Рандомизированные алгоритмы вычисления инвариантных нулей больших динамических систем[1]

М. Ш. Мисриханов, д. т. н., *В. Н. Рябченко,* д. т. н.
Магистральные Электрические Сети Центра, Москва
(mms, rvn)@mes-centra.ru

Описывается алгоритм решения задачи определения инвариантных нулей большой динамической системы с многими входами и многими выходами (MIMO). Задача определения инвариантных нулей путем рандомизированного квадрирования исходной MIMO-системы сводится к стандартной задаче на собственные значения числовых матриц. Практические приложения лежат в области больших электроэнергетических систем.

Ключевые слова: MIMO-система, инвариантные нули, квадрирование системы, задача на собственные значения, большая электроэнергетическая система.

1. Введение

Рассмотрим линейную MIMO-систему (Multi Input Multi Output System) с представлением в пространстве состояний

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x_0, \\ &y(t) = Cx(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния ($\mathbb{R}$ – множество действительных чисел); $u(t) \in \mathbb{R}^r$ – вектор входа; $y(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор выхода; $A,\ B,\ C$ – числовые матрицы; $r < n,\ \ m < n$. Введем определение.

Определение 1 ([1]). *Комплексная частота $\lambda = \alpha^*$, при которой ранг по столбцам матрицы*

$$\left(\begin{array}{c|c} A - \alpha^* \mathbf{I}_n & B \\ \hline C & \mathbf{0}_{m\times r} \end{array}\right) \tag{2}$$

уменьшается называется инвариантным нулем.

[1]©М. Ш. Мисриханов, В. Н. Рябченко, 2008

В (2) и далее $\mathbf{I}_n$ – единичная матрица порядка n; $\mathbf{0}_{m\times r}$ – нулевая матрица размера $m \times r$.

Инвариантные нули определяются из условия [2]

$$\left(\begin{array}{c|c} A-\alpha^*\mathbf{I}_n & B \\ \hline C & \mathbf{0}_{m\times r} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x_0 \\ \hline u_0 \end{array}\right) = \mathbf{0} \tag{3}$$

полного “блокирования” передачи сигнала как собственной, так и вынужденной составляющей движения MIMO-системы, т. е. при $\lambda = \alpha^*$существуют такие векторы u_0 и x_0, что реакция выхода системы равна нулю. Таким образом, задача определения инвариантных нулей MIMO-системы (1) сводится к обобщенной задаче на собственные значения в общем случае прямоугольного пучка матриц

$$\left(\begin{array}{c|c} A-\lambda\mathbf{I}_n & B \\ \hline C & \mathbf{0}_{m\times r} \end{array}\right), \tag{4}$$

в котором $\lambda \in \mathbb{C}$ – комплексная переменная.

Поиск инвариантных нулей для больших MIMO-систем ($n >> 1$) наталкивается на серьезные трудности вычислительного характера. Ключевую роль здесь играют ошибки вычисления [2]. Поэтому необходимы новые подходы к построению вычислительных алгоритмов.

2. Рандомизированное квадрирование MIMO-системы

Практический способ вычисления инвариантных нулей MIMO-системы (1) связан с т. н. *квадрированием* системы (“squaring up”).

Пусть $m > r$ (число выходов системы больше числа входов). Введем в рассмотрение MIMO-систему

$$\begin{array}{ll} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0, \\ y^*(t) = T_C Cx(t), & \end{array} \tag{5}$$

где $T_C \in \mathbb{R}^{r\times m}$ – матрица полного ранга по строкам.

Справедливо утверждение.

Л е м м а 1 ([1,3]). *Множество инвариантных нулей MIMO-системы* (1) *всегда является подмножеством множества нулей квадрированной MIMO-системы* (5)*, но не наоборот.*

Пусть далее $r > m$ (число входов системы больше числа выходов). Рассмотрим MIMO-систему

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + BT_B u^*(t), \qquad x(0) = x_0, \\ &y(t) = Cx(t), \end{aligned} \tag{6}$$

где $T_B \in \mathbb{R}^{r\times m}$ – матрица полного ранга по столбцам.

Справедливо двойственное лемме 1 утверждение.

Л е м м а 2 ([1]). *Множество инвариантных нулей MIMO-системы* (1) *всегда является подмножеством множества нулей квадрированной MIMO-системы* (6)*, но не наоборот.*

Из Лемм 1 и 2 следует, что операция квадрирования в общем случае вводит в систему новые нули. Это необходимо учитывать при выборе матриц T_C и T_B. В качестве одного из способа решения задачи выбора матриц T_C и T_B является предлагаемая авторами процедура рандомизации.

Введем в рассмотрение оператор рандомизации $\mathrm{Rand}_{r\times m}$, генерирующий матрицы полного ранга размера $r \times m$. Пусть также $\mathrm{Orth}_{r\times m}$ – оператор ортогонализации матрицы полного ранга размера $r \times m$. Тогда

$$\mathrm{Orth}_{r\times m}\left(\mathrm{Rand}_{r\times m}\right) \tag{7}$$

– композиция операторов, результатом действия которой является рандомизированная ортогональная матрица полного ранга.

Обозначим Ω – множество инвариантных нулей MIMO-системы (1), Ω^* – множество инвариантных нулей квадрированной MIMO-системы. Для определенности далее будем считать, что $m > r$ и квадрированная система имеет вид (5).

Рассмотрим систему из рандомизированных ортогональных матриц

$$T_C^{(i)} = \mathrm{Orth}_{r\times m}\left(\mathrm{Rand}_{r\times m}\right), \tag{8}$$

где $i = 1, 2, \ldots, k$ и k – "достаточно" велико. Пусть Ω_i^* – множества инвариантных нулей соответствующих квадрированных MIMO-систем. По аналогии с [4] можно доказать[2], что в этом выполняется условие

$$\bigcap_{i}^{k} \Omega_i^* = \Omega. \tag{9}$$

3. Инвариантные нули квадрированной MIMO-системы

Рассмотрим обобщенную задачу на (*конечные* [8, 9]) собственные значения для квадратного пучка матриц (4):

$$\left(\begin{array}{c|c} A - \lambda \mathbf{I}_n & B \\ \hline \tilde{C} & \mathbf{0}_{m\times m} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{X} \\ \hline \mathbf{Y} \end{array}\right) = \mathbf{0}, \tag{10}$$

где матрицы $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ имеют полные ранги по столбцам и строкам, соответственно. При этом,

$$\tilde{C} = T_C C, \quad T_C = \mathrm{Orth}_{r\times m}\left(\mathrm{Rand}_{r\times m}\right). \tag{11}$$

Проанализируем сначала один из практически значимых случаев, когда матрица $\tilde{C}B$ обратима. Этот случай удовлетворяет необходимому условию стабилизируемости MIMO-системы [7].

Справедлива теорема.

Теорема 1. *Множество конечных собственных значений обобщенного пучка матриц*

$$\left(\begin{array}{c|c} A - \lambda \mathbf{I}_n & B \\ \hline \tilde{C} & \mathbf{0}_{m\times m} \end{array}\right)$$

[2] В [4] в случае "вырождения" наблюдений (при их явном недостатке) обоснована применимость рандомизации с целью "обогащения" наблюдений и последующего эффективного решения исходной задачи. Хотя результаты [4] и не применимы "на прямую" в рассматриваемом случае, так как точные утверждения сформулированы в [4] для других задач, но "идеологическая" связь прослеживается (прим. ред.).

при обратимой матрице $\tilde{C}B$ совпадает с множеством собственных значений числовой матрицы

$$\bar{A}=\tilde{C}_R^{\perp\mathrm{T}}\left(\mathbf{I}_n - B\left(\tilde{C}B\right)^{-1}\tilde{C}\right)A\tilde{C}_R^{\perp}, \tag{12}$$

в которой $\tilde{C}_R^{\perp} \in \mathbb{R}^{n\times(n-m)}$ – правый делитель нуля максимального ранга матрицы $\tilde{C}$;

Доказательство. Раскроем билинейное уравнение (10) с точностью до выделенных блоков:

$$\begin{cases} (A-\lambda\mathbf{I}_n)\,X + BY = \mathbf{0}, \\ \tilde{C}\mathbf{X} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{13}$$

Если система уравнений (13) совместна, тогда из уравнения

$$\tilde{C}X = \mathbf{0} \tag{14}$$

следует, что [5]

$$X = \tilde{C}_R^{\perp}\mathbf{x}, \tag{15}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{n-m}$. При этом матрица

$$\left(\frac{\tilde{C}_R^{\perp\mathrm{T}}}{\tilde{C}}\right) \tag{16}$$

– обратима.

Предположим, что уравнение (14) справедливо, тогда первое уравнение (13) можно переписать с учетом (15) в виде

$$(A-\lambda\mathbf{I}_n)\,\tilde{C}_R^{\perp}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{Y} = \mathbf{0}. \tag{17}$$

Используя (16), выполним невырожденное преобразование уравнения (17)

$$\left(\frac{\tilde{C}_R^{\perp\mathrm{T}}}{\tilde{C}}\right)\left((A-\lambda\mathbf{I}_n)\,\tilde{C}_R^{\perp}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{Y}\right) = \mathbf{0}, \tag{18}$$

где $\tilde{C}_R^{\perp\mathrm{T}}\tilde{C}_R^{\perp} = \mathbf{I}_{n-m}$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\tilde{C}_R^{\perp\mathrm{T}}A\tilde{C}_R^{\perp} - \lambda\mathbf{I}_{n-m}\right)\mathbf{x} + \tilde{C}_R^{\perp\mathrm{T}}B\mathbf{Y} = \mathbf{0}, \\ \tilde{C}A\tilde{C}_R^{\perp}\mathbf{x} + \tilde{C}B\mathbf{Y} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{19}$$

Пусть $\tilde{C}B \neq \mathbf{0}_{m\times r}$[3], тогда решение второго уравнения (19) можно записать в виде

$$Y = -\left(\tilde{C}B\right)^{+}\tilde{C}A\tilde{C}_R^{\perp}\mathbf{x} + \left(\tilde{C}B\right)_R^{\perp}\varphi, \tag{20}$$

где $\left(\tilde{C}B\right)^{+}$ – псевдообратная матрица; φ – некоторый вектор подходящей размерности.

Поскольку предполагается, что матрица $\tilde{C}B$ обратима, то можно принять $\left(\tilde{C}B\right)_R^{\perp} = \mathbf{0}$ [5]. С учетом обратимости $\tilde{C}B$ формула (20) принимает вид

$$Y = -\left(\tilde{C}B\right)^{-1}\tilde{C}A\tilde{C}_R^{\perp}\mathbf{x}. \tag{21}$$

Подставим (21) в первое уравнение (19). В результате получим

$$\left(\tilde{C}_R^{\perp\mathrm{T}}A\tilde{C}_R^{\perp} - \lambda\mathbf{I}_{n-m}\right)\mathbf{x} - \tilde{C}_R^{\perp\mathrm{T}}B\left(\tilde{C}B\right)^{-1}\tilde{C}A\tilde{C}_R^{\perp}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

или в сгруппированном виде

$$\left(\tilde{C}_R^{\perp\mathrm{T}}A\tilde{C}_R^{\perp} - \tilde{C}_R^{\perp\mathrm{T}}B\left(\tilde{C}B\right)^{-1}\tilde{C}A\tilde{C}_R^{\perp} - \lambda\mathbf{I}_{n-m}\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{22}$$

Приводя подобные в (22), получим уравнение

$$\left(\tilde{C}_R^{\perp\mathrm{T}}\left(\mathbf{I}_n - B\left(\tilde{C}B\right)^{-1}C\right)A\tilde{C}_R^{\perp} - \lambda\mathbf{I}_{n-m}\right)\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{23}$$

и соответственно стандартную задачу на собственные значения

$$\left(\bar{A} - \lambda\mathbf{I}_{n-m}\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{24}$$

где $\bar{A}$ из (12). *Доказательство закончено.*

По аналогии с доказательством Теоремы 1 доказывается двойственное утверждение.

[3] В противном случае инвариантные нули у MIMO-системы отсутствуют [6].

Т е о р е м а 2. *Множество конечных собственных значений обобщенного пучка матриц*

$$\left(\begin{array}{c|c} A-\lambda\mathbf{I}_n & \tilde{B} \\ \hline C & \mathbf{0}_{m\times m} \end{array}\right)$$

при обратимой матрице $\tilde{B}^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}$ *совпадает с множеством собственных значений числовой матрицы*

$$A{=}\tilde{B}_L^{\perp}A\left(\mathbf{I}_n-C^{\mathrm{T}}\left(\tilde{B}^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\tilde{B}^{\mathrm{T}}\right)\tilde{B}_L^{\perp\mathrm{T}}. \tag{25}$$

Здесь $\tilde{B}_L^{\perp}\in\mathbb{R}^{(n-m)\times n}$ *– левый делитель нуля максимального ранга матрицы* $\tilde{B}$*, удовлетворяющий условию ортогональности*

$$\tilde{B}_L^{\perp}\tilde{B}_L^{\perp\mathrm{T}}=\mathbf{I}_{n-m}.$$

Из приведенного выше доказательства Теоремы 1 следует, что при выполнении условия ортогональности матриц

$$\tilde{C}B=\mathbf{0}_{n\times n} \tag{26}$$

система уравнений (19) уступает место следующей:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\tilde{C}_R^{\perp\mathrm{T}}A\tilde{C}_R^{\perp}-\lambda\mathbf{I}_{n-m}\right)\mathbf{x}+\tilde{C}_R^{\perp\mathrm{T}}B\mathbf{Y}=\mathbf{0}, \\ \tilde{C}A\tilde{C}_R^{\perp}\mathbf{x}=\mathbf{0}. \end{array}\right. \tag{27}$$

Не трудно заметить, что система (27) отвечает обобщенной задаче на собственные значения квадратного пучка матриц

$$\left(\begin{array}{c|c} \tilde{C}_R^{\perp\mathrm{T}}A\tilde{C}_R^{\perp}-\lambda\mathbf{I}_{n-m} & \tilde{C}_R^{\perp\mathrm{T}}B \\ \hline \tilde{C}A\tilde{C}_R^{\perp} & \mathbf{0}_{(n-m)\times(n-m)} \end{array}\right). \tag{28}$$

Если в (28) выполняется условие

$$\det\left(\tilde{C}A\tilde{C}_R^{\perp}\cdot\tilde{C}_R^{\perp\mathrm{T}}B\right)\neq 0, \tag{29}$$

то с учетом соответствующих обозначений к (28) применимы формулировки теоремы 1[4].

[4]Соответствующие рассуждения справедливы и в условиях Теоремы 2.

На основании формулировок теорем 1 и 2 могут быть построены рандомизированные алгоритмы вычисления инвариантных нулей MIMO-системы. Рассмотрим это на практическом примере.

4. Вычисление инвариантных нулей большой ЭЭС

Найдем решение задачи вычисления инвариантных нулей большой электроэнергетической системы (ЭЭС), состоящей из 25 электрических станций. Математическая модель в фазовых координатах "фазный угол – скольжение генератора" ЭЭС в форме (1) имеет матрицы следующих размеров:

$$A \in \mathbb{R}^{50\times 50}, \quad B \in \mathbb{R}^{50\times 25}, \quad C \in \mathbb{R}^{20\times 50}. \tag{30}$$

Портрет матрицы A приведен на рис. 1. При этом,

$$B = \left(\frac{\mathbf{0}_{25\times 25}}{\mathbf{I}_{25}}\right), \quad C = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{20} & \mathbf{0}_{20\times 30} \end{array}\right). \tag{31}$$

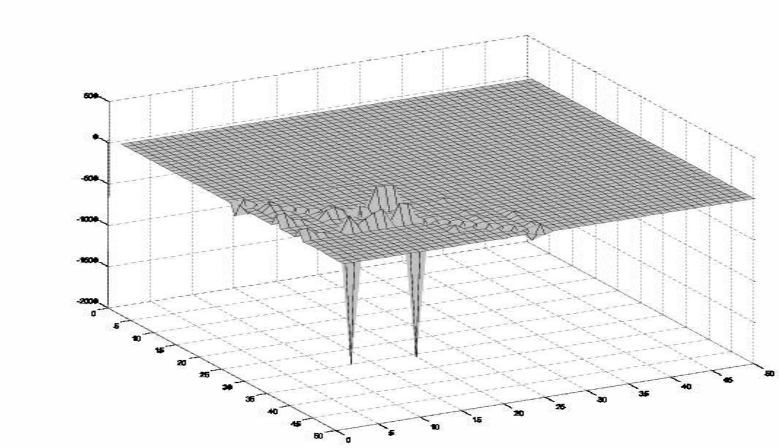

Рис. 1: Портрет матрицы A.

Другими словами, на каждой из 25 электрических станций имеются соответствующие регулирующие устройства, измерение же фазовых координат осуществляется в режиме “on-line” только на 20 станциях.

Таким образом, пучок матриц (4) в данном случае имеет размеры 70×75 и является прямоугольным.

Собственные значения матрицы A модели ЭЭС приведены на рис. 2 и свидетельствуют о ее асимптотической (статической[5]) устойчивости.

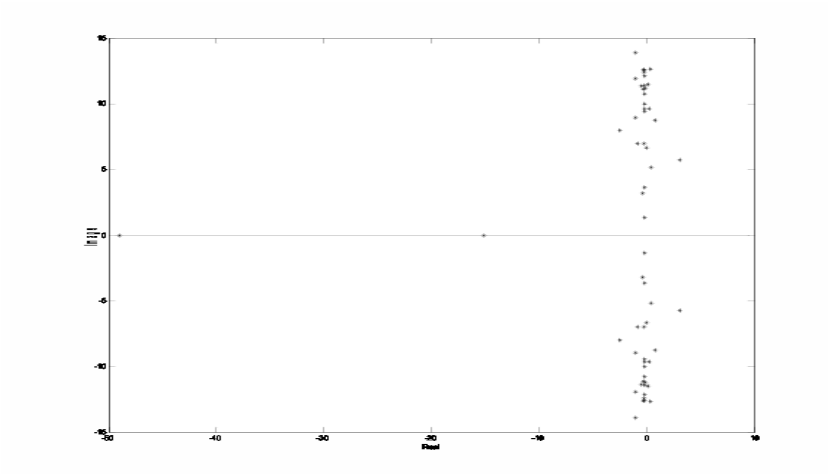

Рис. 2: Собственные значений ЭЭС.

Применение к модели ЭЭС стандартной процедуры вычисления инвариантных нулей **tzero** программной оболочки MATLAB дало отрицательный результат (“множество нулей пусто”).

Используя операторы рандомизации и ортогонализации, сгенерируем множество матриц

$$\left\{ T_i, \;\; i = \overline{1,k} \right\} = \mathrm{Orth}_{25\times 20}\left(\mathrm{Rand}_{25\times 20}\right) \tag{32}$$

и построим пучки матриц

$$\left(\begin{array}{c|c} A - \lambda \mathbf{I}_{50} & BT_i \\ \hline C & \mathbf{0}_{20\times 20} \end{array} \right), \quad i = \overline{1,k}. \tag{33}$$

[5]Термин, применяемый в электроэнергетике.

Для каждой из матриц (33) выполняется условие

$$C\tilde{B} = CBT_i = \mathbf{0}_{20\times 20}, \tag{34}$$

поэтому можно рассмотреть пучки матриц типа (28)

$$\left(\begin{array}{c|c} C_R^{\perp\mathrm{T}} A C_R^{\perp} - \lambda \mathbf{I}_{n-m} & C_R^{\perp\mathrm{T}} \tilde{B} \\ \hline CAC_R^{\perp} & \mathbf{0}_{(n-m)\times(n-m)} \end{array}\right) \tag{35}$$

и проверить условие типа (29)

$$\det\left(CAC_R^{\perp} \cdot C_R^{\perp\mathrm{T}} \tilde{B}\right) \neq 0. \tag{36}$$

Поскольку в наших расчетах условия (36) выполняются, можно воспользоваться Теоремой 1 и найти собственные значения матриц

$$A_i = \hat{C}_R^{\perp\mathrm{T}} \left(\mathbf{I}_{30} - \hat{B}_i \left(\hat{C}\hat{B}_i\right)^{-1} \hat{C}\right) \hat{A}\hat{C}_R^{\perp}, \quad i = \overline{1,k}, \tag{37}$$

где

$$\hat{A} = C_R^{\perp\mathrm{T}} A C_R^{\perp}, \quad \hat{B}_i = C_R^{\perp\mathrm{T}} \tilde{B}_i, \quad \hat{C} = CAC_R^{\perp}. \tag{38}$$

Результаты вычислений собственных значений матриц (37) при $k = 500$ (т. е. 15 000 собственных значений) в виде их обобщенного портрета представлены на рис. 3.

Дальнейшие исследования обобщенного портрета показали, что в области D существуют три группы плотных скоплений претендентов на инвариантные нули (см. рис. 4). Центры этих скоплений [10] соответствуют комплексным частотам, на которых матрица (4) рассматриваемой модели ЭЭС имеет близкие к нулю минимальные сингулярные значения (данная матрица близка к потере ранга, что является практическим “индикатором” инвариантного нуля α^*). Таким образом, эти частоты можно принять за инвариантные нули ЭЭС (30).

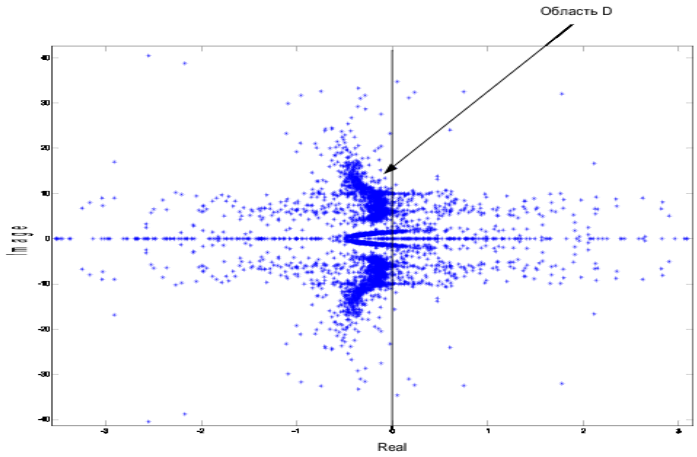

Рис. 3: Собственные значения матриц (37).

С физической точки зрения вычисленные инвариантные нули соответствуют комплексным частотам, на которых происходит “запирание” электрической мощности в ЭЭС.

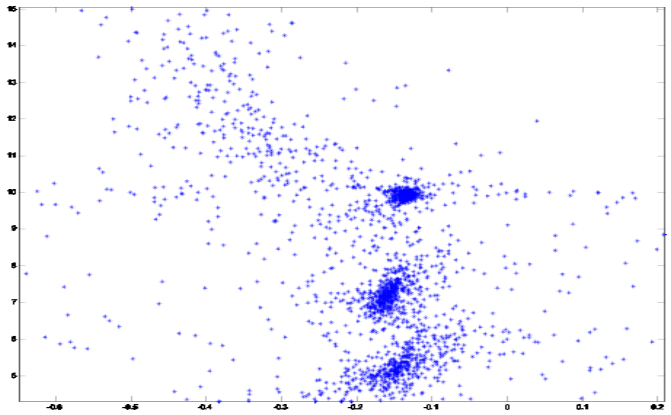

Рис. 4: Собственные значений матриц (37) в области D.

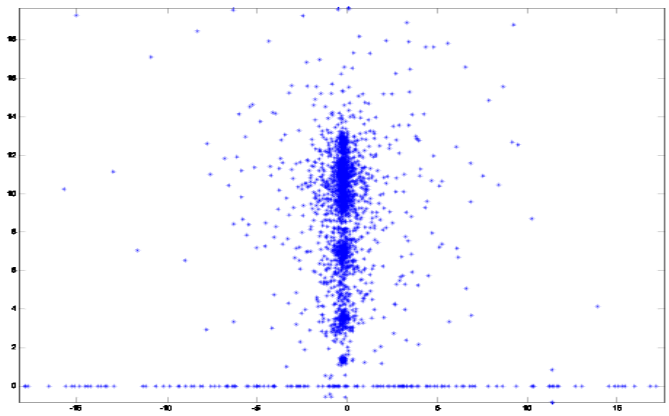

Рис. 5: Собственные значений матриц (37) ОЭС Центра в области D.

На рис. 5 приведена область D Объединенной энергетической системы Центра (ОЭС Центра) для $k = 100$. Здесь

$$A \in \mathbb{R}^{258\times 258}, \quad B \in \mathbb{R}^{258\times 129}, \quad C \in \mathbb{R}^{100\times 258}.$$

Область D имеет несколько групп плотных скоплений претендентов на инвариантные нули. Как и в предыдущем случае, центры скоплений соответствуют комплексным частотам, на которых матрица (4) модели ОЭС Центра имеет близкие к нулю минимальные сингулярные значения. Таким образом, эти частоты также можно принять за инвариантные нули ОЭС Центра.

Список литературы

[1] *MacFar1ane A. G. J., Kareanias N.* Pole and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex variable theory // Int. J. Contr. 1976. Vol. 24. No 1. P. 33–74.

[2] *Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н.* Квадратическая проблема собственных значений в электроэнергетических системах // АиТ. 2006. № 5. С. 24 – 47.

[3] *Смагина Е. М.* Вопросы анализа линейных многомерных объектов с использованием понятия нуля системы. Томск: Изд-во Том. ун-та. 1990.

[4] *Граничин О. Н., Поляк Б. Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. – М.: Наука. 2003.

[5] *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука. 1984.

[6] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Физматлит. 2005.

[7] *Мисриханов М. Ш.* Классические и новые методы анализа многомерных динамических систем. – М.: Энергоатомиздат. 2004.

[8] *Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н.* Алгебраические и матричные методы в теории линейных MIMO-систем // Вестник ИГЭУ. 2005. Вып. 5. С. 196 – 240.

[9] *Уонем М.* Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. – М.: Наука. 1980.

[10] *Загоруйко Н. Г.* Прикладные методы анализа данных и знаний. – Новосибирск: ИМ СО РАН. 1999.