Невыпуклый детектор матричной разреженности с применением к оптимальному управлению линейными системами[1]

А. В. Быков, аспирант,
П. С. Щербаков, д. ф.-м. н.
Институт Проблем Управления РАН
alexey.bykov.mipt@gmail.com
cavour118@mail.ru

Недавно был предложен подход к синтезу разреженной обратной связи в линейных системах управления. Под разреженностью понимается наличие нулевых строк или столбцов в матрице усиления получаемого регулятора. Для решения такой задачи вводится специальная матричная норма, выступающая в роли выпуклого суррогата для исходной невыпуклой задачи. В данной работе вводится иной суррогат, который, будучи невыпуклым, в некоторых примерах оказывается эффективнее специальной матричной нормы. Кроме того, в настоящей работе разреженный подход распространяется на случай классической задачи $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации. Приведены эвристические соображения в пользу применения нового суррогата, а также представлены результаты численных экспериментов, подтверждающие эффективность нового метода.

Ключевые слова: линейные системы, разреженные регуляторы, линейные матричные неравенства, $\mathcal{H}_\infty$-оптимизация, DC-функции, СССР.

1. Введение

Постановки классических задач синтеза управления в линейных системах могут быть дополнены требованием разреженности, то есть наличия большого числа нулевых элементов в матрице усиления. Среди недавних публикаций на эту тему см., например, работы [1], [2], [3], в которых обосновывается необходимость синтеза подобных регуляторов, представлены различные подходы к достижению разреженности, предложены численные методы и обсуждается их использование в прикладных задачах.

Идея, лежащая в основе подходов, предлагаемых во многих работах на тему разреженности, восходит к хорошо известному наблюдению, согласно которому минимизация l_1-нормы вектора при

[1] ©А. В. Быков, П. С. Щербаков, 2016

ограничениях вида недоопределенной системы линейных уравнений приводит к разреженным решениям – векторам, содержащим малое число ненулевых компонент, иными словами, обладающим малой l_0-*квазинормой*. Эта идея, разнообразные ее применения и многочисленные выводы подробно изложены в [4].

При этом говорят, что l_1-норма вектора представляет собой *выпуклый суррогат* l_0-квазинормы вектора. Существуют и другие выпуклые суррогаты для получения разреженных решений, а в работе [5] (см. также [6]) для решения задачи минимизации ранга матрицы предлагается использовать *невыпуклый* суррогат в форме логарифма детерминанта (*англ.* log-det). Было показано, что такой суррогат в некоторой степени более эффективен, чем «стандартные» выпуклые суррогаты. Применительно к задачам управления в работе [7] для поиска разреженных матриц усиления используется похожий суррогат в форме суммы логарифмов (*англ.* sum-of-logs).

В работах по теории управления под разреженностью регулятора обычно понимают наличие нулевых элементов в матрице усиления. В некоторых постановках определенная разреженная структура задается априори, после чего решается оптимизационная задача с целью получить структуру, максимально близкую к заданной. В недавней работе [8] (см. также [9] – ее русскоязычную журнальную версию), напротив, не предполагается наличие наперед зафиксированной разреженной структуры, а производится поиск стабилизирующего регулятора, в матрице усиления которого мало *ненулевых строк*. Иными словами, матрица такого регулятора обладает малой *матричной* l_0-*квазинормой*, по определению равной числу ненулевых строк (аналогично можно пытаться получить матрицы с малым числом ненулевых столбцов). Необходимость конструирования таких регуляторов заключается в желании уменьшить количество требуемых компонент вектора управления в задаче синтеза. Действительно, предположим, что управление $u \in \mathbb{R}^m$ строится в форме статической линейной обратной связи по состоянию $u = Kx$; тогда, если некоторые строки матрицы K нулевые, то и соответствующие им компоненты вектора управления не участвуют в синтезе.

Для поиска таких *строчно-разреженных* регуляторов в работах [8, 9] предлагается использовать выпуклый суррогат в виде так называемой матричной 1∞-нормы. При этом поиск разреженных

матриц осуществляется путем решения некоторых линейных матричных неравенств (LMI), возникающих в постановках задач управления при описании систем в пространстве состояний. Данный подход был протестирован на различных постановках задач управления, в частности, на задаче синтеза линейно-квадратичного регулятора (LQR), и оказался довольно эффективным. С другой стороны, для некоторых задач (с конкретными численными значениями матриц линейной модели) оптимизационная процедура из подхода [8,9] не смогла сойтись к разреженному решению.

Эта работа состоит из двух основных частей. Во-первых, мы вводим новый невыпуклый суррогат для матричной l_0-квазинормы и используем его в центральном шаге процедуры синтеза управления, в котором производится детектирование разреженной структуры. Во-вторых, мы распространяем схему синтеза разреженного управления еще на одну задачу оптимального управления – задачу $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации.

В работе показано, что новый суррогат относится к классу *DC-функций* (*англ.* difference of convex); для минимизации суррогата будем использовать процедуру *CCCP* – хорошо известный численный метод оптимизации такого рода функций. В заключительной части представлены численные примеры, демонстрирующие неспособность "старого" подхода найти разреженную структуру, в то время как новый подход справляется с поставленной задачей.

2. Строчная матричная разреженность

Поиск разреженных решений в задачах оптимизации с матричными переменными заключается в минимизации количества ненулевых строк матриц при некоторых ограничениях. Независимо от типа ограничений, задача по своей природе трудно решаема из-за необходимости минимизировать дискретный целочисленный целевой функционал. В векторном случае в подобных задачах обращаются к так называемой l_0/l_1-парадигме, довольно эффективной на практике, согласно которой минимизация выпуклой l_1-нормы вектора вместо его l_0-квазинормы приводит к наличию нулевых компонент в векторе-решении.

Определяемая далее матричная 1∞-норма играет аналогичную роль выпуклого суррогата для матричных переменных.

2.1. Матричная 1∞-норма и ее недостатки

Определение 1. *Пусть матрица $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, тогда функцию*

$$\|X\|_{1\infty} = \sum_{i=1}^{n} \max_{1\le j\le m} |x_{ij}|$$

называют 1∞-нормой матрицы X. Норма может быть переписана в виде:

$$\|X\|_{1\infty} = \sum_{i=1}^{n} r_i = \|r\|_1,\ r_i = \max_{1\le j\le m} |x_{ij}|,\ r = (r_1, \ldots, r_n)^\top.$$

Именно эта норма была использована в работах [8,9] для синтеза строчно-разреженных регуляторов в линейных системах.

Следующая теорема, затрагивающая случай линейных ограничений типа равенства, приводит эффективную эвристику для использования 1∞-нормы в задачах поиска разреженного матричного решения при выпуклых ограничениях общего вида.

Теорема 1 ([8]). *Если задача*

$$\min \|X\|_{1\infty} \quad \text{при ограничении} \quad AX = B,$$

где $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m < n$, $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$, разрешима, тогда существует решение X_{sparse}, в котором не более m ненулевых строк. ■

В работах [8, 9] обсуждались различные задачи в разреженной постановке, которые успешно решаются с помощью представленного подхода. Однако более тщательный анализ 1∞-нормы позволяет обнаружить некоторые специфические недостатки.

Действительно, пусть матрицам X_1 и X_2, состоящим из двух строк, соответствуют векторы $r^{(1)} = (1, 0)^\top$ и $r^{(2)} = (0.5, 0.5)^\top$ (см. Определение выше), l_1-норма которых равна единице. Тогда $\|X_1\|_{1\infty} = \|X_2\|_{1\infty}$, при этом матрица X_1 является разреженной (одна нулевая строка), а матрица X_2 – нет.

Этот простой пример свидетельствует об определенном недостатке классической l_0/l_1-парадигмы. Видим, что l_1-норма вектора

принимает малые значения только в окрестности начала координат, то есть, когда все компоненты вектора малы. Иными словами, малость какой-либо одной компоненты вектора не означает малость его l_1-нормы.

Достаточно легко придумать примеры, в которых разреженная матрица будет обладать огромной 1∞-нормой, а не обладающей разреженностью матрице будет соответствовать существенно меньшее значение 1∞-нормы. Таким образом, 1∞-норма не всегда является приемлемым индикатором разреженности. С другой стороны, в классе выпуклых функций 1∞-норма, вероятно, лучше всего аппроксимирует матричную l_0-квазинорму. На Рис. 1 представлена l_1-норма вектора r для случая матриц, состоящих из двух строк.

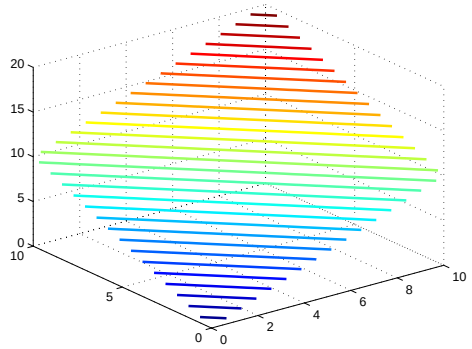

Рис. 1: Схематичное изображение l_1-нормы r.

Другие матричные нормы, подобные $l_{1\infty}$, также популярны для достижения строчной разреженности. Например, стоит упомянуть работу [10], в которой вместо l_∞-норм предлагается использовать l_2-нормы строк матрицы в задаче оптимального выбора сенсоров или приводов. Однако результаты использования обеих норм довольно схожи, так как в обоих случаях за разреженность отвечает l_1-норма вектора, составленного из норм (l_∞ или l_2) строк матрицы.

2.2. Новый суррогат: невыпуклый детектор разреженности

Для устранения недостатков, которыми обладает матричная 1∞-норма, мы предлагаем ввести следующие невыпуклые функции. Нестрого говоря, такие функции, если рассматривать их как функции l_∞-норм строк матрицы, должны стремиться к нулю, если хотя бы один из аргументов стремится к нулю, при этом они ведут себя подобно 1∞-норме вдали от плоскостей, соответствующим нулевым значениям аргументов. Схематически такие функции изображены на Рис. 2 и 3.

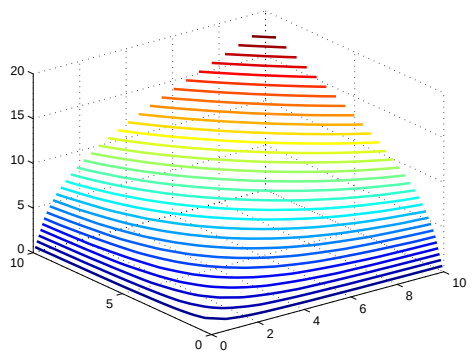

Рис. 2: Невыпуклый детектор разреженности.

В двумерном случае, примером такой функции может служить

$$\mathsf{NSD}(r_1, r_2) = r_1 \frac{r_2}{r_2 + 1} + r_2 \frac{r_1}{r_1 + 1},$$

или

$$\mathsf{NSD}(r_1, \ldots, r_n) = \sum_{i=1}^{n} r_i \prod_{j \neq i} \frac{r_j}{r_j + 1}, \quad n > 2. \tag{1}$$

Будем называть такую функцию *невыпуклым детектором разреженности* (*англ.* Nonconvex Sparsity Detector), NSD. Принимая во внимание приведенные выше эвристические соображения, считаем NSD альтернативой 1∞-нормы. Например, для матриц X_1, X_2

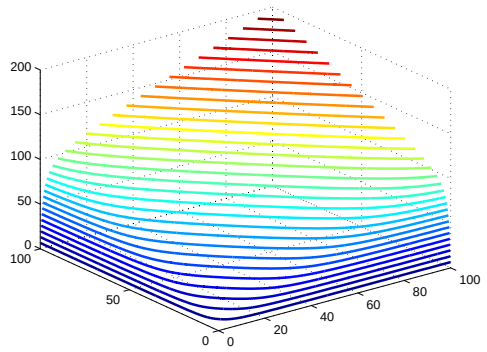

Рис. 3: Невыпуклый детектор разреженности: бóльшая область определения.

из простого примера из предыдущего раздела имеем $\mathsf{NSD}(r^{(1)}) = 0$ и $\mathsf{NSD}(r^{(2)}) = \frac{1}{3}$, что говорит о том, что NSD верно посчитал матрицу X_1 “более разреженной”.

Из определения функции NSD видно, что минимизируя ее, мы (скорее всего) можем детектировать только один нулевой элемент среди аргументов. Однако, повторно запуская процедуру минимизации с зафиксированными ранее найденными нулевыми элементами, можно находить и больше одного нулевого элемента. Легко видеть, что такой алгоритм обладает линейной сложностью по времени работы, что асимптотически лучше комбинаторного перебора, решающего задачу «в лоб».

В следующих разделах мы опишем оптимизационную процедуру, которую можно использовать для минимизации подобных функций в рамках задач синтеза разреженных регуляторов.

3. LMI-подход в задачах управления: $\mathcal{H}_\infty$-оптимизация

Применение 1∞-нормы для синтеза разреженных регуляторов было, в частности, продемонстрировано в работах [8, 9] на примере задачи о линейно-квадратичном регуляторе. В этой работе мы

покажем применение нового суррогата на примере решения другой задачи оптимального управления – задачи $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации – в разреженной постановке.

Для этого сначала вспомним, что классическая задача $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации при описании системы в пространстве состояний может быть сформулирована в терминах линейных матричных неравенств и сведена к решению задачи полуопределенного программирования (*англ.* SemiDefinite Programming, SDP), см. приводимую ниже Теорему 2. Будем придерживаться обозначений, принятых в [11], хотя общая формулировка близка к той, что принята в исходной работе [12]; также см. [13].

Рассмотрим систему управления, описываемую системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u + Dw \\ z &= Cx + B_2 u \end{aligned} \tag{2}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}, D \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{l\times n}, B_2 \in \mathbb{R}^{l\times p}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ – управление, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ – управляемый выход, и внешние возмущения $w(t) \in \mathbb{R}^m$ ограничены в L_2-норме, $\|w\|_2 \leq 1$.

В простейшей постановке задачи $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации требуется построить управление в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \tag{3}$$

которое бы минимизировало $\mathcal{H}_\infty$-норму матрицы передаточной функции системы (2). Известно, что минимизация функционала

$$J = \sup_{\|w\|_2 \leq 1} \int\limits_0^\infty z^\top z \mathrm{d}t = \|z\|_2^2 \tag{4}$$

по всем стабилизирующим регуляторам (3) дает $\mathcal{H}_\infty$-оптимальный регулятор.

Приведем следующий результат (символы $\preccurlyeq$ и $\succcurlyeq$ обозначают соответственно отрицательную и положительную полуопределенность матрицы).

Т е о р е м а 2 ([11]). *Пусть* $\hat{P}, \hat{Y}, \hat{\gamma}$ *– решение задачи оптимизации*

$$\gamma \longrightarrow \min$$

при LMI-ограничениях вида

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + B_1 Y + Y^\top B_1^\top + 2\sigma P & D & PC^\top & Y^\top B_2^\top \\ * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad (5)$$

$$P \succ 0, \quad (6)$$

где переменными являются матрицы $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}, Y \in \mathbb{R}^{p\times n}$ *и скаляр* γ.

Регулятор (3) *с матрицей усиления*

$$K_{\text{opt}} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (2) *с заданной степенью устойчивости* σ *и минимизирует функционал* $J = \sup\limits_{\|w\|_2 \le 1} \|z\|_2^2$ *на решениях замкнутой системы, при этом оптимальное значение*

$$J_{\text{opt}} = \hat{\gamma}.$$

■

Получив оптимальное решение, теперь попытаемся построить разреженный стабилизирующий регулятор K_{sparse}, который не сильно уступает в качестве управления J оптимальному. Соответствующая схема представлена в следующем разделе.

4. Поиск разреженной структуры

4.1. Трехшаговая схема

Метод поиска «субоптимальных» разреженных регуляторов был предложен в работе [8]; опишем, как его можно было бы применить для задачи $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации.

Шаг 1 (поиск оптимального решения): Решаем классическую задачу $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации и получаем оптимальное значение J_{opt} целевого функционала.

Шаг 2 (релаксация и поиск разреженной структуры): Зададим $\alpha > 1$ – коэффициент *допустимой потери в качестве управления* и решим задачу:

$$\|Y\|_{1\infty} \longrightarrow \min \quad \text{при ограничениях} \quad (5), (6) \quad \text{и} \quad \gamma \leq \alpha J_{\text{opt}}.$$

В соответствии с эвристикой 1∞-нормы, вероятно, удастся получить нулевые строки в матрице-решении Y; обозначим ее за Y_{sparse}. В соответствии с правилами матричного умножения, получим нулевые строки (как минимум те же) и в матрице $K_{\text{sparse}} = Y_{\text{sparse}} P^{-1}$. Заметим, что качество управления полученного разреженного регулятора не хуже, чем αJ_{opt}.

Шаг 3 (дооптимизация): Решаем стандартную задачу $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации, только с априори заданной нулевой структурой матричной переменной Y, такой же, как и у матрицы Y_{sparse}, полученной на Шаге 2.

Как уже было сказано, в работах [8, 9] данная схема применялась при решении другой задачи оптимального управления (LQR) и оказалась довольно эффективной в приведенных численных примерах, а именно, разреженная структура была действительно найдена, при этом фактическое ухудшение качества управления, вызванное разреженностью регулятора, оказывалось достаточно малым. Однако существуют примеры (некоторые из них обсуждаются в Разделе 5), в которых при поиске разреженной структуры возникают сложности следующего характера.

Насколько мы представляем, невозможно предложить осмысленную процедуру выбора коэффициента релаксации α так, чтобы наверняка получить разреженную структуру в решении. В этой связи были обнаружены примеры, в которых α нужно было задать огромным, значительно превосходящим разумный уровень приемлемого ухудшения качества управления. В то же время отметим, что при зафиксированной разреженной структуре на Шаге 3 обычно удавалось получить сравнительно небольшие значение проигрыша в качестве. Кроме того, существуют примеры, где даже при колоссальном коэффициенте релаксации не удалось детектировать разреженную структуру.

4.2. Поиск разреженной структуры: невыпуклый подход

Принимая во внимание соображения, приводимые ранее, становится ясно, что мы намерены модифицировать Шаг 2 трехшаговой схемы из Раздела 4.1, заменив задачу минимизации 1∞-нормы на задачу минимизации детектора разреженности NSD (1). Эта функция может быть представлена в виде разности двух выпуклых функций, см. [14], то есть относится к довольно широкому классу DC-функций.

Существуют различные методы оптимизации функций такого типа; один из популярных алгоритмов – вогнуто-выпуклая процедура (*англ.* concave-convex procedure, *CCCP*, [15,16]), которая будет применяться в данной работе.

Рассмотрим задачу оптимизации

$$\begin{aligned} &\big(u(x) - v(x)\big) \longrightarrow \min \\ \text{при ограничениях} \qquad & c_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & d_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned} \tag{7}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, функции $u(x)$ и $v(x)$ выпуклы, $v(x)$ дифференцируема; функции $c_i(x)$ выпуклы, а $d_j(x)$ – аффинные.

Алгоритм *CCCP* является итеративной процедурой решения невыпуклой задачи (7) посредством решения последовательности выпуклых задач:

$$\begin{aligned} & x^{(l+1)} \in \arg\min_x \left[u(x) - x^\top \nabla v(x^{(l)}) \right], \quad l = 0, 1, \dots, \\ \text{при ограничениях} \qquad & c_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & d_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned} \tag{8}$$

Основная идея вогнуто-выпуклой процедуры заключается в линеаризации функции $v(x)$ в окрестности решения, полученного на предыдущей итерации процедуры, и минимизации соответствующего выпуклого приближения $u(x) - x^\top \nabla v(x^{(l)})$. Именно эта вычислительная процедура будет использована для минимизации функции (1); начальное приближение $x^{(0)}$ составлено из значений l_∞-норм строк матрицы $\hat{Y}$, полученной на Шаге 1.

Вопрос сходимости процедуры довольно нетривиальный, см. [16], однако, на практике она оказывается эффективным средством минимизации DC-функций.

5. Численные примеры

В данном разделе представлены результаты предварительных численных экспериментов, проведенных с двумя линейными моделями, взятыми из свободно распространяемой библиотеки тестовых задач управления, [17]. Мы не будем приводить значения элементов матриц систем, их можно посмотреть непосредственно в библиотеке $COMPl_eib$. Все вычисления производились с помощью MATLAB-совместимого пакета `cvx`, [18], в качестве решателя выбран SDPT3, [19].

После получения результата в каждой из задач осуществлялся полный перебор всевозможных комбинаций нулевых строк и выполнялся Шаг 3, чтобы убедиться, что разреженная структура, полученная на Шаге 2 трехшаговой схемы, действительно «оптимальная».

5.1. Модель PSM из библиотеки COMPl$_e$ib

Этот пример представляет собой модель объединенной энергетической системы с двумя областями; в модели семь компонент вектора состояния и две компоненты вектора управления.

Применяя трехшаговую схему, описанную в Разделе 4, получаем следующий результат. Сначала задаем требуемую степень устойчивости замкнутой системы $\sigma = 0.1$ и выполняем Шаг 1, в результате которого получаем $\mathcal{H}_\infty$-оптимальный регулятор, описываемый матрицей усиления

$$K_{\text{opt}}^\top = \begin{bmatrix} 1.4548 & -0.2282 \\ -0.0339 & 0.0227 \\ 0.4511 & 0.0367 \\ 1.7492 & -1.8105 \\ -0.2309 & 1.4519 \\ 0.0424 & 0.0295 \\ 0.0274 & 0.3996 \end{bmatrix},$$

при этом оптимальное значение целевого функционала равно $J_{\text{opt}} = 0.9173$.

Предположим, для получения разреженного регулятора допускается ухудшение в качестве управления не более, чем на порядок; то есть, задаем $\alpha = 10$. Если на Шаге 2 использовать 1∞-норму при заданном коэффициенте релаксации $\alpha = 10$, будет получено решение

$$\widetilde{Y}_{1\infty}^{\top} = \begin{bmatrix} 0.0241 & -0.0241 \\ 0.0241 & -0.0241 \\ 0.0241 & -0.0241 \\ 0.0241 & -0.0241 \\ -0.0241 & 0.0241 \\ -0.0241 & 0.0241 \\ -0.0241 & 0.0241 \end{bmatrix}.$$

Видим, что значения элементов строк в полученной матрице равны по модулю, что говорит о невозможности сделать осмысленный выбор разреженной структуры регулятора. Более того, даже при увеличении коэффициента релаксации до колоссальных значений $\alpha \approx 10^6$ не удается получить нулевые или даже малые строки в матрице $\widetilde{Y}_{1\infty}$.

Попробуем теперь вместо 1∞-нормы использовать на Шаге 2 невыпуклый детектор разреженности NSD (1), минимизация которого осуществляется с помощью вогнуто-выпуклой процедуры, описанной в Разделе 4. На четвертой итерации процедуры *CCCP* первая строка матрицы-решения $\widetilde{Y}$ становится пренебрежимо малой по сравнению со второй строкой. Конкретно, для l_∞-норм строк $r_i = \max\limits_j |y_{ij}|$ имеем

$$\frac{r_1}{r_2} \leqslant 10^{-8}.$$

Переходя к Шагу 3, решаем соответствующую задачу SDP с первой строкой переменной Y зафиксированной равной нулю и по-

лучаем разреженный регулятор с матрицей

$$K_{\text{sparse}}^{\top} = \begin{bmatrix} 0 & -0.3476 \\ 0 & 0.4911 \\ 0 & 1.5146 \\ 0 & -5.1848 \\ 0 & 2.0299 \\ 0 & 0.1979 \\ 0 & 0.7051 \end{bmatrix},$$

при этом значение целевого функционала $J_{\text{sparse}} = 7.8069$, что уступает в 8.51 раз оптимальному значению, что, однако, с учетом поставленных ограничений, считается допустимым. Степени устойчивости замкнутых систем для регуляторов K_{opt} и K_{sparse} не сильно отличаются: $\sigma_{\text{opt}} = 1.5657$ и $\sigma_{\text{sparse}} = 1.4852$.

Таким образом, в данном примере детектор разреженности NSD (1) оказался эффективным при синтезе строчно-разреженного регулятора, в то время как 1∞-норма не помогает достичь желаемого результата.

Естественно, в реальных задачах ухудшение качества управления на порядок едва ли можно считать приемлемым; однако, в данном примере специфика численных значений матриц системы не позволяет построить разреженное управление без такого сильного проигрыша в качестве (не удается без значимых потерь отбросить ни одну из компонент вектора управления).

5.2. Модель WEC1 из библиотеки COMPl$_e$ib

Данный пример представляет собой модель системы преобразования энергии ветра при различных скоростях. Вектор состояний содержит десять компонент, вектор управления – три.

Задаем $\sigma = 0.01$ и на Шаге 1 трехшаговой схемы поучаем опти-

мальный регулятор с матрицей

$$K_{\text{opt}}^{\top} = \begin{bmatrix} -1.6852 & -0.1370 & 0.8928 \\ -4.4369 & 0.4956 & 18.0571 \\ 1.4291 & 0.1770 & 0.6698 \\ 1.5051 & 0.1845 & -1.9668 \\ 0.0010 & 0.0001 & -0.0071 \\ -0.0671 & -0.6805 & -0.0672 \\ 6.7082 & 3.3482 & 6.6312 \\ -5.1921 & -2.5803 & -2.3071 \\ -4.9935 & -2.4784 & -2.2255 \\ -0.0284 & 0.0028 & 3.5884 \end{bmatrix}$$

и оптимальным значением целевого функционала $J_{\text{opt}} = 33.3931$.

Установим допустимый уровень потерь в качестве управления равным 15% ($\alpha = 1.15$). Запускаем вычисления Шага 2 с использованием детектора разреженности (1). После четвертой итерации алгоритма *CCCP* вторая строка Y становится малой относительно остальных строк. Зафиксируем ее как нулевую и перейдем к Шагу 3, в результате которого получим

$$K_{\text{sparse}}^{\top} = \begin{bmatrix} -1.6670 & 0 & 1.2605 \\ -4.6629 & 0 & 23.2722 \\ 1.4127 & 0 & 0.7775 \\ 1.4935 & 0 & -2.6210 \\ 0.0009 & 0 & -0.0084 \\ -0.0808 & 0 & -0.1070 \\ 6.4953 & 0 & 9.1933 \\ -5.0271 & 0 & -3.5374 \\ -4.8381 & 0 & -3.3826 \\ -0.0413 & 0 & 4.1663 \end{bmatrix} \tag{9}$$

и значение целевого функционала $J_{\text{sparse}} = 37.5554$, соответствующее проигрышу в качестве управления около 12.5%. Степень устойчивости при этом меняется незначительно (1.8299 против 2.0712).

Для сравнения пробуем повторить вычисления с использованием на Шаге 2 1∞-нормы. При том же значении коэффициенте $\alpha = 1.15$ не удается детектировать нулевые строки; в терминах l_∞-

норм строк матрицы $Y_{1\infty}$ имеем

$$\frac{r^\top}{\max\limits_k r_k} = (1.0000 \;\; 0.2499 \;\; 0.6049).$$

Тем не менее, при бóльших значениях α, например, $\alpha = 1.5$, в итоге удается детектировать вторую строку как нулевую и прийти к тому же самому разреженному регулятору (9). Применение l_{12}-нормы вместо 1∞-нормы приводит практически к идентичным результатам.

Общий вывод по итогам предварительных численных экспериментов таков, что предложенный детектор разреженности представляется более эффективным, чем 1∞-норма, в качестве суррогата матричной l_0-квазинормы.

Отметим также следующее наблюдение, сделанное в процессе проведения численных экспериментов. Обозначим за $\alpha_{\min}$ минимальное ухудшение качества управления, получаемое при обнулении ровно одной из строк матрицы регулятора. Очевидно, для того, чтобы суметь детектировать разреженность на Шаге 2, коэффициент релаксации должен быть больше $\alpha > \alpha_{\min}$. Во время вычислений детектор NSD (1) успешно справлялся со своей задачей даже при значениях α едва превосходящих $\alpha_{\min}$. Иными словами, можно воспринимать NSD (1) как *сертификат* разреженности/ухудшения качества: если не удается получить разреженное решение при заданному уровне α, то проигрыш разреженного управления, если таковое вообще существует, будет заведомо не меньше α. Эти соображения не верны для 1∞-нормы, при использовании которой приходится задавать бóльшие значения α для того, чтобы детектировать нулевые строки (как, например, в одном из примеров выше).

6. Заключение

В настоящей работе мы пересмотрели подход к синтезу разреженной обратной связи, предложенный в [8]. Во-первых, были проанализированы недостатки существующего выпуклого суррогата (матричной 1∞-нормы). Во-вторых, что более важно, был предложен новый суррогат, невыпуклый детектор разреженности, моти-

вация применения которого подкреплена определенными эвристическими соображениями. В-третьих, модифицированная трехшаговая схема была применена к классической задаче $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации; на ряде примеров было показано, что новый суррогат лучше справляется с детектированием разреженной структуры, нежели матричная 1∞-норма, используемая в исходном подходе.

В дальнейшем планируется продолжать исследования в следующих направлениях. Во-первых, хотелось бы понять причину, по которой минимизация 1∞-нормы в некоторых задачах синтеза управления не приводит к желаемому результату – детектированию разреженной структуры. Кроме того, необходимо описать класс систем управления, для которых возникают подобные сложности. Во-вторых, интерес представдяет нетривиальная задача построения альтернативных детекторов разреженности, более эффективных и гибких. Наконец, требуется провести значительное количество численных экспериментов.

Список литературы

[1] F. Lin, M. Fardad, and M. R. Jovanović. Augmented Lagrangian approach to design of structured optimal state feedback gains. *IEEE Trans. Automat. Control*, 56(12):2923–2929, 2011.

[2] D. Zelazo, S. Schuler, and F. Allgöwer. Performance and design of cycles in consensus networks. *Syst. Control Lett.*, 62(1):85–96, 2013.

[3] U. Münz, M. Pfister, and P. Wolfrum. Sensor and actuator placement for linear systems based on H_2 and H_∞ optimization. *IEEE Trans. Automat. Control*, 59(11):2984–2989, 2014.

[4] A. M. Bruckstein, D. L. Donoho, and M. Elad. From sparse solutions of systems of equations to sparse modeling of signals and images. *SIAM Review*, 51(1):34–81, 2009.

[5] M. Fazel, H. Hindi, and S. Boyd. Log-det heuristic for matrix rank minimization with applications to Hankel and Euclidean distance matrices. In *Proc. American Control Conf.*, pages 2156–2162, Denver, Colorado, June 2003.

[6] E. J. Candès, M. B. Wakin, and S. P. Boyd. Enhancing sparsity by reweighted ℓ_1 minimization. *J. Fourier Anal. Appl.*, 14(5):877–905, 2008.

[7] F. Lin, M. Fardad, and M. R. Jovanović. Design of optimal sparse feedback gains via the alternating direction method of multipliers. *IEEE Trans. Automat. Control*, 58(9):2426–2431, 2013.

[8] B. Polyak, M. Khlebnikov, and P. Shcherbakov. An LMI approach to structured sparse feedback design in linear control systems. In *Proc. Eur. Control Conf.*, pages 833–838, Zurich, Switzerland, July 2013.

[9] B. T. Polyak, M. V. Khlebnikov, and P. S. Shcherbakov. Sparse feedback in linear control systems. *Autom. Remote Control*, 75(12):2099–2111, 2013.

[10] N. K. Dhingra, M. R. Jovanović, and Z. Q. Luo. An ADMM algorithm for optimal sensor and actuator selection. In *Proc. Conf. Decision Control*, pages 4039–4044, Los Angeles, CA, June 2014.

[11] B. T. Polyak, M. V. Khlebnikov, and P. S. Shcherbakov. *Control of Linear Systems Subjected to Exogenous Disturbances: The Linear Matrix Inequality Technique*. URSS, Moscow (in Russian), 2014.

[12] T. Iwasaki and R. E. Skelton. A complete solution to the general $\mathbf{H}_\infty$ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. In *Proc. American Control Conf.*, pages 605–609, San Francisco, USA, June 1993.

[13] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.

[14] P. Hartman. On functions representable as a difference of convex functions. *Pacific J. Math.*, 9(3):707–713, 1959.

[15] A. L. Yuille and A. Rangarajan. The concave-convex procedure. *Neural Computation*, 15:915–936, 2003.

[16] G. R. Lanckriet and B. K. Sriperumbudur. On the convergence of the concave-convex procedure. In *Advances in Neural Information Processing Systems 22*, pages 1759–1767, Vancouver, Canada, December 2009.

[17] F. Leibfritz and W. Lipinski. Description of the benchmark examples in $COMPl_eib$ 1.0. `www.complib.de`, 2003.

[18] M. Grant and S. Boyd. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1. `http://cvxr.com/cvx`, March 2014.

[19] K. C. Toh, M. J. Todd, and R. H. Tutuncu. SDPT3 — a Matlab software package for semidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, 11:545–581, 1999.