Псевдоградиентный метод с возмущением на входе для нестационарной задачи безусловной оптимизации[1]

А. Т. Вахитов, Л. С. Гуревич
Санкт-Петербургский государственный университет
av38@yandex.ru, gurevich.lev@gmail.com

Рассматривается применение метода стохастической оптимизации с пробным одновременным возмущением с двумя измерениями в задаче оптимизации нестационарного функционала без ограничений связи на вход. Установлена верхняя среднеквадратическая граница невязки при условиях один дифференцируемости функционала и почти произвольных помех.

Ключевые слова: стохастическая оптимизация, рандомизация, нестационарность, оптимизация, псевдоградиентный метод.

1. Введение

Проблема оптимизации того или иного функционала встает во многих практических приложениях. Хотя иногда экстремальные значения можно найти аналитически, зачастую инженерные системы имеют дело с неизвестным функционалом, значение которого или его градиента можно вычислять в задаваемых точках. Также встречаются задачи, в которых оптимизируемый функционал может изменяться во времени и сама точка экстремума может дрейфовать. В таком случае постановки задачи могут отличаться в зависимости от цели оптимизации и информации доступной для измерения. Обычно рассматривают два варианта поведения дрейфа функции: когда есть некоторый асимптотический функционал, к которому другие сходятся со временем или когда такого функционала нет [1]. В этой работе рассматривается только более сложный второй случай.

[1]©А. Т. Вахитов, Л. С. Гуревич, 2008

Задачи оптимизации можно рассматривать в постановках с дискретным и непрерывным временем. В нашей работе мы ограничимся рассмотрением моделей первого типа. Пусть $f(x, n)$ — функционал, который необходимо минимизировать в момент времени n ($n \in \mathbf{N}$). В книге Б. Т. Поляка [2] для решения подобных проблем детально рассматриваются методы Ньютона и градиентный, которые применимы в случае дважды дифференцируемого функционала при условии $l < \nabla^2 f_k(x) < L$. Оба метода полагаются на возможность прямого измерения градиента функционала в произвольной точке.

В реальном мире измерения всегда подразумевают наличие помех. Иногда алгоритмы точно решающие проблему на бумаге не дают состоятельных оценок точки экстремума на практике. Устойчивость алгоритма к помехам очень важна практически во всех инженерных приложениях.

Для решения задач в условиях помех в пятидесятые годы появляются методы стохастической аппроксимации Роббинса–Монро и Кифера–Вольфовица, история развития которых детально описана в [3,4]. Общий подход для поиска экстремума, используемый в алгоритмах стохастической аппроксимации, может быть формализован следующим образом

$$\hat{\theta}_{n+1} = \hat{\theta}_n - \alpha_n \hat{g}_n(\hat{\theta}_n), \tag{1}$$

где $\{\hat{\theta}_n\}$ — генерируемая алгоритмом последовательность оценок точки экстремума, g_n — псевдоградиент (заменяющий градиент из метода Ньютона), который “в среднем” должен совпадать с градиентом и близок к нулю, когда его аргумент стремится к точке экстремума. Важными свойствами алгоритмов записанных в форме (1) являются простота и рекуррентность, в силу которых они стали активно применимяться в разных областях науки и техники.

Алгоритмы стохастической аппроксимации с одним или двумя измерениями на каждой итерации с пробным одновременным возмущением на входе появились в работах различных исследователей конце 80-х, начале 90-х гг. XX в [5–8]. В англоязычной литературе они получили название Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation (SPSA). Эти алгоритмы известны состоятельностью оценок при почти произвольных помехах наблюдения [4], которые

должны быть только как-то ограничены и независимы на каждой итерации от пробного случайного возмущения на входе. Более того, количество измерений делающихся на одной итерации составляет всего 1 или 2 вне зависмости от размерности d пространства состояний, что позволяет существенно повысить скорость сходимости в многомерном случае ($d >> 1$), так как у алгоритмов оценивающих градиент через конечную разность количество измерений на каждом шаге составляет $2d$. Детальный обзор развития методов стохастической аппроксимации с пробным одновременным возмущением на входе приведен в [4, 9].

Алгоритмы стохастической аппроксимации первоначально обосновывались в условиях, неподразумевающих нестационарность функционала. В [2] приведена версия алгоритма градиентного спуска для нестационарного случая и доказана его сходимость в некотором смысле. Дальнейшее развитие эти идеи получили в статье [1], где рассматриваются более общие условия. В [4] было предложено использовать для оптимизации нестационарных функционалов алгоритмы типа стохастической аппроксимации с пробным одновременным возмущением на входе, которые могли бы быть более эффективными, так как они полагаются только на одно или два измерения на каждом шаге, а значит, способны быстрее адаптироваться к изменениям функционала. Кроме того, они более устойчивы к помехам.

В данной работе мы рассматриваем применение алгоритма стохастической аппроксимации с пробным одновременным возмущением на входе для задачи оптимизации нестационарного функционала. В следующей секции будет рассмотрена постановка задачи для оптимизации существенно более общая, чем в работах [1, 2], в силу того что в ней минимизируемая функция должна быть только один раз дифференцируема и не предполагается возможность прямого измерения градиента, а помехи наблюдения могут быть почти произвольными. В третьем разделе формулируются алгоритм и теорема о среднеквадратичной стабилизируемости оценок, приводится ее доказательство. В последнем разделе для иллюстрации приводится результат выполнения данного алгоритма для отслеживания дрейфа точки на плоскости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задау минимизации нестационарного функционала среднего риска:

$$f(x,n) = E_w\{F(x,w,n)\} \to \min_x, \tag{2}$$

где $x \in \mathbf{R}^d$, $w \in \mathbf{R}^p$, $n \in \mathbf{N}$, $E_w\{\cdot\}$ — математическое ожидание относительно σ-алгебры, порождаемой случайными величинами w.

Требуется оценить θ_n — точку минимума функции $f(x,n)$, изменяющуюся с течением времени:

$$\theta_n = argmin_x f(x,n).$$

Пусть на каждой итерации n мы можем измерять значение:

$$y_n = F(x_n, w_n, n) + v_n, \tag{3}$$

где x_n — точка, в которой производится наблюдение, w_n — случайные величины, выражающие неконтролируемую неопределенность, v_n — искажения в наблюдениях.

Время является дискретным и определяется номером шага (итерации) n.

Для характеристики поведения оценок точек минимума нестационарного функционала введем два определения.

Определение 1. *Последовательность оценок $\hat{\theta}_n$ точек минимума θ_n* стабилизируется в среднеквадратичном смысле*, если существует такое $C > 0$, что*

$$E\|\hat{\theta}_n - \theta_n\|^2 \le C,$$

где математическое ожидание $E\{\cdot\}$ берется по всем неопределенностям, возникающим при наблюдениях, а также по случайным величинам, генерируемым при построении оценки.

Определение 2. *Число $\bar{L}$ называется* ассимптотически эффективной границей среднеквадратичных невязок оценивания*, если для последовательности оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ точек минимума θ_n для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbf{N}$, что для всех $n > N$*

$$E\|\hat{\theta}_n - \theta_n\|^2 \le \bar{L} + \varepsilon < \infty.$$

Далее будем рассматривать задачу о построении последовательности оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ для задачи (2), удовлетворяющих определениям 1 или 2, при следующих условиях.

Будем считать, что дрейф минимума ограничен по норме следующим образом:

$$(\mathbf{A}) \quad \|\theta_n - \theta_{n-1}\| \leq A.$$

Функции $f(\cdot, n)$ сильно выпуклыми по первому аргументу для каждого n:

$$(\mathbf{B}) \quad \langle \nabla f(x,n), x - \theta_n \rangle \geq \mu \|x - \theta_n\|^2.$$

Градиент $\nabla F(\cdot, w, n)$ удовлетворяет условию Липшица с константой B, $\forall n, \forall w$:

$$(\mathbf{C}) \quad \|\nabla F(x,w,n) - \nabla F(y,w,n)\| \leq B\|x - y\|$$

Средний модуль разности значений функции $F(x, \cdot, n)$ в точке в моменты n и $n+1$ ограничен следующим образом:

$$(\mathbf{D}) \quad E_{w_1,w_2}|F(x,w_1,n+1) - F(x,w_2,n)| \leq C\|x - \theta_n\| + D;$$

$(\mathbf{E})$ Функции $F(\cdot, w, n)$ и $\nabla_x F(\cdot, w, n)$ равномерно ограничены:

$$\begin{array}{rcl} F(x,w,n) \leq \Phi(x,n) & < & \infty, \ \ \forall w \in \mathbf{R}^p, \\ \nabla_x F(x,w,n) \leq \Psi(x,n) & < & \infty, \ \ \forall w \in \mathbf{R}^p. \end{array}$$

$(\mathbf{F})$ Для помехи наблюдения v_n выполнены условия

$$|v_{2n} - v_{2n-1}| \leq \sigma_v,$$

либо, если они представляют собой последовательность случайных величин, то

$$E\{|v_{2n} - v_{2n-1}|^2\} \leq \sigma_v^2.$$

Заметим, что

1). Последнему условию удовлетворяют детерминированные, но ограниченные последовательности $\{v_n\}$.

2). Ограничение типа (**A**) включает как дрейф типа случайных блужданий, так и направленный дрейф в определенную сторону. В конкретных задачах, блуждание типа броуновского движения может быть описано и без введение нестационарности в функционал среднего риска. Необходимость введения нестационарности появляется при наличии как случайной, так и детерминированной составляющей ограничения на дрейф. Подобное условие ставится также в [2], в работе же [1] оно незначительно ослабляется. Например, можно рассматривать такое ограничение:

$$(\mathbf{A}') \quad \theta_n \leq A_1\theta_{n-1} + A_2 + \xi_n,$$

где ξ_n является случайной величиной.

В этой работе мы ограничимся условием ограниченности дрейфа по норме типа **(A)**. Среднеквадратичная стабилизируемость оценок алгоритма поиска минимума в условиях **(A)** означает применимость его к широкому классу различных задач.

3. Алгоритм

Зададим последовательность пробных одновременных возмущений $\{\Delta_n\}$, подаваемых на вход, как независимую последовательность бернуллиевских векторов, у которых каждая компонента принимает значения $\pm 1/\sqrt{d}$ с вероятностями $\frac{1}{2}$.

Выберем некоторый начальный вектор $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^d$. Будем оценивать последовательность точек минимума $\{\theta_n\}$ последовательностью $\{\hat{\theta}_n\}$, определяемой алгоритмом стохастической оптимизации с пробным одновременным возмущением на входе, который имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_{2n} = \hat{\theta}_{2n-2} + \beta\Delta_n,\, x_{2n-1} = \hat{\theta}_{2n-2} - \beta\Delta_n, \\ \\ y_n = F(x_n, w_n, n) + v_n, \\ \\ \hat{\theta}_{2n} = \hat{\theta}_{2n-2} - \frac{\alpha}{2\beta}\Delta_n(y_{2n} - y_{2n-1}), \\ \\ \hat{\theta}_{2n-1} = \hat{\theta}_{2n-2}. \end{cases} \tag{4}$$

(**G**) Будем считать, что случайные величины Δ_n (рандомизация алгоритма) независимы от $\hat{\theta}_k$, помех w_k и $\hat{\theta}_0$, а также от v_k, если они предполагаются случайной природы, $k = 1, 2, \ldots, 2n$.

4. Среднеквадратичная стабилизация оценок алгоритма

Обозначим $H = 2\alpha\beta B + 2\alpha A + 2A + \frac{\alpha^2}{2\beta^2}(2B\beta C + CD)$. Определим константу K и параметр $\delta > 0$ из условия

$$K = 1 - 2\alpha\mu + C^2\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \delta H < 1.$$

Пусть

$$L = 2A^2 + 2A\alpha\beta B + \alpha^2 B^2 + \frac{\alpha^2}{4\beta}4BD + \frac{D^2\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{\alpha^2}{4\beta^2}\sigma_v^2 + \frac{H}{4\delta}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* **(A)**–**(G)** *на функции f и F, а так же θ_n, $\hat{\theta}_n$, v_n, w_n, y_n и Δ_n, величины α и $\beta > 0$:*

$$0 < 2\alpha\mu - C^2\frac{\alpha^2}{4\beta^2}$$

Тогда оценки алгоритма (4) стабилизируются в среднеквадратичном смысле и справедлива оценка

$$E\{\|\theta_n - \hat{\theta}_n\|^2\} \le K^n\|\theta_0 - \hat{\theta}_0\|^2 + \frac{L(1-K^n)}{1-K}. \tag{5}$$

Заметим, что, в частности, в Теореме 1 устанавливается ассимптотически эффективная граница среднеквадратичных невязок оценивания $\bar{L} = L/(1-K)$.

Условия **(A)**–**(C)**,**(E)**–**(G)** являются стандартными для доказательства состоятельности оценок алгоритмов стохастической аппроксимации с возмущением на входе [4]. Ранее факт среднеквадратичной стабилизации оценок алгоритма (4) был доказан в [11] при более жестких ограничениях.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $err_{n-1} = \hat{\theta}_{2n-2} - \theta_{2n-2}$, $dreif_n = \theta_{2n} - \theta_{2n-2}$, $step_n = \frac{\alpha}{2\beta}(y_{2n} - y_{2n-1})\Delta_n$.

В силу алгоритма (4) и условия **(A)** для квадрата нормы разности $\|\hat{\theta}_{2n} - \theta_{2n}\|$ имеем оценку

$$\|err_n\|^2 \le \|err_{n-1}\|^2 + \|dreif_n\|^2 + \|step_n\|^2 +$$

$$+2\langle dreif_n, step_n\rangle - 2\langle dreif_n, err_{n-1}\rangle - 2\langle step_n, err_{n-1}\rangle \le$$

$$\le \|err_{n-1}\|^2 + A^2 + \|step_n\|^2 + 2\langle step_n, dreif_n\rangle - \tag{6}$$

$$-2 < dreif_n, err_{n-1}\rangle - 2\langle err_{n-1}, step_n\rangle.$$

1. В силу модели наблюдения (3) для последнего слагаемого имеем

$$-\langle err_{n-1}, step_n\rangle = -\langle err_{n-1}, \frac{\alpha}{2\beta}\Delta_n(F(\hat{\theta}_{2n-2} + \beta\Delta_n, w_{2n}, 2n) -$$
$$-F(\hat{\theta}_{2n-2} - \beta\Delta_n, w_{2n-1}, 2n-1) + v_{2n} - v_{2n-1})\rangle.$$

Обозначим $E_n\{\cdot\}$ условное математическое ожидание относительно σ-алгебры, порождаемой случайными величинами $\theta_1 \ldots, \theta_{n-1}$, $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_{n-1}$. Применив к последней формуле $E_n\{\cdot\}$, используя $E_n\{\Delta_n(v_{2n} - v_{2n-1})\} = 0$, добавив и отняв $F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n}, 2n)$ и $F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n-1}, 2n-1)$, получаем

$$\begin{gathered} E_n\{-\langle err_{n-1}, step_n\rangle\} = -\langle err_{n-1}, \tfrac{\alpha}{2\beta}E_n\{\Delta_n(F(\hat{\theta}_{2n-2} + \beta\Delta_n, \\ w_{2n}, 2n) - F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n}, 2n))\}\rangle - \langle err_{n-1}, -\tfrac{\alpha}{2\beta}E_n\{\Delta_n \\ (F(\hat{\theta}_{2n-2} - \beta\Delta_n, w_{2n-1}, 2n-1) - F(\hat{\theta}_{2n-2}, \\ w_{2n-1}, 2n-1))\}\rangle - \langle err_{n-1}, \tfrac{\alpha}{2\beta}E_n\{\Delta_n(F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n}, 2n) - \\ -F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n-1}, 2n-1))\}\rangle. \end{gathered} \tag{7}$$

Рассмотрим разность по знаком $E_n\{\cdot\}$ в первом слагаемом (7). Учитывая разложение для $F(\hat{\theta}_{2n-2} + \beta\Delta_n, w_{2n}, 2n)$ по формуле Тейлора, последовательно выводим

$$E_n\{\Delta_n(F(\hat{\theta}_{2n-2} + \beta\Delta_n, w_{2n}, 2n) - F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n}, 2n))\} =$$

$$= E_n\{\Delta_n\langle\nabla F(\hat{\theta}_{2n-2} + \gamma_1\beta\Delta_n, w_{2n}, 2n), \beta\Delta_n\rangle\} =$$

$$= E_n\{\Delta_n\langle\nabla F(\hat{\theta}_{2n-2}, w_{2n}, 2n), \beta\Delta_n\rangle\} +$$

$$+E_n\{\Delta_n\langle\nabla F(\hat\theta_{2n-2},w_{2n},2n)-\nabla F(\hat\theta_{2n-2}+\gamma_1\beta\Delta_n,w_{2n},2n),\beta\Delta_n\rangle\},$$

при $\gamma_1\in(0,1)$. В итоге для первого слагаемого в (7), применив **(B), (C), (E)**, получаем

$$\begin{gathered}-\langle err_{n-1},\tfrac{\alpha}{2\beta},E_n\{\Delta_n(F(\hat\theta_{2n-2}+\beta\Delta_n,w_{2n},2n)-\\ -F(\hat\theta_{2n-2},w_{2n},2n))\}\rangle\le\tfrac{\alpha}{2}(-\langle err_{n-1},\nabla f(\hat\theta_{2n-2},2n)\rangle+\\ +B\beta\|err_{n-1}\|\le\tfrac12(-\alpha\mu\|err_{n-1}\|^2+\alpha\beta B\|err_{n-1}\|).\end{gathered}\tag{8}$$

Аналогичное соотношение получается и для второго слагаемого в (7). Для третьего слагаемого, в силу независимость пробного возмущения Δ_n от w_{2n} и w_{2n-1}, получаем:

$$-\langle err_{n-1},\frac{\alpha}{2\beta}E_n\{\Delta_n(F(\hat\theta_{2n-2},w_{2n},2n)-F(\hat\theta_{2n-2},w_{2n-1},2n-1))\}\rangle=$$

$$=\langle err_{n-1},\frac{\alpha}{2\beta}E_n\{\Delta_n(F(\hat\theta_{2n-2},w_{2n},2n)-F(\hat\theta_{2n-2},w_{2n-1},2n-1))\}=0.$$

В итоге, $-E_n\{\langle err_{n-1},step_n\rangle\}\le-\alpha\mu\|err_{n-1}\|^2+\alpha\beta B\|err_{n-1}\|$.
2. Рассмотрим $E_n\{\langle step_n,dreif_n\rangle\}$. Используя разложение $step_n$ на слагаемые из предыдущего пункта, можно получить

$$E_n\{\langle step_n,dreif_n\rangle\}=\alpha\langle\nabla f(\hat\theta_{2n-2},2n),dreif_n\rangle+$$

$$+A\alpha\beta B\le\alpha A\|err_{n-1}\|+A\alpha\beta B$$

3. Рассмотрим $E_n\|step_n\|^2$. Разложив как в п.1, с использованием свойств (C) и (D) получаем:

$$E_n\|F(\hat\theta_{2n-2}+\beta\Delta_n,w_{2n},2n)-F(\hat\theta_{2n-2},w_{2n},2n)\|\le B\beta;$$

$$E_n\|-F(\hat\theta_{2n-2}-\beta\Delta_n,w_{2n-2},2n-2)+F(\hat\theta_{2n-2},w_{2n-1},2n-1)\|\le B\beta;$$

$$E_n\|F(\hat\theta_{2n-2},w_{2n},2n)-F(\hat\theta_{2n-2},w_{2n-1},2n-1)\|\le C\|err_{n-1}\|+D.$$

В итоге имеем:

$$E_n\|step_n\|^2\le\frac{\alpha^2}{4\beta^2}(4B^2\beta^2+4B\beta(C\|err_{n-1}\|+D)+C^2\|err_{n-1}\|^2+$$

$$+2CD\|err_{n-1}\|+D^2+\sigma_v^2)\le\|err_{n-1}\|^2C^2\frac{\alpha^2}{4\beta^2}+$$

$$+\|err_{n-1}\|\frac{\alpha^2}{4\beta^2}(4B\beta C+2CD)+\alpha^2B^2+\frac{\alpha^2}{4\beta}4BD+\frac{D^2\alpha^2}{4\beta^2}+\frac{\alpha^2}{4\beta^2}\sigma_v^2.$$

Суммируя полученные выше оценки, учитывая вид H, выводим

$$E_n\{\|err_n\|^2\} \leq \|err_{n-1}\|^2(1 - 2\alpha\mu + C^2\frac{\alpha^2}{4\beta^2})+$$

$$+\|err_{n-1}\|H + 2A^2 + 2A\alpha\beta B + \alpha^2 B^2 + \frac{\alpha^2}{4\beta}4BD + \frac{D^2\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{\alpha^2}{4\beta^2}\sigma_v^2.$$

В силу неравенства $2aH \leq Ha^2\delta + H/\delta$, $\forall\delta > 0$, получаем

$$E_n\{\|err_n\|^2\} \leq (1 - 2\alpha\mu + C^2\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \delta H)\|err_{n-1}\|^2+$$

$$+2A^2 + 2A\alpha\beta B + \alpha^2 B^2 + \frac{\alpha^2}{4\beta}4BD + \frac{D^2\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{\alpha^2}{4\beta^2}\sigma_v^2 + \frac{H}{4\delta}.$$

Выберем $0 < \delta < \frac{2\alpha\mu - C^2\frac{\alpha^2}{4\beta^2}}{H}$. При таком выборе коэффициентов мы получаем $E_n\{\|err_n\|^2\} \leq K\|err_{n-1}\|^2 + L$. Перейдя к безусловному математическому ожиданию выводим (5).

5. Пример

Простое практическое приложения алгоритма стохастической аппроксимации с пробным одновременным возмущением в условиях нестационарного функционала описанного выше это оценка координат движущейся точки в многомерном пространстве, когда единственное доступное измерение на каждом шаге это расстояние до нее, измеряемое с помехой. Как доказано выше, алгоритм (4) будет сходиться при условии ограниченности нормы дрейфа экстремума.

Численный пример, рассматриваемый в данном разделе, иллюстрирует решение именно этой задачи. Рассмотрим одномерный случай, когда модель дрейфа точки описывается формулой $\theta_n = \theta_{n-1} + \zeta$, где $\zeta \in B(-1, 1)$ (ζ принимает значение 1 или -1 с вероятностью 0.5). Тогда будем рассматривать функцию $F(x, w, n) = f(x, n) = (x - \theta_n)^2$, которая определяет квадрат расстояния до точки. Очевидно данная функция удовлетворяет условию теоремы. Измерения на каждом шаге производятся с дополнительным шумом $y_n = f(x_n, n) + v_n$, где $v_n \in (-1, 1)$. Помеха v_n генерировалась по закону $v_{2i} = 1-(i \bmod 3)$ и для четных шагов и $v_{2i-1} = 1-3*(i \bmod 7)$

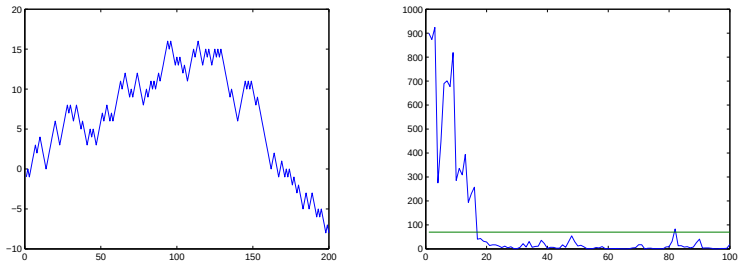

Рис. 1: Экстремум θ_n (слева) и норма ошибки оценивания (справа).

для нечетных. В этом случае параметры функции $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$,$D = 1/3$, $\mu = 2$. Тогда $H = 4\alpha\beta + 2\alpha + 2 + \frac{\alpha^2}{2\beta^2}(4\beta + \frac{1}{3})$, $K = 1 - 4\alpha + \frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \delta H$, $L = 2 + 4\alpha\beta + 4\alpha^2 + \frac{8}{3}\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{37}{36}\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{H}{4\delta}$.

В эксперименте были выбраны $\alpha = 1/12$ и $\beta = 1/3$. При этом $H \approx 2,30$. Выбрав $\delta = 0,08$, получаем $K \approx 0,86$, $L \approx 9,43$ и $\bar{L} \approx 69,91$. Точка оптимума дрейфует, как показано на рис. 1 слева. Ошибка оценивания и асимптотическая граница показаны на рис. 1 справа.

6. Заключение

В дальнейшем авторы хотели бы во первых получить эффективную верхнюю границу для последовательности оценок получаемых при помощи алгоритма. Также интересно было бы усилить данный алгоритм, используя идеи полиномиальной аппроксимации дрейфа, высказанные в статье [10]. Это бы существенно расширило условия сходимости, позволяя отказаться от равномерной ограниченности дрейфа и заменить это на полиномиальную ограниченность, которая существенно более слабая. Также можно рассмотреть версию алгоритма, когда последовательность оптимизируемых функций сходится в себе, в этом случае при убывающем шаге предложенный нами алгоритм будет находить точное решение, в силу того, что отклонение функции от предельной можно рассматривать как внешнюю неопределенность.

Список литературы

[1] *Попков А. Ю.* Градиентные методы для нестационарных задач безусловной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2005. №6. С. 39–47.

[2] *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. – М.: Наука. 1983.

[3] *Kushner H., Yin G.* Stochastic Approximation and Recursive Algorithms and Applications. – Springer. 2003.

[4] *Граничин О. Н., Поляк Б. Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. – М.: Наука. 2003. 291 с.

[5] *Граничин О. Н.* Алгоритм стохастической аппроксимации с возмущением на входе // Автоматика и телемеханика. 1992. № 2. С. 99–104.

[6] *Граничин О. Н.* Об одной стохастической рекуррентной процедуре при зависимых помехах в наблюдении, использующей на входе пробные возмущения // Вестник Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1989. №1(4). С. 19–21.

[7] *Поляк Б. Т., Цыбаков А. Б.* Оптимальные порядки точности поисковых алгоритмов стохастической аппроксимации // Проблемы передачи информации. 1990. № 26. С. 126–133.

[8] *Spall J. C.* Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation // IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 37. 1992. PP. 332–341.

[9] *Spall J. C.* Developments in stochastic optimization algorithms with gradient approximations based on function measurements // Proc. of the Winter Simulation Conf. 1994. PP. 207–214.

[10] *Катковник В. Я., Хейсин В. Е.*, Динамическая стохастическая оптимизация полиномиальных дрейфов // Автоматика и телемеханика. 1979. №5. С. 700–708.

[11] *Gurevich L., Vakhitov A.*, SPSA Algorithm for tracking // In Proc. 12th International Student Olympiad on Automatic Control (Baltic Olympiad). 2008. PP. 52–57.