Нестационарная оптимизация с шагом предсказания в задаче отслеживания объекта при помощи двух камер[1]

Д. С. Кривоконь,
А. Т. Вахитов, к. ф.-м. н.
Санкт-Петербургский государственный университет
dmitry00@gmail.com, alexander.vakhitov@gmail.com

В статье приведен пример использования метода рандомизированной нестационарной оптимизации с шагом предсказания в задаче отслеживания положения объекта на основе зашумленных наблюдений, получаемых с двух откалиброванных камер. Результаты тестирования показывают преимущество нового подхода в сравнении с ранее предложенным методом рандомизированной оптимизации. Статья содержит как теоретическое обоснование, так и результаты моделирования.

Ключевые слова: нестационарная оптимизация, отслеживание объекта, стерео-камера.

1. Введение

Задача нестационарной оптимизации возникает во множестве приложений из области теорий управления, когда искомое оптимальное значение управляемого параметра изменяется с течением времени (дрейфует). Пусть имеется функционал $F(x, w, n)$, зависящий от аргумента оптимизации x, неопределенности w и дискретного момента времени n. Используя зашумленные аддитивной помехой v_n наблюдения $y_n = F(x_n, w_n, n) + v_n$, необходимо построить последовательность оценок $\hat{\theta}_n$, которые будут близки к истинным минимумам θ_n функционалов среднего риска $f(x, n) = E_w F(x, w, n)$, где E_w — условное математическое ожидание.

Нестационарная оптимизация является обобщением классической задачи стохастической оптимизации [1], в формулировку которой добавляется возможность изменения функционалов F и f в дискретные моменты времени. Робинс и Монро [2], а позже Кифер и Вольфовиц [3], предложили и проанализировали сходимость алгоритмов стохастической аппроксимации, которые могут быть использованы в задаче оптимизации функционала на основе зашумленных наблюдений. Фактически, эти алгоритмы являлись разно-

видностями градиентного спуска. О.Н. Граничиным, Б.Т. Поляком, А.Б. Цыбаковым и Дж. Спаллом были предложены алгоритмы нового типа — рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации с одновременными пробными возмущениями [4–7], имеющие различные приложения в прикладных задачах [8]. В [5] было показано, что в случае аддитивной помехи при помощи рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации может быть получен асимптотически оптимальный порядок сходимости.

Нестационарная оптимизация на основе градиентых алгоритмов и алгоритмов типа метода Ньютона была изучена в [9]. Подход к анализу таких алгоритмов на основе обыкновенных дифференциальных уравнений был использован в [10], однако, используя его, могут быть получены только асимптотические свойства алгоритмов. В предыдущих работах со схожей с используемой в этой статье постановкой задачи было более общее предположение о нестационарности, а именно, дрейф минимума в среднем ограничен [11, 12].

Зачастую характер дрейфа минимума является известным. К примеру, во множестве приложений теории управления предполагается линейный закон изменения искомого параметра, т. е. значение в данных момент времени получается при помощи применения некоторого линейного оператора к значению состоянию системы на предыдущем шаге. В этой работе рассматривается именно этот случай. Далее будет показано, что при такой постановке задачи могут быть получены теоретические границы ошибки аналогичные представленным в [11]. Сравнение границ ошибок показывает, что использование дополнительной информации о системе приводит к более точным оценкам.

Для решения задач с описанной постановкой задачи часто используется расширенный фильтр Калмана (РФК). Задача оптимальной фильтрации, которая может решаться при помощи РФК может быть описана как [13, 14]:

$$E|y_n(\theta_n) - \hat{y}_n|^2 \to \min,$$

где y_n — зашумленные наблюдения, θ_n — состояние системы и $\hat{y}_n$ — оценка выхода системы.

Примером динамической системы с линейным законом изменения состояния и нелинейными измерения является движущийся с постоянной скоростью объект, наблюдаемый двумя камерами. В таком случае состояние системы будет представлено скоростью и по-

ложением объекта, а измерения — проекциями положения объекта на плоскости откалиброванной пары камер (т. е. такой пары камер, для которой известно расположение одной относительно другой [15]).

Таким образом, задача отслеживания объекта может быть рассмотрена как задача оценки состояния динамической системы. Подход с использованием положения и скорости объекта в качестве состояния системы является обычной практикой, тогда как выбор представления измерений может отличаться. Так в работе [16] в качестве измерения рассматривалось восстановленное при помощи методов триангуляции положение объекта. В таком случае измерение линейно зависит от состояния системы и для получения оценок может быть применен классический вариант фильтра Калмана. Основной проблемой является то, что триангулированное положение объекта будет зашумлено некоторой неаддитивной помехой (т. к. процесс триангуляции нелинеен). В статьях [17, 18] был предложен иной подход , при котором в качестве измерений используются проекции положения объекта на каждую камеру. Такие измерения нелинейно зависят от состояния системы, но не имеют проблем с характером шума, описанных выше.

2. Постановка задачи

2.1. Общий случай

Предположим что имеется динамическая система изменяющаяся с течением дискретного времени $n \in \mathbb{N}$ с состоянием $\theta_n \in \Theta_n \subset \mathbb{R}^q$, множество Θ_n компактно. Пусть состояние системы изменяется с течением времени следующим образом:

$$\theta_n = A\theta_{n-1} + \xi_n,$$

где A — обратимый линейный оператор. Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая выпуклая функция $f(x, n)$ для которой θ_n является единственной (в Θ_n) точкой минимума.

Пусть $F(x, w, n)$ некоторая функция такая что:

$$f(x, n) = E_w F(x, w, n),$$

где $w \in \mathbb{R}^p$ — некоторый случайный вектор и E_w — математическое ожидание взятое относительно w. Необходимо отслеживать θ_n, ис-

пользуя наблюдения y_n значения $F(x, w, n)$ сделанных в произвольных точках x_n:

$$y_n = F(x_n, w_n, n).$$

Понятие отслеживать определяется следующим образом:

Определение 1. *Последовательность точек θ_n отслеживается последовательностью $\hat{\theta}_n$, если существуют $L > 0$ для которой существует $N > 0$ такое что для любых $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ выполнено:*

$$E\|\hat{\theta}_n - \theta_n\|^2 \leq L.$$

Далее предположим, что следующие условия выполнены:

(A) Пусть функция $f_A(x, n) = f(Ax, n)$ строго выпукла в ее точке минимума относительно x:

$$\langle A^T \nabla f(Ax, n), x - \theta_{n-1} - A^{-1}\xi_n \rangle \geq \mu \|x - \theta_{n-1} - A^{-1}\xi_n\|^2,$$

где $\mu > 0$.

(B) Градиент $\nabla F(\cdot, w, n)$ — Липшецев $\forall n, \forall w$ с константой $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$:
$\|\nabla F(x, w, n) - \nabla F(y, w, n)\| \leq M\|x - y\|$.

(C) Локальное свойство Лебега для функции $\nabla F(x, w, n)$: $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $\exists$ в окрестности U_x такой что $\forall x' \in U_x$ $\|\nabla F(x, w, n)\| < \Phi_{x,n}(w)$ где $\Phi_{x,n}(w) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ интегрируемо по w: $\int_{\mathbb{R}^p} \Phi_x(w) dw < \infty$

(D) Ограниченность F и ∇F в точке минимума константами $F_1 > 0$ и $F_2 > 0$: $E\|F(\theta_n, w_n, n)\| \leq F_1$, $E\|\nabla F(\theta_n, w_n, n)\|^2 \leq F_2$.

Обозначим $E_n\{\cdot\}$ — математическое ожидание обусловленное случайными величинами $\theta_1, \ldots, \theta_n, \hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n$, а $\bar{E}_n\{\cdot\}$ — обусловленное $\theta_1, \ldots, \theta_n$, θ_{n+1}, θ_{n+2}, $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n$.

(E) Дрейф удовлетворяет условиям

а) при случайной природе:

$$\theta_{n-1} - E_{n-1}\theta_n \leq A_0,$$

$$E_{n-1}\|\theta_n - \theta_{n-1}\| \leq A_1,$$

$$E_{n-1}\|\theta_n - \theta_{n-1}\|^2 \leq A_2,$$

$$E_{n-2}(\theta_n - \theta_{n-1})^T(\theta_{n-1} - \theta_{n-2}) \leq A_3,$$

а) при неслучайной природе:

$$\|\theta_{n-1} - E_{n-1}\theta_n\| \leq A_0,$$

$$\|\theta_n - \theta_{n-1}\| \leq A_1 = A_2 = A_3.$$

(F) Ограничение на изменение значений функции в произвольной точке x с константами $C_i^j \in \mathbb{R}$ где $i = 1, 2,\ j = 0, 1, 2$:

$$E_n\{F(x, w_n, n) - F(x, w_{n-1}, n-1)\} \leq C_1^1\|x - \theta_{n-1}\| + C_1^0,$$

$$E_n(F(x, w_n, n) - F(x, w_{n-1}, n-1))^2 \leq$$
$$C_2^2\|x - \theta_{n-1}\|^2 + C_2^1\|x - \theta_{n-1}\| + C_2^0.$$

2.2. Задача отслеживания при помощи двух камер

Рассмотрим движущуюся точку $X_k \in \mathbb{R}^3$. Предположим что движение точки характеризуется ее скоростью $V_k \in \mathbb{R}^3$ и некоторой помехой ξ_k, мы можем построить динамическую систему с состоянием $\theta_k = (X_k, V_k)$ и уравнением перехода:

$$\theta_k = A\theta_{k-1} + \xi_k,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь предположим, что имеется пара камер с известными проективными матрицами P_1 и P_2. В момент времени k вычислим проекции точки X_k на каждую камеру, используя уравнения:

$$\lambda_{1,k} * (x_{1,k}^1, x_{1,k}^2, 1)^T = P_1(X_k^{(1)}, X_k^{(2)}, X_k^{(3)}, 1)^T$$

$$\lambda_{2,k} * (x_{2,k}^1, x_{2,k}^2, 1)^T = P_2(X_k^{(1)}, X_k^{(2)}, X_k^{(3)}, 1)^T,$$

где $\lambda_{1,k}$, $\lambda_{2,k}$ — положительные числа, а $(x_{1,k}^1, x_{1,k}^2)^T$ и $(x_{2,k}^1, x_{2,k}^2)^T$ представляют проекции точки на плоскости соответствующих камер. Объединив обе проекции в один вектор, можем рассмотреть следующую модель наблюдения:

$$z_k = h(\theta_k) + w_k,\ h(\theta_k) = (x_{1,k}^1, x_{1,k}^2, x_{2,k}^1, x_{2,k}^2)^{\mathrm{T}}.$$

Минимизации ошибки измерения с таким выбором функции $h(\theta_k)$ эквивалентна минимизации геометрической ошибки перепроектирования [15]. В [19] было показано, что данная функция не имеет глобальной выпуклости в случае двух камер, что приводит к сложностям поиска ее минимума при помощи локальных методов. В нашем моделировании мы использовали процедуру проектирования градиента для ограничения области поиска минимума к окрестности, где выпуклость сохраняется.

3. Алгоритм 1

Пусть $\{\Delta_n\}$ — последовательность возмущений представляющая собой набор независимых Бернуллиевских случайных векторов с компонентами принимающими значения ± 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Пусть вектор $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^q$ — начальное приближение. Будем строить последовательность оценок состояния системы $\{\theta_n\}$, используя следующую процедуру:

$$\hat{\theta}_n = A(\hat{\theta}_{n-1} - \alpha g_n(\hat{\theta}_{n-1}, \beta\Delta_n)),$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент величины шага, $g_n(x, \beta\Delta_n)$ — аппроксимация $\nabla_x(f(Ax, n)) = \nabla_x f(x, n)^T A$ определенная ниже, β — рабочий шаг, определяющий точность приближения градиента. В качестве g_n можно использовать одну из двух аппроксимаций:

$$g_n(x, \beta, \Delta_n) = \frac{1}{2\beta}\Delta_n(F(A(x + \beta\Delta_n)) - F(A(x - \beta\Delta_n)))$$

или

$$g_n(x, \beta, \Delta_n) = \frac{1}{\beta}\Delta_n(F(A(x + \beta\Delta_n)) + v_n^+).$$

3.1. Теоретический анализ

Теорема 1. *Пусть система и алгоритм определены как выше, условия* **A-F** *выполнены. Тогда для некоторых α, β последовательность θ_n отслеживается последовательностью $\hat{\theta}_n$ с некоторой константой L.*

Доказательство.

$$E_{\Delta,w}\|\theta_n - \hat{\theta}_n\|^2 = E_{\Delta,w}\|A(\hat{\theta}_{n-1} - \alpha g_n(\hat{\theta}_{n-1}, \beta, \Delta_n)) - \theta_n\|^2 \leq$$

$$\leq E_{\Delta,w}\|A\|^2\|\hat{\theta}_{n-1} - \alpha g_n(\hat{\theta}_{n-1}, \beta, \Delta_n) - \theta_{n-1} - A^{-1}\xi_n\|^2 =$$

$$= E_{\Delta,w}\|A\|^2(\|\hat{\theta}_{n-1} - \theta_{n-1} - A^{-1}\xi_n\|^2 -$$

$$-2\langle \alpha g_n(\hat{\theta}_{n-1}, \beta, \Delta_n), \hat{\theta}_{n-1} - \theta_{n-1} - A^{-1}\xi_n\rangle +$$

$$+\|\alpha g_n(\hat{\theta}_{n-1}, \beta, \Delta_n)\|^2) =$$

$$= \|A\|^2(\|\hat{\theta}_{n-1} - \theta_{n-1} - A^{-1}\xi_n\|^2(1 - 2\alpha\mu) + \alpha^2 E_{\Delta,w}\|g_n\|^2 +$$

$$+C\beta\|\hat{\theta}_{n-1} - \theta_{n-1} - A^{-1}\xi_n\|).$$

Используя неравенство

$$C\beta\|\hat{\theta}_{n-1} - \theta_{n-1} - A^{-1}\xi_n\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}(C^2\beta^2\epsilon^2 + \epsilon^{-2}\|\hat{\theta}_{n-1} - \theta_{n-1} - A^{-1}\xi_n\|^2),$$

получаем

$$E_{\Delta,w}\|\theta_n - \hat{\theta}_n\|^2 \leq aE_{\Delta,w}\|\theta_{n-1} - \hat{\theta}_{n-1}\|^2 + b$$

для некоторого $b > 0$ и $a \in (0, 1)$ с подходящим выбором α и β. Тогда

$$E_{\Delta,w}\|\theta_n - \hat{\theta}_n\|^2 \leq a^n\|\theta_0 - \hat{\theta}_0\|^2 + (1 - a^n)\frac{b}{1 - a}$$

и

$$L = \frac{b}{1 - a}.$$

□

4. Моделирование

В моделировании использовался Алгоритм 1 вместе с шагом проектирования упомянутым ранее для решение задачи отслеживания положения 3Д точки. Оптимизируемая функция дважды дифференцируема почти всюду в области ее определения, следовательно в открытой окрестности точки минимума она всегда строго выпукла. В нашем моделировании мы рассматривали пару камер с матрицами:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

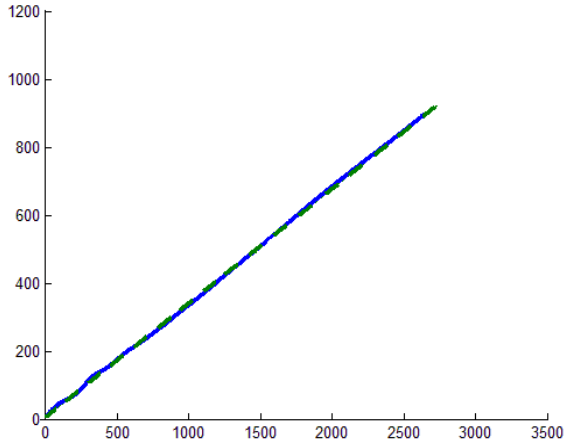

Рис. 1: Примеры траекторий. Пунктирная линия — искомая траектория. Сплошная линия — оценка. $\sigma^{\xi_0} = 0.5$, $\sigma^{\xi_k} = 0$, $\sigma^w = 0.01$, $\alpha = 30$, $\beta = 8$, $\gamma = 0.01$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 5.0000 \\ 0 & 0.7071 & -0.7071 & 0 \\ 0 & 0.7071 & 0.7071 & 0 \end{pmatrix}.$$

Были выбраны: начальное приближение состояния системы — $\theta_0 = (2.5, 1.5, 5.5, 3, 3, 1)^T$, помехи — гауссовские случайные величины с математическим ожиданием равным нулю. Пусть $\sigma^{\xi_0}, \sigma^{\xi_k}, \sigma^w$ — дисперсии шума в начальном приближении, в процессе изменения состояния и в наблюдении соответственно, γ — граница для нормы градиента в алгоритме. На рис. 1, 2 изображены примеры получаемых алгоритмом траекторий вместе с искомыми траекториями движения объекта. Видно, что алгоритм успешно отслеживает положение движущейся точки, однако, при наличии ошибки в процессе изменения состояния, точность оценок падает, но они все же не покидают область настоящего положения точки. На рис. 3, 4 изображены графики ошибки измерения, усредненные по 2000 запускам алгоритма. В каждом случае ошибка измерения снижается на первых итерациях (алгоритм подавляет ошибку в начальном измерении) и остается ограниченной большую часть времени.

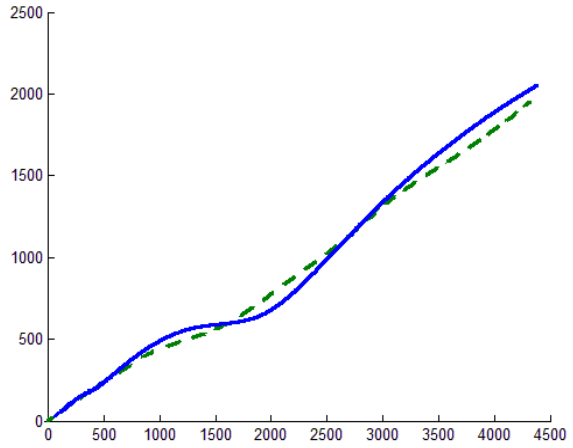

Рис. 2: Примеры траекторий. Пунктирная линия — искомая траектория. Сплошная линия — оценка. $\sigma^{\xi_0} = 0.5$, $\sigma^{\xi_k} = 0.05$, $\sigma^{w} = 0.01$, $\alpha = 30$, $\beta = 8$, $\gamma = 0.01$.

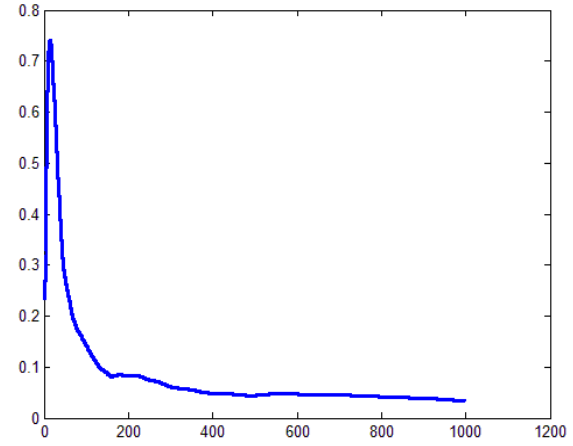

Рис. 3: Усредненная ошибка измерения. $\sigma^{\xi_0} = 0.5$, $\sigma^{\xi_k} = 0$, $\sigma^{w} = 0.01$, $\alpha = 30$, $\beta = 8$, $\gamma = 0.01$.

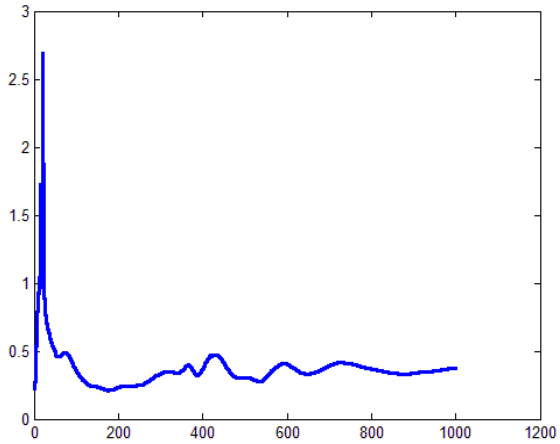

Рис. 4: Усредненная ошибка измерения $\sigma^{\xi_0} = 0.5$, $\sigma^{\xi_k} = 0.05$, $\sigma^{w} = 0.01$, $\alpha = 30$, $\beta = 8$, $\gamma = 0.01$.

Стоит заметить, что использование РФК в аналогичных условиях приводит к более точным оценкам, но т. к. фильтр Калмана содержит достаточно сложные операции (вычисление градиента векторной функции, вычисление обратной матрицы), рандомизированный алгоритм работает значительно быстрее (табл. 1).

Таблица 1. Время фильтрации траектории определенной длины.

Количество итераций	РФК	Алгоритм 1
1000	0,62 с	0,03 с
3000	1,90 с	0,12 с
5000	3,21 с	0,26 с

Кроме того, для инициализации процедуры РФК необходимо знать матрицы ковариаций шумов в состоянии системы, в начальном приближении и в наблюдениях, информация о которых редко доступна, особенно в задачах из области компьютерного зрения. Эти преимущества позволяют использовать Алгоритм 1 в более широком спектре задач, где необходимо получение оценок состояния системы с достаточно быстрой скоростью и без заранее известной информации о имеющихся помехах.

5. Заключение

В статье был предложен алгоритм отслеживания линейно дрейфующего минимума. Было показано, что алгоритм успешно справляется с задачей отслеживания объекта на основе зашумленных наблюдений, получаемых с двух откалиброванных камер. В дальнейшем планируется более глубокое изучение свойств алгоритма: анализ дисперсии оценок, численное сравнение теоретических оценок и экспериментальных, тестирование алгоритма на реальных данных.

Список литературы

[1] *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. — М.: Наука. 1983.

[2] *Robbins H., Monro S.* A stochastic approximation method // Annals of Mathematical Statistics. 1951. Vol. 22. No. 3. P. 400–407.

[3] *Kiefer J., Wolfowitz J.* Stochastic estimation of the maximum of a regression function. // Annals of Mathematical Statistics. 1952. Vol. 23. No. 3. P. 462–466.

[4] *Граничин О. Н.* Об одной стохастической рекуррентной процедуре при зависимых помехах в наблюдении, использующей на входе пробные возмущения // Вестник Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1989. Вып.1(4). С. 19–21.

[5] *Поляк Б. Т., Цыбаков А. Б.* Оптимальные порядки точности поисковых алгоритмов стохастической аппроксимации // Проблемы передачи информации. 1990. № 2. С. 45–53.

[6] *Граничин О. Н.* Процедура стохастической аппроксимации с возмущением на входе // Автоматика и телемеханика. 1992. №2. С. 97–104.

[7] *Spall J.C.* Multivariate stochastic aproximation using a simultaneous perturbation gradient aproximation // IEEE Trans. Automat. Contr. 1992. Vol. 37. No. 3. P. 332–341.

[8] *Граничин О.Н.* Стохастическая оптимизация и системное программирование // Стохастическая оптимизация в информатике. Т. 6. 2010. С. 3–44.

[9] *Попков А. Ю.* Градиентные методы для нестационарных задач безусловной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2005. № 6. С. 883–891.

[10] *Kushner H.J., Yin G.G.* Stochastic Approximation Algorithms and Applications. — New York: Springer–Verlag. 2002.

[11] *Granichin O., Gurevich L., Vakhitov A.* Discrete-time minimum tracking based on stochastic approximation algorithm with randomized differences // Proc. of the Combined 48th IEEE Conf. on Decision and Control and 28th Chinese Control Conf. Shanghai. P.R. China. 2009. P. 5763–5767.

[12] *Gurevich L., Vakhitov A.* SPSA Algorithm for Tracking // Proc. 12th Int. Student Olympiad on Automatic Control. 2008. P. 52–57.

[13] *Фомин В.Н.* Методы управления линейными дискретными объектами. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1985.

[14] *Матвеев А.С., Якубович В.А.* Абстрактная теория оптимального управления. — СПбГУ. 1994.

[15] *Zisserman A., Hartley R.* Multiple View Geometry in Computer Vision. — Cambridge University Press. 2004.

[16] *Mikic I., Santini S., Jain R.* Video processing and integration from multiple cameras // Proc. of the Image Understanding Workshop. Morgan-Kaufman. 1998. P. 183–187.

[17] *She S.* Navigation System for Autonomous Mobile Robot — a Simultaneous Localization and Mapping Approach. [online] www.ietymec.org/papers/U16.pdf

[18] *Sibley G., Sukhatme G., Matthies L.* The iterated sigma point kalman filter with applications to long range stereo // Proc. of Robotics: Science and Systems. 2006.

[19] *Kahl F., Hartley R.* Multiple-view geometry under the L1-Norm. // IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2008. Vol. 30. No. 9.