

# Обобщенные линейные алгоритмы управления формациями<sup>1</sup>

С. Э. Парсегов, аспирант

Институт проблем управления РАН, Москва

parsegov@ipu.ru

---

В последние годы во многих сложных современных системах реализуется принцип распределенного кооперативного управления при помощи простых, однотипных, взаимодействующих друг с другом подсистем, называемых агентами. Такие системы называют мультиагентными. В работе предлагаются линейные алгоритмы, развивающие и обобщающие некоторые известные методы управления формациями. В качестве первого шага рассматривается задача расположения точек на отрезке, формулируются критерии устойчивости и приводятся некоторые оценки.

*Ключевые слова:* мультиагентные системы, управление формациями, формообразование.

## 1. Введение

В последнее время во многих сферах научно-технической и производственной деятельности, в том числе в управлении, происходит постоянное усложнение различных систем. Это связано как с резким ростом вычислительной мощности компьютеров, так и появлением связей между системами, объединением их в сети. Разработка теоретических положений алгоритмов централизованного управления становится все более трудоемкой, поскольку сетевые структуры таких систем постоянно увеличиваются и/или усложняются. В некоторых случаях применение централизованного управления может быть нежелательным, либо невозможным.

В то же время многие примеры существующих в окружающем нас мире биологических систем показывают, что функционирование сложной системы, основанное на локальном обмене информацией между ее элементами может приводить к достижению некоторой глобальной цели. В литературе по автоматическому управлению стали появляться алгоритмы децентрализованного кооперативного управления, основанные на идее локального взаимодействия подсистем.

В современной теории автоматического управления системы, состоящие из взаимодействующих друг с другом однотипных элемен-

---

<sup>1</sup> © С. Э. Парсегов, 2011

тов, принято называть мультиагентными, а сами элементы — агентами.

Особенностями таких систем являются их существенный параллелизм, обеспечивающий робастность к отказам отдельных агентов, высокую производительность и надежность, и высокий порядок, обусловленный как правило большим числом агентов.

Кооперативное управление мультиагентными системами можно условно разделить на две категории: задачи управления формациями с приложением к мобильным роботам, беспилотным летательным аппаратам, подводным автономным устройствам, космическим аппаратам, и другие, не связанные с образованием формаций, типа задач распределения, поиска, синхронизации и др.

В задачах кооперативного управления совместно используемая информация часто может иметь вид общих целей, общих алгоритмов управления, или информации об относительном положении агентов, полученной с их сенсоров. В свете изложенных положений в настоящее время особый интерес вызывают задачи построения геометрических образов (структур) на плоскости и в пространстве (т.н. задачи формообразования). В работах [1, 2] указывается, что задачи формообразования часто связаны с задачами консенсуса (задачи сходимости агентов к общему решению).

В [2,3] подробно рассмотрен один из частных случаев задач консенсуса — алгоритм циклического преследования, и получено обобщение на случай, когда линия визирования каждого агента отклонена на некоторый угол  $\alpha$ . В тех же работах определены условия, при которых группа агентов образует ту или иную формуацию, и проведен анализ некоторых частных случаев обобщенного алгоритма циклического преследования с моделями в виде интеграторов второго порядка.

Помимо циклического преследования к задачам формообразования также относятся алгоритмы расположения агентов на отрезке. В [4] разработан и исследован алгоритм движения агентов, обеспечивающий их расположение в правильном порядке на заданном отрезке и на равном расстоянии друг от друга в пространствах  $\mathbb{R}^1$  и  $\mathbb{R}^2$ . Проблема формулируется в классе непрерывных систем, моделями агентов являются одиночные интеграторы. В [5] детально изучены похожие алгоритмы в классе дискретных систем.

В данной работе изучается обобщение алгоритма равномерного расположения точек на отрезке путем введения матрицы поворота,

приводятся критерии устойчивости и оценки скорости сходимости. Более того, с помощью критерия устойчивости мультиагентных систем [6, 7], основанного на понятии  $\Omega$ -области, исследуется случай алгоритма с моделями агентов второго порядка, формулируется и доказывается критерий устойчивости.

## 2. Постановка задачи

### Равномерное расположение точек на отрезке.

В работе [4] предлагается линейный закон перемещения агентов для их равномерного расположения на отрезке в одномерном и двумерном пространствах, границы которого либо фиксированы, либо изменяются в соответствии с известным законом. Закон управления предполагает наличие информации о расстояниях между агентом и двумя его ближайшими соседями. В рамках предложенной стратегии каждый агент движется в направлении середины отрезка, соединяющего его ближайших по номерам соседей. При этом первый и последний агенты стремятся занять положение между границами отрезка и ближайшими к ним по номерам соседями. Динамика каждого агента описывается одиночным интегратором — управление движением производится за счет изменения скорости агента.

Для удобства дальнейшего изложения приведем алгоритм расположения на отрезке с закрепленными границами для одномерного и двумерного случаев [4].

Пусть  $x_i(t)$  — координата положения в момент времени  $t \geq 0$   $i$ -го агента,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Обозначим через  $x_b$  и  $x_e$  координаты начала и конца отрезка соответственно.

$$\dot{x}_i = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

В соответствии с алгоритмом закон управления выбран следующим образом

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{x_2 + x_b}{2} - x_1, \\ u_i &= \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2} - x_i, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ u_n &= \frac{x_e + x_{n-1}}{2} - x_n. \end{aligned} \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что динамика всей системы определяется выражением

$$\dot{x} = Ax + b, \quad (3)$$

где  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ , матрица  $A$  и вектор  $b$  имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0 & \dots & 0 \\ 0.5 & -1 & 0.5 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0.5 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (4)$$

$$b = [0.5x_b, 0, \dots, 0.5x_e]^T \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Как указано в [8], собственные числа матрицы  $A$  имеют вид  $\lambda_k = -2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

В [4] формулируется и доказывается следующая

**Теорема 1.** Система (3) устойчива и существует стационарное (конечное) положение точек  $x_i \rightarrow x_b + \frac{i}{n+1}(x_e - x_b)$  при  $t \rightarrow \infty$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , т.е. все точки из любого начального положения стремятся выстроиться на отрезке с фиксированными концами  $x_b$  и  $x_e$  на равном расстоянии друг от друга.

Как далее указывается в [4], для системы (3) справедлива следующая оценка:  $\|x(t) - x^*\| \leq e^{\hat{\lambda}} \|x(0) - x^*\|$ , где  $x(0)$ ,  $x^* = -A^{-1}b$  — вектора координат начального и конечного положения агентов соответственно,  $\hat{\lambda} = \max_k \operatorname{Re} \lambda_k = -2 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}$ . Таким образом, при  $n \rightarrow \infty$  оценка скорости сходимости имеет вид  $\hat{\lambda} \approx -\frac{\pi^2}{2n^2}$ .

Приведем также алгоритм равномерного расположения точек на отрезке для двумерного случая [4]. Пусть  $x_i(t)$  и  $y_i(t)$  — координаты положения в  $\mathbb{R}^2$  в момент времени  $t \geq 0$   $i$ -го агента,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $x_b$ ,  $y_b$  и  $x_e$ ,  $y_e$  — координаты начала и конца отрезка соответственно. Алгоритм ведет себя аналогично предыдущему случаю по каждой из координат.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2 + x_b}{2} - x_1, & \dot{y}_1 &= \frac{y_2 + y_b}{2} - y_1, \\ \dot{x}_i &= \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2} - x_i, & \dot{y}_i &= \frac{y_{i+1} + y_{i-1}}{2} - y_i, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= \frac{x_e + x_{n-1}}{2} - x_n, & \dot{y}_n &= \frac{y_e + y_{n-1}}{2} - y_n. \end{aligned} \quad (6)$$

В [4] показано, что в компактной форме динамика системы может быть записана в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где матрица  $A$  определяется выражением (4), вектора координат начала и конца отрезков имеют вид  $b_x = [0.5x_b, 0, \dots, 0.5x_e]^T$ ,  $b_y = [0.5y_b, 0, \dots, 0.5y_e]^T$ . Приведенная в [4] теорема о собственных числах и сходимости аналогична теореме 1.

Легко заметить, что система (7), по сути, состоит из двух независимых подсистем, т. е. не учитывается возможное наличие связи между координатами  $x_i, y_i$  каждого агента. Такая связь может иметь вид, к примеру, матрицы поворота [2, 3], когда в силу определенных ограничений, либо постановки задачи вектор скорости каждого агента отклоняется на некоторый угол. Кроме того, подход с моделями агентов в виде одиночных интеграторов подразумевает управление путем мгновенного изменения скорости каждого агента, что является идеализированной ситуацией.

В связи с этим имеет смысл разработка алгоритмов, учитывающих как возможную связь между координатами каждого агента, так и опосредованное изменения скорости через ускорение, т. е. алгоритмов более высокого порядка. Этим вопросам и посвящается дальнейшее изложение

### 3. Решение

Обобщение алгоритма [4] строится следующим образом: сначала изучается алгоритм с наличием связи между координатами каждого агента в виде матрицы поворота, затем предлагается алгоритм второго порядка для случая независимых координат, после предлагается наиболее общий алгоритм — комбинация двух предыдущих.

#### 3.1. Алгоритмы первого порядка

##### Двумерный случай.

Получим обобщение стратегии равномерного расположения для двумерного случая [4]. Прежде всего отметим, что в (7) матрица системы имеет вид  $I_2 \otimes A$ , где  $I_2$  — единичная матрица размера

$2 \times 2$ ,  $\otimes$  — символ произведения Кронекера. Произведем следующую группировку координат для каждого агента. Пусть  $\xi_i(t) = [x_i(t), y_i(t)]^T \in \mathbb{R}^2$  — положение в момент времени  $t \geq 0$   $i$ -го агента,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\xi_b = [x_b(t), y_b(t)]^T$  и  $\xi_e = [x_e(t), y_e(t)]^T$  — координаты начала и конца отрезка соответственно. С учетом введенных обозначений выражение (7) можно переписать в виде

$$\dot{\xi} = (A \otimes I_2)\xi + \hat{b}, \quad (8)$$

где  $\xi = [\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_n^T]^T$ ,  $\hat{b} = [0.5\xi_b^T, 0, \dots, 0.5\xi_e^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ .

Рассмотрим ситуацию, когда вектор скорости каждого агента повернут на одинаковый для всех агентов угол смещения  $\alpha \in [-\pi, \pi]$ . Наличие такой связи может быть обусловлено физическими ограничениями на действия агентов, к примеру необходимостью обходить препятствия мобильными роботами, либо наличием внешних возмущений, отклоняющих вектор скорости агента, и т.п. Для задач циклического преследования алгоритм, использующий матрицу поворота, был впервые предложен в [2]. Воспользуемся изложенными в [2] идеями для равномерного расположения точек на отрезке. Таким образом, управление на входе  $i$ -го агента будет определяться следующей формулой

$$\begin{aligned} u_1 &= R(\alpha) \left( \frac{\xi_2 + \xi_b}{2} - \xi_1 \right), \\ u_i &= R(\alpha) \left( \frac{\xi_{i+1} + \xi_{i-1}}{2} - \xi_i \right), \quad i = 2, \dots, n-1 \\ u_n &= R(\alpha) \left( \frac{\xi_e + \xi_{n-1}}{2} - \xi_n \right). \end{aligned} \quad (9)$$

где  $R(\alpha)$  — матрица поворота, определяемая следующим выражением

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Система уравнений, описывающая динамику всей системы из  $n$  агентов имеет вид

$$\dot{\xi} = (A \otimes R(\alpha))\xi + b^*, \quad (11)$$

$$b^* = (I_n \otimes R(\alpha))\hat{b} \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (12)$$

**Т е о р е м а 2.** Собственные числа матрицы  $A \otimes R(\alpha)$  имеют вид

$$\begin{aligned}\lambda_k^+ &= \left( -2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) e^{+j\alpha}, \\ \lambda_k^- &= \left( -2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) e^{-j\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots, n,\end{aligned}$$

и

1. при  $0 \leq |\alpha| < \frac{\pi}{2}$  система (11) устойчива и существует стационарное положение точек  $\xi_k \rightarrow \xi_b + \frac{k}{n+1}(\xi_e - \xi_b)$  при  $t \rightarrow \infty, k = 1, 2, \dots, n$ , т. е. все агенты из любого начального положения стремятся выстроиться на отрезке с фиксированными концами  $\xi_b$  и  $\xi_e$  на равном расстоянии друг от друга. При этом оценка скорости сходимости алгоритма при  $n \rightarrow \infty$  имеет вид  $\hat{\lambda} \approx -\frac{\pi^2 \cos \alpha}{2n^2}$ ;
2. при  $|\alpha| = \frac{\pi}{2}$  все собственные числа лежат на мнимой оси и каждый агент совершает сложное регулярное движение в некоторой ограниченной области, включающей конечную точку на отрезке;
3. при  $\frac{\pi}{2} < |\alpha| < \pi$  цель управления — образование формации с равноотстоящими элементами на отрезке не достигается.

*Доказательство.* Собственные числа матрицы  $A \otimes R(\alpha)$  определяются из свойств произведения Кронекера, при  $\alpha = 0$  все  $2n$  собственных чисел являются вещественными и лежат в открытой левой полуплоскости. Умножению отрицательного вещественного числа на  $e^{\pm j\alpha}$  соответствует его поворот в комплексной плоскости на угол  $\pm\alpha$  относительно действительной оси. Таким образом, система будет терять устойчивость при повороте на угол больший или равный  $\frac{\pi}{2}$ . Покажем, что для устойчивой системы (11) стационарное (конечное) положение агентов имеет тот же вид, что и для (8). Конечное положение агентов для системы (11) определяется следующим образом:  $\xi^* = -(A \otimes R(\alpha))^{-1}b^*$ . По свойствам произведения Кронекера имеем  $(A \otimes R(\alpha))^{-1}b^* = (A^{-1} \otimes R^{-1}(\alpha))(I_n \otimes R(\alpha))\hat{b} = (A^{-1} \otimes I_2)\hat{b}$ , где  $I_n$  — единичная матрица размера  $n \times n$ . Скорость сходимости алгоритма определяется следующим числом  $\hat{\lambda} = \max_k \operatorname{Re} \lambda_k^\pm = -2 \cos \alpha \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}$ . Таким образом, при  $n \rightarrow \infty$

оценка скорости сходимости имеет вид  $\hat{\lambda} \approx -\frac{\pi^2 \cos \alpha}{2n^2}$ . В остальном доказательство аналогично доказательству теоремы 1 в [4].  $\square$

### Трехмерный случай.

Полученные выше результаты легко обобщаются на случай движения агентов в  $\mathbb{R}^3$ . Как и ранее, для трехмерного случая будем рассматривать  $n$  агентов, положение каждого из которых в любой момент времени  $t \geq 0$  определяется следующим набором координат  $\xi_i(t) = [x_i(t), y_i(t), z_i(t)]^T \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Пусть  $\xi = [\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_n^T]^T$ , а  $\xi_b$  и  $\xi_e$  координаты начала и конца отрезка соответственно.

Движение каждого агента описывается следующим уравнением

$$\dot{\xi}_i = u_i, \quad (13)$$

а закон управления выбирается в виде (9). В более компактной форме динамика всей системы определяется выражением (11). Матрица  $R(\alpha)$ ,  $\alpha \in [-\pi, \pi]$ , является матрицей поворота относительно оси вращения  $(0, 0, 1)^T$ :

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

матрица  $A$  имеет вид (4),  $b^* = (I_n \otimes R(\alpha)) [0.5\xi_b^T, 0, \dots, 0.5\xi_e^T]^T \in \mathbb{R}^{3n}$ .

Справедлива следующая

**Т е о р е м а 3.** *Собственные числа матрицы  $A \otimes R(\alpha)$  имеют вид*

$$\begin{aligned} \lambda_k &= -2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}, \\ \lambda_k^+ &= \left( -2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) e^{+j\alpha}, \\ \lambda_k^- &= \left( -2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) e^{-j\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

*u*

1. при  $0 \leq |\alpha| < \frac{\pi}{2}$  система (11) устойчива и существует стационарное положение точек  $\xi_k \rightarrow \xi_b + \frac{k}{n+1}(\xi_e - \xi_b)$  при  $t \rightarrow \infty, k = 1, 2, \dots, n$ , т. е. все агенты из любого начального положения стремятся выстроиться на отрезке с фиксированными концами  $\xi_b$  и  $\xi_e$  на равном расстоянии друг от друга. При этом оценка скорости сходимости алгоритма при  $n \rightarrow \infty$  имеет вид  $\hat{\lambda} \approx -\frac{\pi^2 \cos \alpha}{2n^2}$ ;
2. при  $|\alpha| = \frac{\pi}{2}$  все собственные числа лежат на мнимой оси и каждый агент совершает сложное регулярное движение в некоторой ограниченной области, включающей конечную точку на отрезке;
3. при  $\frac{\pi}{2} < |\alpha| < \pi$  цель управления — образование формации с равноотстоящими элементами на отрезке не достигается.

*Доказательство.* Собственные числа матрицы  $A \otimes R(\alpha)$  определяются из свойств произведения Кронекера,  $n$  собственных чисел  $\left\{ \lambda_k = -2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right\}_{k=1}^n$  не зависят от значения  $\alpha$ , всегда вещественные и лежат открытой левой полуплоскости. В остальном доказательство аналогично доказательству теоремы 2.  $\square$

### 3.2. Алгоритмы второго порядка

Рассмотренные ранее алгоритмы управления формациями были построены для моделей агентов первого порядка — одиночных интеграторов. По сути, такой подход подразумевает управление путем мгновенного изменения скорости каждого агента, что является идеализированной ситуацией. Далее предлагаются линейные алгоритмы равномерного расположения агентов на отрезке с использованием моделей второго порядка, т. е. путем опосредованного изменения скорости через ускорение. В общем случае построение таких алгоритмов предполагает измерение как абсолютных координат агентов, так и их скоростей.

Будем рассматривать движение агентов в трехмерном пространстве. Так же как ранее,  $\xi_i(t) = [x_i(t), y_i(t), z_i(t)]^T \in \mathbb{R}^3$  — положение  $i$ -го агента в момент времени  $t \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ , и пусть  $\xi = [\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_n^T]^T$ . Кроме того, следя [2, 3], пусть  $R(\alpha)$  — матрица поворота  $\mathbb{R}^3$  с углом  $\alpha \in [-\pi, \pi]$  и осью вращения  $(0, 0, 1)^T$

(см. выражение (14)). Динамика каждого из агентов описывается следующим образом:

$$\ddot{\xi}_i = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

### Простейший случай.

Предлагается следующий закон управления

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\xi_2 + \xi_b}{2} - \xi_1 - a\dot{\xi}_1, \\ u_i &= \frac{\xi_{i+1} + \xi_{i-1}}{2} - \xi_i - a\dot{\xi}_i, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ u_n &= \frac{\xi_e + \xi_{n-1}}{2} - \xi_n - a\dot{\xi}_n. \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим через  $s = d/dt$  оператор дифференцирования. Тогда из (15) и (16) получим выражение, описывающее динамику всей системы из  $n$  агентов.

$$(s^2 + as)\xi = (A \otimes I_{3n})\xi + \hat{b}, \quad (17)$$

где матрица  $A$  имеет вид (4), вектор  $\hat{b} = [0.5\xi_b^T, 0, \dots, 0.5\xi_e^T]^T \in \mathbb{R}^{3n}$ .

С анализом устойчивости мультиагентных систем вида (17) связано важное понятие  $\Omega$ -области на комплексной плоскости и использующий это понятие критерий устойчивости, впервые сформулированный и доказанный Я.З. Щипкиным и Б.Т. Поляком в [6] и позднее независимо от них полученный в [7].

Приведем определения и конструкции из [6], необходимые для дальнейших рассуждений. Полином  $\phi(s) = s^2 + as$  является полиномом от оператора дифференцирования, действующим на каждую из компонент вектора  $\xi$ . Устойчивость системы дифференциальных уравнений вида  $\phi(s)\xi = A\xi$  имеет место, если полином  $G(s) = \det(A - \phi(s)I_n)$  гурвицев. Обозначим через  $D(p)$  характеристический полином матрицы  $A$ .

$$D(p) = d_np^n + \dots + d_1p + d_0 \quad (18)$$

Таким образом, отсутствие правых нулей у характеристической функции следующего вида

$$G(s) = D(\phi(s)) = d_n\phi^n(s) + \dots + d_1\phi + d_0 \quad (19)$$

будет означать гурвицевость полинома  $G(s)$ . Одним из путей проверки устойчивости полинома (19) является применение общих критериев, не использующих структуру  $G(s)$ . Однако такой подход может привести к оперированию полиномами высокой степени, а поэтому нежелателен. Упрощение анализа может быть достигнуто с использованием следующего понятия.

**Определение 1.**  $\Omega$ -областью функции  $\phi(s)$  называется множество точек  $\lambda$  на комплексной плоскости, для которых  $\phi(s) - \lambda$  не имеет правых нулей:

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi(s) - \lambda \neq 0, \operatorname{Re} s \geq 0\}$$

Также отметим, что в [7] функцию  $\phi(s)$  называют *обобщенной частотной переменной*, а функцию  $h(s) = 1/\phi(s)$  — *передаточной функцией агента*.

Как указано в [6], такое множество можно построить с использованием принципа  $D$ -разбиения. Кривая  $z = \phi(j\omega)$ ,  $-\infty < \omega < \infty$  разбивает комплексную плоскость на открытые связные области, не включающие точки самой кривой. Не содержащая правых нулей  $\phi(s) - \lambda$  область и является  $\Omega$ -областью. Процедура построения такой области упрощается для дробно-рациональных  $\phi(s)$ . Скажем, что кривая  $z = \phi(j\omega)$ ,  $-\infty < \omega < \infty$  окружает  $l$  раз точку  $\lambda$  ( $l$  — не обязательно целое), если приращение аргумента  $\phi(j\omega) - \lambda$  равно  $2\pi l$ ,  $-\infty < \omega < \infty$ . Как правило, для фиксированной области число окружений не зависит от выбора точки  $\lambda$  из этой области, следовательно можно говорить о числе окружений области.

В [6] формулируется и доказывается следующая лемма.

**Лемма 1.** Пусть  $\phi(s)$  — дробно-рациональная функция,  $\phi(s) = A(s)/B(s)$ , ( $A(s), B(s)$  — полиномы),  $\deg A = k$ ,  $\deg B = m$ ,  $B(j\omega) \neq 0$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$  и  $B(s)$  имеет  $l$  правых нулей. Тогда  $\Omega$ -область совпадает с областью, которую  $z = \phi(j\omega)$  окружает  $N$  раз. Здесь

- $N = l$ , если  $\phi(s)$  собственная ( $k \leq m$ ).
- $N = (k - m)/2 + l$ , если  $\phi(s)$  несобственная ( $k > m$ ).

Условие устойчивости формулируется следующим образом [6]

**Теорема 4.** Функция  $G(s) = D(\phi(s))$  устойчива тогда и только тогда, когда все корни полинома  $D(p)$  лежат в  $\Omega$ -области  $\phi(s)$ .

Применим вышеизложенные положения для исследования устойчивости и скорости сходимости системы (17). Справедлива следующая теорема.

**Т е о р е м а 5.** *Матрица системы (17) гурвицева, ее собственные числа определяются выражением*

$$\left\{ -0.5a \pm \sqrt{(0.5a)^2 - 2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}} \right\}_{k=1}^n,$$

*а оценка скорости сходимости при  $n \rightarrow \infty$  имеет вид  $\hat{s} \approx -\frac{\pi^2}{2an^2}$ .*

*Доказательство.* Для функции  $\phi(s) = s^2 + as, a > 0$ ,  $\Omega$ -область является внутренностью параболы  $\phi(j\omega) = -\omega^2 + j\omega$  на комплексной плоскости (рис. 1), из Леммы 1 следует, что при отрицательном  $a$  такой области не существует. Собственные числа матрицы  $A$ , имеющей вид (4), являются вещественными и отрицательными. Таким образом, собственные числа лежат в  $\Omega$ -области функции

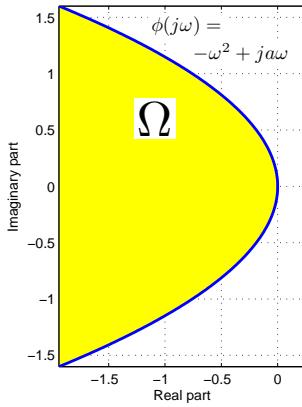


Рис. 1:  $\Omega$ -область, ограниченная  $\phi(j\omega) = -\omega^2 + j\omega, a > 0, |\omega| < \infty$ .

$\phi(s) = s^2 + as, a > 0$  и система (17) устойчива. Получим собственные числа матрицы системы (17) и исследуем скорость сходимости алгоритма. Очевидно, что собственные числа матрицы системы (17)

можно получить решением следующего семейства характеристических квадратных уравнений

$$s^2 + as - \lambda_k = 0, \quad a > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (20)$$

где  $\lambda_k$  —  $k$ -е собственное число матрицы  $A$ . В общем виде решение уравнения (20) имеет вид

$$s_{1,2} = -0.5a \pm \sqrt{(0.5a)^2 - 2\sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}}$$

Поскольку  $0 < \frac{k\pi}{2(n+1)} < \frac{\pi}{2}$  при любых  $n$  и  $k = 1, 2, \dots, n$ , то  $\max_k \left( -2\sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) = -2\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}$ , скорость сходимости будет определяться корнем с наибольшей вещественной частью  $\hat{s} = -0.5a + \sqrt{(0.5a)^2 - 2\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}}$ . Покажем, что  $\hat{s} \approx -\frac{\pi^2}{2an^2}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Очевидно, что  $-2\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} \approx -\frac{\pi^2}{2n^2}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Введем вспомогательную бесконечно малую величину  $x$ . Для нее легко получить следующее свойство эквивалентности:  $-c + \sqrt{c^2 + x} \approx \frac{x}{2c}$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $c$  — некоторая константа, поскольку  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-c + \sqrt{c^2 + x}}{x/2c} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c^2 + x - c^2}{(x/2c)(c + \sqrt{c^2 + x})} = 1$ . Отсюда следует оценка скорости сходимости.  $\square$

### Алгоритм второго порядка с поворотом.

Рассмотрим более общий алгоритм равномерного расположения на отрезке с модельями в виде двойных интеграторов (15), когда в описании динамики системы присутствует матрица поворота  $R(\alpha)$ . Выберем закон управления в следующем виде

$$\begin{aligned} u_1 &= R(\alpha) \left( \frac{\xi_2 + \xi_b}{2} - \xi_1 - a\dot{\xi}_1 \right), \\ u_i &= R(\alpha) \left( \frac{\xi_{i+1} + \xi_{i-1}}{2} - \xi_i - a\dot{\xi}_i \right), \quad i = 2, \dots, n-1 \\ u_n &= R(\alpha) \left( \frac{\xi_e + \xi_{n-1}}{2} - \xi_n - a\dot{\xi}_n \right). \end{aligned} \quad (21)$$

В таком случае система уравнений, описывающая динамику  $n$  агентов будет иметь вид

$$(s^2 + as)\xi = (A \otimes R(\alpha))\xi + b^*, \quad (22)$$

где матрицы  $A$  и  $R(\alpha)$  имеют вид (4) и (14) соответственно,  $b^* = (I_n \otimes R(\alpha)) [0.5\xi_b^T, 0, \dots, 0.5\xi_e^T]^T \in \mathbb{R}^{3n}$ .

Исследуем устойчивость данной системы по приведенному выше критерию критерию. Как было показано ранее, матрица  $A \otimes R(\alpha)$  имеет следующие  $3n$  собственных чисел

$$\begin{aligned}\lambda_k &= -2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}, \\ \lambda_k^+ &= \lambda_k e^{+j\alpha} = \left( -2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) e^{+j\alpha}, \\ \lambda_k^- &= \lambda_k e^{-j\alpha} = \left( -2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) e^{-j\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}$$

Справедлив следующий критерий устойчивости.

**Т е о р е м а 6.** Система (22) устойчива тогда и только тогда, когда

$$\frac{a^2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} > 2 \sin^2 \frac{\pi n}{2(n+1)}$$

*Доказательство.* Как уже было указано ранее (см. доказательство теоремы 5), для функции  $\phi(s) = s^2 + as, a > 0$ , область  $\Omega$  на комплексной плоскости представляет собой внутренность параболы. Таким образом, вещественные собственные числа  $\lambda_k, k = 1, 2, \dots, n$  при любом  $\alpha$  лежат в  $\Omega$ -области. При изменении  $\alpha$  на устойчивость системы будет влиять расположение  $2n$  собственных чисел  $\{\lambda_k e^{\pm j\alpha}\}_{k=1}^n$ , поэтому потеря устойчивости будет соответствовать переход  $\{\lambda_k e^{\pm j\alpha}\}_{k=1}^n$  за границу  $\Omega$ -области. Расположению собственных чисел  $\lambda_k e^{\pm j\alpha} = \lambda_k (\cos \alpha \pm j \sin \alpha)$  на границе  $\Omega$ -области  $\phi(j\omega) = -\omega^2 + j\omega, -\infty < \omega < \infty$  соответствует следующая система уравнений

$$\begin{cases} \lambda_k \cos \alpha = -\omega^2, \\ \lambda_k \sin \alpha = a\omega. \end{cases}$$

Решим эту систему относительно  $\lambda_k$ . Полученные два решения имеют вид:  $\lambda_k^{(1)} = 0, \lambda_k^{(2)} = -\frac{a^2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$ . Первое решение не имеет смысла в силу того, что  $\lambda_k = -2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \neq 0$  для  $\forall n$ . Нетрудно заметить, что при увеличении  $\alpha$  первым границу  $\Omega$ -области пересечет пара собственных чисел  $\lambda_n e^{\pm j\alpha}$  (см. рис.2). Отсюда следует критерий устойчивости.  $\square$

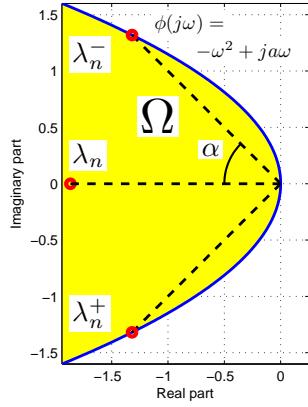


Рис. 2: Расположение собственных чисел  $\lambda_n, \lambda_n^\pm$  в  $\Omega$ -области.

#### 4. Примеры

Ниже приведены результаты анализа изученных в работе стратегий для трехмерного случая. Для большей наглядности была про-моделирована система из  $n = 3$  агентов.

#### 5. Заключение

В работе получены алгоритмы, обобщающие стратегию равномерного расположения агентов на отрезке, предложенную в [4]. Обобщение строилось следующим образом: предлагались алгоритмы первого порядка, учитывающие наличие связи между координатами каждого агента в виде матрицы поворота, затем был изу-чен алгоритм опосредованного изменения скорости через ускорение — алгоритм второго порядка, после чего изучена их комбинация, сочетающая как наличие матрицы поворота, так и второй поря-док алгоритма. Для первых двух алгоритмов были получены усло-вия устойчивости и оценки скорости сходимости, для более слож-ного обобщенного алгоритма — сформулирован и доказан критерий устойчивости.

Дальнейшее исследование предполагает получение оценки ско-рости сходимости для последнего случая, разработка иных алгорит-

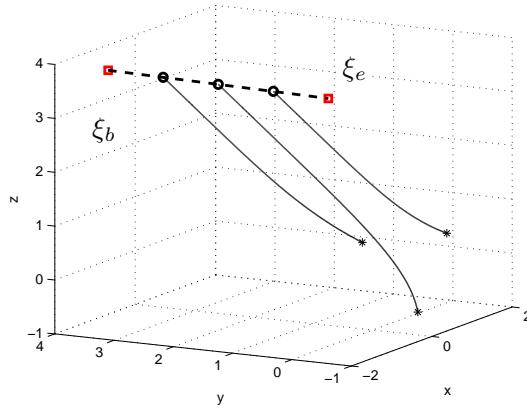


Рис. 3: Начальное положение и траектории агентов. Алгоритм первого порядка без поворота.

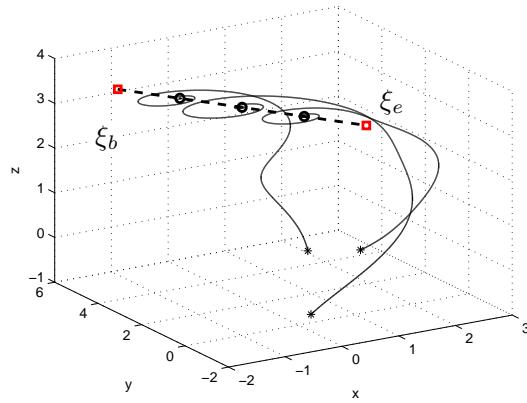


Рис. 4: Начальное положение и траектории агентов. Алгоритм первого порядка, угол  $\alpha = \pi/2.5$ .

мов второго порядка и их изучение, изучение других видов связи между координатами агента.

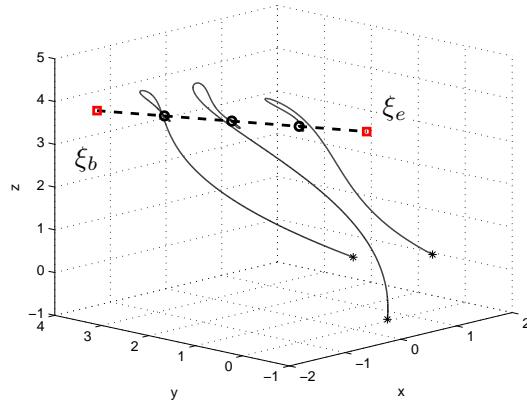


Рис. 5: Начальное положение и траектории агентов. Алгоритм второго порядка без поворота,  $a = 0.5$ .

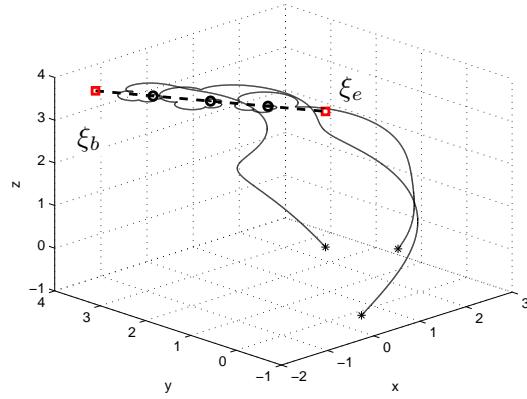


Рис. 6: Начальное положение и траектории агентов. Алгоритм второго порядка,  $a = 1.8$ ,  $\alpha = \pi/3$ .

## Список литературы

- [1] Ren W., Beard R.W., Atkins E.M. A survey of consensus problems

- in multi-agent coordination // Proc. American Control Conf. 2005. Vol. 3. P. 1859–1864.
- [2] *Pavone M., Frazzoli E.* Decentralized policies for geometric pattern formation and path coverage // ASME Journal on Dynamic Systems, Measurement, and Control. 2007. Vol. 129. No. 5. P. 633–643.
- [3] *Ramirez J.L., Pavone M., Frazzoli E. and Miller D.W.* Distributed Control of Spacecraft Formations via Cyclic Pursuit: Theory and Experiments // AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2010. Vol. 33. No. 5. P. 1655–1669.
- [4] *Петрикевич Я.И.* Линейные алгоритмы управления геометрическим расположением объектов в многоагентной системе // Управление большими системами. Спец. выпуск 30.1 "Сетевые модели в управлении". — М.: ИПУ РАН. 2010. С. 665–680.
- [5] *Щербаков П.С.* Управление формациями: схема Ван Loуна и другие алгоритмы // Управление большими системами. Спец. выпуск 30.1 "Сетевые модели в управлении". — М.: ИПУ РАН. 2010. С. 681–696.
- [6] *Поляк Б.Т., Чипкин Я.З.* Устойчивость и робастная устойчивость однотипных систем // Автоматика и телемеханика. 1996. № 11. С. 91–104.
- [7] *Hara S., Hayakawa T., Sugata H.* Stability analysis of linear systems with generalized frequency variables and its applications to formation control // Proc. Decision and Control Conf. 2007. P. 1459–1466.
- [8] *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука. 1984. 320 с.