Множества достижимости и притяжения линейных систем с ограниченным управлением: описание с помощью инвариантных эллипсоидов [1]

Б. Т. Поляк, д. т. н., *П. С. Щербаков,* д. ф.-м. н.
Институт проблем управления РАН, Москва
(boris,sherba)@ipu.ru

Исследуется задача описания множеств достижимости и притяжения линейной системы, заданной в пространстве состояний. Рассматриваются ограниченные управления в виде линейной обратной связи по состоянию, а также управления с насыщением. Множества достижимости и притяжения таких систем описываются в терминах инвариантных эллипсоидов с применением техники линейных матричных неравенств и задач полуопределенного программирования. Для управлений с насыщением используется идеология теории абсолютной устойчивости.

Ключевые слова: множество притяжения, инвариантный эллипсоид, линейные матричные неравенства, абсолютная устойчивость.

1. Введение

Необходимость описания областей притяжения возникает во многих практических приложениях, например, при исследовании поведения и управлении механическими системами. При этом как правило ресурс управления ограничен, а модель системы известна неточно и имеются неконтролируемые внешние возмущения. Общий подход к решению некоторых типов таких задач для линейных систем впервые представлен А. М. Формальским в [1], позже им изучалась возможность применения разработанных методов к различным задачам механического происхождения, например, таким как стабилизация положения шарика на подвижной плоскости и др. [2, 3]. В работах А. Б. Куржанского и соавторов [4] изучалась

[1] ©Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков, 2008

задача успокоения многозвенной пружинной системы, в [5] строились аппроксимации областей притяжения для синтеза управлении колесным роботом, приложение к нелинейным системам предложено в [6]. Понятие множеств притяжения для нелинейных систем восходит к классическим работам Ла-Салля и Лефшеца [7], Зубова [8]; см. также обзор [9].

Из последних публикаций отметим книгу [10], которая отражает современный взгляд на решение описываемого круга задач; ключевым в ней является понятие инвариантности множества.

Недавно к описанию множеств достижимости и притяжения стали применяться методы теории линейных матричных неравенств (LMI); например, [5, 11–13]. Преимущества этого подхода заключаются в том, что он охватывает разнообразные постановки задач анализа и синтеза, применим к системам больших размерностей и использует простые и удобные вычислительные средства, совместимые со стандартным пакетом MATLAB. Важно отметить, что в рамках этого подхода удается получать отдельные результаты и для нелинейных систем на основе идей теории абсолютной устойчивости, [5, 13, 14].

В настоящей работе предпринята попытка соединить возможности подхода на основе инвариантных эллипсоидов с идеями теории абсолютной устойчивости. Целью является синтезировать ограниченное управление, минимизирующее область достижимости и и максимизирующее область притяжения замкнутой системы. При этом основное внимание уделяется управлению с насыщением.

Полученные результаты представляют собой первый шаг к решению более реалистично поставленных задач, например, учитывающих неопределенность в коэффициентах системы и др.

2. Определения и обозначения

Рассмотрим непрерывную линейную стационарную систему

$$\dot{x} \;=\; Ax + Bw, \quad x(0) = 0, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m}, \qquad (1)$$

у которой пара (A, B) управляема, а $w(t) \in \mathbb{R}^m$ представляет собой внешнее возмущение, о котором предполагается известным лишь ограниченность в любой момент времени:

$$w^{\mathrm{T}}(t)w(t) \leq 1 \quad \text{при любом} \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Такие возмущения, определенные для $t \in [0, \infty)$ называем *допустимыми*, и их совокупность обозначаем через $\mathbf{W}$. Через $\mathbf{W}_T$ обозначим множество допустимых возмущений, определенных на $[0, T]$ при некотором конечном $T > 0$.

2.1. Множество достижимости

Для системы (1) определим *достижимое множество в момент* T:

$$\mathcal{R}(T) \;=\; \{x(T)\ (1) \ \text{ для данного } T \geq 0 \text{ и некоторого } w \in \mathbf{W}_T\} \tag{3}$$

Это есть совокупность концов траекторий системы, рассматриваемой на конечном отрезке времени $[0, T]$, при действии того или иного допустимого возмущения $w \in \mathbf{W}_T$.

Определим далее (предельное) *достижимое множество* системы (1):

$$\mathcal{R} \;=\; \{x(t)\ (1) \ \text{ для некоторого } t \geq 0 \text{ и некоторого } w(t) \in \mathbf{W}\} \tag{4}$$

(совокупность точек всех траекторий системы при действии любого из допустимых возмущений). Имеем

$$\mathcal{R} \;=\; \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(\infty).$$

Нетрудно установить следующие свойства достижимых множеств.

- Замкнутость, ограниченность, выпуклость и центральная симметрия множества $\mathcal{R}(T)$.
- Монотонность по вложению: $\mathcal{R}(T_1) \subset \mathcal{R}(T_2)$ для $T_1 < T_2 < \infty$.
- Множество $\mathcal{R}$ ограничено тогда и только тогда, когда матрица A устойчива.

- Инвариантность $\mathcal{R}$: если $x(0) \in \mathcal{R}$, то $x(t) \in \mathcal{R}$ при всех $t > 0$.
- Минимальность по включению множества $\mathcal{R}$ среди всех инвариантных множеств.
- "Притягиваемость" для устойчивой A: для любого $x_0 \notin \mathcal{R}$ имеем $x(x_0, t) \to \mathcal{R}$, $t \to \infty$.

Классический способ описания замкнутого выпуклого ограниченного множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ — через его опорную функцию

$$\varphi_{\mathcal{X}}(c) \doteq \max_{x \in \mathcal{X}} c^{\mathrm{T}} x, \qquad c \in \mathbb{R}^n,$$

как пересечения всех *опорных полупространств*

$$\{x \colon c^{\mathrm{T}} x \leq \varphi_{\mathcal{X}}(c) \text{ для некоторого } \|c\| = 1\}.$$

Достижимое множество $\mathcal{R}(T)$ также можно описывать с помощью опорной функции, причем для данного c величину $\varphi_{\mathcal{R}(T)}(c)$ можно эффективно вычислять, решая некоторую систему дифференциальных уравнений. Однако на этом пути эффективно характеризовать достижимое множество можно лишь в двумерном случае.

Множество $\mathcal{R}(T)$ описывает неопределенность в состоянии системы, накопившуюся к моменту времени T за счет действия возмущений w. Поэтому при построении *внешних* аппроксимаций к $\mathcal{R}(T)$ естественным требованием является минимизация их "размера".

2.2. Множество притяжения

Определим *множество притяжения* системы (1) в момент T:

$$\mathcal{A}(T) \doteq \big\{x_0 \in \mathbb{R}^n \colon\ x(T) = 0 \ \text{ при } \ x(0) = x_0, \text{ данном } T \geq 0 \text{ и некотором } w \in \mathbf{W}_T\big\},$$

которое есть совокупность точек фазового пространства, из которых система может быть приведена в начало координат в момент T с помощью допустимых *управлений* w.

Нетрудно видеть, что множество $\mathcal{A}(T)$ имеет свойства, аналогичные свойствам $\mathcal{R}(T)$, в частности, выпуклость, ограниченность,

центральную симметрию, монотонность по вложению ($\mathcal{A}(T_1) \subset \mathcal{A}(T_2)$ для $T_1 < T_2$) и инвариантность.

Мы будем изучать предельные множества $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\infty)$. В отличие от $\mathcal{R}$, множество притяжения $\mathcal{A}$ ограничено тогда и только тогда, когда матрица A *неустойчива*.

Описание множества притяжения. Множество притяжения является "множеством достижимости для обратного времени $-t$", что описывается следующим образом.

Л е м м а 1. *Множество притяжения $\mathcal{A}(T)$ системы* (1) *совпадает с множеством достижимости $\mathcal{R}(T)$ системы*

$$\dot{x} \;=\; -Ax + Bw, \quad x(0) = 0, \qquad w \in \mathbf{W}_T. \tag{5}$$

Действительно, если x_1 — решение системы (1) в момент T при некотором $w(t)$ и начальных условиях x_0, то x_0 — решение системы $\dot{x}(t) \;=\; -Ax(t) - Bw(T-t)$ в момент T при начальных условиях x_1. Кроме того, если $w(t) \in \mathbf{W}_T$, то и $-w(t) \in \mathbf{W}_T$, откуда и следует утверждение леммы.

Полезно следующее представление:

$$\mathcal{A}(T) \;=\; e^{-AT}\mathcal{R}(T).$$

В самом деле, по определению, точка $x_0 \in \mathcal{A}(T)$ тогда и только тогда, когда найдется $w(\tau) \in \mathbf{W}_T$ и $t \le T$, такие, что

$$e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bw(\tau)d\tau = 0,$$

т. е.

$$x_0 = -\int_0^t e^{-A\tau}Bw(\tau)d\tau = -e^{-At}\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bw(\tau)d\tau,$$

где второй сомножитель есть $\mathcal{R}(T)$, когда $w(\tau)$ пробегает все $\mathbf{W}_T$.

Как и для множеств достижимости, эффективно описывать множества притяжения с помощью опорных функций удается лишь при $n = 2$, поэтому предлагается приближенный способ описания, основанный на понятии *инвариантных эллипсоидов*. Соответственно, целью является *максимизировать* размер *внутренней* аппроксимации к $\mathcal{A}$.

2.3. Инвариантные эллипсоиды

Инвариантность является одним из ключевых свойств введенных выше множеств, поэтому в качестве приближений будем пользоваться также инвариантными множествами, но имеющими более простую структуру, — инвариантными эллипсоидами. Эллипсоид

$$\mathcal{E} \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n\colon\; x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \le 1\}, \qquad P > 0,$$

называется инвариантным для системы (1), если для любого $x_0 \in \mathcal{E}$ траектория системы остается внутри $\mathcal{E}$ при всех $w \in \mathbf{W}$ и всех $t > 0$ (как обычно, запись $P > 0$ означает положительную определенность симметричной матрицы P).

Удобство использования инвариантных эллипсоидов заключается в их прямой связи с квадратичными функциями Ляпунова и наличии хорошо развитого аппарата линейных матричных неравенств, который и будет использоваться ниже для построения эллипсоидальных оценок множеств достижимости и притяжения; кроме того, при численной реализации методов теории линейных матричных неравенств удобно пользоваться повсеместно доступными программными пакетами Yalmip и SeDuMi в среде Matlab.

3. Линейное ограниченное управление

Пусть сигнал $w(t)$ имеет смысл управления; будем обозначать его через $u(t)$, и в качестве допустимых управлений рассматривать не функции времени, а линейные обратные связи $u = Kx$ при ограничении $\|u\| \le u_{\max}$, т. е. оставаться в более узком классе. В следующем разделе рассмотрим управление с насыщением.

Целью является построить управление такого типа, описать множество точек, из которых оно приводит систему в начало координат и оптимизировать это множество по размеру.

Рассмотрим систему с *линейным управлением*

$$\dot{x} \;=\; Ax + Bu, \quad u = Kx, \quad \|u\| \le u_{\max}. \tag{6}$$

Здесь и далее A, B фиксированы и известны, ограничение $u_{\max}$ на величину управления известно, а K подлежит выбору. Для любого фиксированного K дадим определение.

О п р е д е л е н и е 1. *Областью притяжения $\mathcal{A}_{lin}$ линейной системы (6) назовем совокупность всех начальных условий $x_0 \doteq x(0)$, для которых $x(x_0, t) \to 0$.*

Как отмечено выше, будем рассматривать лишь неустойчивые разомкнутые системы, — в противном случае, применяя тривиальное ограниченное управление $u = 0x \equiv 0$, получаем, что $\mathcal{A}_{lin}$ совпадает со всем пространством. Интересно, что этого же результата удается добиться с помощью тождественно не равных нулю управлений с насыщением $u = \mathsf{sat}(Kx)$ (они рассматриваются в разделе 4).

О п р е д е л е н и е 2. *Эллипсоид*

$$\mathcal{E}_{lin}(P) \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \colon\; x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \le 1\}, \qquad P > 0, \tag{7}$$

назовем инвариантным притягивающим для (6), если для любого $x_0 \in \mathcal{E}_{lin}$ будет $x(x_0, t) \to 0$ и $x(x_0, t) \in \mathcal{E}_{lin}$ для всех $t \ge 0$.

Нас интересует стабилизирующее ограниченное управление по состоянию $u = Kx$, $\|u\| \le u_{\max}$, при котором эллипсоид $\mathcal{E}_{lin} \subseteq \mathcal{A}_{lin}$ *максимален.*

Решение этой задачи дается следующей теоремой.

Т е о р е м а 1. *Пусть P, Y — решения задачи полуопределенного программирования (SDP)*

$$\max f(P) \;\; \text{при ограничениях} \tag{8}$$
$$AP + PA^{\mathrm{T}} + BY + Y^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} \;<\; 0,$$
$$\begin{pmatrix} P & Y^{\mathrm{T}} \\ Y & u_{\max}^2 I \end{pmatrix} \;\ge\; 0$$

относительно матричных переменных $P = P^{\mathrm{T}}$ и Y. Тогда управление $u = Kx$, $K = YP^{-1}$ стабилизирует систему и ограничено $\|u\| \le u_{\max}$ на эллипсоиде $\mathcal{E}_{lin}(P)$ (7), который является максимальным притягивающим по принятому критерию среди инвариантных эллипсоидов. При этом

$$V(x) = x^{\mathrm{T}} P^{-1} x$$

будет функцией Ляпунова для замкнутой системы $\dot{x} = (A+BK)x$.

Этот результат является прямой модификацией результата из [12]. Первое LMI ("ляпуновское") гарантирует, что управление $u = Kx$ стабилизирующее, второе, — что оно ограниченное (см. [12]), а критерий дает наилучшее среди таких управлений.

В качестве критерия $f(P)$ может приниматься, например, след матрицы P или ее минимальное собственное значение, сохраняющие SDP-структуру задачи (минимизация линейной функции при LMI-ограничениях). Мы будем пользоваться критерием следа.

Можно показать, что решения P, Y задачи (8) дают регулятор $K = YP^{-1}$, для которого замкнутая система с матрицей $A_c = A + BK$ находится на границе устойчивости: $\max_i \mathrm{Re}\lambda_i(A_c) \approx 0$. Иными словами, построенный эллипсоид (будучи инвариантным) не является притягивающим в смысле Определения 1, — траектории системы не стягиваются в начало координат.

Чтобы обеспечить $x(t) \to 0$, потребуем некоторой гарантированной скорости убывания функции Ляпунова: $\dot{V}(x) \le -\beta\|x\|^2$ с некоторым заданным $\beta > 0$:

$$(A + BK)^{\mathrm{T}} P^{-1} + P^{-1}(A + BK) \;\le\; -\beta I.$$

Домножим это неравенство слева и справа на P, тогда в переменных P и $Y = PK$ это условие запишется как линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\mathrm{T}} + BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & P \\ P & -I/\beta \end{pmatrix} \;\le\; 0,$$

которое следует использовать в (8) вместо "ляпуновского" неравенства. Таким образом, получаем

Теорема 2. *Пусть P, Y — решения задачи SDP*

$$\max \mathrm{tr}(P) \quad \text{при ограничениях} \tag{9}$$
$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\mathrm{T}} + BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & P \\ P & -I/\beta \end{pmatrix} \le 0,$$
$$\begin{pmatrix} P & Y^{\mathrm{T}} \\ Y & u_{\max}^2 I \end{pmatrix} \ge 0$$

при данном β по переменным $P = P^{\mathrm{T}}, Y$. Тогда управление $u = Kx$, $K = YP^{-1}$, является стабилизирующим, матрица P определяет

для замкнутой системы эллипсоид притяжения $\mathcal{E}_{lin}(P)$, на котором управление ограничено, $\|u\| \le u_{\max}$, причем этот эллипсоид является максимальным по всем линейным управлениям по состоянию, для которых функция Ляпунова $V(x) = x^{\mathrm{T}} P^{-1} x$ убывает не медленее, чем $-\beta\|x\|^2$.

Отметим, что в рассматриваемой задаче (без внешних возмущений) максимально допустимая величина управления $u_{\max} > 0$ может быть любой, поскольку ограничения всегда совместны (при меньших $u_{\max}$ лишь получаем меньший эллипсоид притяжения). Поэтому в следующем разделе считаем $u_{\max} = 1$.

4. Управление с насыщением

Построенный эллипсоид соответствует линейным управлениям $u = Kx$. Расширим класс. Рассмотрим случай скалярного управления ($K^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$), и пусть в системе (6) оно имеет вид

$$u \;=\; \mathsf{sat}(Kx) \;=\; \begin{cases} -1 & \text{при} \;\; Kx < -1; \\ Kx & \text{при} \;\; |Kx| \le 1; \\ +1 & \text{при} \;\; Kx > 1, \end{cases}$$

т. е. определено на всем пространстве.

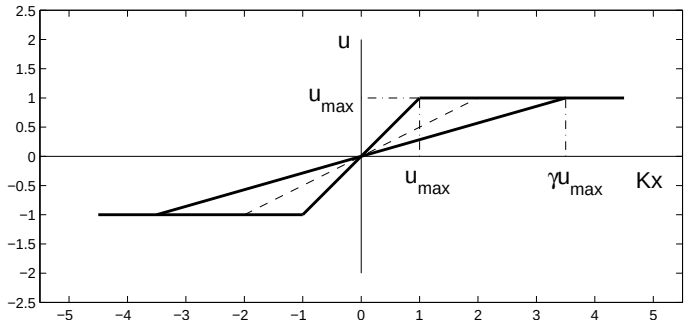

Рис. 1: Управление с насыщением.

Как и выше, построим управление такого вида, дающее максимальный притягивающий инвариантный эллипсоид. Поскольку

замкнутая система нелинейна, то воспользуемся подходом теории абсолютной устойчивости, [5, 13, 14].

Очень кратко приведем идею построений. Пусть искомый регулятор K построен; для $\gamma \geq 1$ рассмотрим сектор, ограниченный прямыми $u = Kx$ и $u = Kx/\gamma$, и все ограниченные нелинейности $-1 < u \leq 1$, лежащие в этом секторе, см. рис. 1. Найдем квадратичную функцию Ляпунова

$$V(x) = x^{\mathrm{T}} P_{sat}^{-1} x, \qquad P_{sat} > 0,$$

для которой $\dot{V}(x) < 0$ на траекториях системы при всех нелинейностях из сектора. Для этого достаточно будет построить такую функцию для двух "крайних" систем: одна соответствует $u = Kx$ (т. е. $\gamma = 1$), а другая — максимально возможной величине γ (максимальному раствору сектора). Кроме того, потребуем, чтобы искомый эллипсоид $\{x^{\mathrm{T}} P_{sat}^{-1} x \leq 1\}$ лежал в полосе $\mathcal{S} = \{|Kx| \leq \gamma\}$. Записывая эти условия в виде квадратичных ограничений, используя неущербную версию S-теоремы с двумя ограничениями (например, см. [12,15]), и (как и в Теоремах 1 и 2) переходя к переменным P, Y, получаем следующий результат (ниже обозначено $\mu = 1/\gamma$).

Теорема 3. *Пусть при некотором $\mu \in (0,\ 1)$ Y_{sat}, P_{sat} доставляют решения задаче SDP*

$$\max \mathrm{tr}(P) \ \text{ при ограничениях} \tag{10}$$
$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\mathrm{T}} + BY + Y^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} & P \\ P & -I/\beta \end{pmatrix} \leq 0,$$
$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\mathrm{T}} + \mu(BY + Y^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}}) & P \\ P & -I/\beta \end{pmatrix} \leq 0,$$
$$\begin{pmatrix} P & Y^{\mathrm{T}} \\ Y & \frac{1}{\mu^2} I \end{pmatrix} \geq 0; \qquad 0 < \mu \leq 1,$$

относительно матричных переменных $P = P^{\mathrm{T}}$, Y. Тогда управление $u = \mathsf{sat}(K_{sat} x)$, $K_{sat} = Y_{sat} P_{sat}^{-1}$, — стабилизирующее, причем среди всех управлений с насыщением оно дает максимальный эллипсоид притяжения $\mathcal{E}_{sat} = \{x : x^{\mathrm{T}} P_{sat}^{-1} x \leq 1\} \subset S \doteq \{|K_{sat} x| \leq 1/\mu\}$ для замкнутой системы с заданной гарантированной скоростью убывания функции Ляпунова $V(x) = x^{\mathrm{T}} P_{sat}^{-1} x$ вдоль траекторий.

5. Наличие внешних возмущений

Рассмотрим теперь систему

$$\dot{x} \;=\; Ax + Bu + Dw, \qquad x(0) \in \mathcal{E}_0 \subset \mathbb{R}^n, \tag{11}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $u \in \mathbb{R}^m$ — управление, $w \in \mathbb{R}^p$ — внешнее возмущение, про которое, как и раньше, известно лишь то, что оно ограничено в каждый момент:

$$w^{\mathrm{T}}(t)w(t) \le 1 \;\text{ при любом }\; t \ge 0, \tag{12}$$

A, B, D известные матрицы соответствующих размерностей, пара (A, B) управляема, $\mathcal{E}_0$ — известный эллипсоид $\{x\colon\; x^{\mathrm{T}} P_0^{-1} x \le 1\}$, $P_0 > 0$, характеризующий неопределенность в начальном состоянии системы.

Пусть управление u уже выбрано, — в форме стабилизирующей линейной обратной связи по состоянию. Для устойчивой замкнутой системы

$$\dot{x} = A_c x + Dw, \qquad A_c = A + BK \tag{13}$$

определим *множество достижимости*

$$\mathcal{R} \;\doteq\; \{x\big(t, w(t)\big)\ (13) \;\text{ для всех } t \ge 0 \text{ и } w(t) \in \mathbf{W}, \;\; x(0) = 0\},$$

которое, как нетрудно убедиться, обладает двумя основными интересующими нас свойствами:

- инвариантность: если $x(0) \in \mathcal{R}$, то $x\big(t, w(t)\big) \in \mathcal{R}$ для всех $t > 0$ и $w(t) \in \mathbf{W}$
- притягиваемость: для любого $x(0) \notin \mathcal{R}$ и любого $w(t) \in \mathbf{W}$ будет $x\big(x(0), t, w(t)\big) \to \mathcal{R}$ при $t \to \infty$.

Далее для системы (13) определим *множество притяжения*

$$\mathcal{A} \;\doteq\; \{x_0 \in \mathbb{R}^n\colon\; x\big(x_0, t, w(t)\big) \to \mathcal{R} \;\text{ для всех } w(t) \;\text{ при }\; t \to \infty\}.$$

Ясно, что для устойчивой системы множеством притяжения будет все пространство, но при этом управление будет принимать произвольно большие значения. При ограничении на величину управления множество $\mathcal{A}$ оказывается ограниченным.

Наконец, определим *инвариантный эллипсоид*

$$\mathcal{E} \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \leq 1\}, \qquad P > 0,$$

как эллипсоид, обладающий следующим свойством: для любой начальной точки $x(0) \in \mathcal{E}$ справедливо $x\big(x(0), t, w(t)\big) \in \mathcal{E}$ для всех $t > 0, w(t)$.

Обратим внимание на (естественное) отличие от Определений 1 и 2 из раздела 3: наличие постоянно действующего внешнего возмущения не позволяет привести систему в начало координат, а лишь гарантировать ее эволюцию в некоторой ограниченной области.

В этом разделе будем решать следующую задачу. Синтезируем линейное ограниченное управление, *минимизирующее область достижимости*; после этого полученное управление доопределим на всем фазовом пространстве (переходя к управлению с насыщением) и опишем *максимальное множество притяжения* для системы с таким управлением. Как и выше, оптимизацию проводим не для самих областей $\mathcal{R}$ и $\mathcal{A}$, а для их аппроксимаций в форме инвариантных эллипсоидов.

Мотивация для такой постановки задачи — следующая. Если система находится вблизи начала координат, то естественно требовать ее эволюции в возможно малой окрестности нуля; это "классическая" задача о подавлении внешних возмущений. В результате строим *минимальный* инвариантный эллипсоид $\mathcal{E}_r$, который, как мы знаем, является притягивающим. С другой стороны, для того же управления (плюс насыщение) желательно охарактеризовать как можно большее множество (далеких) начальных условий, из которых оно приводит траектории к $\mathcal{E}_r$ при любых возмущениях, т. е. иными словами, построить *максимальный* инвариантный эллипсоид $\mathcal{E}_a$ для управления с насыщением.

5.1. Линейное ограниченное управление

Рассмотрим сперва линейные ограниченные управления и найдем среди них то, которое доставляет минимум инвариантному эллипсоиду; будем называть такую задачу *Задачей RL* (Reachable set, Linear control). Решение дается приводимой ниже теоремой (см. [12]).

Т е о р е м а 4. *Пусть P_r, Y_r — решения следующей параметрической задачи SDP:*

$\min \mathrm{tr}(P)$ при ограничениях

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\alpha}DD^{\mathrm{T}} \le 0, \quad P \ge P_0,$$
$$\begin{pmatrix} P & Y^{\mathrm{T}} \\ Y & u_{\max}^2 I \end{pmatrix} \ge 0,$$

с матричными переменными $P = P^{\mathrm{T}}, Y$ и скалярным параметром $\alpha > 0$.

Тогда среди всех линейных ограниченных управлений вида $u = Kx$, $\|u\| \le u_{\max}$ регулятор $K_r = Y_r P_r^{-1}$ доставляет минимум инвариантному (достижимому) эллипсоиду

$$\mathcal{E}_{r,lin} \;=\; \{x\colon\; x^{\mathrm{T}} P_r^{-1} x \le 1\} \;\supset \mathcal{R}$$

для замкнутой системы (с начальными условиями $x(0) \in \mathcal{E}_0$).

При "практическом" использовании приведенного результата (т.е. с вычислительной точки зрения) возникают следующие вопросы: (i) каковы границы варьирования параметра α? (ii) выпукла ли по α функция $\mathrm{tr}(P_r)$? (iii) каковы допустимые значения величины $u_{\max}$?

Ответ на первый вопрос в настоящее время авторам неизвестен; второй вопрос по-видимому допускает положительный ответ, а ответ на последний вопрос дается следующей леммой. Этот вопрос естественным образом возникает при рассмотрении системы с внешними возмущениями; ясно, что для подавления возмущений определенного уровня (в данном случае, единичного) требуется соответствующий ресурс управления.

Л е м м а 2. *Пусть $\underline{c}$ — решение следующей параметрической задачи SDP:*

$\min c$ при ограничениях

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\alpha}DD^{\mathrm{T}} \le 0, \quad P \ge P_0,$$
$$\begin{pmatrix} P & Y^{\mathrm{T}} \\ Y & cI \end{pmatrix} \ge 0$$

с параметром $\alpha > 0$ относительно матричных переменных $P = P^{\mathrm{T}}, Y$ и скалярной переменной c.

Тогда для любого $u_{\max} \geq \underline{u} = \sqrt{\underline{c}}$ Задача RL разрешима, т. е. существует линейное ограниченное управление $u = Kx$, $\|u\| \leq u_{\max}$, которое подавляет влияние внешних возмущений.

Отметим, что приведенная задача SDP разрешима при всех $P_0 > 0$ и всех $\alpha > 0$.

Приведем иллюстративный пример.

П р и м е р 1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw; \qquad |w| \leq 1$$

с коэффициентами

$$A = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,18 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется выбрать скалярное управление $u = Kx$, $|u| \leq u_{\max}$, оптимизирующее двумерный инвариантный эллипсоид. Лемма 2 дает следующее минимально допустимое ограничение на управление: $\underline{u} = 1,9136$. Положим $u_{\max} \doteq 1.5\underline{u}$ и, применив Теорему 4 с $P_0 = 0,01\,I$, получим регулятор $K = (6,0932;\ -14,9649)$; соответствующий ему (минимальный) эллипс достижимости $\mathcal{E}_{r,lin}$ задается матрицей

$$P_r = \begin{pmatrix} 0,2052 & 0,1495 \\ 0,1495 & 0,1245 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{tr}(P_r) \approx 0,3297$$

(это оптимальное решение достигается при $\alpha \approx 0,657$). На рис. 2 приведены истинное множество достижимости $\mathcal{R}$ для устойчивой замкнутой системы, построенное с помощью опорных плоскостей, а также эллипс $\mathcal{E}_{r,lin} \supset \mathcal{R}$ и полоса $|Kx| \leq u_{\max}$, внутри которой определено синтезированное управление.

5.2. Управление с насыщением

Перейдем теперь к построению максимального *притягивающего* эллипсоида, используя синтезированное выше управление, но добавив насыщение (т. е. доопределив управление на всем фазовом

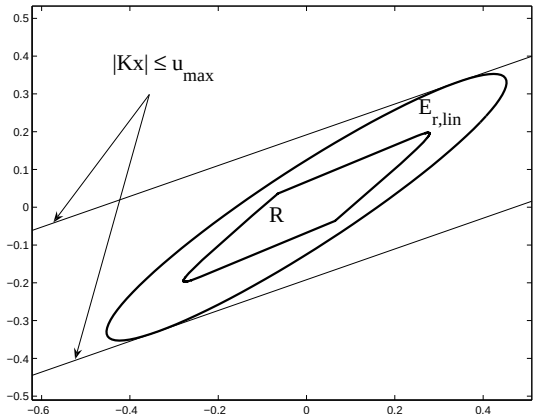

Рис. 2: Минимальный эллипс достижимости для системы из Примера 1 и линейном ограниченном управлении.

пространстве). При этом ограничимся рассмотрением простейшего скалярного случая ($K^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$):

$$u \;=\; \mathsf{sat}(Kx) \;=\; \begin{cases} -u_{\max} & \text{при} \quad Kx < -u_{\max}; \\ Kx & \text{при} \quad |Kx| \le u_{\max}; \\ +u_{\max} & \text{при} \quad Kx > u_{\max}. \end{cases}$$

Имеем следующий результат.

Т е о р е м а 5. *Пусть K — оптимальный регулятор в линейной Задаче RL и пусть $0 < \mu \le 1$. Если $P_{sat} > 0$ — решение параметрической задачи SDP*

$\max \mathrm{tr}(P)$ при ограничениях

$$(A+BK)P + P(A+BK)^{\mathrm{T}} + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^{\mathrm{T}} \le 0, \qquad P \ge P_0$$

$$(A+\mu BK)P + P(A+\mu BK)^{\mathrm{T}} + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^{\mathrm{T}} \le 0, \qquad \alpha > 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & PK^{\mathrm{T}} \\ KP & \frac{u_{\max}^2}{\mu^2} I \end{pmatrix} \ge 0,$$

с параметром α относительно матричной переменной $P = P^{\mathrm{T}}$, то эллипсоид

$$\mathcal{E}_{a,sat} \;=\; \{x\colon\; x^{\mathrm{T}} P_{sat}^{-1} x \le 1\}$$

является инвариантным притягивающим для замкнутой системы с управлением $u = \mathsf{sat}(Kx)$, *причем* $\mathcal{E}_{r,lin} \subset \mathcal{E}_{a,sat} \subset \mathcal{A}$.

Доказательство идейно совершенно идентично доказательству Теоремы 3 с более или менее очевидными техническими изменениями.

В Теореме 5 присутствуют два параметра — μ и α, и возникает вопрос: каковы допустимые интервалы варьирования этих параметров; в частности, каково минимально допустимое значение μ (ясно, что при $\mu = 1$ задача SDP разрешима, см. Теорему 4).

Можно дать следующие грубые оценки. Положительно определенного решения второго LMI заведомо не существует, если $A + \mu BK$ неустойчива (теорема Ляпунова), поэтому имеем $\mu \geq \underline{\mu} \doteq \inf\{\mu > 0 : A + \mu BK$ гурвицева$\}$; эту величину несложно найти, например, простым одномерным поиском. Далее, для любого $\mu \in [\underline{\mu},\ 1]$ интервал варьирования α определяется аналогично из условия устойчивости обеих матриц $A + BK + \frac{\alpha}{2}I$ и $A + \mu BK + \frac{\alpha}{2}I$. Именно: $\alpha \in (0,\ \min\{\alpha_1, \alpha_2\})$, где $\alpha_1 = -2\max \mathrm{Re}\lambda(A + BK)$, $\alpha_1 = -2\max \mathrm{Re}\lambda(A + \mu BK)$. Подчеркнем, что эти оценки грубы (например, не учитывается третье LMI), но вне указанных интервалов решений задачи SDP заведомо нет.

П р и м е р 2. Рассмотрим систему из предыдущего примера, и пусть K — регулятор, полученный в результате решения Задачи RL. Возьмем $\mu = 0,5$ и применим Теорему 5. В результате получаем матрицу

$$P_{sat} = \begin{pmatrix} 2,0226 & 1,2312 \\ 1,2312 & 0,8145 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{tr}(P_{sat}) \approx 2,8371,$$

определяющую притягивающий эллипс $\mathcal{E}_{a,sat}$, см. рис. 3.

Важно отметить, что если не использовать насыщение, а строить максимальный инвариантный эллипс для линейного управления, синтезированного выше (применяя Теорему 5 с $\mu = 1$) то решение $P_{a,lin}$ такой задачи даст эллипс притяжения $\mathcal{E}_{a,lin}$, который, разумеется, будет иметь меньший размер, $\mathrm{tr}(P_{a,lin}) \approx 0,9084$ ($\mathcal{E}_{a,lin}$ содержится в полосе $|Kx| \leq u_{\max}$), см. рис. 4.

Понятно также, что меньшие значения μ могут давать бóльшие эллипсоиды $\mathcal{E}_{a,sat}$ (см. обсуждение после Теоремы 5); в данном примере $\mu_{\min} \approx 0,202$ и соответствующий эллипс с $\mathrm{tr}(P_{sat}) \approx 6,1218$

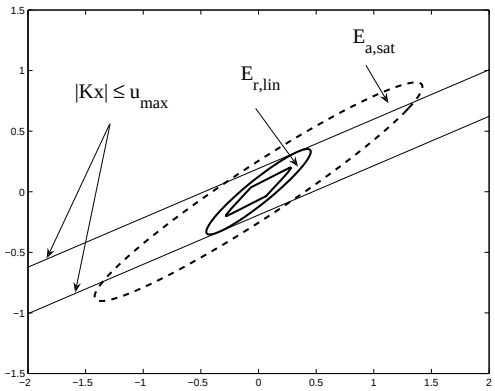

Рис. 3: Оптимальный эллипс достижимости и притягивающий эллипс для управления с насыщением.

является максимальным притягивающим среди всех управлений с насыщением.

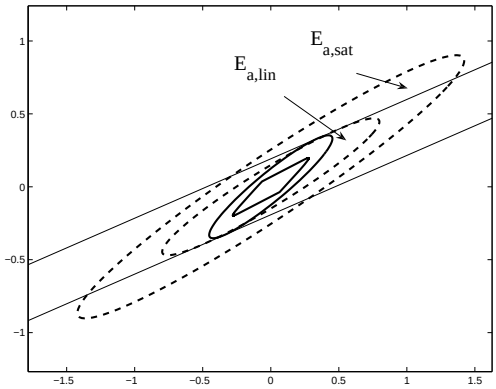

Рис. 4: Эллипсоиды притяжения для линейного ограниченного управления и управления с насыщением.

В заключение этого раздела заметим, что Теорема 5 решает задачу *анализа*, — в том смысле, что матрица усиления K в управлении с насыщением уже найдена (по Теореме 4). Однако, считая K

неизвестной величиной и вводя новую переменную $Y = KP$, получим соответствующую параметрическую задачу SDP, решение которой даст максимальный (по всем управлениям с насыщением) притягивающий эллипсоид. Иными словами, Теорема 5 может быть переформулирована для решения задачи *синтеза* оптимального управления. Эту и некоторые иные содержательные задачи, которые могут быть поставлены в связи с рассматриваемыми в данной работе понятиями, мы не обсуждаем в силу ограниченности размера статьи.

6. Область притяжения нелинейной системы

В качестве еще одного применения изложенных выше идей рассмотрим задачу о построении множества притяжения для *нелинейной* системы. Близкие задачи ставились в [16, 17], но методы решения были иными. Для простоты изложения ограничимся иллюстрацией нашего подхода на примере, заимствованном из [6].

Рассмотрим двумерную нелинейную систему $\dot{x} = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, вида

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0,2347 - 0,0633\sin(x_1+0,0405) - 0,582\sin(x_1+0,4103) - 0,7143x_2 \end{pmatrix}.$$

Для нее методами математического программирования в [6] получен эллипс притяжения

$$\mathcal{E}_{mp} = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^{\mathrm{T}} P_{mp}^{-1} x \le 1\}, \quad P_{mp} = \begin{pmatrix} 11,4161 & -7,8977 \\ -7,8977 & 10,5771 \end{pmatrix},$$

максимизирующий объем ($\det P$).

Линеаризуем систему, представив ее в эквивалентном виде

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где $A = A_{ij} = \partial g_i(x)/\partial x_j\big|_{x=0}$, $\quad Bu = g(x) - Ax$, откуда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,5969 & -0,7143 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda(A) = -0,3572 \pm j0,6851,$$

а $u = u(x_1) = 0,2347 - 0,0633\sin(x_1 + 0,0405) - 0,582\sin(x_1 + 0,4103) + 0,5969x_1$ теперь представляет собой скалярную нелинейность.

Дальше, во-первых считаем нелинейное *возмущение* u ограниченным, во-вторых, заключенным в сектор с “раствором” μ. Точнее, задаемся $x_1^{\max}$, полагаем $\mu = u(x_1^{\max})/x_1^{\max}$ и рассматриваем нелинейность в секторе $0 \le u(x_1) \le \mu x_1$, причем для $0 \le x_1 \le x_1^{\max}$.

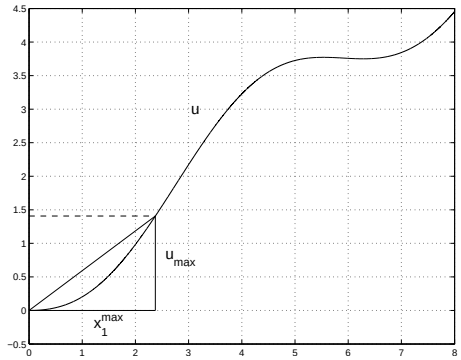

Рис. 5: Ограниченная нелинейность в секторе.

Теперь для двух систем, соответствующих крайним ограничениям, строим общую функцию Ляпунова. Эти две системы суть

$$\dot{x} = Ax; \qquad \dot{x} = Ax + \mu BKx,$$

где вектор-строка $K = [1 \;\; 0]$ вырезает первую компоненту: $Kx = x_1$.

Таким образом, при разных $x_1^{\max}$ — они определяют $u_{\max}$ и μ — решаем задачу

$$\max f(P) \;\; \text{при ограничениях} \tag{14}$$
$$AP + PA^{\mathrm{T}} \le 0,$$
$$(A + \mu BK)P + P(A + \mu BK)^{\mathrm{T}} \le 0,$$
$$\begin{pmatrix} P & PK^{\mathrm{T}} \\ KP & \frac{u_{\max}^2}{\mu^2} I \end{pmatrix} \ge 0,$$

по переменной $P = P^{\mathrm{T}}$. Искомый эллипс $\mathcal{E} = \{x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \le 1\}$ соответствует тому значению $x_1^{\max}$, при котором матрица решения P максимальна (например, по критерию следа $f(P) = \mathrm{tr}(P)$).

В результате вычислений получаем, что максимум достигается при $x_1 \approx 2,375$, и полученный эллипс (внутренний на рис. 6), задаваемый матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 5,6406 & -1,7389 \\ -1,7389 & 1,5297 \end{pmatrix},$$

оказывается хуже построенного в [6]. Причина, вероятно, заключается в достаточности условий Теоремы 3, в то время как техника работы [6] позволяет получить точное решение.

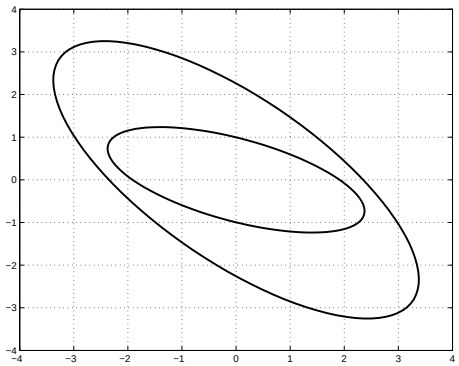

Рис. 6: Эллипсы притяжения для нелинейной системы.

Однако приведенный пример ставил своей целью, во-первых, продемонстрировать принципиальную возможность применения предложенного подхода; во-вторых, используемая техника решения проста и опирается на повсеместно доступные программные реализации методов решения задач полуопределенного программирования (пакеты Yalmip, SeDuMI системы Matlab), в то время как метод в [6] основан на решении общей задаче математического программирования и использует сложную численную “подгонку” результата. Наконец, самое важное, — наша техника по-видимому может быть распространена на многомерный случай, для которого методы, рассматривавшиеся в [6] не могут быть реализованы (в частности, условия положительной определенности матрицы чрезвычайно трудно формулировать в терминах элементов матрицы).

7. Заключение

Предложен метод синтеза ограниченного линейного управления по состоянию и управления с насыщением, которое (суб)оптимально подавляет внешние возмущения и одновременно дает “большую” область притяжения замкнутой системы. Предлагаемый подход заключается в построении оценок областей достижимости и притяжения в форме инвариантных эллипсоидов с использованием линейных матричных неравенств и применении техники абсолютной устойчивости. Метод синтеза управления с насыщением применен к приближенному описанию области притяжения нелинейной системы.

Полученные результаты иллюстрируют простоту и удобство предложенного подхода и представляют собой первый шаг к получению более общих результатов. В последующих работах предполагается распространить эту идеологию на векторное управление, на системы с несколькими нелинейностями, на системы с неопределенными матричными коэффициентами (робастные постановки задач) и др.

Список литературы

[1] *Формальский А. М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. – М.: Наука. 1974.

[2] *Aoustin Y., Formal'sky A. M.* On the stabilization of a biped vertical posture in single support using internal torques // Robotica. 2005. 23. 1. PP. 65–74.

[3] *Aoustin Y., Formal'sky A. M.* Ball on beam: Stabilization with large basin of attraction // Int. J. Control. 2008 (to be published).

[4] *Востриков И. В., Дарьин А. Н., Куржанский А. Б.* Об успокоении многозвенной колебательной системы в условиях неопределенных возмущений // Дифф. уравн. 2006. 42. 11. С. 1452–1463.

[5] *Морозов Ю. В., Рапопорт Л. Б.* Численные методы оценки областей притяжения в задаче управления колесным роботом // АиТ. 2008. 1. С. 16–29.

[6] *Dikin I. I., Popova O. M.* On construction of the asymptotic stability region on the plane // Advanced Modeling and Optimization. 2001. 3. 2. PP. 1–5
http://www.ici.ro/camo/journal/v3n2.htm

[7] *LaSalle J., Lefshetz S.* Stability of Lyapunov's Direct Method. Academic Press. New York: 1961.

[8] *Zubov V. I.* Methods of A. M. Lyapunov and their Applications. – Noordhoff. The Netherlands. 1964.

[9] *Genesio R., Tartaglia M., Vicino A.* On the estimate of the asymptotic stability regions: state of art and new proposals // IEEE TAC. 1985. 30. 8. PP. 437–443.

[10] *Blanchini F., Miani S.* Set-theoretic Methods in Control. Birkhäuser. Boston. 2008.

[11] *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002.

[12] *Назин С. А., Поляк Б. Т., Топунов М. В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2007. 3. С. 106–125.

[13] *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. – М.: Физматлит. 2007.

[14] *Баркин А. И., Зеленцовский А. Л., Пакшин П. В.* Абсолютная устойчивость детерминированных и стохастических систем управления. – М.: Изд-во МАИ. 1992.

[15] *Polyak B. T.* Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // JOTA. 1998. 99. 3. PP. 553–583.

[16] *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. – М.: Наука. 1988.

[17] *Маликов А. И.* Эллипсоидальное оценивание решений дифференциальных уравнений с помощью матричных систем сравнения // Изв. ВУЗов, сер. Математика. 2002. 8. С. 30–41.