $\theta^\star$, минимизирующего функцию $f(\theta)$ типа функционала среднего риска:

$$f(\theta) = E\{F(\theta, w)|w\} \to \min. \tag{4}$$

Обычно исследуется случай $F(\theta, w) = f(\theta)$. Сделанное обобщение позволяет, например, учесть случай мультипликативной неопределенности: $F(\theta, w) = wf(\theta)$ и $Ew = 1$.

Наряду с (4) часто рассматривается и нестационарная постановка задачи. Пусть задано семейство функций $\{F_\xi(\theta, w)\}_{\xi \in \Xi}$, дифференцируемых по первому аргументу, $x_1, x_2, \ldots$ — выбираемая экспериментатором последовательность точек измерения (план наблюдения), в которых в каждый момент времени $i = 1, 2, \ldots$ доступно наблюдению с аддитивной помехой v_i значение функции $F_{\xi_i}(x_i, w_i)$

$$y_i = F_{\xi_i}(x_i, w_i) + v_i, \tag{5}$$

где ξ_i — неконтролируемая последовательность: $\xi_i \in \Xi$. *Требуется* по наблюдениям $y_1, y_2, \ldots$ построить последовательность оценок $\{\widehat{\theta}_i\}$ неизвестных векторов $\{\theta_i\}$, минимизирующих функции $f_i(x)$ типа функционала среднего риска:

$$f_i(\theta) = E\{F_{\xi_i}(\theta, w)|w\} \to \min. \tag{6}$$

Задача (4) является частным случаем (6) при $\theta_i \equiv \theta$ и $\Xi = \{\xi_1\}$.

Обозначим пробное возмущение $\Delta_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots$, и $\mathrm{P}_{\Delta_i}(\cdot)$ — его распределение.

Пусть $\widehat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^n$ и задана последовательность $\{\Theta_i\}$ выпуклых множеств $\Theta_i \subset \mathbb{R}^n$, содержащих начиная с некоторого $N > 0$ точку/- и минимума/-ов функционала (4)/-ов (6). Например, $\{\Theta_i\}$ — последовательность расширяющихся до бесконечности шаров. Рассмотрим свойства оценок следующих трех алгоритмов типа случайного поиска:

$$\bar{\theta}_i = \widehat{\theta}_{i-1} + \beta_i \Delta_i,\ y_i = F(\bar{\theta}_i, w_i) + v_i,$$

$$\widehat{\theta}_i = \mathcal{P}_i(\widehat{\theta}_{i-1} - \frac{\alpha_i}{\beta_i}\mathcal{K}_i(\Delta_i)y_i), \tag{7}$$

с одним и двумя измерениями на итерации

$$\bar{\theta}_{2i} = \widehat{\theta}_{i-1} + \beta_i\Delta_i,\ \bar{\theta}_{2i-1} = \widehat{\theta}_{i-1} - \beta_i\Delta_i,$$

$$\widehat{\theta}_i = \mathcal{P}_i(\widehat{\theta}_{i-1} - \frac{\alpha_i}{2\beta_i}\mathcal{K}_i(\Delta_i)(y_{2i} - y_{2i-1})), \tag{8}$$

$$\bar{\theta}_{2i} = \widehat{\theta}_{i-1} + \beta_i\Delta_i,\ \bar{\theta}_{2i-1} = \widehat{\theta}_{i-1},$$

$$\widehat{\theta}_i = \mathcal{P}_i(\widehat{\theta}_{i-1} - \frac{\alpha_i}{\beta_i}\mathcal{K}_i(\Delta_i)(y_{2i} - y_{2i-1})), \tag{9}$$

где $\mathcal{P}_i$ — проекторы на Θ_i, причем для алгоритма (7) Θ_i — компакты, а $\mathcal{K}_i(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — некоторые вектор-функции (ядра), например, $\mathcal{K}_n(\Delta) = \Delta$.

О.Н. Граничиным установлена состоятельность и сильная состоятельность методов с пробным возмущением при условии почти произвольных помех [23]. Б.Т. Поляк и А.Б. Цыбаков обосновали минимаксную асимптотическую оптимальность скорости сходимости оценок алгоритмов (7) и (8) в том смысле, что порядок ее не может быть улучшен никаким другим итеративным алгоритмом [5]. Дж. Спалл показал асимптотическое сокращение количества измерений для методов с пробным возмущением типа (8), по сравнению с процедурой Кифера-Вольфовица, что является существенным при больших n [26].

В задаче (6) алгоритмы стохастической аппроксимации с пробным возмущением (7)-(9) обычно используются с постоянными шагами $\alpha_n \equiv \alpha$, $\beta_n \equiv \beta$. На рис. 4 показана блок-схема алгоритма (9) рекуррентной оптимизации нестационарного функционала.

При исследовании свойств получающихся оценок обычно предполагают выполненными ряд условий на функции F и неопределенности x_i и v_i:

(A) Сильная выпуклость $f(\theta)$ в точке минимума.

(B) Ограниченность скорости изменения градиента $\nabla F(\cdot, w)$.

(C) Условие перестановки операторов интегрирования и дифференцирования для $F(\theta, w)$ и $\nabla F(\theta, w)$.

(D) Ограниченность статистических моментов $F(\theta, w)$ и $\|\nabla F(\theta, w)\|_\rho$ в точке минимума.

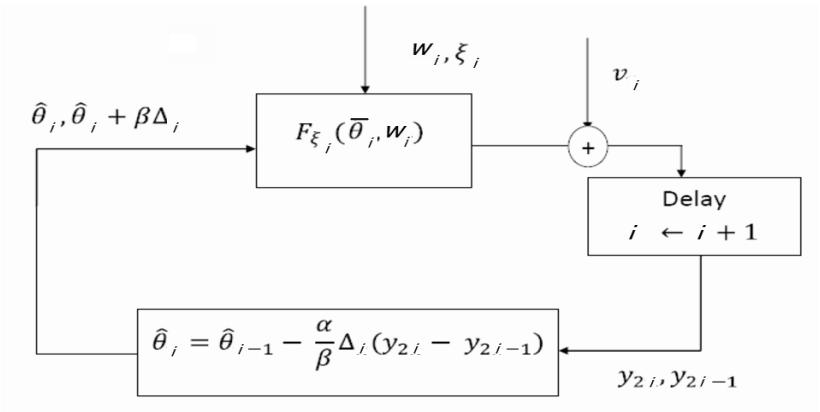

Рис. 4: Блок-схема алгоритма (9) в задаче нестационарной оптимизации.

(E) Ограниченность колебаний функции F в последовательные моменты времени.
(F) Ограниченность дрейфа точек минимума.
(G) Неизвестные помехи наблюдения v_i либо детерминированные и ограниченные, либо случайные независимые с $\{\Delta_i\}$, имеющие ограниченный момент степени ρ.
(H) Будем считать пробное рандомизированное возмущение последовательностью независимых случайных величин с независимыми между собой компонентами.
(I) Условия на размеры шагов алгоритмов $\alpha_n, \beta_n \geq 0$ стандартные для алгоритмов типа стохастической аппроксимации.

Обоснование свойств оценок рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации дано в [22, 67, 77]:

Теорема 1. *Если выполнены условия (A) для $f(\theta)$, (B)-(E) для $F(\theta, w)$, а также (G)-(I),*

тогда *оценки алгоритмов (7)-(9) являются состоятельными и $E\|\widehat{\theta}_i - \theta^\star\|_\rho^\rho \to 0$ при $i \to \infty$.*

При некоторых дополнительных условиях можно получить сильную состоятельность оценок или характеристики скорости сходимости.

Для нестационарного случая имеем.

Т е о р е м а 2. *При постоянных размерах шагов:* $\alpha_i \equiv \alpha$, $\beta_i \equiv \beta$, *если равномерно по* i *выполнены условия (A) для* $f_i(\theta)$, *(B)-(E) для* $F_{\xi_i}(\theta, w_i)$, *(F) для дрейфа минимума, (G) для аддитивных помех наблюдения, (H) для рандомизированного возмущения,*

то *можно специальным образом так определить некоторые постоянные* K *и* L, *что выполняется*

$$E\|\widehat{\theta}_i - \theta_{mi}\|_\rho^\rho \le K^i E\|\widehat{\theta}_0 - \theta_0\|_\rho^\rho + (1 - K^i)\frac{L}{1-K},$$

и последовательность оценок $\{\widehat{\theta}_i\}$ *имеет границу стабилизации, равную* $\bar{L} = \frac{L}{1-K}$.

6.1. Оптимизация работы сервера, обрабатывающего очередь заданий

Для апробирования методов адаптивной оптимизации в задаче повышения эффективности обслуживания одним сервером очереди заданий была разработана модель, имитирующая работу сервера, и были проведены исследования применимости рандомизированных алгоритмов стохастической оптимизации при настройке наилучшего значения параметра диспетчеризации сервера в зависимости от реальных входных данных.

Проблема эффективного обслуживания сервером очереди заданий — одна из классических задач теории массового обслуживания. Существует множество методов для ее решения, были разработаны различные алгоритмы и проведены многочисленные исследования. Возможности использования адаптивных методов в этой задаче не столь детально изучены. В частности, ряд способов предлагается и исследуется в книге [6] и в статье [78]. Их обоснование базируется на использовании техники “анализа бесконечно малых возмущений”. В [79] было предложено использовать для адаптивной подстройки изменяемого параметра сервера рандомизированный алгоритм стохастической аппроксимации.

Рассмотрим для примера загруженность обычной корпоративной сети. В начале и конце рабочего дня в ней преобладают кратковременные и частые запросы к серверу, а в середине дня задания поступают реже и становятся более трудоемкими. Такие колебания могут возникать не только в течение суток, но и зависеть от сезона, дня недели и т. п. Заметим, что для более результативной работы

сервера можно подстраивать его характеристики под тип поступающих заданий, но как определить границы периодов? Возможно провести некоторое исследование-мониторинг и получить приблизительные искомые значения. Этот способ не очень хорош, потому как в реальной ситуации выявить прямую зависимость от факторов сложно, и, кроме того, подобное исследование весьма дорого и требует повторных работ даже при незначительных изменениях. Хотелось бы иметь возможность реагировать на изменения этих значений в режиме реального времени в зависимости от вида поступающих заданий.

Формализуем постановку задачи о повышении эффективности сервера. Пусть он используется для обслуживания очереди заданий, процесс поступления которых является случайным. Будем считать, что вероятностное распределение времени обслуживания задания сервером зависит от вещественного параметра θ, который требуется выбрать с целью минимизации среднего времени ожидания $L(x)$ клиентами вместе с некоторой стоимостью $q(x)$ использования параметра x

$$f(\theta) = q(\theta) + L(\theta) \equiv q(\theta) + \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Ey_i(\theta) \to \min,$$

где $y_i(\theta)$ — время, которое задание, законченное i-м по счету, ожидало (“простаивало”) в сервере до момента своего завершения. *Требуется* найти параметр $\theta^\star$, минимизирующий $f(\theta)$ по θ из некоторого компактного множества $\Theta \subset \mathbb{R}$ (области определения).

Вообще говоря, функцию $L(\theta)$ очень трудно вычислить. Пусть θ фиксировано. Можно, наблюдая за очередью длительное время (фиксируя время поступления заказа, время обслуживания и время отправки для каждого клиента), использовать полученные данные для оценки $\widehat{G}$ производной функционала качества $\nabla f(\theta)$ для текущего значения $\widehat{\theta}$, получающегося в результате подсчета по некоторому градиентному алгоритму. Здесь термин оценка производной понимается в широком смысле, так как она может получаться смещенной. Фактически, мы обязаны предполагать, что получающаяся оценка производной зависит не только от выбранной точки $\widehat{\theta}$, но и от некоторого набора w неконтролируемых возмущений (помех)

$$\widehat{G} = G(\widehat{\theta}, w),$$

определяющихся конкретными условиями функционирования сервера на выбранном для исследований интервале времени, включая фактически реализовавшуюся последовательность запросов. Основная трудность, общая для многих систем реального времени, заключается в том, что оптимизация должна быть получена на основании наблюдений только на конкретной траектории реализации случайной величины. У экспериментатора нет возможности выбирать значения функции в некоторой окрестности точки x для формирования оценки производной в этой точке, т. е. эту задачу оптимизации не решить традиционными средствами, стандартные конечно-разностные методы оценки производной функционала качества в рассматриваемой задаче малопригодны. Более адекватными подходами к решению являются алгоритмы, основанные на использовании подсчитываемых на определенных интервалах времени значений эмпирических функционалов качества $F(x, w)$, которые при определенных естественных предположениях о регулярности входного потока и эксплуатационных характеристик сервера являются несмещенными оценками значений функционала качества

$$f(\theta) = E\{F(\theta, w)|w\}.$$

Кроме перечисленных трудностей, с течением времени оптимальное значение θ обычно дрейфует, например, как при колебаниях параметров входных потоков в корпоративных вычислительных сетях. Поэтому наряду с задачей оптимизации не менее актуальной является проблема о трекинге (отслеживании изменяющейся точки минимума). Более точно, пусть $F_t(\theta, w)$ — случайная функция дискретного времени $t = 1, 2, \ldots$, векторного параметра θ и вектора неконтролируемых возмущений w. Обозначим через f_t "текущий" функционал среднего риска:

$$f_t(\theta) = E\{F_t(\theta, w)|w\}.$$

Точку минимума функционала f_t обозначим

$$\theta_t = \arg\min_{\theta} f_t(\theta).$$

Будем считать, что, выбрав θ на определенных интервалах времени, мы можем измерить значения соответствующего "текущего" эмпирического функционала $F_t(\theta, w)$. При этом мы естественно

предполагаем, что скорость “дрейфа” оптимального параметра настолько низкая, что мы в состоянии получить целую серию значений $F_t(\theta_i, w_i),\ i = 1, 2, \ldots$.

Требуется по наблюдениям (может быть с дополнительными помехами) за случайными величинами $F_t(\theta_i, w_i),\ i = 1, 2, \ldots$ построить последовательность оценок $\{\widehat{\theta}_t\}$, отслеживающих изменения параметра θ_t, для которой $\|\widehat{\theta}_t - \theta_t\| \to \min$ в каком-нибудь смысле.

Будем предполагать, что процесс поступления этих заданий от клиентов носит случайный характер. Входные данные определяют последовательность пар чисел $\{(t_i^{in}, d_i)\}$, в которых первое значение соответствует времени прихода задания на сервер, а второе — времени, необходимому для его исполнения. Естественно, что для сервера значения d_i считаются неизвестными.

Для простоты считаем, что сервер обрабатывает задания следующим образом:

• задается шаг диспетчеризации θ $(\theta \in \Theta = [a; b])$;

• первое поступившее задание начинает выполняться сервером сразу после поступления;

• поступающие задания попадают в естественную очередь;

• в каждый момент времени сервер обрабатывает только одно текущее задание;

• в моменты времени, кратные выбранному шагу диспетчеризации θ, если сервер свободен, то он переключается на выполнение первого в очереди задания, если он занят, то выполняющееся задание прерывается и отправляется в конец очереди, а сервер переключается на первое задание из очереди. На эту операцию “загрузки-выгрузки” сервер всегда затрачивает фиксированное время d_{load}.

Выберем натуральное достаточно большое число N (например, $N = 1000$). Разобьем общее время работы сервера на определенные интервалы — такты: $t_0, t_1, \ldots, t_k, \ldots$, по правилу:

t_0 — время начала работы сервера;

t_1 — время окончания выполнения первых N заданий;

...

t_k — время окончания выполнения k-й серии из N заданий;

...

Отметим, что вообще-то задавать такты можно различными способами: либо начиная новый интервал по завершении обработки группы из некоторого фиксированного числа заказов, либо после

прихода на сервер фиксированного числа заданий, либо выбирая фиксированный интервал времени сервера, и т. п. Все разумные правила выбора тактов во многом эквивалентны.

Опишем способ получения значений y_k для эмпирического функционала $F(\theta, w)$. Считаем, что для каждого k-го такта каким-то образом задано соответствующее значение оценки $\widehat{\theta}_k$ для регулируемого параметра θ (интервала времени обслуживания задания на сервере). Для удобства перенумеруем задания, выполненные сервером, в порядке окончания их обработки. Каждому заданию наряду с парой чисел (t_i^{in}, d_i), определенных уже в момент его поступления, сопоставим еще одно — t_i^{out} — время окончания его обработки. Определим значения эмпирической функции качества как среднее время бесполезного ожидания заданий до их завершения с учетом стоимости использования загрузки-выгрузки обработчика

$$y_k = \frac{(t_k - t_{k-1}) \cdot d_{load}}{\widehat{\theta}_k} + \frac{1}{N} \sum_{t_i^{out} \in [t_{k-1}; t_k]} (t_i^{out} - t_i^{in} - d_i).$$

Алгоритмы адаптации.

Выберем некоторые достаточно малые коэффициенты $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ и в качестве пробного одновременного возмущения возьмем последовательность наблюдаемых одинаково распределенных независимых случайных чисел $\{\Delta_t\}$, равных ± 1 с одинаковой вероятностью. Обозначим $\mathcal{P}_{[a;b]}(\cdot)$ — проектор в интервал $[a; b]$.

Алгоритм SPSA с одним измерением:

1. Положим $k = 0$ и выберем некоторое начальное значение оценки $\widehat{\theta}_0$.

2. В начале каждого $k-$го такта вычисляем $\theta'_k = \mathcal{P}_{[a;b]}(\widehat{\theta}_k + \beta\Delta_k)$.

3. Запускаем сервер с значением параметра $\theta = \theta'_k$.

4. После завершения $k-$го такта подсчитаем новую оценку по правилу

$$\widehat{\theta}_{k+1} = \mathcal{P}_{[a;b]}(\widehat{\theta}_k - \frac{\alpha}{\beta}\Delta_k y_k).$$

5. Увеличиваем номер такта $k = k + 1$.

6. Переход к п. 2 (повтор действий заново).

Алгоритм SPSA с двумя измерениями отличается от предыдущего алгоритма только в двух операциях:

2. В начале каждого такта k вычисляем значение θ'_k, но в этот раз оно зависит от четности счетчика: если k четное, то $\theta'_k = \widehat{\theta}_k$, иначе $\theta'_k = \mathcal{P}_{[a;b]}(\widehat{\theta}_k + \beta\Delta_k)$.

4. После завершения k–го такта подсчитаем новую оценку по правилу: если k четное, то $\widehat{\theta}_{k+1} = \widehat{\theta}_k$, иначе

$$\widehat{\theta}_{k+1} = \widehat{\theta}_k - \frac{\alpha}{\beta}\Delta_k(y_k - y_{k-1}).$$

Имитационное моделирование. Для проверки работоспособности описанной выше схемы была написана программа, в которой задавать очередь входных заданий можно различными способами. Кроме того, интерфейс программы позволял запускать сервер (с новыми входными данными и нулевой очередью сервера), задавать паузу в работе сервера (все данные сохраняются), возобновлять работу сервера с сохраненными данными, завершать работу программы, задавать параметры θ — интервал непрерывного времени обслуживания заданий сервером, и d_{load} — время, необходимое на загрузку–выгрузку заданий.

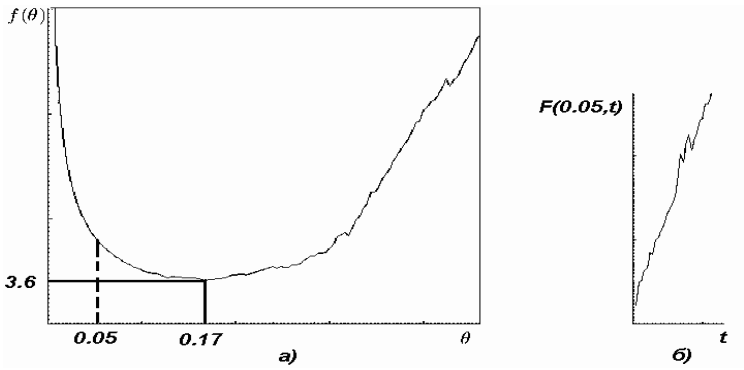

Рис. 5: Оптимизация функционала качества.

Входные данные представляют собой последовательность пар (t_i^{in}, d_i). В программе предусмотрена возможность выбора входных данных или из файла, или в результате генерации псевдослучайной последовательности, задаваемой с помощью экспоненциальных распределений с параметрами η_{in} и η_d соответственно:

$$t_i^{in} = t_{i-1}^{in} - \frac{1}{\eta_{in}} \ln \omega_i^{in},$$

$$d_i = -\frac{1}{\eta_d} \ln \omega_i^d,$$

где ω_i^{in}, ω_i^d — некоторые реализации равномерно распределенной на $[0;1]$ случайной величины.

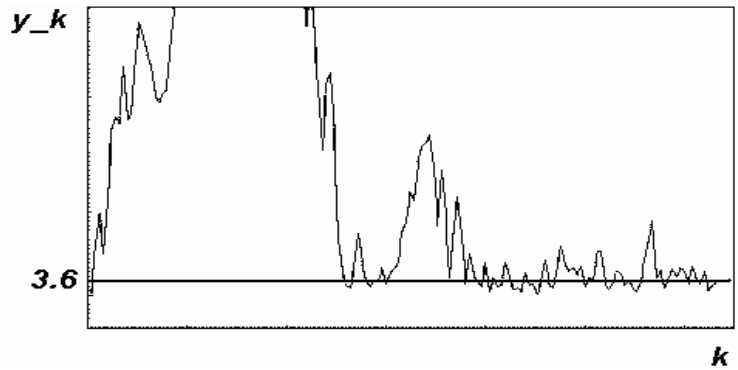

Рис. 6: Адаптация к оптимальному параметру.

Возможности имитационной модели позволяют, выбрав параметры входного потока, исследовать зависимость поведения значений эмпирического функционала качества от изменения параметра сервера θ (шага диспетчеризации). На рис. 5а показан график зависимости от θ усредненных значений эмпирического функционала при выборе $d_{load} = 0.05$, $\eta_{in} = 0.5$ и $\eta_d = 0.75$. Минимальное значение соответствует точке θ, близкой к 0.17. Рис. 5б иллюстрирует тот факт, что при работе с фиксированным параметром $\theta = 0.05$ поведение текущих оценок функционала качества часто приводит к существенному росту функции потерь, что говорит о низкой эффективности обработки очереди заданий. Напротив, использование рассмотренного в работе рандомизированного алгоритма адаптации шага диспетчеризации при тех же стартовых условиях позволяет с течением времени выйти на уровень, близкий к среднему минимально возможному значению, т. е. сервер, начав работу с неоптимальным параметром θ, с течением времени адаптируется к конкретным (неизвестным для сервера) параметрам входного потока. Типичный вид поведения значений эмпирического функционала качества при такой подстройке приведен на рис. 6.

На рис. 7 показан пример подстройки настраиваемого параметра сервера к скачкообразному изменению параметров входного потока.

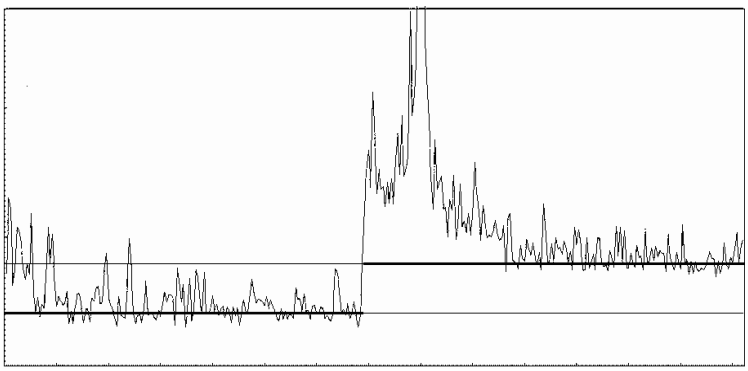

Рис. 7: Поведение y_k при подстройке к изменению входного потока.

6.2. Система управления загрузкой узлов распределенной вычислительной сети

Пусть в системе имеется n узлов. Шаг работы системы заключается в обработке пакета заданий известного размера r_i. Предположим, что весь пакет может быть произвольным образом разделен на n заданий для узлов, при этом узел j получает задание размером $u_i^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{j=1}^{n} u_i^{(j)} = r_i$. Время вычисления для узла j определяется по формуле $t_i^{(j)}(u_i^{(j)}) = \frac{u_i^{(j)}}{\theta_i^{(j)}}$, где $\theta_i^{(j)} \in \mathbb{R}$ — производительность узла j. Необходимо минимизировать по $u_i = (u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \ldots, u_i^{(n)})^{\mathrm{T}}$ среднее время вычисления задания пакета r_i:

$$Z_i = \frac{T(u_i)}{r_i} = \max_{j=1,\ldots,n} \frac{t_i^{(j)}(u_i^{(j)})}{r_i} \to \min_{u_i}.$$

При введенных обозначениях, если производительности узлов известны и не меняются $\theta_i \equiv \theta$, тогда оптимальным является правило пропорционального распределения заданий.

На практике производительности узлов могут быть искажены из-за сторонних заданий, т. е. $\theta_i = \theta + \bar{w}_i - w_i$, либо изменяться со временем: $\theta_i = \theta_{i-1} + \xi_i$, где $\xi_i, w_i \in \mathbb{R}^n$ – векторы независимых случайных величин, распределенных по Парето.

Для идентификации или отслеживания изменений θ_i, целесооб-

разно использовать контур обратной связи, в который включен РАСА. Для оценивания отклонения среднего времени на выполнение одного пакета заданий от оптимального при использовании РАСА в стационарной и нестационарной задаче в качестве наблюдений можно использовать величины

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{u_i^{(j)}}{t_i^{(j)}} - \tilde{\theta}_i^{(j)} \right)^{\rho},$$

которые в силу выбранной стратегии управления являются зашумленными измерениями функции $f_i(\theta) = \|\theta_i - \theta\|_\rho^\rho$. Подробности можно найти в [80].

6.3. Распознавание образов

В теории обучения типичной является задача классификации входных сигналов (стимулов, объектов). В процессе классификации обнаруживаются признаки, которые характеризуют группы объектов исследуемого набора данных – классы (кластеры). По этим признакам каждый сигнал можно отнести к тому или иному классу. Результатом кластеризации является разбиение сигналов на группы в условиях, когда классы заранее не определены. Получающееся разбиение естественным образом характеризует структуру множества данных и может быть использовано в дальнейшем для ее определения.

С содержательной точки зрения достаточно часто процесс распознавания образов трактуется как классификация входных сигналов x из некоторого множества $\mathbb{X}$, заключающаяся в построении правила сопоставления каждой точке $x \in \mathbb{X}$ некоторого образа (класса) $\mathbb{X}_k$. Выбор правила классификации порождает разбиение множества $\mathbb{X}$ на классы. Будем считать, что правило классификации однозначно определяется конечномерным набором η, и задана функция $l(\eta)$, возвращающая количество классов при классификации по правилу η. Всякий способ классификации η связан с потерями, которые обычно характеризуются с помощью штрафных функций стоимости $q_k(\eta, x)$ при отнесении точки x к классу с номером k. В типичных случаях, когда $\mathbb{X}$ — вещественное векторное пространство, значения штрафных функций $q_k(\eta, x)$ возрастают при удалении x от центра соответствующего образа (класса).

Рассмотрим следующее правило классификации: при заданных η и функциях $q_k(\eta, x)$, $k = 1, \ldots, l(\eta)$, входной сигнал x из множества $\mathbb{X}$ относится к тому классу $\mathbb{X}_k$ с наименьшим номером $k = k(x)$, для которого значение соответствующей штрафной функции $q_k(\eta, x)$ минимально

$$k(x) = \min\{\arg \min_{i \in 1:l(\eta)} q_i(\eta, x)\}.$$

Например, если на $\mathbb{X}$ задана норма $\|\cdot\|$ и в множестве данных l классов, а η^l — набор векторов центров классов: $\eta^l = (\theta^1, \theta^2, ..., \theta^l)$, то можно считать $\eta = \{l, \eta^l\}$ и в качестве $q_k(\eta, x)$ можно задать расстояние до центра k-го класса θ_k: $q_k(\eta, x) = \|\theta_k - x\|^2$. При этом множество $\mathbb{X}$ разбивается на l классов $\mathbb{X}_1(\eta), \mathbb{X}_2(\eta), \ldots, \mathbb{X}_l(\eta)$ таким образом, что к классу (подмножеству) $\mathbb{X}_k(\eta)$ относятся все точки x, находящиеся к центру θ_k ближе, чем к любому другому. Интеграл $\int_{\mathbb{X}_k(\eta)} \|\theta_k - x\|^2$ определяет рассеяние точек x в подмножестве $\mathbb{X}_k(\eta)$.

Предположим, что на множестве $\mathbb{X}$ задано распределение $\mathrm{P}(\cdot)$. Определим функционал качества кластеризации по правилу η:

$$F(\eta) = \sum_{k=1}^{l(\eta)} \int_{\mathbb{X}_k(\eta)} q_k(\eta, x) \mathrm{P}(dx).$$

Тогда задача кластеризации множества данных из l классов состоит в определении набора центров $\eta_\star^l$, минимизирующего суммарную стоимость разбиения. Задача устойчивой кластеризации является обобщением для случая нахождения заранее неизвестного оптимального значения количества классов $l_\star$ и соответствующего набора центров $\eta_\star^{l_\star}$.

Если в каком-то смысле можно было бы говорить о дифференцируемости функционала F, то искомый набор центров $\eta_\star$ должен был бы удовлетворять уравнению $\nabla F(\eta_\star) = 0$, которое можно было бы попытаться решить традиционными средствами. Сложность рассматриваемой задачи заключается в недифференцируемости функционала F. При известном распределении $\mathrm{P}(\cdot)$ сформулированные задачи все-таки могут быть точно или приближенно решены. Нетрудно убедиться, что в описанном выше примере множества $\mathbb{X}_k(\eta)$ имеют вид многогранников, а минимизирующий функционал среднего риска набор центров $\eta_\star^{l_\star} = (\theta_1^\star, \theta_2^\star, \ldots, \theta_{l^\star}^\star)$ сов-

падает с *центрами тяжести* этих множеств, т. е.

$$\theta_k^\star = \frac{\int_{\mathbb{X}_k(\eta_\star)} x\mathrm{P}(dx)}{\int_{\mathbb{X}_k(\eta_\star)} \mathrm{P}(dx)},\ k = 1, 2, \ldots, l^\star.$$

Приведенные соображения отвечают интуитивному представлению о разбиении множества $\mathbb{X}$ на $l_\star$ непересекающихся классов, причем центры тяжести соседних множеств находятся на прямой, ортогональной разделяющей множества грани.

В системах, работающих в режиме реального времени в условиях изменяющейся со временем обстановки, распределение $\mathrm{P}(\cdot)$ очень часто бывает неизвестно. Будем предполагать, что в режиме реального времени на вход поступает последовательность $x_1, x_2, \ldots$ сигналов, порожденная неизвестным распределением $\mathrm{P}(\cdot)$. *Требуется* предложить алгоритм построения последовательности оценок $\{\widehat{\eta}_i\}$ набора $\eta_\star$, минимизирующего определенный выше функционал среднего риска. Решение задачи дополнительно осложняется тем, что на практике функции $q^k(\cdot,\cdot),\ k = 1, 2, \ldots, l(\eta)$ не всегда заданы аналитически, но доступны измерению их значения (может быть с помехами):

$$y^k(\eta, x) = q_k(\eta, x) + v_k,\ k = 1, 2, \ldots, l(\eta).$$

Обозначим $Y(x, \eta)$ — l-мерный вектор из величин $y^k(x, \eta),\ k = 1, 2, \ldots, l$; V_n — l-мерный вектор помех, $\mathbf{1}_{\mathbb{X}^k(\eta)}(x),\ k = 1, 2, \ldots, l$ — характеристические функции, определяемые по измерениям с помехами $y^k(x, \eta)$, $k = 1, 2, \ldots, l$.

В [81] был предложен простой с вычислительной точки зрения рекуррентный рандомизированный алгоритм для автоматического разбиения множества данных на заданное заранее количество классов. Зафиксируем некоторый начальный набор $\widehat{\eta}_0 \in \mathbb{R}^{m\times l}$ и выберем последовательности положительных чисел, стремящиеся к нулю: $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Рассмотрим следующий алгоритм построения последовательности оценок

$$\tilde{\eta}_n^\pm = \widehat{\eta}_{n-1} \pm \beta_n \Delta_n J^T(x_n, \widehat{\eta}_{n-1}),$$

$$\widehat{\eta}_n = \tag{10}$$

$$\mathcal{P}_\Theta\left(\widehat{\eta}_{n-1} - \alpha_n J^T(x_n, \widehat{\eta}_{n-1}) \frac{Y(x_n, \tilde{\eta}_n^+) - Y(x_n, \tilde{\eta}_n^-)}{2\beta_n} \Delta_n J^T(x_n, \widehat{\eta}_{n-1})\right),$$

где $J(x_n, \widehat{\eta}_n)$ — l-мерный вектор, составленный из значений характеристических функций $\mathbf{1}_{\mathbb{X}^k(\widehat{\eta}_n)}(x_n)$, $k = 1, 2, \ldots, l$; $Y(x_n, \tilde{\eta}_n^{\pm}) = Q(x_n, \tilde{\eta}_n^{\pm}) + V_n^{\pm}$ — l-мерные векторы, составленные из измеренных с помехами в соответствующих точках значений функций потерь; $V_n^{\pm}$ — соответствующие вектора из ошибок наблюдений; $\mathcal{P}_{\Theta}(\cdot)$ — проектор в множество Θ.

Для упрощения формулировок основного результата и доказательства ограничимся случаем однотипных функций $q^k(x, \eta)$, $k = 1, 2, \ldots, l$. Будем считать, что набор η состоит из l векторов $\eta = \left(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^l\right)$ и функции $q^k(x, \eta) = \bar{q}(x, \theta^k)$ и не зависят от других векторных элементов набора η. Здесь $\bar{q}(\cdot, \cdot) : \mathbb{X} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ - некоторая общая для разных классов штрафная функция. Векторы θ^k, $k = 1, 2, \ldots, l$ удобно интерпретировать как *центры классов*.

Сформулируем предположения, которым должна будет удовлетворять штрафная функция $\bar{q}(\cdot, \cdot)$:

П.1. Функции $\bar{q}(x, \cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ - дифференцируемые при любом $x \in \mathbb{X}$ и их градиенты *удовлетворяют условию Липшица*, т. е.

$$\|\nabla_\theta \bar{q}(x, \theta_1) - \nabla_\theta \bar{q}(x, \theta_2)\| \leq M\|\theta_1 - \theta_2\|, \ \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^m$$

с некоторой постоянной $M > 0$, не зависящей от $x \in \mathbb{X}$.

П.2. При любом $\theta \in \mathbb{R}^m$ функции $\bar{q}(\cdot, \theta)$ и $\nabla_\theta \bar{q}(\cdot, \theta)$ равномерно ограничены на $\mathbb{X}$;

П.3. Каждая из функций

$$f^k(\theta) = \int_{\mathbb{X}^k(\eta_\star)} \bar{q}(x, \theta) \mathrm{P}(dx), \ k = 1, 2, \ldots, l$$

имеет единственный минимум в $\mathbb{R}^m$ в некоторой точке $\theta_\star^k$ и

$$\left\langle \theta - \theta_\star^k, \nabla f^k(\theta) \right\rangle \geq \mu \|\theta - \theta_\star^k\|^2, \ \ \forall \theta \in \mathbb{R}^m$$

с некоторой постоянной $\mu > 0$ (*условие сильной выпуклости*).

Обозначим

$$d_{\max} = \max_{k \in \{1, 2, \ldots, l\}} \max_{x \in \mathbb{X}^k(\theta_\star)} |\bar{q}(x, \theta_\star^k)|.$$

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия:*
1) обучающая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ состоит из независимых, одинаково распределенных векторных случайных величин с таким законом распределения, что они с ненулевой вероятностью принимают значения в каждом из l классов в признаковом пространстве;
2) **(П.1–3)** *для функции $\bar{q}(\cdot,\cdot)$;*
3) $\forall n \geq 1$ случайные векторы $V_1^{\pm}, V_2^{\pm} \ldots, V_n^{\pm}$ и $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ не зависят от x_n, Δ_n, а случайный вектор x_n не зависит от Δ_n;
4) $\mathrm{E}\{v_n\} < \infty,\ \mathrm{E}\{v_n^2\} \leq \sigma_n^2,\ |v_n| \leq C_v,\ C_v > 0$;
5) из выполнения для некоторых k из $1, 2, \ldots, l$, $x \in \mathbb{X}^k(\eta_\star)$ и θ неравенства $|\bar{q}(x,\theta)| \leq d_{\max}$ следует

$$|\bar{q}(x',\theta)| > d_{\max} + 2C_v \ \ \forall x' \in \mathbb{X}^i(\eta_\star),\ i \neq k,\ i \in \{1, 2, \ldots, l\}, \qquad (11)$$

6) $\sum_n \alpha_n = \infty$ и $\alpha_n \to 0,\ \beta_n \to 0,\ \alpha_n \beta_n^{-2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Если для последовательности оценок $\{\widehat{\eta}_n\}$, доставляемых алгоритмом (10) при произвольном выборе $\widehat{\eta}_0$, выполнено

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle J(x_n, \widehat{\eta}_{n-1}), Q(x_n, \widehat{\eta}_{n-1})\rangle \leq d_{\max} + C_v, \qquad (12)$$

тогда *последовательность оценок $\{\widehat{\eta}_n\}$ сходится в среднеквадратичном смысле: $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\{\|\widehat{\eta}_n - \eta_\star\|^2\} = 0$, при $n \to \infty$, к одному из наборов $\eta_\star$, состоящему из векторов $\theta_\star^1, \theta_\star^2, \ldots, \theta_\star^l$.*

Если, более того, $\sum_n \alpha_n \beta_n^2 + \alpha_n^2 \beta_n^{-2} < \infty$, **то** *$\widehat{\eta}_n \to \eta_\star$ при $n \to \infty$ с вероятностью единица.*

Замечания: 1. Выполнение условия (12) в общем случае предварительно не проверить. Если для какой-то последовательности оценок $\{\widehat{\eta}_n\}$ условие (12) не выполняется, то это еще не означает невозможность получения состоятельных оценок с помощью алгоритма (10). Можно взять другие начальные данные и попробовать воспользоваться алгоритмом еще раз.

2. Легко убедиться в том, что условия (П.1,2,3) выполняются для функции $\bar{q}(x,\theta) = \|x - \theta\|^2$. В этом случае выполнение условия (11) означает, что расстояние между различными классами должно быть больше, чем максимальный среди всех классов радиус.

3. В теореме 3 помехи наблюдения $V_n^{\pm}$ можно условно назвать *почти произвольными*, так как они могут быть неслучайными, но

неизвестными и ограниченными, или представлять из себя реализацию некоторого стохастического процесса с произвольной структурой зависимостей.

4. В качестве пробного одновременного возмущения не обязательно брать бернуллиевские случайные величины. Достаточно потребовать для их распределения симметричности и конечности носителя. Другие соображения показывают, что при прочих равных условиях использование бернуллиевских случайных величин дает большую эффективность.

5. Можно рассматривать подпоследовательности $\{\alpha_n^k\}$ и $\{\beta_n^k\}$, изменяющиеся отдельно для оценок соответствующего класса. Это оказывается удобным особенно в том случае, когда представители разных классов появляются в обучающей последовательности неравномерно.

Пример. Смоделируем применение рандомизированного алгоритма стохастической аппроксимации (10) к решению задачи самообучения. Пусть известно, что в пространстве входов существует три класса изображений, которые с помощью набора признаков отображаются в соответствующие классы в пространстве признаков, содержащемся в $\mathbb{R}^2$. Решение задачи самообучения в этом случае сводится к разбиению пространства признаков на три подмножества, что эквивалентно нахождению трех центров этих множеств. В примере моделирования роль "настояших" классов в пространстве признаков играли множества

$$\mathbb{X}^1 = [-1.0 \pm 1.8] \times [-1.0 \pm 1.8],\ \mathbb{X}^2 = [2.0 \pm 1.1] \times [0.5 \pm 2.8],$$

$$\mathbb{X}^3 = [-0.5 \pm 1.3] \times [3.0 \pm 2.0].$$

В качестве штрафных функций были выбраны $q^k(x,\eta) = \|x - \theta^k\|^2,\ k = 1,2,3$. На рис. 8 показаны результаты компьютерного моделирования применения алгоритма (10) для решения задачи самообучения после наблюдений на интервале времени от 1 до 300. При этом роль пробного одновременного возмущения играли случайные величины, равномерно распределенные в квадрате $[-1;1] \times [-1;1]$. В результате были получены оценки центров:

$$\widehat{\theta}^1_{300} = \begin{pmatrix} -1.21 \\ -1.03 \end{pmatrix},\ \widehat{\theta}^2_{300} = \begin{pmatrix} 1.85 \\ 0.52 \end{pmatrix},\ \widehat{\theta}^3_{300} = \begin{pmatrix} -0.42 \\ 3.23 \end{pmatrix},$$

которые, как не трудно видеть, недалеки от "настоящих". Скорость

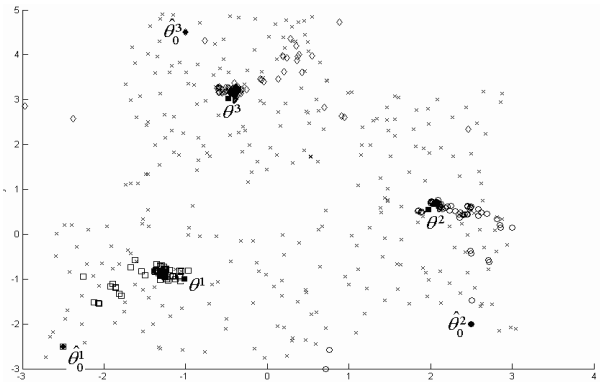

Рис. 8: Классы множеств и последовательности оценок.

и характер сходимости текущих оценок к “настоящим” центрам приведены на рис. 8.

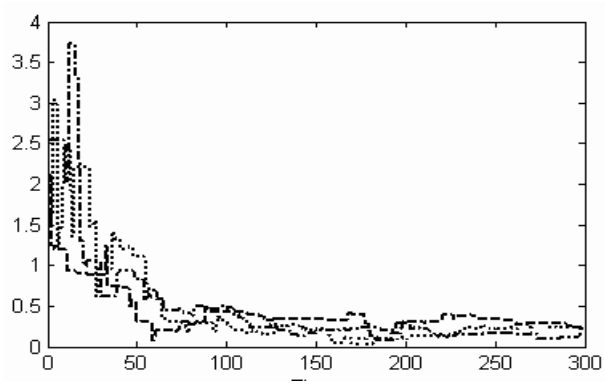

Рис. 9: Сходимость оценок к “настоящим” центрам.

Стоит отметить, что для рассмотренного примера достаточное условие (11) не выполняется. Этот пример численного моделирования, в частности, показывает эффективность применения алгоритма (10) и в более общей ситуации по сравнению с результатом теоремы 3.

7. Адаптивное управление

Как отмечалось выше, малая вариативность входных сигналов усложняет задачу идентификации. Для системы управления возможность сделать особый управляющий (испытывающий, тестирующий, зондирующий) сигнал во входном канале может значительно облегчить проблему реконструкции неизвестных параметров. Например, если гармонический сигнал поступает на вход стационарного линейного объекта, то выход объекта также будет гармоническим сигналом после переходного процесса (предполагается, что нет помех). Амплитуда этого сигнала пропорциональна значению передаточной функции объекта в точке, которая соответствует частоте входного гармонического сигнала. Варьируя частоту, можно восстановить всю передаточную функцию объекта. Точно так же, серия одиночных импульсов во входном канале позволяет восстановить импульсную функцию объекта [82].

Кроме того, специальные рандомизированные тестовые сигналы во входном канале позволяют определить параметры объекта управления, когда рассматривается модель объекта с почти произвольными аддитивными помехами. Процедура, предложенная в [22, 61], работает для любого шума v_t и не требует априорных знаний об их характеристиках, шум может быть не случайным или может быть белым или коррелированным с нулевым средним или со смещением, отношение сигнал/шум может быть высоким или низким. Восстановление неизвестных значений параметров обеспечивается свойствами рандомизированных тестовых сигналов, которые складываются вместе с собственным сигналом адаптивного управления от обратной связи.

Рассмотрим динамическую систему

$$y_t = G_\star(z^{-1})u_t + v_t, \tag{13}$$

с входами u_t и выходами y_t как на рис. 10. Помеха v_t описывает все другие источники, кроме u_t, которые вызывают изменения в y_t. z^{-1} — оператор задержки: $z^{-1}u_t = u_{t-1}$. Передаточная функция $G_\star(z^{-1})$ принадлежит набору передаточных функций $G(\theta, z^{-1})$, параметризованному θ, так что $G_\star(z^{-1}) = G(\theta_\star, z^{-1})$ при некотором $\theta_\star$. Структура класса модели $G(\theta, z^{-1})$ известна, но само $\theta_\star$ неизвестно.

В задачах адаптивного управления часто используется идентификационный подход: на основе данных наблюдения последова-

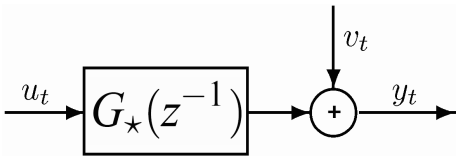

Рис. 10: Динамическая система.

тельно строятся оценки для возможных значений неизвестных параметров и далее они используются в параметризованном контуре обратной связи, для которого обычно предполагается или устанавливается, что при правильном выборе параметра качество работы замкнутой системы удовлетворяет пользователя. В этом контексте рассмотрим задачу об определении на основе входных и выходных данных, собранных в момент $t = 1, 2, \ldots, N$ доверительной области $\widehat{\Theta}$ при $\theta_\star$ с заданной вероятностью, выбираемой пользователем, причем $\widehat{\Theta}$ должно быть построено без каких-либо априорных знаний об уровне, распределении или корреляции помех.

Стандартным подходом к получению доверительных областей является использование асимптотической теории идентификации систем (см., например, [5, 22]). Хотя эти результаты были успешно использованы во многих приложениях, асимптотические оценки гарантируют что-либо только тогда, когда объем данных N стремится к бесконечности. Если число точек данных измерений конечно, асимптотическая теория может привести к ошибочным результатам даже для больших наборов данных. Еще один способ — *Set Membership Identification* (идентификация множества принадлежности) — предполагает известную границу для всех компонентов системы, которые не описываются $G_\star(z^{-1})$. В результате гарантированная область параметров определяется как набор значений, которые не нарушают априорных границ [51, 83–85].

Ниже будет описана процедура для получения строго гарантированных неасимптотических доверительных областей для неизвестных параметров линейного динамического объекта управления, подверженного произвольному шуму (поведение которого возмущается произвольным шумом), которая состоит из простых этапов проектирования входов, а затем алгоритма “исключение областей знакодоминирующих корреляций” (LSCR, Leave-out Sign-dominant Correlation Regions), активно продвигаемой в современных рабо-

тах Марко Кампи с соавторами [63]. Главное отличие от результатов [63] основано на специальной параметризации модели объекта. Это приводит к меньшим размерностям доверительных областей и открывает возможность использования LSCR для класса произвольных обратных связей (в частности, для регуляторов с настраиваемыми коэффициентами). Ранее тот же метод параметризации был описан в [22, 61, 68] при синтезе асимптотических алгоритмов оценивания. Процедура для любого конечного числа наблюдений была предложена в [8].

7.1. Предварительный пример

Для предварительной иллюстрации основной идеи метода LSCR рассмотрим пример скалярного объекта управления второго порядка, который описывается уравнением

$$y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2} = b_\star u_{t-1} + 1.6u_{t-2} + v_t, \tag{14}$$

где $t = 1, \ldots, N$ — временной ряд, $N = 15$, $y_0 = y_{-1} = u_{-1} = 0$ и $b_\star$ неизвестно. Нет никакой информации о внешних шумах v_t кроме той, что если они носят случайный характер, то они не зависят от u_t. Основное различие с примерами из [63] состоит в свойствах нестабильности рассматриваемого объекта (14).

Цель заключается в построении на основе наблюдений входов и выходов доверительного интервала $\widehat{\Theta}$, который содержит $\theta_\star = b_\star$ с вероятностью 80%. (Эта задача с любой вероятностью до 100 % всегда имеет тривиальное решение — вся действительная ось.)

Более того, проблема заключается в построении такого алгоритма оценки $b_\star$ и генерации входных данных $u_0, \ldots, u_{14}$, что доверительный интервал в результате $\widehat{\Theta}$ характеризовал бы $b_\star$ более точно. Например, это может означать, что соответствующие множества $\widehat{\Theta}$ "сжимаются" вблизи точки $b_\star$ as $N \to \infty$.

В рассматриваемом примере передаточная функция имеет вид:

$$G_\star(z^{-1}) = \frac{b_\star z^{-1} + 1.6z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}.$$

Процедура.

1. *Выбор* $q = 2$ и $M = 20$ так, чтобы $1 - 2q/M = 0.8$.

2. *Генерация* последовательности независимых одинаково распределенных случайных (i.i.d.) переменных Δ_t, $t = 0, \ldots, 14$ (будем

называть их рандомизированным пробным возмущением), принимающих значения ± 1 с равной вероятностью $\frac{1}{2}$, и предполагая, что

$$u_t = \Delta_t,\ t = 0, \ldots, 14.$$

3. *Получить* соответствующие значения выходов y_t, $t = 1, \ldots, 15$.

Используя данные наблюдений $\Delta_0, \ldots, \Delta_{14} u_1, y_1, \ldots, y_{15}$ при $t = 1, \ldots, 15$ и обозначая наблюдаемые величины $\psi_t = 2y_{t-1} - y_{t-2} + 1.6u_{t-2}$, можно представить ошибку

$$\epsilon_t(b) = y_t - \psi_t - bu_{t-1}$$

как линейную функцию b.

Обозначим

$$f_t(b) = \Delta_{t-1}\epsilon_t(b) = (\Delta_{t-1}(y_t - \psi_t)) - (\Delta_{t-1}u_{t-1})\, b.$$

Заметим, что из определений мы можем вывести

$$E[\Delta_{t-1}\epsilon_t(b)] = (b_\star - b)E[\Delta_{t-1}^2] + E[\Delta_{t-1}v_t] = (b_\star - b).$$

Исходя из этого, вычислим ряд оценок эмпирических корреляций $E[\Delta_{t-1}\epsilon_t(b)]$ с помощью $f_t(b)$, используя различные подмножества имеющихся данных. Выбирая случайно $19 = M - 1$ подмножеств данных, вычисляем эмпирические оценки

$$g_i(b) = \sum_{t=1}^{15} h_{i,t} \cdot f_t(b),\ i = 1, \ldots, 19,$$

где $h_{i,t}$ — i.i.d. бернуллиевские величины, принимающие с равной вероятностью $\frac{1}{2}$ значения 0 и 1 ($h_{i,t}$ определяет, будет ли $f_t(b)$ использоваться для подсчета i-й эмпирической корреляции).

4. *Исключить* из рассмотрения те области возможных значений b, в которых эмпирические оценки имеют только положительные (или только отрицательные) значения слишком часто (все или кроме $1 = q - 2$), так как это очень маловероятно, что все $g_i(b_\star)$ имеют одинаковый знак.

В результате моделирования с $b_\star = 1$ и одинаково распределенной последовательностью нормально распределенного шума v_t со средним 0.5 и дисперсией 0.1 (шум со смещением) был получен доверительный интервал $[0.874; 1.119]$. Но в результате выходная переменная значительно возрастает (см. рис. 11, линия 1), что плохо

с практической точки зрения. Это связано с нестабильностью передаточной функции. В задачах адаптивного управления с неизвестной, но ограниченной помехой выходная переменная может быть стабилизирована с помощью обратной связи с настраиваемыми коэффициентами (см., например, [61]). Тот же эффект может быть достигнут в сочетании с некоторыми другими методами идентификации. Например, если выбрать достаточно большое C_v $(= 10)$

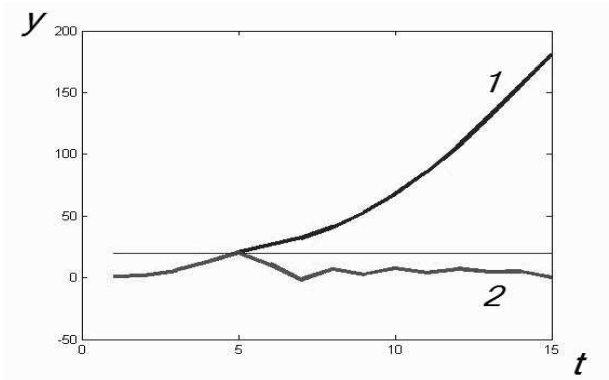

Рис. 11: Выходные переменные $y_t,\ t = 1, 2, \ldots, 15$.

и предположить, что $|v_t| \leq C_v$, можно воспользоваться стабилизирующий методом "модифицированная полоска" [22, 86], который формирует последовательность оценок $\widehat{b}_t$. Оценка $\widehat{b}_t$ используется для построения стабилизирующей частью $\bar{u}_t$ управляющего входа, которая добавляется в рандомизированному управлению Δ_t

$$u_t = \Delta_t + \bar{u}_t.$$

Стабилизирующая часть $\bar{u}_t$ получается за счет закона обратной связи

$$\bar{u}_t = \begin{cases} \beta_t^1 y_t + \beta_t^2 y_{t-1} - \alpha_t u_{t-1}, & \widehat{b}_t \neq 0, \\ 0, & \widehat{b}_t = 0, \end{cases}$$

в котором коэффициенты α, β_t^1 и β_t^2 определяются из полиномиального уравнения

$$(1 - 2\lambda + \lambda^2)(1 + \alpha_t \lambda) - \lambda(\widehat{b}_t + 1.6\lambda)(\beta_t^1 + \beta_t^2 \lambda) = 1.$$

Объект управления с неизвестным параметром $b_\star$ может быть неминимально-фазовым (нестабильным по входу), так как $|b_\star| < 1.6$, но выше описанная обратная связь стабилизирующая по входу для объекта с параметрами $\widehat{b}_t$ (см., напр., [22, 86]). При моделировании использовался стабилизирующий алгоритм "модифицированная полоска" в форме, как описано в [22, 68]. Этот алгоритм включается, когда выходная переменная превышает ограничительный уровень 20. В результате поведение выходных (см. рис. 11, линия 2) и входных переменных стабилизировалось.

В этом случае свойство $E[\Delta_{t-1}\epsilon_t(b)] = (b_\star - b)$ по-прежнему выполняется, так как $E[\Delta_{t-1}\bar{u}_{t-1}] = 0$, и LSCR процедура является работоспособной.

Полученные при моделировании функции $g_i(b),\ i = 1, 2, \ldots, 19$, и 80% доверительный интервал $\widehat{\Theta} = [0.865; 1.060]$ показаны на рис. 12.

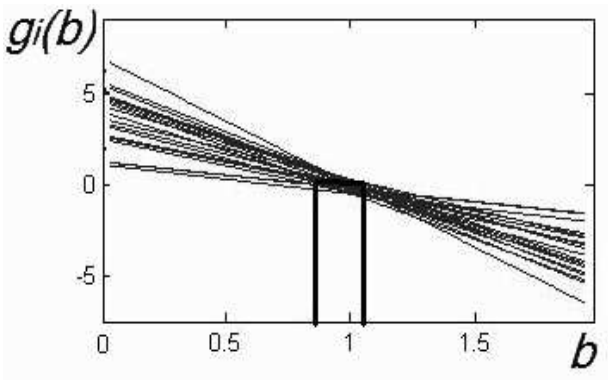

Рис. 12: Функции $g_i(b),\ i = 1, 2, \ldots, 19$, и 80% доверительный интервал $\widehat{\Theta} = [0.865; 1.060]$ для $b_\star = 1.0$.

Несмотря на использование уровня C_v в синтезе стабилизирующей обратной связи, способ построения доверительной области по LSCR алгоритму не зависит от C_v. Даже при выборе заниженного уровня C_v предложенный алгоритма все еще работает, в то время как методы идентификации множества принадлежности будут давать неправильные результаты.

Случай, когда неизвестен коэффициент $a_\star$ вместо $b_\star$, является более сложным. Но возможность использовать обратную связь

с настраиваемыми коэффициентами ограничивается необходимостью соблюдения условия независимости входных рандомизированных пробных возмущений и шума, которое не выполняется. Пример обновленной процедуры для этого случая обсуждается в [8].

7.2. Общая постановка задачи

Обсуждаемая в дальнейшем процедура определения неизвестных параметров динамического скалярного линейного объекта управления, который описывается моделью авторегрессии скользящего среднего, основана на перепараметризации математической модели объекта. Вместо естественных параметров объекта — его динамических коэффициентов — удобно использовать некоторые другие параметры, которые находятся во взаимно-однозначном соответствии с ними. Такая перепараметризация является результатом переписывания уравнения объекта в виде некоторой модели скользящего среднего. Это позволяет использовать процедуру LSCR для создания доверительной области даже в тех случаях, когда в канале обратной связи используется некоторый адаптивный алгоритм.

Предположим, что объект управления имеет скалярные входы и выходы и описывается в дискретном времени уравнением (13) с $G_\star(z^{-1}) = B_\star(z^{-1})/A_\star(z^{-1})$, где

$$A_\star(\lambda) = 1 + a_\star^1\lambda + \cdots + a_\star^{n_a}\lambda^{n_a},$$
$$B_\star(\lambda) = b_\star^l\lambda^l + b_\star^{l+1}\lambda^{l+1} + \cdots + b_\star^{n_b}\lambda^{n_b},$$

натуральные числа n_a, n_b — порядки модели по выходу и входу (управлению); l — задержка в управлении, $1 \le l \le n_b$,

$$\tau_\star = \begin{pmatrix} a_\star^1 \\ a_\star^2 \\ \vdots \\ a_\star^{n_a} \\ b_\star^l \\ b_\star^{l+1} \\ \vdots \\ b_\star^{n_b} \end{pmatrix}$$

— вектор коэффициентов уравнения — параметры объекта, часть из которых неизвестна.

Требуется определить с заданной вероятностью области достоверности для неизвестных коэффициентов объекта (13) по наблюдениям выходов $\{y_t\}$ на конечном интервале времени $t = 1, 2, \ldots, N$, и известных входов (управлений) $\{u_t\}$, которые можно выбирать.

7.3. Управляющие воздействия с рандомизированными пробными сигналами

Пусть $s \le n_a + n_b - l + 1$ — положительное целое число. (Обычно равное количеству неизвестных параметров объекта (13)). И пусть будет $N = s \cdot N_\Delta$ с некоторым N_Δ.

Выберем последовательность независимых случайных величин, симметрично распределенных вокруг нуля (рандомизированное пробное возмущение) $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{N_\Delta - 1}$ и будем добавлять их во входной канал один раз в каждый из s последовательных моментов времени (в начале каждого временного интервала) с целью "обогащения" разнообразия наблюдений.

Более точно, будем строить управление $\{u_t\}_{t=0}^{N-l}$ по правилу

$$u_{sn+i-l} = \begin{cases} \Delta_n \, + \, \bar{u}_{sn-l}, & i = 0, \\ \bar{u}_{sn+i-l}, & i = 1, 2, \ldots, s-1, \end{cases} \quad n = 0, \ldots, N_\Delta - 1,$$

в котором "собственно" управление $\{\bar{u}_t\}$ определяется регулируемым законом обратной связи

$$\bar{u}_t = \mathcal{U}_t(y_t, y_{t-1}, \ldots, \bar{u}_{t-1}, \ldots), \; t \ge 0, \; \bar{u}_{-k} = 0, \; k > 0.$$

Тип и характеристики обратной связи зависят от конкретных практических задач. В частности, можно использовать тривиальный закон " собственной" обратной связи: $\bar{u}_t = 0, \; t = 0, 1, \ldots, N - l$ или, задав достаточно большой уровень C_v, воспользоваться стабилизирующим регулятором

$$C(z^{-1}, \tilde{\tau}_t)\bar{u}_t = D(z^{-1}, \tilde{\tau}_t)y_t \tag{15}$$

с параметрами $\tilde{\tau}_t = \widehat{\tau}_{t-s}$, подстраиваемыми по алгоритму "модифицированная полоска"

$$\widehat{\tau}_t = \widehat{\tau}_{t-1} - \frac{(\varphi_t^{\mathrm{T}}\widehat{\tau}_{t-1} - y_t)\mathbf{1}_{\{|\varphi_t^{\mathrm{T}}\widehat{\tau}^{t-1} - y_t| - 2C_v - \delta\|\varphi_t\| > 0\}}}{\|\varphi_t\|^2}\varphi_t, \tag{16}$$

где $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ — характеристическая функция множества, $\delta \geq 0$ — константа,

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} -y_{t-1} \\ \vdots \\ -y_{t-n_a} \\ u_{t-l} \\ \vdots \\ u_{t-n_b} \end{pmatrix}.$$

Регулятор (15) определяется некоторыми многочленами $C(\lambda, \tau)$ и $D(\lambda, \tau)$: $A(\lambda, \tau)C(\lambda, \tau) - B(\lambda, \tau)D(\lambda, \tau)$ устойчивый многочлен.

7.4. Основные предположения и перепараметризация передаточной функции

A1. Пользователь может выбрать Δ_n и этот выбор не влияет на внешние шумы $v_{sn}, \ldots, v_{s(n+1)-1}$. (В математическом смысле Δ_n не зависит от $\{v_t\}_{t=1}^{s(n+1)-1}$.)

Обратим внимание, что нет никаких предположений о шумах v_t, не предполагается каких-либо знаний о верхних пределах их амплитуд, никаких предположений о нулевом среднем или об автокорреляционных свойствах, если они являются случайными.

Для моментов времени sn, $n = 0, \ldots, N_\Delta - 1$ можно обозначить $\bar{v}_{sn} = v_{sn} + (1 - A_\star(z^{-1}))y_{sn} + (B_\star(z^{-1}) - b_\star^l z^{-l})u_{sn}$ и переписать уравнение (13) в виде

$$y_{sn} = \Delta_n \theta_\star^1 + \theta_\star^1 \bar{u}_{sn-l} + \bar{v}_{sn},$$

где $\theta_\star^1 = b_\star^l$. Это уравнение показывает прямую связь между наблюдением y_{sn} и тестовом сигналом Δ_n , который не зависит от "нового" шума $\bar{v}_{sn}$.

Точно так же, перепишем уравнение (13) для остальных моментов времени $sn + k - 1$, $k = 2, \ldots, s$, последовательно исключая из левой части уравнения переменные $y_{sn+k-1}, \ldots, y_{sn}$ с помощью того же уравнения (13) для более ранних моментов времени

$$y_{sn+k-1} = \Delta_n \theta_\star^k + \sum_{i=0}^{k-1} \theta_\star^{k-i} \bar{u}_{sn-l+i} + \bar{v}_{sn+k-1}, \tag{17}$$

где $\theta_\star^{k-i},\ i = 0, \dots, k-1$ — соответствующие коэффициенты при оставшихся в правой части слагаемых с $\bar{u}_{sn-l+i}$.

В [61] и [22] авторы предлагают формировать новые параметры как s-вектор $\theta_\star$ коэффициентов $\theta_\star^k$, полученных в (17). Там же даются условия обратимости такой процедуры перепараметризации.

Следующая формула сразу следует из приведенного выше определения $\theta_\star = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$, где $s \times s$ матрица $\mathbb{A}$ и s-вектор $\mathbb{B}$:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_\star^1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_\star^2 & a_\star^1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_\star^{n_a} \dots & a_\star^1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_\star^l \\ \vdots \\ b_\star^{n_b} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим условия существования соответствующей обратной функции.

A2. Пусть s — целое положительное число такое, что набор неизвестных параметров объекта однозначно определяются по некоторой функции $\tau(\theta)$ из определенного выше вектора $\theta_\star$.

По лемме 5.5.1 на стр. 224 из [86] (или 2.2 на стр. 117 из [22]) предположение **A2** выполнено для $s = n_a + n_b - l + 1$, если порядки объекта n_a, n_b известны и удовлетворяется следующее предположение

A3. Многочлены $z^{n_a} A_\star(z^{-1})$ и $z^{n_b} B_\star(z^{-1})$ взаимно просты.

В [22, 86] приведен также алгоритм для вычисления обратной функции $\tau(\theta)$.

На практике, как правило, только часть параметров объекта неизвестна. Иногда неизвестные параметры соответствуют низким степеням z^{-1}, которые меньше, чем некоторые $\bar{n}_a$ и $\bar{n}_b$ соответственно. В таком случае можно выбрать $s = \bar{n}_a + \bar{n}_b - l + 1$, что значительно меньше, чем $n_a + n_b - l + 1$. Более того "новый" шум $\bar{v}_{sn+k-1}$ в (17) может быть разделен на две части: неизмеримую $\tilde{v}_{sn+k-1}$ и измеримую ψ_{sn+k-1}. Последняя определяется наблюдаемыми входами и выходами с известными коэффициентами (см. следующий пример).

Пример. Рассмотрим объект второго порядка

$$y_t + a_\star^1 y_{t-1} + y_{t-2} = b_\star^1 u_{t-1} + 1.6 u_{t-2} + v_t,\ t = 1, 2, \dots, N, \qquad (18)$$

с неизвестными коэффициентами $a_\star^1$ и $b_\star^1 \neq 0$.

Обозначим

$$\tau_\star = \begin{pmatrix} a_\star^1 \\ b_\star^1 \end{pmatrix}.$$

вектор коэффициентов уравнения объекта. Пусть $s = 2$ и вектор "новых" параметров есть

$$\theta_\star = \begin{pmatrix} b_\star^1 \\ 1.6 - a_\star^1 b_\star^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

В этом случае обратная функция есть

$$\tau(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1.6-\theta^2}{\theta^1} \\ \theta^1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения (17) имеют форму

$$y_{2n} = \Delta_n \theta_\star^1 + \theta_\star^1 \bar{u}_{2n-1} + \psi_{2n} + \tilde{v}_{2n},$$

$$y_{2n+1} = \Delta_n \theta_\star^2 + \theta_\star^2 \bar{u}_{2n-1} + \theta_\star^1 \bar{u}_{2n} + \psi_{2n+1} + \tilde{v}_{2n+1},$$

где $\psi_{2n+k} = 1.6\bar{u}_{2n-2+k} - y_{2n-2+k},\ k = 0, 1,\ \tilde{v}_{2n} = v_{2n} - a_\star^1 y_{2n-1}$, $\tilde{v}_{2n+1} = v_{2n+1} + a_\star^1(a_\star^1 y_{2n-1} + y_{2n-2} - 1.6\bar{u}_{2n-2} - v_{2n})$.

7.5. Процедура построения доверительных областей

1. Используя данные наблюдений, запишем предсказатели как функции от θ

$$\widehat{y}_{sn+k-1}(\theta) = \Delta_n \theta^k + \sum_{i=0}^{k-1} \theta^{k-i} \bar{u}_{sn+k-l-i}, \tag{19}$$

$$n = 0, \ldots, N_\Delta - 1,\ k = 1, \ldots, s.$$

2. Рассчитаем ошибки прогноза

$$\epsilon_t(\theta) = y_t - \widehat{y}_t(\theta),\ t = 1, \ldots, N.$$

3. В соответствии с данными наблюдений сформируем набор функций от θ

$$f_{sn+k-1}(\theta) = \Delta_n \epsilon_{sn+k-1}(\theta),\ n = 0, \ldots, N_\Delta - 1,$$

$$k = 1, \ldots, s.$$

4. Выберем положительное число $M > 2s$ и построим M различных двоичных стохастических строк (из нулей и единиц) $(h_{i,1}, \ldots, h_{i,N})$, $i = 0, 1, \ldots, M-1$,: $h_{0,j} = 0$, $j = 1, \ldots, N$, а все остальные элементы $h_{i,j}$ принимают значения нуль или один с равной вероятностью $\frac{1}{2}$. Вычислим

$$g_i^k(\theta) = \sum_{n=0}^{N_\Delta - 1} h_{i,ns+k} \cdot f_{ns+k-1}(\theta),\ i = 0, \ldots, M-1,$$

$$k = 1, \ldots, s.$$

5. Выберем q из интервала $[1; M/2s]$. Для $k = 1, \ldots, s$ построим области $\widehat{\Theta}^k$ такие, что по крайней мере q из функций $g_i^k(\theta)$ строго больше, чем 0 и не менее q строго меньше, чем 0.

   Доверительное множество определим по формуле

$$\widehat{\Theta} = \bigcap_{k=1}^{s} \widehat{\Theta}^k. \tag{20}$$

Замечания. 1. Описанная выше процедура аналогична предложенной в [63], но имеет два существенных отличия от нее. Во-первых, доверительное множество $\widehat{\Theta}$ рассматривается в пространстве состояний $\mathbb{R}^s$ вместо $\mathbb{R}^{n_a+n_b}$, а доверительные области $\widehat{\Theta}^k$, $k = 1, \ldots, s$, являются подмножествами $\mathbb{R}^k$ вместо $\widehat{\Theta}^k \subset \mathbb{R}^{n_a+n_b}$. Во-вторых, рандомизированное пробное возмущение включают через входной канал только один раз за каждые s моментов времени, а не постоянно как в [63]. Увеличивая интервал s, можно уменьшить нежелательное "раскачивающее" воздействие на систему управления, давая ей возможность успеть "успокоиться".

2. Если мы можем разделить "новый" шум $\bar{v}_{sn+k-1}$ в (17) на две части: $\tilde{v}_{sn+k-1}$ и ψ_{sn+k-1}, среди которых первая является неизмеримой, а вторая определяется наблюдаемыми входами и выходами с известными коэффициентами, то в описанной выше процедуре можно использовать более точные предсказатели вместо (19)

$$\widehat{y}_{sn+k-1}(\theta) = \Delta_n \theta^k + \sum_{i=0}^{k-1} \theta^{k-i} \bar{u}_{sn+k-l-i} + \psi_{sn+k-1}.$$

7.6. Основные результаты

Вероятность того, что $\theta_\star$ принадлежит каждому из $\widehat{\Theta}^k$, $k = 1, 2, \ldots, s$, дается в следующей теореме.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнено условие* **A1**. *Рассмотрим* $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ *и предположим, что* $Prob(g_i^k(\theta_\star) = 0) = 0$. **Тогда**

$$Prob\{\theta_\star \in \widehat{\Theta}^k\} = 1 - 2q/M, \tag{21}$$

где $\widehat{\Theta}^k, q$ *и* M *из шагов 5 и 4 описанной выше процедуры.*

Доказательство. Следующие предварительное утверждение, аналогичное предложению 1 в [63], стр. 2716, играет важную роль в доказательстве теоремы 4.

Л е м м а 1. *Зафиксируем* $k \in [1, \ldots, s]$. *Пусть* H *— стохастическая* $M \times N_\Delta$ *матрица с элементами* $h_{i,ns+k}$, $i = 0, 1, \ldots, M-1$, $n = 0, \ldots, N_\Delta - 1$, *из шага 4 алгоритма, и пусть* $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{N_\Delta})^{\mathrm{T}}$ *— вектор, независимый от* H *и состоящий из взаимно некоррелированных случайных переменных, симметрично распределенных относительно нуля. Для заданного* $i \in [0, M-1]$ *пусть* H_i *—* $M \times N$ *матрица со строками, равными* i*-ой строке* H. **Тогда**, $H\eta$ *и* $(H - H_i)\eta$ *имеют одинаковое* M*-мерное распределение при условии, что* i*-й элемент* $(H - H_i)\eta$ *(который равен* 0*) переставляется как первый элемент вектора.*

Общая схема доказательства теоремы 4 та же, как и в соответствующем доказательстве теоремы 1 в [63]. Разница лишь на стадии, когда Лемма 1 применяется для доказательства того факта, что каждая переменная $g_i^k(\theta_\star)$ имеет такую же вероятность $1/M$, чтобы быть в общей r-й позиции (т. е., ровно $r-1$ других переменных меньше, чем рассматриваемая).

Обозначим $\eta_n := \Delta_{n-1}\epsilon_{(n-1)s+k-1}(\theta_\star)$. Для корреляции между η_i и η_j, $i > j$, получаем последовательно

$$E[\eta_i \eta_j] = E[\Delta_{i-1}\epsilon_{(i-1)s+k-1}(\theta_\star)\Delta_{j-1}\epsilon_{(j-1)s+k-1}(\theta_\star)] =$$

$$= E[\Delta_{i-1}]E[\epsilon_{(i-1)s+k-1}(\theta_\star)\Delta_{j-1}\epsilon_{(j-1)s+k-1}(\theta_\star)] = 0$$

в силу предположения **A1** и свойства симметрии распределения тестовых возмущений: $E[\Delta_{i-1}] = 0$, т. е. переменные $\eta_1, \ldots, \eta_{N_\Delta}$ взаимно некоррелированы.

Выберем переменную $g_{\bar{i}}^k(\theta_\star)$ в r-ой позиции. Неравенство

$$g_i^k(\theta_\star) - g_{\bar{i}}^k(\theta_\star) = \sum_{n=0}^{N_\Delta}(h_{i,ns+k} - h_{\bar{i},ns+k})\eta_n < 0$$

справедливо для $r-1$ выбора $i \in [0, M-1]$. Это то же самое, что спросить: отрицательны ли $r-1$ элементов $(H - H_{\bar{i}})\eta$. Из леммы 1 получаем, что $(H - H_{\bar{i}})\eta$ имеет такое же распределение, что и $H\eta$ и следовательно $Prob\{$"$r-1$ элементов $(H - H_{\bar{i}})\eta$ отрицательны"$\} = Prob\{$"$r-1$ элементов $H\eta$ отрицательны"$\}$ и не зависит от $\bar{i}$.

Остальная часть доказательства такая же, как и в [63]. □

Следующий результат непосредственно вытекает из теоремы 4.

С л е д с т в и е 1. *В условиях теоремы 4*

$$Prob\{\theta_\star \in \widehat{\Theta}\} \geq 1 - 2sq/M, \tag{22}$$

где $\widehat{\Theta}$ *из (20).*

Заметим, как отмечается в [63], что значение вероятности в (21) является точным, а не нижним пределом. Неравенство в (22) получается из-за того, что события $\{\theta_\star \notin \widehat{\Theta}^k\}$, $k = 1, \ldots, s$ могут перекрываться.

Из сказанного выше легко вывести следующую теорему.

Т е о р е м а 5. *Пусть выполнены условия* **A1–A2** *и предположим, что* $Prob(g_i^k(\theta_\star) = 0) = 0$. **Тогда** *множество* $\tau(\widehat{\Theta})$ *является доверительным множеством для неизвестных параметров объекта (13) с уровнем достоверности не менее* $1 - 2sq/M$.

Отметим, что ранее в [22, 61] при подобных предположениях на основе описанной стратегии управления были показаны возможности формирования алгоритма оценивания, который обеспечивает асимптотическую состоятельность оценок к истинным значениям неизвестных параметров объекта (13).

7.7. Асимптотически состоятельные оценки

Пусть $\{\Delta_n\}$ обладает свойствами

$$\mathrm{E}\{\Delta_n\} = \mathrm{E}\{\Delta_n^3\} = 0, \qquad |\Delta_n| \leq \frac{C_\Delta R_n}{\sqrt{1 + \ln\{n\}}},$$

$$\mathrm{E}\{\Delta_n^2\} = \frac{\sigma_\Delta^2 R_n^2}{1+\ln\{n\}}, \qquad \mathrm{E}\{\Delta_n^4\} \le \frac{M_4^4 R_n^4}{(1+\ln\{n\})^2}\ , \tag{23}$$

где

$$R_n = C_R(1 + \sum_{j=1}^{p} |y_{sn+k-j}| + \sum_{j=1}^{p-k} |\bar{u}_{sn-j}|)$$

и $\sigma_\Delta^2,\ M_4^4,\ C_\Delta,\ C_R > 0$ — некоторые положительные постоянные.

Рассмотрим алгоритм построения оценок

$$\begin{cases} \tau_t = \bar{\tau}(\widehat{\theta}_{n-1}),\ s(n-1) < t \le sn,\ s = 1, 2, \ldots,\ n = 1, 2, \ldots, \\ \widehat{\theta}_n\ =\ \widehat{\theta}_{n-1} - \Gamma \frac{1+\ln\{n\}}{nR_n} \Delta_n \left(\frac{\Delta_n}{R_n} \widehat{\theta}_{n-1} - (Y_n - \psi_n(\widehat{\theta}_{n-1})) \right), \end{cases} \tag{24}$$

в котором Γ — некоторая положительно определенная матрица такая, что $2\lambda_{\min}(\Gamma)\sigma_\Delta^2 \ge 1$, Y_n — вектор из текущих наблюдений.

Выберем достаточно большое число $\bar{R} > 0$ и условимся собственно управление $\{\bar{u}_t\}$ формировать с помощью регулятора обратной связи типа (15) с настраиваемыми параметрами

$$\tilde{\tau}_t = \begin{cases} \tau_t, & \text{если } |y_t| + |u_{t-1}| < \bar{R}, \\ \widehat{\tau}_{t-s} & \text{— в противном случае,} \end{cases} \tag{25}$$

где оценки $\widehat{\tau}_t$ формируются по алгоритму “модифицированная полоска” (16).

Т е о р е м а 6. *При сформулированных выше условиях и произвольном начальном условии $\widehat{\theta}^0 \in \mathbb{R}^s$ последовательность $\{\tau_t\}$ сходится к $\tau_\star$ в среднеквадратичном смысле и с вероятностью единица, а также управляющие $\{u_t\}$ и выходные $\{y_t\}$ переменные равномерно ограниченны.*

Пробный сигнал Δ_n нивелируется с течением времени, так как за счет использования стабилизирующего алгоритма *модифицированная полоска* величины R_n равномерно ограничены. Это свойство алгоритма идентификации позволяет синтезировать с его помощью адаптивные системы, выход которых с течением времени становится неотличимым от выхода оптимальной системы, синтезированной при известных параметрах объекта управления.

Блок–схема рассмотренной адаптивной системы управления приведена на рис. 13.

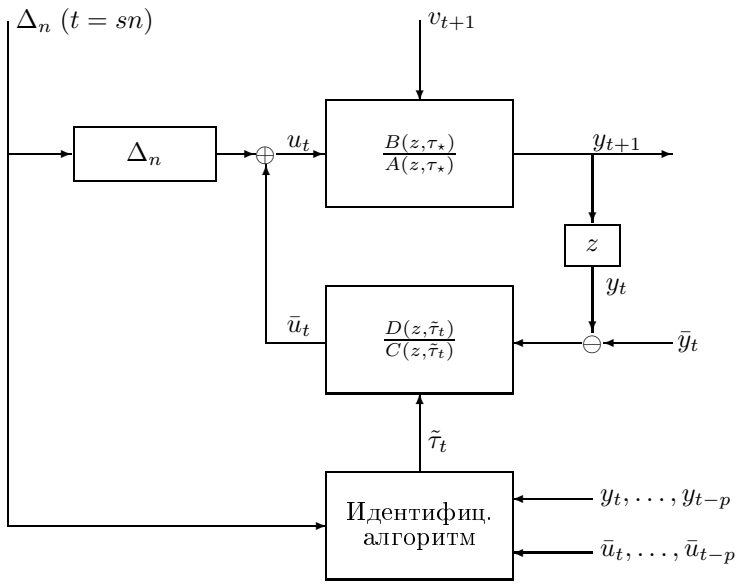

Рис. 13: Блок–схема адаптивной системы управления при $l = 1$.

7.8. Примеры

1. Вернемся к объекту управления (18) при $N = 960$ и неизвестных двух параметрах $a_\star$ и $b_\star$.

Определим функции $f_t(\theta)$:

$$f_{2n}(\theta) = \Delta_n(y_{2n} - \Delta_n\theta^1 - \theta^1\bar{u}_{2n-1} - \psi_{2n}),\ n = 0, \ldots, N_\Delta - 1,$$

$$f_{2n+1}(\theta) = \Delta_n(y_{2sn+1} - \Delta_n\theta^2 - \theta^2\bar{u}_{2n-1} - \theta^1\bar{u}_{2n} - \psi_{2n+1}).$$

Выберем $M = 480$ и $q = 6$ и подсчитаем эмпирические корреляции

$$g_i^k(\theta) = \sum_{n=0}^{499} h_{i,2n+k} \cdot f_{2n+k-1}(\theta),\ i = 1, \ldots, 479,\ k = 1, 2.$$

Для $k = 1, 2$ строим области $\widehat{\Theta}^k$, которые включают только такие значения θ, что не менее шести функций $g_i^k(\theta),\ i = 1, \ldots, 479$ строго больше нуля и не менее шести из тех же функций строго меньше нуля.

По теореме 3 вектор истинных параметров с вероятностью более чем на $95\% = 1 - 2 \cdot 2 \cdot 6/480$ принадлежит доверительному множеству $\tau(\widehat{\Theta}) = \tau(\widehat{\Theta}^1 \bigcap \widehat{\Theta}^2)$.

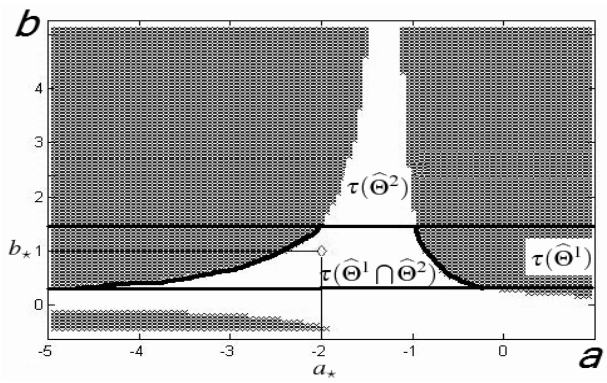

Рис. 14: Доверительное множество $\tau(\widehat{\Theta})$.

Рис. 14 показывает регионы $\tau(\widehat{\Theta})$, $\tau(\widehat{\Theta}^1)$ и $\tau(\widehat{\Theta}^2)$, полученные при моделировании с истинными значениями $a_\star = -2$ и $b_\star = 1$ и такими же характеристиками шума и стабилизирующей обратной связи, как и в предварительном примере.

2. Для иллюстрации работы асимптотического алгоритма оценивания имитационное моделирование на ЭВМ производилось с фактическим набором неизвестных коэффициентов

$$a_1^\star = 3.7;\ b_1^\star = 6.4;\ b_2^\star = -8.0,$$

который соответствует вектору

$$\theta = \theta(\tau^\star) = \begin{pmatrix} 6.40 \\ -31.68 \\ 110.82 \end{pmatrix}.$$

На рис. 15 показан типичный характер изменения оценок $\widehat{\tau}_t$ и τ_t, доставляемых алгоритмами “модифицированная полоска” и рандомизированным. Масштаб времени на графиках для первых 150 моментов не соблюдается. Пробное возмущение в канал управления первый раз поступает при $t = 100$. До этого момента времени алгоритм

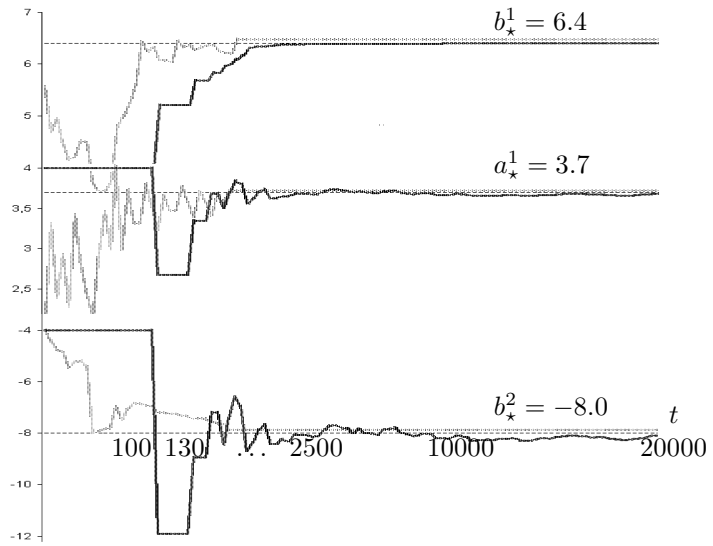

Рис. 15: Траектории оценок неизвестных коэффициентов $\widehat{\tau}_t$ и τ_t.

полоска, сделав 16 изменений, начиная с

$$\widehat{\tau}_{28} = \begin{pmatrix} 3.320 \\ 1 \\ 5.579 \\ -6.840 \end{pmatrix},$$

прекратил изменения параметров и обеспечивал стабилизацию замкнутой системы. Включение пробного возмущения, добавляемого в канал управления на каждом тридцатом такте, позволило не только воспользоваться рандомизированным алгоритмом оценивания параметров, но и обеспечило более высокое качество оценивания алгоритмом "модифицированная полоска", который за счет "раскачивания" системы, сделав на интервале $t \in [109, 221]$ еще 11 корректировок, достигает достаточно высокого качества оценивания. Оценки рандомизированного алгоритма после восьмидесяти итераций ($t \approx 2500$) попадают в близкую окрестность вектора θ и далее не покидают её.

8. Сценарный подход

Многие практические задачи сводятся к решению проблемы робастной выпуклой оптимизации (Robust Convex Problems, RCP), в которых оптимизируются выпуклые функции и множество ограничений задается также с помощью выпуклых функций. В общем виде задачи робастной выпуклой оптимизации, как правило, NP-сложные, так как в них обычно для решения требуется проверка огромного количества условий-ограничений. Рандомизированный подход позволяет при априорном задании параметров уровня ϵ и конфиденциальности β получать решение, которое с задаваемой вероятностью $(1-\beta)$ будет решением оптимизационной задачи, удовлетворяющим почти всем ограничениям, за исключением множества меры не большей ϵ [41].

Пусть $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$ — *параметр конструирования* некоторой системы или объекта управления. Рассмотрим семейство выпуклых задач оптимизации, параметризованных $x \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^d$:

$$RCP: \min_{\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n} c^{\mathrm{T}}\theta \ \text{ при ограничениях } \ \{F(\theta, x) \leq 0,\ x \in \mathbb{X}\},$$

где оптимизация функции $f(\theta) = c^{\mathrm{T}}\theta$ проводится по $\theta \in \Theta$, множество $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ выпукло и замкнуто, $c \in \mathbb{R}^n$ — некоторый заданный вектор, а функция $F : \Theta \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ выпукла по θ для всех $x \in \mathbb{X}$. В типичных случаях мощность множества $\mathbb{X}$ может быть бесконечной, т. е. оно может содержать бесконечное число элементов x.

Заметим, что рассмотрение случая скалярной функции F никоим образом не снижает общности рассуждений, так как случай многих ограничений $\{F_i(\theta, x) \leq 0,\ x \in \mathbb{X},\ i = 1, 2, \ldots, I\}$, легко к нему сводится через $F(\theta, x) = \max_i F_i(\theta, x)$.

Важным для приложений частным случаем RCP являются задачи робастного линейного программирования, в которых $F(\theta, x)$ — аффинные по θ, и полуопределенного программирования, в которых $F(\theta, x) = \lambda_{\max}(A(\theta, x))$, где $\lambda_{\max}(A)$ — максимальное собственное число симметричной матрицы A, и

$$A(\theta, x) = A_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \theta_i A_i(x),\ A_i(x) = A_i^{\mathrm{T}}(x).$$

Конструирование для "худшего" случая, с одной стороны, приводит к необходимости решения NP-сложных задач, а с другой —

часто привносит в систему чрезмерный консерватизм, поскольку вынуждает фокусироваться на всех вырожденных случаях, вероятность появления которых на практике невелика.

В парадигме *вероятностного (рандомизированного) робастного конструирования* предполагается задание вероятностной меры на множестве неопределенностей $\mathbb{X}$. Тогда для задаваемого уровня вероятности $\epsilon \in (0,1)$ ищется параметр конструирования θ, минимизирующий целевую функцию $c^{\mathrm{T}}\theta$ и удовлетворяющий почти всем ограничениям за исключением такой небольшой части из них, что ее мера (вероятность) не превосходит заранее заданного уровня ϵ.

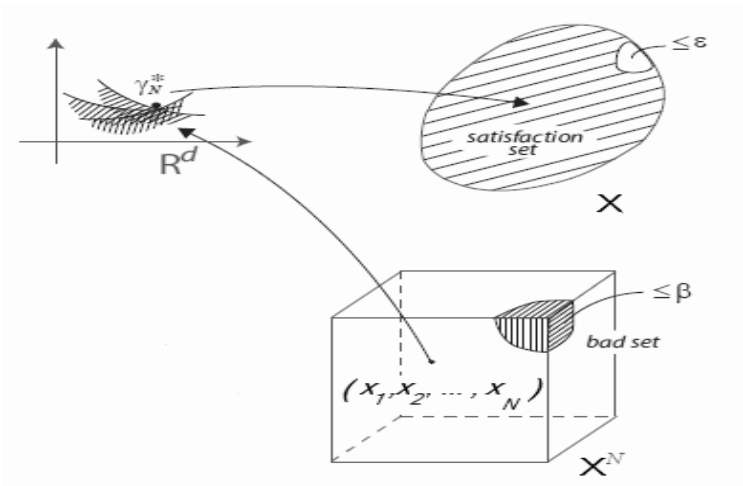

Рис. 16: Сценарный подход [41]. С вероятностью не меньшей $1-\beta$ выбираем точки $x_1, \ldots, x_N$ вне "bad set". Получающееся оптимальное решение удовлетворяет почти всем неопределенностям, кроме множества меры ϵ.

Сценарный подход иллюстрируется на рис. 16, заимствованном из статьи [41].

Пусть на $\mathbb{X}$ задана σ-алгебра, содержащая события $\{x \in \mathbb{X} : F(\theta, x) > 0\}$, и на ней определена вероятность P. Решение $\theta \in \Theta$ является *решением уровня* ϵ, если

$$V(\theta) \doteq P\{x \in \mathbb{X} : F(\theta, x) > 0\} \leq \epsilon.$$

Пусть $x_1, \ldots, x_N$ — N независимых реализаций, полученных по

одинаковой вероятностной мере P. Сценарная задача является дискретизацией задачи RCP и представляет собой решение следующей задачи выпуклого программирования

$$RCP_N : \min_{\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n} c^{\mathrm{T}}\theta, \text{ при } \{F(\theta, x_i) \leq 0,\ x_i \in \mathbb{X}, i = 1, 2, \ldots, N\}.$$

В [41] доказан следующий результат. *Фиксируем вещественные параметр уровня $\epsilon \in (0,1)$ и параметр конфиденциальности $\beta \in [0,1]$ и положим*

$$N \geq N(\epsilon, \beta) = \left[\frac{2}{\epsilon}\ln\frac{2}{\beta} + 2n + \frac{2n}{\epsilon}\ln\frac{2}{\epsilon}\right],$$

тогда *с вероятностью не меньшей, чем $1-\beta$ либо сценарная задача RCP_N неразрешима и тогда первоначальная задача робастной выпуклой оптимизации RCP также неразрешима, либо RCP_N разрешима и тогда ее оптимальное решение является решением уровня ϵ для первоначальной задачи RCP ($[\cdot]$ — функция целой части числа).*

Заключение

В статье представлены некоторые идеи о рандомизированных методах, которые будут стимулировать дальнейшие размышления и могут помочь достичь более глубокого понимания потенциала и ограничений рандомизации.

Одним из важных наблюдений является то, что в рандомизированном алгоритме выбор некоторых действий делается наугад, то есть для выбора призываем судьбу. Так как “случай” не является специалистом ни в чем, то преимущество использования рандомизированного алгоритма не всегда может быть выражено “хорошим” выбором судьбы. Преимущество в новом восприятии проблемы разрешимости, при котором в дополнение к двум крайним значениям “белое”–“черное” (“разрешимо”–“неразрешимо”) вводят множество оттенков “серого”. С точки зрения перспектив решений для “худшего” случая (worst-case) “серый” результат может быть более приемлемым, чем несколько “черных” среди многих “белых”.

Важно отметить, что в процессе оценки уровня “серого” можно прибегать к результатам теории вероятности, чья сила и эффективность порой действительно удивляет. Это добавляет уверенности в перспективах использования рандомизированных методов.

Авторы благодарны Юрию Талагаеву, существенно помогшему написанию этой статьи.

Список литературы

[1] *Campi M.C.* Why is resorting to fate wise? A critical look at randomized algorithms in systems and control // European Journal of Control. 2010. Vol. 5. P. 419–430.

[2] *Граничин О.Н., Хантулева Т.А.* Гибридные системы и рандомизированные измерения в неравновесных процессах // Дифференциальные уравнения и процессы управления, электронный журнал, рег. №P23275 от 07.03.97. №3. 2004.

[3] *Деревицкий Д.П., Фрадков Ф.Л.* Две модели для анализа динамики алгритмов адаптации // Автоматика и телемеханика. 1974. № 1. С. 67–75.

[4] *Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. М.: Наука, 1981.

[5] *Льюнг Л., Сёдерстрём Т.* Идентификация систем: теория для пользователя. — М.: Наука. 1991. 431 с.

[6] *Kushner H.J., Yin G.G.* Stochastic Approximation Algorithms and Applications. — New York: Springer–Verlag. 2002. 415 p.

[7] *Ширяев А.Н.* Вероятность. — М.: Наука. 1980. 574 с.

[8] *Граничин О.Н.* Неасимптотическое доверительное множество для параметров линейного объекта управления при почти произвольных помехах // Автоматика и телемеханика. 2011.

[9] *Nemirovski A.* Several NP-hard problems arising in robust stability analysis // J. Matrix Anal. Appl. 1993. Vol. 6. P. 99–105.

[10] *Braatz R.P., Young P.M., Doyle J.C., Morari M.* Computational complexity of μ calculation // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. Vol. 39. P. 1000–1002.

[11] *Blondel V.D., Tsitsiklis J.N.* A survey of computational complexity results in systems and control // Automatica. 2000. Vol. 36. P. 1249–1274.

[12] *Hoeffding W.* Probability inequalities for sums of bounded random variables // J. Am. Stat. Assoc. 1963. Vol. 58. P. 13–30.

[13] *Metropolis N., Ulam S.* The Monte Carlo Method // J. Am. Stat. Assoc. 1949. Vol. 44. P. 335–341.

[14] *Ермаков С.М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. Сер. “Теория вероятностей и математическая статистика”. — М.: Изд–во Наука. 1971. 471 с.

[15] *Fisher R.A.* The Design of Experiments. — Edinburgh: Oliver and Boyd, 1935.

[16] *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. — М.: Наука. 1977. 223 с.

[17] *Цыпкин Я.З.* Информационная теория идентификации. — М.: Наука. 1995. 336 с.

[18] *Young P.C.* Recursive Estimation and Time-Series Analysis. An Introduction. — Berlin–Heidelberg: Springer. 1984.

[19] *Граничин О.Н.* Алгоритм стохастической аппроксимации с возмущением на входе для идентификации статического нестационарного дискретного объекта // Вестник Ленингр. ун–та. Сер. 1. 1988. Вып. 3. С. 92–93.

[20] *Граничин О.Н.* Оценивание точки минимума неизвестной функции, наблюдаемой на фоне зависимых помех // Проблемы передачи информации. 1992. №2. С. 16–20.

[21] *Goldenshluger A.V., Polyak B.T.* Estimation of regression parameters with arbitrary noise // Mathematical Methods of Statistics. 1993. Vol. 2. No. 1. P. 18–29.

[22] *Граничин О.Н., Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. — М.: Наука. 2003. 291 с.

[23] *Граничин О. Н.* Об одной стохастической рекуррентной процедуре при зависимых помехах в наблюдении, использующей на входе пробные возмущения // Вестник Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1989. №1(4). С. 19–21.

[24] *Поляк Б. Т., Цыбаков А. Б.* Оптимальные порядки точности поисковых алгоритмов стохастической аппроксимации // Проблемы передачи информации. 1990. № 2. С. 126–133.

[25] *Граничин О. Н.* Процедура стохастической аппроксимации с возмущением на входе // Автоматика и телемеханика. 1992. №2. С. 97–104.

[26] *Spall J.C.* Multivariate Stochastic Aproximation Using a Simultaneous Perturbation Gradient Aproximation // IEEE Trans. Automat. Contr. 1992. Vol. 37. No. 3. P. 332–341.

[27] *Chen H.-F., Duncan T.E., Pasik-Duncan B.A.* Kiefer-Wolfowitz algorithm with randomized differences // IEEE Trans. Automat. Contr. 1999. Vol. 44. No. 3. P. 442–453.

[28] *Растригин Л.А.* Статистические методы поиска. М.: Наука. 1968. 376 с.

[29] *Сушков Ю.А.* Об одном способе организации случайного поиска // Исследование операций и статистическое моделирование. Изд–во Ленингр. гос. ун–та. 1972. Т. 1. С. 180–185.

[30] *Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г.* Методы поиска глобального экстремума. — М.: Наука. 1991.

[31] *Metropolis N., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M. N., Teller A. H., and Teller E.* Equation of State Calculations by Fast Computer Machines // J. Chemical Physics. 21. 6. June 1953. P. 1087–1092.

[32] *Kirkpatrick S., Gelatt Jr. C. D., Vecchi M. P.* Optimization by Simulated Annealing // Science. 220. 1983. P. 671–680.

[33] *Лопатин А.С.* Метод отжига // Стохастическая оптимизация в информатике. 2005. Вып. 1. С. 133–149.

[34] *Тихомиров А.С.* О быстрых вариантах алгоритма отжига (simulated annealing) // Стохастическая оптимизация в информатике. 2009. Вып. 5. С. 65–90.

[35] *Holland J.H.* Adaptation in natural and artificial systems. — University of Michigan Press. Ann Arbor. 1975.

[36] *Вапник В.Н., Червоненкис А.Я.* Теория равномерной сходимости частот появления событий к их вероятностям и задача поиска оптимального решения по эмпирическим данным // Автоматика и телемеханика. №2. 1971.

[37] *Вапник В.Н., Червоненкис А.Я.* Теория распознавания образов. — М.: Наука. 1974.

[38] *Фомин В.Н.* Математическая теория обучаемых опознающих систем. — Л.: Изд–во Ленингр. ун–та. 1976. 236 с.

[39] *Vidyasagar M.* A Theory of Learning and Generalization. — New York: Springer. 1997.

[40] *Vidyasagar M.* Statistical learning theory and randomized algorithms for control // IEEE Control Systems. 1998. No 12. P. 69–85.

[41] *Calafiore G.C., Campi M.C.* The scenario approach to robust control design // IEEE Trans. Automat. Control. Vol. 51. No. 5. 2006. P. 742–753.

[42] *Tempo R., Calafiore G., Dabbene F.* Randomized Algorithms for Analysis and Control of Uncertain Systems. — New York: Springer-Verlag. 2005.

[43] *Calafiore G., Dabbene F., Tempo R.* Research on probabilistic methods for control system design // Automatica. Vol. 47. 2011. P. 1279–1293

[44] *Stengel R.F., Ray L.R.* Stochastic robustness of linear time-invariant control systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. Vol. 36. P. 82–87.

[45] *Khargonekar P.P., Tikku A.* Randomized algorithms for robust control analysis have polynomial time complexity // Proc. of Conf. on Decision and Control. 1996. P. 3470–3475.

[46] *Barmish B.R., Lagoa C.M.* The uniform distribution: A rigorous justification for its use in robustness analysis // Math. Control, Signals, Syst. Vol. 10. 1997. P. 203-222.

[47] *Oishi Y., Kimura H.* Randomized algorithms to solve parameter-dependent linear matrix inequalities and their computational complexity // Proc. of Conf. on Decision and Control. Orlando. USA. 2001. P. 2025–2030.

[48] *Calafiore G, Polyak B.T.* Stochastic algorithms for exact and approximate feasibility of robust LMIs // IEEE Trans. Autom. Control. Vol. 46. 2001. P. 1755–1759.

[49] *Fujisaki Y., Dabbene F., Tempo R.* Probabilistic robust design of LPV control systems // Automatica. Vol. 39. 2001. P. 1323–1337.

[50] *Polyak B.T., Tempo R.* Probabilistic robust design with linear quadratic regulators // Syst. Control Lett. Vol. 43. 2001. P. 343-353.

[51] *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука. 2002. 303 с.

[52] *Kanev S., De Schutter B., Verhaegen M.* The ellipsoid algorithm for probabilistic robust controller design // Proc. of Conf. on Decision and Control. Las Vegas. USA. 2002. P. 2248–2253.

[53] *Ishii H., Basar T., Tempo R.* Randomized algorithms for quadratic stability of quantized sampled-data systems // Automatica. Vol. 40. 2004. P. 839-846.

[54] *Щербаков П.С.* Генерирование устойчивых полиномов // Стохастическая оптимизация в информатике. 2009. Вып. 5. С. 65–90.

[55] *Граничин О.Н., Халидов В.И.* Рандомизированный подход к обнаружению разрывов функции // Стохастическая оптимизация в информатике. Т. 1. 2005. С. 73–80.

[56] *Граничин О.Н., Шалымов Д.С., Аврос Р., Волкович З.* Рандомизированный алгоритм нахождения количества кластеров // Автоматика и телемеханика. 2011. №4. С. 86–98.

[57] *Avros R., Granichin O., Shalymov D., Volkovich Z., Weber G.-W.* Randomized algorithm of finding the true number of clusters based on Chebychev polynomial approximation (Chapter 6) // Data Mining: Found. and Intell. Paradigms, D.E. Holmes, L.C.

Jain (Eds.). — Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, ISRL 23. Vol. 1. 2011. P. 131–155.

[58] *Granichin O., Morozkov M., Volkovich Z.* Necessary conditions for the confidence level of the randomized algorithm of finding the true number of clusters // Proc. of IEEE Int. Symposium on Intelligent Control (MSC-2011). Denver. USA. 2011. P. 1002–1007.

[59] *Морозков М.А.* Быстрый рандомизированный алгоритм нахождения точного количества кластеров в большом множестве данных // Стохастическая оптимизация в информатике. Т. 7. 2011. С. 69–82.

[60] *Фельдбаум А.А.* О проблемах дуального управления // В кн.: Методы оптимизации автоматических систем. — М.: Наука. 1972. С. 89–108.

[61] *Граничин О.Н., Фомин В.Н.* Адаптивное управление с использованием пробных сигналов // Автоматика и телемеханика. 1986. № 2. С. 100–112.

[62] *Chen H.-F., Guo L.* Convergence rate of least–squares stochastic systems // Int. J. of Control. 1986. Vol. 44. No. 5. P. 1459–1477.

[63] *Campi M.C., Weyer E.* Non-asymptotic confidence sets for the parameters of linear transfer functions // IEEE Trans. Automat. Control. Vol. 55. No. 12. 2010. P. 2708–2720.

[64] *Calafiore G.C., Fagiano L.* Robust model predictive control: the random convex programming approach // Proc. of IEEE Int. Symposium on Intel. Control. Denver. USA. 2011. P. 222–227.

[65] *Граничин О.Н.* Неминимаксная фильтрация при неизвестных ограниченных помехах в наблюдениях // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С. 125–133.

[66] *Granichin O.N.* Linear regression and filtering under nonstandard assumptions (Arbitrary noise) // IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. 49. Oct. 2004. No. 10. P. 1830–1835.

[67] *Вахитов А.Т., Граничин О.Н., Гуревич Л.С.* Алгоритм стохастической аппроксимации с пробным возмущением на входе в нестационарной задаче оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2009. № 11. С. 70–79.

[68] *Vakhitov A., Granichin O., Vlasov V.* Adaptive control of SISO plant with time-varying coefficients based on random test perturbation // Proc. of American Control Conf. 2010. Baltimore. USA. P. 4004–4009.

[69] *Амелин К.С., Граничин О.Н.* Возможности рандомизации в алгоритмах предсказания калмановского типа при произвольных внешних помехах в наблюдении // Гироскопия и навигация. №2 (73). 2011. С. 38–50.

[70] *Амелин К.С.* Возможности рандомизации в алгоритме предсказания отклонения от курса легкого беспилотного летательного аппарата при произвольных внешних помехах в наблюдении // Стохастическая оптимизация в информатике. Т. 7. 2011. С. 93–115.

[71] *Кривоконь Д.С., Вахитов А.Т.* Нестационарная оптимизация с шагом предсказания в задаче отслеживания объекта при помощи двух камер // Стохастическая оптимизация в информатике. Т. 7. 2011. С. 116–127.

[72] *Candes E., Romberg J., Tao T.* Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information // IEEE Trans. Inform. Theory. Feb. 2006. Vol. 52. No. 2. P. 489–509.

[73] *Donoho D.* Compressed sensing // IEEE Trans. Inform. Theory. Apr. 2006. Vol. 52. No. 4. P. 1289–1306.

[74] *Граничин О.Н.* Рандомизация измерений и ℓ_1-оптимизация // Стохастическая оптимизация в информатике. Вып. 5. 2009. С. 3–23.

[75] *Граничин О.Н., Павленко Д.В.* Рандомизация данных и ℓ_1-оптимизация // Компьютерные инструменты в образовании. 2010. №1. С. 5–13.

[76] *Граничин О.Н., Павленко Д.В.* Рандомизация получения данных и ℓ_1-оптимизация (опознание со сжатием) (Обзор) // Автоматика и телемеханика. 2010. № 11. С. 3–28.

[77] *Вахитов А.Т., Граничин О.Н., Сысоев С.С.* Точность оценивания рандомизированного алгоритма стохастической оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2006. № 4. С. 86–96.

[78] *Tang Q-Y., Chen H.F., Han Z-J.* Convergence rates of Perturbation–Analysis–Robbins–Monro–Single–Run algorithms for single server queues // IEEE Trans. on Automatic Control. 1997. Vol. 42. No. 10. P. 1442–1447.

[79] *Волкович Я.В., Граничин О.Н.* Адаптивная оптимизация сервера, обрабатывающего очередь заданий // Стохастическая оптимизация в информатике. Т. 1. 2005. С. 17–28.

[80] *Вахитов А.Т., Граничин О.Н., Паньшенсков М.А.* Методы оценивания пропускной способности в распределенных системах // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2009. № 11. С. 45–53.

[81] *Граничин О.Н., Измакова О.А.* Рандомизированный алгоритм стохастической аппроксимации в задаче самообучения // Автоматика и телемеханика. 2005. № 8. С. 52–63.

[82] *Александров А.Г., Орлов Ю.Ф.* Конечно-частотная идентификация: динамический алгоритм // Проблемы управления. 2009. № 4. С. 2–8.

[83] *Bai E.W., Nagpal K.M., Tempo R.* Bounded-error parameter estimation: Noise models and recursive algorithms // Automatica. Vol. 32. 1996. P. 985–999.

[84] *Garulli A., Giarre L., Zappa G.* Identification of approximated Hammerstein models in a worst-case setting // IEEE Trans. Autom. Control. Vol. 47. No. 7. Dec. 2002. P. 2046–2050.

[85] *Соколов В.Ф.* Оценка качества робастной системы управления при неизвестных верхних границах возмущений и помехи измерений // Автоматика и телемеханика. №. 9. 2010. С. 3–18.

[86] *Фомин В.Н.* Методы управления линейными дискретными объектами. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1985. 336 с.