# Вычисление показателя Ляпунова в стохастических динамических моделях систем с очередями<sup>1</sup>

Н. К. Кривулин, к. ф.-м. н. Санкт-Петербургский государственный университет Nikolai@NK1200.spb.edu

Рассматривается проблема вычисления показателя Ляпунова в задачах анализа систем с очередями на основе моделей и методов идемпотентной алгебры. Даны общие условия существования предела, который определяте твеличину показателя Ляпунова и приведены примеры его вычисления для систем с матрицами специального вида. Предложен метод вычисления показателя Ляпунова на основе некоторого подходящего разложения матрицы системы. Рассмотрен общий подход к построению широкого класса моделей сетей с очередями и даны примеры моделей. Показано, как путем вычисления показателя Ляпунова можно определить величину среднего времени цикла обслуживания сети с очередями. Приведены результаты определения среднего времени цикла для рассматриваемых моделей.

*Ключевые слова*: стохастические динамические системы, показатель Ляпунова, идемпотентная алгебра, системы с очередями, среднее время цикла обслуживания.

# 1. Введение

При анализе реальных систем в технике, экономике, менеджменте и других областях часто находят применение стохастические динамические модели [1-4], в которых эволюция состояний системы описывается при помощи векторных уравнений

$$\boldsymbol{x}(k) = A(k)\boldsymbol{x}(k-1),$$

где A(k) — случайная матрица, x(k) — вектор состояний системы, а умножение понимается в смысле идемпотентного полукольца с операциями определения максимума и сложения [2,5–7]. В частности, указанные модели оказываются весьма удобным инструментом при описании динамики и исследовании некоторых классов систем и сетей с очередями [8–12]. Другие примеры можно найти в [2,7]

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>©Н. К. Кривулин, 2008

Важной характеристикой рассматриваемых динамических систем является средняя скорость роста вектора состояний x(k), которая для полукольца с операциями максимума и сложения определяется в терминах этого полукольца как предел

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} \|\boldsymbol{x}(k)\|^{1/k}.$$

Величину средней скорости  $\lambda$  часто называют (обобщенным) показателем Ляпунова [2]. При анализе систем с очередями значение  $\lambda$  имеет смысл среднего времени цикла обслуживания, а величина обратная  $\lambda$  определяет пропускную способность системы.

В случае детерминированных систем с постоянной матрицей задача нахождения  $\lambda$  решена в работах И. В. Романовского [13, 14] (см. также [5, 15]). В тоже время для стохастических систем, для которых матрица A(k) является случайной, точное определение значения  $\lambda$  обычно оказывается достаточно сложной проблемой. Имеющиеся результаты в этой области ограничиваются частными случаями систем с матрицей малой размерности (как правило, размерности 2), элементы которой независимы и имеют нормальное или экспоненциальное распределение вероятностей [1, 16–18].

В работах [19–22] было показано как величина  $\lambda$  может быть вычислена для некоторых матриц произвольного порядка специального вида, включая диагональные и треугольные матрицы, матрицы подобия и матрицы единичного ранга.

В настоящей работе изучается проблема вычисления показателя Ляпунова в задачах анализа некоторых классов систем с очередями. Сначала представлен краткий обзор основных понятий идемпотентной алгебры, используемых в остальной части работы, и вводятся необходимые обозначения. Рассматривается стохастическая динамическая система и связанный с ней показатель Ляпунова.

Затем даны общие условия существования предела, который определяет величину показателя Ляпунова и приведены примеры вычисления этого показателя для систем с матрицами специального вида. Предложен метод вычисления показателя Ляпунова на основе некоторого подходящего разложения матрицы системы.

Описан общий подход к построению широкого класса моделей систем с очередями. Приведены примеры моделей, включая много-

фазные системы с неограниченной и конечной емкостью накопителей, а также сети с синхронизацией передвижения сообщений.

Исследована задача нахождения среднего времени цикла обслуживания сети на основе вычисления показателя Ляпунова соответствующей модели стохастической динамической системы. Для рассматриваемых моделей сетей представлены результаты нахождения среднего времени цикла в виде некоторых простых функций от случайных величин, которые определяют продолжительность обслуживания в узлах сети и обычно являются известными.

# 2. Предварительные результаты

#### 2.1. Идемпотентная алгебра

Пусть  $\mathbb{X}$  — числовое множество, на котором заданы две операции: сложение  $\oplus$  и умножение  $\otimes$ . Будем предполагать, что  $(\mathbb{X}, \oplus, \otimes)$  является коммутативным полукольцом с нулем  $\mathbf{0}$  и единицей  $\mathbf{1}$ , в котором сложение идемпотентно, а для каждого ненулевого элемента существует обратный относительно умножения.

В таком полукольце, которое часто называют идемпотентным полуполем, для любого  $x \neq \mathbf{0}$  существует обратный элемент  $x^{-1}$ . Пусть  $\mathbb{X}_+ = \mathbb{X} \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Для любых  $x, y \in \mathbb{X}_+$  стандартным путем вводится степень  $x^y$ . Как обычно, полагают  $x^0 = \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{0}^y = \mathbf{0}$ .

Далее знак операции умножения  $\otimes$  будет, как обычно, опускаться. Обозначение степени будет использоваться в смысле идемпотентной алгебры. Однако, при записи выражений на месте показателя степени будут, для простоты, применяться обычные арифметические операции.

В силу идемпотентности сложения на  $\mathbb X$  определено отношение  $\leq$  линейного порядка так, что  $x\leq y$  только тогда, когда  $x\oplus y=y$ . Ниже знаки операций отношения будут пониматься в смысле указанного линейного порядка. Заметим, что в соответствии с таким порядком для любого  $x\in \mathbb X$  выполняется  $x\geq \mathbf 0$ .

Примерами полуколец рассматриваемого типа являются

$$\begin{split} \mathbb{R}_{\max,+} &= (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +), \quad \mathbb{R}_{\min,+} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +), \\ \mathbb{R}_{\max,\times} &= (\mathbb{R}_+, \max, \times), \qquad \qquad \mathbb{R}_{\min,\times} = (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \min, \times), \end{split}$$

где  $\mathbb{R}$  — множество вещественных чисел,  $\mathbb{R}_+$  — множество неотрицательных вещественных чисел.

В полукольце  $\mathbb{R}_{\max,+}$  нулем является  $-\infty$ , а единицей — число 0. Для всякого  $x \in \mathbb{R}$  определен обратный элемент  $x^{-1}$ , который равен -x в обычной арифметике. Для любых  $x,y \in \mathbb{R}$  определена степень  $x^y$ , значение которой соответствует арифметическому произведению xy. Отношение порядка имеет обычный смысл.

Нетрудно видеть, что все полукольца  $\mathbb{R}_{\max,+}$ ,  $\mathbb{R}_{\min,+}$ ,  $\mathbb{R}_{\max,\times}$  и  $\mathbb{R}_{\min,\times}$  изоморфны друг другу.

## 2.2. Алгебра матриц

Для любых матриц  $A,B\in\mathbb{X}^{m\times n},\ C\in\mathbb{X}^{n\times l}$  и числа  $x\in\mathbb{X}$  обычным путем определяются операции сложения и умножения матриц

$${A \oplus B}_{ij} = {A}_{ij} \oplus {B}_{ij}, \qquad {BC}_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} {B}_{ik} {C}_{kj},$$

а также операция умножения матрицы на число  $\{xA\}_{ij} = x\{A\}_{ij}$ .

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и обозначается символом **0**. Матрица называется регулярной, если в каждой строке и каждом столбце матрицы имеется по крайней мере один ненулевой элемент. Далее будем предполагать, что все рассматриваемые ненулевые матрицы являются регулярными.

Сумма всех элементов матрицы  $\,A\,$  называется ее нормой и обозначается

$$||A|| = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{m} a_{ij}.$$

Для любых матриц A и B подходящего размера и числа  $c \geq \mathbf{1}$  выполняется

$$\|A \oplus B\| = \|A\| \oplus \|B\|, \qquad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \qquad \|cA\| = c\|A\|.$$

Как обычно, квадратная матрица  $A \in \mathbb{X}^{n \times n}$  называется диагональной, если все ее недиагональные элементы равны нулю, и

треугольной, если равны нулю все ее элементы выше (ниже) диагонали. Матрица  $I = \operatorname{diag}(\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})$  называется единичной.

Целая неотрицательная степень матрицы A определяется из соотношений  $A^0=I,\ A^{k+l}=A^kA^l$  для любых  $k,l=0,1,\ldots$ 

Квадратная матрица A является матрицей некоторого оператора подобия, если для любого вектора x выполняется равенство

$$||A\boldsymbol{x}|| = \alpha ||\boldsymbol{x}||,$$

где число  $\alpha \neq \mathbf{0}$  называют коэффициентом (множителем) подобия. Для любой матрицы подобия A выполняется равенство  $\alpha = \|A\|$ . Множество всех матриц подобия замкнуто относительно операций сложения и умножения.

Вектор  $y \in \mathbb{X}^m$  линейно зависит от векторов  $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{X}^m$ , если  $y = a_1 x_1 \oplus \cdots \oplus a_n x_n$ , где  $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{X}$  — некоторые коэффициенты. Рангом матрицы называется максимальное число ее линейно независимых строк (столбцов).

Матрица A имеет ранг 1 тогда и только тогда, когда  $A = xy^T$ , где x, y — некоторые ненулевые векторы.

Сумма диагональных элементов матрицы  $A=(a_{ij})\in\mathbb{X}^{n\times n}$  называется ее следом и обозначается

$$\operatorname{tr} A = \bigoplus_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Ясно, что  $\operatorname{tr} A \leq \|A\|$ . Кроме того, для любых матриц A и B подходящего размера справедливо равенство  $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ .

Число  $\lambda$  называется собственным значением (числом) матрицы A, если существует такой ненулевой вектор x, что

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$
.

Как обычно, легко проверить, что для любого собственного числа  $\lambda$  матрицы A и целого  $m \geq 0$  выполняется  $||A^m|| \geq \lambda^m$ .

Максимальное (в смысле линейного порядка, индуцированного идемпотентным сложением) собственное число матрицы называется ее спектральным радиусом и вычисляется по формуле

$$\rho(A) = \bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/m}(A^{m}).$$

Справедливо следующее утверждение [13,14] (см. также [5,15]).

**T** е о р е м а 1 (И.В. Романовский). Для любой матрицы  $A \in \mathbb{X}^{n \times n}$  существуют пределы

$$\lim_{k \to \infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A), \qquad \lim_{k \to \infty} \operatorname{tr}^{1/k}(A^k) = \rho(A),$$

 $r\partial e \ \rho(A) - cneктральный радиус матрицы A.$ 

#### 2.3. Свойства математического ожидания

Рассмотрим некоторые свойства математического ожидания, связанные с операциями полукольца  $\mathbb{R}_{\max,+}$ . Заметим, что эти свойства будут справедливы и для полукольца  $\mathbb{R}_{\min,+}$ .

Ниже будем предполагать, что все рассматриваемые случайные величины заданы на некотором общем вероятностном пространстве и для них существует математическое ожидание.

Легко установить, что для любых случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  выполняется следующие соотношения

$$\mathsf{E}(\xi\oplus\eta)\geq\mathsf{E}\xi\oplus\mathsf{E}\eta\qquad\mathsf{E}\xi\eta=\mathsf{E}\xi\mathsf{E}\eta.$$

Пусть A — случайная матрица. Обозначим через  $\mathsf{E} A$  матрицу, полученную в результате замены каждого элемента матрицы A на его среднее значение при условии, что  $\mathsf{E} \mathsf{0} = \mathsf{0}$ .

Опираясь на предыдущие соотношения для случайных величин, нетрудно проверить, что для любых случайных матриц A и B подходящего размера выполняется

$$\begin{split} \mathsf{E}(A \oplus B) &\geq \mathsf{E}A \oplus \mathsf{E}B, \\ \mathsf{E}\|A\| &\geq \|\mathsf{E}A\|, \end{split} \qquad \begin{aligned} \mathsf{E}AB &\geq \mathsf{E}A\mathsf{E}B, \\ \mathsf{E}\operatorname{tr}A &\geq \operatorname{tr}(\mathsf{E}A). \end{aligned}$$

#### 3. Стохастические динамические системы

Пусть  $A(k) \in \mathbb{X}^{n \times n}$  — случайная матрица,  $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{X}^n$  — вектор состояний,  $k=1,2,\ldots$  Ниже будем рассматривать систему, динамика которой описывается уравнением

$$\boldsymbol{x}(k) = A^T(k)\boldsymbol{x}(k-1).$$

Представление уравнения в форме с транспонированной матрицей имеет целью упрощение дальнейших выкладок. Ясно, что использование матрицы  $A^{T}(k)$  не меняет общий вид уравнения, которое обычно записывается в форме  $\mathbf{x}(k) = A(k)\mathbf{x}(k-1)$ .

В частности, запись уравнения с использованием транспонированной матрицы позволяет рассматривать произведения матриц  $A(1),\ldots,A(k)$  в естественном порядке. Введем обозначение

$$A_k = A(1) \cdots A(k).$$

Тогда из уравнения путем итераций легко получить  $\boldsymbol{x}(k) = A_k^T \boldsymbol{x}(0)$ .

Будем предполагать, что последовательность  $\{A(k)|k\geq 1\}$  состоит из независимых и одинаково распределенных случайных матриц, а также, что существует конечное математическое ожидание  $\mathbb{E}\|A_1\|$ . В то же время, при каждом фиксированном k независимость элементов матрицы A(k) не предполагается.

Заметим, что далее вместо требования независимости и одинакового распределения случайных матриц A(k) для справедливости многих утверждений будет достаточно выполнение условия стационарности (в узком смысле) последовательности  $\{A(k)|k\geq 1\}$ .

#### 3.1. Показатель Ляпунова

Показатель Ляпунова, который представляет собой (асимптотическую) среднюю скорость роста вектора состояний системы, в полукольцах  $\mathbb{R}_{\max,+}$  и  $\mathbb{R}_{\min,+}$  определяется как предел

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} \|\boldsymbol{x}(k)\|^{1/k}$$

при условии, что этот предел существует.

В полукольцах  $\mathbb{R}_{\max,\times}$  и  $\mathbb{R}_{\min,\times}$  рассматривается предел

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} \log \|\boldsymbol{x}(k)\|^{1/k}.$$

Далее при изучении средней скорости роста вектора состояний системы в качестве основного полукольца  $\mathbb{X}$  будем рассматривать  $\mathbb{R}_{\max,+}$ . В силу изоморфизма между полукольцами  $\mathbb{R}_{\max,+}$ ,  $\mathbb{R}_{\min,+}$ ,

 $\mathbb{R}_{\max,\times}$  и  $\mathbb{R}_{\max,\times}$ , результаты, полученные для  $\mathbb{R}_{\max,+}$ , могут, как правило, быть распространены на остальные полукольца.

Будем предполагать, что координаты начального вектора  $\boldsymbol{x}(0)$  с вероятностью 1 ограничены. Тогда с вероятностью 1

$$c_1 \mathbf{1} \le x(0) \le c_2 \mathbf{1}$$
,

где  $c_1$  и  $c_2$  — некоторые константы,  $\mathbf{1} = (\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})^T$ .

Ясно, что при таком условии выполняется неравенство

$$c_1 ||A_k|| \le ||\boldsymbol{x}(k)|| \le c_2 ||A_k||,$$

откуда следует, что среднюю скорость роста  $\lambda$  вектора состояний можно определить так

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} ||A_k||^{1/k}. \tag{1}$$

# 3.2. Условия существования предела

Общие условия существования предела (1) дает применение эргодической теоремы из работы [23]. Заметим, что в формулировке этой теоремы, которая представлена ниже, знаки арифметических операций имеют обычный смысл.

**Теорема 2** (Кингман). Пусть  $\{\zeta_{lm}|l < m\}$  — семейство случайных величин, которое при всех l < k < m удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $\zeta_{lm} \leq \zeta_{lk} + \zeta_{km} \ (cyba\partial dumu \ bhocmb);$
- **2)** совместные распределения  $\{\zeta_{lm}|l < m\}$  и  $\{\zeta_{l+1,m+1}|l < m\}$  совладают (стационарность);
- **3)** существует  $\mathsf{E}\zeta_{0k} \geq -ck$ , где c некоторая постоянная (ограниченность).

Тогда существует константа  $\lambda$  такая, что

$$\lim_{k\to\infty}\zeta_{0k}/k=\lambda\quad c\ \text{s. 1},$$
 
$$\lim_{k\to\infty}\mathsf{E}\zeta_{0k}/k=\lambda.$$

Воспользуемся этой теоремой для исследования существования рассматриваемого предела в случае полукольца  $\mathbb{R}_{\max,+}$ .

**T** е о р е м а **3.** Пусть  $\{A(k)|k\geq 1\}$  — стационарная последовательность случайных матриц,  $\mathbb{E}\|A_1\|<\infty$  и  $\rho(\mathbb{E}A_1)>\mathbf{0}$ .

Тогда существует конечное число  $\lambda$  такое, что

$$\begin{split} &\lim_{k\to\infty}\|A_k\|^{1/k}=\lambda\quad c\ \emph{e. 1},\\ &\lim_{k\to\infty}\mathsf{E}\|A_k\|^{1/k}=\lambda. \end{split}$$

 $\mathcal{A}$  о  $\kappa$  а з а m е  $\Lambda$  ь c m в o. Рассмотрим семейство  $\{\zeta_{lm}|l < m\}$  случайных величин

$$\zeta_{lm} = ||A(l+1)A(l+2)\cdots A(m)||$$

и заметим, что имеет место равенство  $\zeta_{0k} = ||A_k||$ .

Проверим выполнение для этого семейства условий Теоремы 2.

Субаддитивность семейства следует из неравенства

$$||A(l+1)\cdots A(m)|| \le ||A(l+1)\cdots A(k)|| ||A(k+1)\cdots A(m)||.$$

Очевидно, что семейство обладает свойством стационарности.

Из условия  $\mathsf{E}\|A_1\|<\infty$  следует, что  $\mathsf{E}\|A_k\|<\infty$ . Кроме того, в силу условия  $\rho(\mathsf{E}A_1)>\mathbf{0}=-\infty$  и соотношений

$$E||A_k|| = E||A(1) \cdots A(k)|| \ge ||(EA_1)^k|| \ge \rho^k(EA_1),$$

рассматриваемое семейство обладает свойством ограниченности.

Применяя Теорему 2, приходим к требуемому результату.

Рассмотрим случай, когда матрицы A(k) при всех k независимы и одинаково распределены. Учитывая, что при таких условиях обеспечивается стационарность последовательности  $\{A(k)|k\geq 1\}$ , этот случай сводится к тому, который рассматривается в теореме.

# 4. Вычисление показателя Ляпунова

Приведем примеры нахождения средней скорости роста вектора состояний (показателя Ляпунова) для стохастических динамических систем с матрицами некоторых частных видов [19–22]. Заметим, что для всех рассматриваемых систем условия Теоремы 3 предполагаются выполненными.

#### 4.1. Системы с диагональной матрицей

Предположим, что  $A(k) = \operatorname{diag}(d_1(k), \dots, d_n(k))$  — диагональная матрица,  $k = 1, 2, \dots$  Нетрудно проверить, что

$$A_{k} = \prod_{j=1}^{k} A(j) = \operatorname{diag} \left( \prod_{j=1}^{k} d_{1}(j), \dots, \prod_{j=1}^{k} d_{n}(j) \right),$$
$$\|A_{k}\| = \bigoplus_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} d_{i}(j).$$

Учитывая непрерывность операции  $\oplus$ , имеем

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} ||A_k||^{1/k} = \bigoplus_{i=1}^n \lim_{k \to \infty} \left( \prod_{j=1}^k d_i(j) \right)^{1/k}.$$

Запишем выражение справа под знаком предела в обычных обозначениях. Применяя Теорему 2, для каждого  $i=1,\ldots,n$  получим

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} d_i(j) = \mathsf{E} d_i(1) \quad \text{c B. 1},$$

откуда следует, что

$$\lambda = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathsf{E} d_i(1) = \operatorname{tr}(\mathsf{E} A_1).$$

# 4.2. Системы с матрицей подобия

Предположим, что при всех  $k=1,2,\dots$  матрица A(k) является матрицей подобия. Тогда

$$||A_k|| = ||A(1)|| \cdots ||A(k)||.$$

Вычисляя математическое ожидание, имеем  $\, \mathsf{E} \|A_k\|^{1/k} = \mathsf{E} \|A_1\|, \,$ откуда следует

$$\lambda = \mathsf{E} \|A_1\|.$$

## 4.3. Системы с матрицей ранга 1

Пусть при всех  $k=1,2,\dots$  найдутся векторы  ${\boldsymbol u}(k)$  и  ${\boldsymbol v}(k)$  такие, что

$$A(k) = \boldsymbol{u}(k)\boldsymbol{v}^T(k).$$

В этом случае имеем

$$A_k = \boldsymbol{u}(1) \left( \prod_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{v}^T(j) \boldsymbol{u}(j+1) \right) \boldsymbol{v}^T(k),$$
$$\|A_k\| = \left( \prod_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{v}^T(j) \boldsymbol{u}(j+1) \right) \|\boldsymbol{u}(1)\| \|\boldsymbol{v}(k)\|.$$

Переходя к математическому ожиданию и вычисляя предел последовательности  $\mathsf{E}\|A_k\|^{1/k}$  при  $k\to\infty$ , окончательно получим

$$\lambda = \mathsf{E}[\boldsymbol{v}^T(1)\boldsymbol{u}(2)].$$

# 4.4. Системы с треугольной матрицей

Пусть матрица системы A(k) является треугольной. Случай системы с треугольной матрицей можно рассматривать как обобщение случая с диагональной матрицей. Однако, задача нахождения величины показателя Ляпунова в общем виде для системы с треугольной матрицей оказывается более сложной.

Для треугольных матриц специального вида, которые появляются при анализе многофазных систем и ациклических сетей с очередями и синхронизацией, эта задача решалась в работах [19, 20].

Для произвольной треугольной матрицы в [22] получен следующий результат, который опирается на классические оценки для средних значений сумм максимумов независимых случайных величин в сочетании с некоторыми новыми неравенствами для произведений треугольных матриц в идемпотентной алгебре.

 ${f T}$  e o p e м a 4. Для системы с треугольной матрицей A(k) выполняется

$$\lambda = \operatorname{tr}(\mathsf{E} A_1).$$

## 4.5. Метод разложения матрицы системы

В случае, когда матрица системы относится к одному из видов, рассмотренных выше, задача вычисления показателя Ляпунова не представляет особого труда. Если матрица системы имеет иной вид, для решения задачи может быть использован следующий прием.

Предположим, что имеется представление матрицы A(k) в виде произведения (разложения)

$$A(k) = B(k)C(k),$$

где B(k) и C(k) — некоторые независимые матрицы.

Если решение задачи для системы с матрицей

$$A'(k) = C(k)B(k+1)$$

известно, то обычно его можно взять в качестве решения исходной задачи. В противном случае можно попытаться продолжить процедуру разложения, применяя ее теперь к матрице A'(k).

Если матрица имеет единичный ранг, то разложение матрицы A(k) всегда существует и принимает вид  $A(k) = \boldsymbol{u}(k)\boldsymbol{v}^T(k)$ . Заметим, что при этом для решения задачи вычисления показателя Ляпунова независимость векторов  $\boldsymbol{u}(k)$  и  $\boldsymbol{v}(k)$  не требуется.

# 4.6. Система с матрицей неполного ранга

Рассмотрим произвольную матрицу A порядка n. Предположим, что ранг матрицы r < n. Тогда матрица A может быть представлена в виде ее скелетного разложения

$$A = BC$$
.

Будем называть такое разложение обратным треугольным скелетным разложением, если матрица CB является треугольной.

Рассмотрим стохастическую динамическую систему и предположим, что при всех  $k=1,2,\ldots$ , для матрицы системы A(k) существует обратное треугольное скелетное разложение

$$A(k) = B(k)C(k)$$

с независимыми сомножителями B(k) и C(k).

Имеет место следующий результат.

**Т е о р е м а 5.** Для системы с матрицей A(k), которая допускает обратное треугольное скелетное разложение с независимыми сомножителями, выполняется

$$\lambda = \operatorname{tr}(\mathsf{E}[C(1)B(1)]).$$

 $\mathcal{A}$  о  $\kappa$  а з а m е  $\Lambda$  ь c m в o. Рассмотрим произведение матриц

$$A_k = \prod_{j=1}^k B(j)C(j) = B(1) \left( \prod_{j=1}^{k-1} C(j)B(j+1) \right) C(k).$$

Сначала заметим, что

$$||A_k|| \ge \operatorname{tr} A_k = \operatorname{tr} \left( C(k)B(1) \prod_{j=1}^{k-1} C(j)B(j+1) \right),$$

откуда следует

$$\mathsf{E}||A_k|| \ge \mathsf{E}\operatorname{tr} A_k \ge \operatorname{tr} \left(\mathsf{E}[C(1)B(1)]^k\right).$$

Перейдем к пределу при  $k \to \infty$  и применим Теорему 1. Имеем

$$\lim_{k \to \infty} \mathsf{E} \|A_k\|^{1/k} \ge \lim_{k \to \infty} \operatorname{tr}^{1/k} \left( \mathsf{E}[C(1)B(1)]^k \right) = \rho(\mathsf{E}[C(1)B(1)]).$$

Учитывая треугольную форму матрицы C(1)B(1), заключаем, что

$$\lambda \geq \operatorname{tr}(\mathsf{E}[C(1)B(1)]).$$

С другой стороны, справедливо неравенство

$$||A_k|| \le \left| \left| \prod_{j=1}^{k-1} C(j)B(j+1) \right| \right| ||B(1)|| ||C(k)||.$$

Заметим, что матрицы C(j)B(j+1) при всех  $j=1,\ldots,k-1$ , имеют треугольную форму и независимы. Переходя к пределу и применяя Теорему 4, имеем

$$\lambda \leq \operatorname{tr}(\mathsf{E}[C(1)B(1)]).$$

Учитывая противоположное неравенство, получаем требуемый результат.

## 5. Модели динамики сетей с очередями

Рассмотрим класс моделей сетей с очередями, в которых наряду с обычными процедурами обслуживания требований могут выполняться вспомогательные операции "объединения" (join) и "разъединения" (fork). Эти операции обеспечивают возможность объединения (сборки) нескольких требований в одно, а также разъединения (расщепление) требования на несколько новых требований. Такие модели обычно называют сетями с объединением-разъединением требований (fork-join queueing networks) или сетями с синхронизацией поступления и убытия требований [24].

Модели сетей с синхронизацией оказываются весьма полезными при описании производственных систем, бизнес-процессов, сетей передачи сообщений, вычислительных систем и т. п. Примером

операций объединения и разъединения в реальных системах может служить разделение сообщения на отдельные пакеты, предназначенные для передачи по различным маршрутам в сети передачи сообщений, и восстановление сообщения из пакетов в конечном пункте его доставки. Другие примеры можно найти в [24].

Особенностью рассматриваемого класса моделей является возможность применения аппарата идемпотентной алгебры для описания и анализа динамики системы. Ниже будет показано, что любая система рассматриваемого класса может быть описана при помощи линейного уравнения в полукольце  $\mathbb{R}_{\max,+}$ 

$$\boldsymbol{x}(k) = A(k)\boldsymbol{x}(k-1),\tag{2}$$

где x(k) — вектор, описывающий состояние системы, A(k) — некоторая переходная матрица,  $k=1,2,\ldots$ 

#### 5.1. Сети с синхронизацией

Рассмотрим сеть, состоящую из n узлов, в каждом из которых имеется обслуживающее устройство и накопитель, предназначенный для размещения требований, ожидающих обслуживания. Топология сети описывается при помощи ориентированного графа  $\mathcal{G} = \langle V, E \rangle$ , где  $V = \{1, \dots, n\}$  — множество вершин графа, соответствующих узлам сети, а  $E = \{(i,j)\} \subset V \times V$  — множество дуг графа, определяющих маршруты движения требований.

Для любого узла  $i \in V$  определим множества узлов

$$P(i) = \{j | (j, i) \in E\}, \qquad S(i) = \{j | (i, j) \in E\}.$$

Каждый узел i, для которого выполняется  $P(i) = \emptyset$ , рассматривается как источник бесконечного потока требований, поступающих в систему. Требования выводятся из системы после обслуживания в узлах i, для которых  $S(i) = \emptyset$ .

В начальный момент времени все обслуживающие устройства сети свободны, очередь требований в каждом узле-источнике имеет бесконечную длину, а очередь в любом другом узле i содержит  $c_i$  требований,  $0 \le c_i < \infty$ .

Предполагается, что процессы обслуживания требований в узлах сети удовлетворяют некоторым ограничениям по синхронизации. Механизмы синхронизации реализуются при помощи вспомогательных операций "объединения" (join) и "разъединения" (fork), которые выполняются в узлах соответственно до и после обслуживания требования [24]. Выполнение операции объединения в узле i состоит в том, что новое требование не присоединяется к очереди до тех пор, пока в узел не поступит по одному требованию из каждого узла  $j \in P(i)$ . Эти требования объединяются в одно, которое встает в очередь требований, ожидающих обслуживания в узле i.

Операция разъединения в узле i выполняется всякий раз, когда завершается обслуживание очередного требования. При этом требование замещается новыми требованиями, количество которых равно числу узлов множества S(i). Эти требования одновременно покидают узел и направляются по одному в каждый узел  $j \in S(i)$ .

Операции объединения и разъединения, а также перемещение требований в сети от узла к узлу осуществляются мгновенно.

# 5.2. Динамическое уравнение

Обозначим через  $\tau_{ik}$  продолжительность, а через  $x_i(k)$  — момент времени завершения k-го обслуживания в узле  $i = 1, \ldots, n$ .

Будем предполагать, что для каждого i последовательность  $\{\tau_{ik}, k \geq 1\}$  состоит из независимых и одинаково распределенных неотрицательных случайных величин, для которых существует конечное математическое ожидание. Кроме того, для любого k случайные величины  $\tau_{ik}$  и  $\tau_{jk}$  независимы при любых  $i \neq j$ .

При условии, что система начинает функционировать в нулевой момент времени, положим  $x_i(0)=0=\mathbf{1}$  и  $x_i(k)=-\infty=\mathbf{0}$  для всех k<0. Введем обозначения

$$\boldsymbol{x}(k) = \left( \begin{array}{c} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{array} \right), \qquad \mathcal{T}_k = \left( \begin{array}{ccc} \tau_{1k} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \tau_{nk} \end{array} \right).$$

Положим  $M=\max\{c_i|c_i<\infty,i=1,\ldots,n\}$  и для каждого  $m=0,1,\ldots,M$  введем матрицу  $G_m=(g_{ij}^m)$ , элементы которой определяются исходя из следующих условий

$$g_{ij}^m = egin{cases} \mathbf{1}, & \text{если } i \in P(j) \text{ и } m = c_j, \\ \mathbf{0}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что матрица  $G_m$  может рассматриваться как матрица смежности графа  $\mathcal{G}_m = \langle V, E_m \rangle$ , где  $E_m = \{(i,j)|i \in P(j), c_j = m\}$ .

Справедливо следующее утверждение [9, 11, 12].

 $\Pi$  е м м а 1. Пусть подграф сети, соответствующий матрице  $G_0$ , является ациклическим с длиной наибольшего пути r.

Тогда динамика системы описывается в полукольце  $\mathbb{R}_{\max,+}$  при помощи уравнения

$$\boldsymbol{x}(k) = \bigoplus_{m=1}^{M} A_m(k)\boldsymbol{x}(k-m), \tag{3}$$

 $e \partial e$ 

$$A_1(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^r \mathcal{T}_k (I \oplus G_1^T),$$
  

$$A_m(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^r \mathcal{T}_k G_m^T, \quad m = 2, \dots, M.$$

#### 5.3. Сети с конечной емкостью накопителей

Будем предполагать, что емкость накопителей в некоторых узлах сети является конечной. В таких сетях возможно блокирование передвижения требований от одного узла к другому из-за отсутствия свободного места в накопителе узла, в который направляется требование. Различают два основных типа блокировки: производственный тип (manufacturing blocking) и коммуникационный тип (communication blocking) [9,24].

Производственный механизм блокирования заключается в том, что требование после завершения обслуживания не может освободить обслуживающее устройство и перейти в следующий узел, если накопитель этого узла заполнен другими требованиями.

Производственный тип блокировки является характерным для моделей производственных процессов. Например, сборка готовых изделий и передача их на склад готовой продукции могут быть приостановлены в виду отсутствия свободного места на складе.

Предположим, что в сети действует правило, при котором обслуживание требования в узле i не начинается до тех пор, пока в каждом из узлов  $j \in S(i)$  не окажется свободного места. Такой механизм блокирования отражает особенности работы коммуникационных сетей, в которых обработка пакета данных начинается тогда, когда имеется свободный канал для его дальнейшей передачи.

Пусть узел i имеет накопитель емкостью  $b_i,\ 0 \le b_i \le \infty$ . Ясно, что для всех  $i=1,\ldots,n$  выполняется условие  $b_i \ge c_i$ .

Определим величины

$$M_1 = \max\{c_i | c_i < \infty, i = 1, \dots, n\},\$$
  
 $M_2 = \max\{b_i | b_i < \infty, i = 1, \dots, n\} + 1.$ 

Для каждого  $m=1,\dots,M_2$  введем матрицу  $H_m=(h_{ij}^m)$  с элементами

$$h_{ij}^m = egin{cases} \mathbf{1}, & \text{если } j \in S(i) \text{ и } m = b_j + 1, \\ \mathbf{0}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть  $M = \max\{M_1, M_2\}$ . Если  $M_2 > M_1$ , то положим  $G_m = \mathbf{0}$  для всех  $m = M_1 + 1, M_1 + 2, \dots, M_2$ .

Имеет место следующее утверждение [9, 11, 12].

 $\Pi$  е м м а 2. Пусть в сети с ограниченной емкостью накопителей подграф, который соответствует матрице  $G_0$ , является ациклическим, r- длина наибольшего пути в этом подграфе.

Тогда динамика системы описывается в полукольце  $\mathbb{R}_{\max,+}$  уравнением (3) с матрицами  $A_1, \ldots, A_M$ , которые в случае производственного типа блокирования определяются так

$$A_1(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^r (\mathcal{T}_k (I \oplus G_1^T) \oplus H_1),$$
  

$$A_m(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^r (\mathcal{T}_k G_m^T \oplus H_m), \quad m = 2, \dots, M;$$

а в случае коммуникационного типа блокирования так

$$A_1(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^r \mathcal{T}_k (I \oplus G_1^T \oplus H_1),$$
  

$$A_m(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^r \mathcal{T}_k (G_m^T \oplus H_m), \quad m = 2, \dots, M.$$

# 6. Примеры моделей сетей

# 6.1. Открытые и замкнутые многофазные системы

Многофазные системы могут рассматриваться как сети с простейшей (линейной) топологией [8,9], в которых не предусмотрено выполнение операций объединения и разъединения требований.

Рассмотрим открытую многофазную систему, которая состоит из n узлов с неограниченной емкостью накопителей (рис. 1).

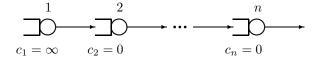


Рис. 1: Открытая многофазная система.

Учитывая, что M=0, имеем одну матрицу

$$G_0 = \left( egin{array}{cccc} {f 0} & {f 1} & & {f 0} \ dots & \ddots & \ddots & \ dots & & \ddots & {f 1} \ {f 0} & \dots & \dots & {f 0} \end{array} 
ight),$$

которая совпадает с матрицей смежности графа всей системы.

Полагая  $G_1 = \mathbf{0}$ , приходим к уравнению (2) с матрицей

$$A(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^{n-1} \mathcal{T}_k =$$

$$= \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \tau_{1k} \tau_{2k} & \tau_{2k} & & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \tau_{1k} \cdots \tau_{nk} & \tau_{2k} \cdots \tau_{nk} & \dots & \tau_{nk} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Рассмотрим замкнутую систему с неограниченной емкостью накопителей (рис. 2).

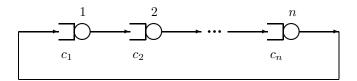


Рис. 2: Замкнутая многофазная система.

Если  $c_i = 1$  для всех  $i = 1, \ldots, n$ , то M = 1,

$$G_0 = \mathbf{0}, \qquad G_1 = \left( egin{array}{cccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & & \mathbf{0} \\ dots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{array} 
ight).$$

Имеем матрицу системы

# 6.2. Многофазные системы с блокированием

Предположим, что узлы открытой многофазной системы могут иметь ограниченную емкость накопителей (рис. 3).

Рассмотрим систему с производственным типом блокирования при n=3. Пусть  $b_1=b_2=\infty$  и  $b_3=0$ . Ясно, что тогда M=1,

$$G_0 = \left( egin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} 
ight), \quad G_1 = \mathbf{0}, \quad H_1 = \left( egin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} 
ight).$$

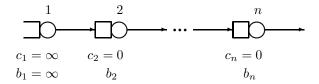


Рис. 3: Многофазная система с конечной емкостью накопителей.

Матрица системы имеет вид

$$A(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^2 (\mathcal{T}_k \oplus H_1) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tau_{1k} \tau_{2k} & \tau_{2k} & \mathbf{1} \\ \tau_{1k} \tau_{2k} \tau_{3k} & \tau_{2k} \tau_{3k} & \tau_{3k} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Пусть в системе, изображенной на рис. 3, действует коммуникационный тип блокирования.

Предположим, что  $n=3,\ b_1=\infty$  и  $b_2=b_3=0.$  Тогда  $M=1,\ G_1=\mathbf{0}$  и  $H_1=G_0,$  где матрица  $G_0$  имеет такой же вид, как в предыдущем примере. Найдем матрицу системы

$$A(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^2 \mathcal{T}_k (I \oplus G_0) =$$

$$= \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \tau_{1k} & \mathbf{0} \\ \tau_{1k} \tau_{2k} & \tau_{1k} \tau_{2k} & \tau_{2k} \\ \tau_{1k} \tau_{2k} \tau_{3k} & \tau_{1k} \tau_{2k} \tau_{3k} & \tau_{2k} \tau_{3k} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

#### 6.3. Сеть с синхронизацией движения требований

Перейдем к моделям систем, в которых могут выполняться операции объединения и разъединения требований.

Рассмотрим сеть с синхронизацией и неограниченной емкостью накопителей в узлах, представленную на рис. 4 [11].

Ясно, что для рассматриваемой сети M=1. Найдем матрицы

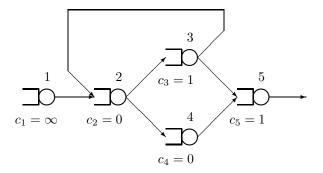


Рис. 4: Сеть с синхронизацией движения требований.

Учитывая, что r=2, приходим к уравнению (2) с матрицей

$$A(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^2 \mathcal{T}_k (I \oplus G_1^T) =$$

$$= \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tau_{1k} \tau_{2k} & \tau_{2k} \tau_{3k} & \tau_{2k} \tau_{3k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tau_{3k} & \tau_{3k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tau_{1k} \tau_{2k} \tau_{4k} & \tau_{2k} \tau_{3k} \tau_{4k} & \tau_{2k} \tau_{3k} \tau_{4k} & \tau_{4k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tau_{5k} & \tau_{5k} & \tau_{5k} \end{pmatrix}.$$
(8)

# 6.4. Карусельный механизм маршрутизации

В моделях систем, рассмотренных выше, использовалась некоторая постоянная для всех требований процедура выбора маршрута, при которой требования, покидающие узел, направлялись к одним и тем же заранее определенным узлам. Однако, модели сетей с синхронизацией могут быть также применены к описанию систем с переменной регулярной маршрутизацией. В таких системах требования после обслуживания в узле могут направляться к различным узлам, выбор которых осуществляется в соответствии с некоторой регулярной (например, циклической) процедурой.

Рассмотрим открытую систему, изображенную на рис 5, которая состоит из l+1 узла [10].

Узел 0 системы представляет внешний источник требований. Каждое требование, поступающее в систему, направляется в один

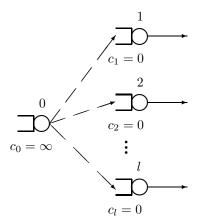


Рис. 5: Система с карусельным механизмом маршрутизации.

из узлов  $i=1,\dots,l$  в соответствии с круговым (карусельным) механизмом маршрутизации, который состоит в следующем. Первое требование переходит в узел 1, второе переходит в узел 2 и т. д. После l-го требования, переданного в узел l, следующее требование направляется в узел 1 и вся процедура повторяется снова. Подобный карусельный механизм маршрутизации используется, например, в гибких автоматизированных производственных системах, а также в моделях вычислительных систем и процессов.

Рассматриваемая система может быть заменена эквивалентной сетью с синхронизацией, состоящей из n=2l узлов (см. рис. 6).

Для новой системы продолжительность обслуживания требования k в узлах  $i=l+1,l+2,\ldots,2l$  можно определить так

$$\tau_{ik} = \tau_{0,kl-2l+i}.$$

Пусть l=2. Запишем матрицы

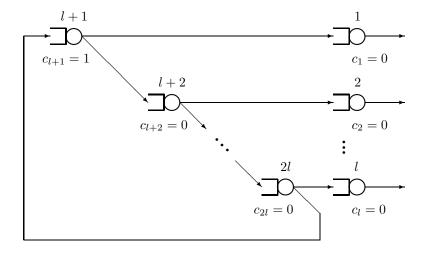


Рис. 6: Эквивалентная сеть с синхронизацией.

Вычисление матрицы системы дает результат

$$A(k) = (I \oplus \mathcal{T}_k G_0^T)^2 \mathcal{T}_k (I \oplus G_1^T) =$$

$$= \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbf{0} & \tau_{1k} \tau_{3k} & \tau_{1k} \tau_{3k} \\ \mathbf{0} & \tau_{2k} & \tau_{2k} \tau_{3k} \tau_{4k} & \tau_{2k} \tau_{3k} \tau_{4k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tau_{3k} & \tau_{3k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tau_{3k} \tau_{4k} & \tau_{3k} \tau_{4k} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

# 7. Среднее время цикла обслуживания

Пусть имеется некоторая система с очередями, динамика которой описывается при помощи уравнения (2).

Будем представлять эволюцию системы в виде последовательности циклов обслуживания. Первый цикл начинается в нулевой момент времени и продолжается до тех пор, пока в каждом узле сети не будет обслужено по одному требованию. Затем начинается второй цикл, который завершается тогда, когда в каждом узле будет обслужено по два требования, и т. д.

Ясно, что время завершения цикла k определяется величиной  $\|x(k)\|$ . Кроме того, с учетом условия x(0)=0, время завершения цикла k может быть определено следующим образом

$$\|x(k)\| = \|A_k\|, \qquad A_k = A(k) \cdots A(1).$$

Нетрудно видеть, что в моделях систем и сетей с очередями средняя скорость роста (показатель Ляпунова) системы имеет смысл среднего времени цикла обслуживания. Величину, обратную среднему времени цикла обслуживания, можно рассматривать как пропускную способность системы.

Ниже приведены примеры определения среднего времени цикла обслуживания для различных систем.

#### 7.1. Открытая многофазная система

Рассмотрим открытую многофазную систему, состоящую из n узлов с неограниченным объемом накопителей (рис. 1). Матрица системы (4) является треугольной. Применение Теоремы 4 дает

$$\lambda = \operatorname{tr}(\mathsf{E}\mathcal{T}_1) = \max(\mathsf{E}\tau_{11}, \dots, \mathsf{E}\tau_{n1}).$$

## 7.2. Замкнутая многофазная система

Пусть имеется замкнутая многофазная система с n узлами и неограниченным объемом накопителей (рис. 2). При условии, что в начальный момент времени в очереди каждого узла имеется по одному требованию, матрица системы имеет вид (5).

Нетрудно проверить, что эта матрица является матрицей подобия с коэффициентом  $\|A(k)\| = \tau_{1k} \oplus \cdots \oplus \tau_{nk} = \operatorname{tr} \mathcal{T}_k$ . Тогда

$$\lambda = \mathsf{E} \operatorname{tr} \mathcal{T}_1 = \mathsf{E} \max(\tau_{11}, \dots, \tau_{n1}).$$

## 7.3. Многофазные системы с блокированием

Рассмотрим систему с производственным типом блокирования и ограниченной емкостью накопителей, представленную на рис. 3.

Пусть n = 3,  $b_1 = b_2 = \infty$  и  $b_3 = 0$ . Имеем матрицу (6).

Учитывая, что две последние строки матрицы пропорциональны, имеем разложение

$$A(k) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k} & \mathbf{1} \\ \tau_{1k}\tau_{2k}\tau_{3k} & \tau_{2k}\tau_{3k} & \tau_{3k} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \tau_{3k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = B(k)C(k).$$

Найдем матрицу

$$C(k)B(k+1) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbf{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k} \oplus \tau_{3,k+1} \end{pmatrix}.$$

Применяя теорему 5, получим

$$\lambda = \text{tr}(\mathsf{E}[C(1)B(1)]) = \max(\mathsf{E}\tau_{11}, \mathsf{E}\max(\tau_{21}, \tau_{31})).$$

Пусть в системе действует коммуникационный тип блокирования. При условиях  $n=3,\ b_1=\infty$  и  $b_2=b_3=0$  матрица системы имеет вид (7). Построим разложение

$$A(k) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \tau_{1k} & \mathbf{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k} \\ \tau_{1k}\tau_{2k}\tau_{3k} & \tau_{1k}\tau_{2k}\tau_{3k} & \tau_{2k}\tau_{3k} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \tau_{2k} & \tau_{2k} \\ \tau_{2k}\tau_{3k} & \tau_{2k}\tau_{3k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \tau_{1k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = B(k)C(k).$$

Рассмотрим произведение

$$C(k)B(k+1) = \begin{pmatrix} \tau_{1k}\tau_{2,k+1} & \tau_{1k}\tau_{2,k+1} \\ \tau_{2,k+1}\tau_{3,k+1} & \tau_{2,k+1}\tau_{3,k+1} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \tau_{1k} \\ \tau_{3,k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{2,k+1} & \tau_{2,k+1} \\ \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}(k)\boldsymbol{v}^{T}(k).$$

Учитывая, что это произведение является матрицей единичного ранга, окончательно получим

$$\lambda = \mathsf{E}[\boldsymbol{v}^T(1)\boldsymbol{u}(2)] = \mathsf{E}\tau_{21} + \mathsf{E}\max(\tau_{11}, \tau_{31}).$$

# 7.4. Сеть с синхронизацией

Рассмотрим сеть, изображенную на рис. 4. Матрица системы (8) может быть представлена в виде

$$A(k) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k} & \tau_{2k}\tau_{3k} & \tau_{2k}\tau_{3k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tau_{3k} & \tau_{3k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tau_{1k}\tau_{2k}\tau_{4k} & \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{4k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tau_{5k} & \tau_{5k} & \tau_{5k} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tau_{2k} & \tau_{2k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tau_{2k}\tau_{4k} & \tau_{2k}\tau_{4k} & \tau_{4k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tau_{5k} & \tau_{5k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tau_{3k} & \tau_{3k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \\ = B(k)C(k).$$

Найдем произведение матриц

$$C(k)B(k+1) = \left( \begin{array}{cccc} \tau_{1k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tau_{2,k+1}\tau_{3k} & \tau_{2,k+1}\tau_{3k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tau_{2,k+1}\tau_{4,k+1} & \tau_{2,k+1}\tau_{4,k+1} & \tau_{4,k+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \tau_{5,k+1} & \tau_{5,k+1} \end{array} \right).$$

В силу треугольной формы полученной матрицы применим Теорему 5. В результате имеем

$$\lambda = \operatorname{tr}(\mathsf{E}[C(1)B(1)]) = \max(\mathsf{E}\tau_{11}, \mathsf{E}\tau_{21} + \mathsf{E}\tau_{31}, \mathsf{E}\tau_{41}, \mathsf{E}\tau_{51}).$$

#### 7.5. Карусельный механизм маршрутизации

Рассмотрим сеть с синхронизацией (рис. 6), которая моделирует систему с карусельным механизмом маршрутизации с l=2.

Возьмем матрицу системы (9) и представим ее в виде

$$\begin{split} A(k) &= \left( \begin{array}{cccc} \tau_{1k} & \mathbf{0} & \tau_{1k}\tau_{3k} & \tau_{1k}\tau_{3k} \\ \mathbf{0} & \tau_{2k} & \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{2k}\tau_{3k}\tau_{4k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tau_{3k} & \tau_{3k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tau_{3k}\tau_{4k} & \tau_{3k}\tau_{4k} \end{array} \right) = \\ &= \left( \begin{array}{cccc} \tau_{1k} & \mathbf{0} & \tau_{1k} \\ \mathbf{0} & \tau_{2k} & \tau_{2k}\tau_{4k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tau_{4k} \end{array} \right) \left( \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tau_{3k} & \tau_{3k} \end{array} \right) = B(k)C(k). \end{split}$$

Рассмотрим произведение

$$C(k)B(k+1) = \begin{pmatrix} \tau_{1,k+1} & \mathbf{0} & \tau_{1,k+1} \\ \mathbf{0} & \tau_{2,k+1} & \tau_{2,k+1}\tau_{4,k+1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tau_{3k}\tau_{4,k+1} \end{pmatrix}$$

Из треугольной формы матрицы произведения следует, что

$$\lambda = \text{tr}(\mathsf{E}[C(1)B(2)]) = \max(\mathsf{E}\tau_{11}, \mathsf{E}\tau_{21}, \mathsf{E}\tau_{31} + \mathsf{E}\tau_{41}).$$

Учитывая, что  $\mathsf{E}\tau_{31}=\mathsf{E}\tau_{41}=\mathsf{E}\tau_{01},$  окончательно получим  $\lambda=\max(2\mathsf{E}\tau_{01},\mathsf{E}\tau_{11},\mathsf{E}\tau_{21}).$ 

#### Список литературы

- [1] Cohen J.E. Subadditivity, generalized products of random matrices and operations research // SIAM Review. 1988. V. 30. N 1. P. 69–86.
- [2] Baccelli F., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P. Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems. — Chichester: Wiley. 1992.
- [3] Glasserman P., Yao D. D. A GSMP framework for analysis of production lines // Stochastic Modeling and Analysis of Manufacturing Systems / Ed. by D. D. Yao. NY: Springer-Verlag, 1994. P. 133–188. (Springer Series in Operations Research)

- [4] Glasserman P., Yao D. D. Stochastic vector difference equations with stationary coefficients // Journal of Applied Probability. 1995. V. 32. P. 851–866.
- [5] *Маслов В. П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит. 1994.
- [6] Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Соболевский А. Н. Идемпотентная математика и интервальный анализ // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6. № 6. С. 47-70.
- [7] Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. Max-Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems. — Princeton: Princeton University Press. 2006.
- [8] Krivulin N. K. Using max-algebra linear models in the representation of queueing systems // Proc. 5th SIAM Conf. on Applied Linear Algebra. Snowbird, UT. June 15-18, 1994 / Ed. by J. G. Lewis. Philadelphia: SIAM, 1994. P. 155-160.
- [9] Krivulin N. K. A max-algebra approach to modeling and simulation of tandem queueing systems // Mathematical and Computer Modeling. 1995. V. 22, No 3. P. 25–37.
- [10] Krivulin N. K. An algebraic approach in modeling and simulation of queueing networks // Circuits, Systems and Computers'96: Proc. Intern. Conf. July 15-17, 1996. Piraeus, Greece. Hellenic Naval Academyro 1996. V. 2. P. 668-672.
- [11] Krivulin N. K. Max-plus algebra models of queuing networks // Proc. Intern. Workshop on Discrete Event Systems, University of Edinburgh, UK, Aug. 19-21, 1996. London: The Institution of Electrical Engineers. 1996. P. 76–81.
- [12] Кривулин Н. К. Алгебраические модели сетей с очередями // Математические модели и информационные технологии в менеджменте: Сб. науч. статей / Под ред. Н. К. Кривулина, В.В. Трофимова. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2001. С. 25—38.

- [13] *Романовский И. В.* Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом // Кибернетика. 1967. № 2. С. 66–78.
- [14] Романовский И.В. Асимптотическое поведение дискретного детерминированного процесса с непрерывным множеством состояний // Оптимальное планирование / Сборник трудов Института математики СО АН СССР. 1967. № 8. С. 171–193.
- [15] Кривулин Н. К., Романовский И. В. О сходимости степеней матрицы обобщенного линейного оператора в идемпотентной алгебре // Проблемы математического анализа. № 34 / Под ред. Н. Н. Уральцевой. 2006. С. 69–77.
- [16] Olsder G. J., Resing J. A. C., De Vries R. E., Keane M. S., Hooghiemstra G. Discrete event systems with stochastic processing times // IEEE Trans. on Automatic Control. 1990. V. 35. No 3. P. 299–302.
- [17] *Кривулин Н. К.* Скорость роста вектора состояний обобщенной линейной стохастической системы с симметричной матрицей // Записки научных семинаров ПОМИ. Т. 341. 2007. С. 134–141.
- [18] *Кривулин Н. К.* О вычислении скорости роста вектора состояний обобщенной линейной стохастической системы второго порядка // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Вып. 1. 2008. С. 38–48.
- [19] Krivulin N. K., Nevzorov V. B. On evaluation of the mean service cycle time in tandem queueing systems // Applied Statistical Science V / Ed. by M. Ahsanullah, J. Kennyon, S. K. Sarkar. N.Y.: Nova Science Publishers. 2001. P. 145–155.
- [20] *Кривулин Н. К.* Вычисление среднего времени цикла в сетях с операциями разъединения и объединения требований // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Вып. 3 (№ 17). 2002. С. 27–35.
- [21] Кривулин Н. К. Оценивание скорости роста вектора состояний обобщенной линейной динамической системы со случайной матрицей // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Вып. 3 (№ 17). 2003. С. 47–55.

- [22] Кривулин Н. К. Скорость роста вектора состояний обобщенной линейной динамической системы со случайной треугольной матрицей // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Вып. 1. 2005. С. 33–38.
- [23] Kingman J. F. C. Subadditive ergodic theory // The Annals of Probability. V. 1. 1973. P. 883–909.
- [24] *Бачелли Ф., Маковски А.М.* Использование методов теории массового обслуживания для анализа систем с ограничениями по синхронизации // Труды Института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. Т. 1. № 1. 1989. С. 99–128.