

# Фильтрация и предсказание

---

Математической основой, которая может обеспечить выигрыш команды роботов, являются теории оценивания и оптимальной фильтрации. Исторически, теория оценивания начала формироваться как математическая наука в 1806 г., когда появилась работа А. Лежандра о наименьших квадратах. Честь основателя принадлежит и К. Гауссу, опубликовавшему в 1809 г. свою версию метода наименьших квадратов (МНК). В 1821 г. он предложил рекуррентный вариант процедуры, позволяющий корректировать ранее вычисленную оценку с учетом вновь поступивших дополнительных измерений без необходимости повтора всех предшествующих вычислений. В этот период стимулом развития МНК служили запросы развития небесной механики, и метод быстро стал стандартным для определения орбит небесных тел. Неудивительно, что в ряду авторов работ по небесной механике стоят имена Ф. Бесселя, Ж. Лагранжа, П. Лапласа, С. Пуассона, известных своим вкладом в основания статистики.

В начале XX века теоретические обоснования метода наименьших квадратов получили значительное развитие в трудах А.А. Маркова [12]. Постепенно методика оценивания была поглощена статистикой, но не сразу в достаточно строгой математической форме. Лишь в середине XX века теория вероятностей и важнейшие разделы статистики получили соответствующее математическое оформление, прежде всего благодаря использованию концепций теории меры. Фундамент современного состояния теории оценивания заложен Р. Фишером в 20–30-х годах прошлого века [23]. Р. Фишер предложил метод максимума правдоподобия и показал, что доставляемые им

оценки не могут быть существенно улучшены. Р. Фишером также введены ставшие общепринятыми понятия несмещенности, достаточности, состоятельности, эффективности и асимптотической эффективности оценок. Тщательно рассматривая основания теории оценивания, он избавил ее от жестких ограничений, существовавших с момента появления работ К. Гаусса. Обобщения его теории привели, в частности, к развитию современных методов непараметрического и робастного оценивания, в которых точная природа распределения вероятностей оцениваемых случайных величин не предполагается известной.

Одновременно с формализацией и развитием математической статистики проводились исследования в далеких, казалось бы, от них областях. До 1940 года оценивание касалось прежде всего классических проблем определения наилучших оценок параметров распределений на основе выборки из генеральной совокупности. Между тем специалисты по линиям связи имели дело с задачей синтеза устройств, позволяющих эффективно обнаруживать присутствие или отсутствие сигнала, наблюдаемого на фоне помехи. Именно их исследования составили конкуренцию статистическим исследованиям Р. Фишера. Быстрое развитие теории связи привело к необходимости учета воздействия помех на распространение и прием сигналов. Первые попытки уменьшить нежелательное воздействие помех были связаны с введением методов расчета фильтров, позволяющих оценить спектр мощности полезного сигнала. Эти попытки делались в перспективном направлении, но их сдерживала неразвитость теории фильтрации. Математические основы этой теории только закладывались: в начале 30-х годов XX века А. Хинчин и Н. Винер создали теорию гармонического анализа случайных функций, центральное место в которой занимает теорема о спектральном представлении стационарных процессов. Основы теории оптимальной фильтрации стационарных процессов были заложены

в работах А.Н. Колмогорова (1941 г. — см. [9]) и отчете Н. Винера, написанном в 1942 г. по заданию Национального Совета оборонных исследований США и опубликованном в 1949 г. — см.[29]. Н. Винер показал, в частности, что теория оценивания может быть применена для синтеза электрического фильтра, который обеспечивает наилучшее выделение сигнала при наличии стационарной помехи. Основной акцент он делал не столько на рассмотрение частотных спектров сигналов, сколько на их обработку как стохастических процессов. Центральным местом теории оптимальной фильтрации Винера–Колмогорова является уравнение Винера–Хопфа, решение которого непосредственно связано с синтезом оптимального фильтра. Аналитические трудности решения этого уравнения (в частности, проблема факторизации) явились главным препятствием на пути широкого внедрения методов фильтрации в практику. Кроме того, значительным ограничением для многих приложений было важное предположение о стационарности обрабатываемого сигнала.

В конце 40-х годов XX века закладываются основы статистической теории связи и теории информации. В 1947 г. в докторской диссертации В.А. Котельникова "Теория потенциальной помехоустойчивости", опубликованной в 1956 г. — см. [10], впервые сформулирована задача оптимального статистического синтеза приемных устройств и дается решение задачи обнаружения и различения детерминированных сигналов на фоне коррелированной помехи. В этой работе с новых позиций анализируются многие фундаментальные понятия. Спустя немногим более года появляется широко известная работа К. Шеннона, содержащая знаменитые теоремы о кодировании передаваемых сигналов с целью устранения избыточной информации и о пропускной способности каналов со случайными помехами. Широкое признание среди инженеров–проектировщиков систем связи получила интерпретация Боде–Шеннона (1950 г.) процедуры синтеза оптимального фильтра

[22]. В то же время Н. Винер публикует книгу "Кибернетика, или управление и связь в животном и машине", возвестившую о становлении новой науки — кибернетики, в которой информационно-управленческая связь в явлениях материального мира выступает как фундаментальное его свойство [2].

В конце 50-х годов XX века при исследовании оптимальных фильтров, синтезируемых для обработки результатов наблюдения на конечном интервале времени, были предложены подходы, не использующие интегральное уравнение Винера–Хопфа. Р. Калман и Р. Бьюси [8] поняли, что вместо его исследования часто бывает желательно (и возможно) превратить интегральное уравнение в нелинейное дифференциальное, решение которого дает ковариацию ошибки оптимального фильтра. В свою очередь, эта ковариация содержит всю необходимую информацию для проектирования. Этот подход, по существу представляющий собой рекуррентный вариант МНК, в частных случаях исследовался ранее и другими авторами, но именно с работ Р. Калмана и Р. Бьюси в начале 60-х годов XX века началось широкое развитие методов теории рекуррентного (последовательного) оценивания, в рамках которой задача оптимальной фильтрации получила существенное продвижение. Возможность синтеза оптимального фильтра рекуррентным способом представляет и большой практический интерес в связи с удобством его реализации на базе современной вычислительной техники. Рекуррентные процедуры оценивания (фильтр Калмана–Бьюси) оказались применимыми и в случае нестационарных процессов. Работы Р. Калмана по рекуррентному оцениванию появились в связи с необходимостью оптимального оценивания вектора состояния линейных нестационарных систем. Оценивание производилось по наблюдениям за зашумленной компонентой вектора состояния. При этом в теоретическом плане существенным моментом является линейная зависимость наблюдаемого процесса от оцениваемого параметра (линейная фильтрация).

Теория оценивания в последней четверти прошлого века получила дополнительный импульс в развитии при синтезе адаптивных систем, способных успешно функционировать в условиях априорной неопределенности о свойствах внешней среды. Алгоритмы построения оптимального управления обычно предполагают известными некоторые априорные данные о свойствах системы управления и помех. В большинстве практических задач эта информация недоступна проектировщику, но ее можно в той или иной степени восстановить из анализа получаемых наблюдений. Если такая возможность имеется, то можно синтезировать алгоритмы, в которых совмещены процессы управления и восполнения недостающей информации. Этот подход близок понятию *дуального (двойственного) управления* А.А. Фельдбаума [16], утверждавшего, что "управляющие воздействия должны быть в известной мере изучающими, но в известной мере направляющими". При достаточно эффективном восполнении недостающих сведений система управления приобретает оптимальные свойства либо близкие к ним. Такие системы называют *адаптивными*, поскольку в процессе функционирования они проявляют свойство приспособления к заранее неизвестным помехо-сигнальным условиям (см. [?, ?, 17, ?, ?]). Сказанное в равной степени относится и к другим адаптивным устройствам, в частности к обучающимся машинам и адаптивным фильтрам (см., например, [?, 18, ?, ?]).

Начнем с формулировки нескольких модельных примеров, иллюстрирующих область применения обсуждаемых методов.

## 1. Примеры задач оценивания

Рассматриваемые примеры не представляют собой конкретные практические задачи. Многие из них заданы в достаточно общей модельной форме, но, по мнению автора, для практи-

ков не составит труда при необходимости конкретизировать любой из них.

### 1.1. Оценивание величины постоянного сигнала, наблюдаемого на фоне помехи

Предположим, что наблюдаемый (регистрируемый измерительным прибором) сигнал  $\{y_n\}$  имеет вид

$$y_n = \theta + v_n,$$

здесь  $\theta$  — неизвестная постоянная величина (*полезный сигнал*);  $\{v_n\}$  — неизвестная помеха наблюдения, изменяющаяся во времени,  $n = 1, 2, \dots$ . Интервал времени наблюдения может быть либо неограниченным, либо конечным. При рассмотрении второго случая мы будем писать:  $n = 1, 2, \dots, N$ .

*Требуется* по набору величин  $y_1, \dots, y_N$ , состоящему из наблюдений, полученных к моменту времени  $N$ , оценить значение величины  $\theta$ .

В такой общей постановке нет возможности получить какое-нибудь удовлетворительное решение задачи. Для большей содержательности в постановку задачи вносят уточняющие дополнения. Например, при статистическом подходе делают те или иные предположения о вероятностных свойствах помех  $\{v_n\}$ . Достаточно характерным является предположение о *центрированности* (среднее значение равно нулю) и *независимости* (в упрощенном смысле, нет зависимости между значениями в разные моменты времени) помехи. В этой ситуации, просуммировав и усреднив  $N$  значений наблюдений, получим

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n = \theta + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n.$$

В зависимости от сделанных статистических предположений в силу закона больших чисел (см. разд. П.1.3) величины  $\sum_{n=1}^N v_n/N$  могут сходиться в некотором вероятностном смысле

к нулю. Тогда оценки  $\{\hat{\theta}_N\}$  неизвестного значения  $\theta$ , вычисленные по формуле

$$\hat{\theta}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n,$$

будут сходиться в том же вероятностном смысле к значению неизвестной величины  $\theta$ .

С практической точки зрения для удобства реализации алгоритма оценивания на ЭВМ его целесообразно переписать в рекуррентной форме, использующей на каждом шаге *конечную память* (фиксированное количество значений). Пусть  $\hat{\theta}_0 = 0$ . Произведем несложные преобразования:

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \frac{n-1}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{1}{n} y_n,$$

получим рекуррентный вариант алгоритма для вычисления оценок:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{1}{n} (\hat{\theta}_{n-1} - y_n).$$

Обратим внимание на то, что для вычисления очередной оценки используется только новое наблюдение и предыдущая оценка.

Кроме вычисления среднеарифметического значения данных наблюдения широко используется метод максимального правдоподобия. Обозначим

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}.$$

В том случае, когда помехи — случайные величины, вектор наблюдений  $Y$  имеет случайную природу. Если существует

плотность у его функции распределения, то ее обычно называют *функцией правдоподобия* и обозначают  $L(Y, \theta)$ , подчеркивая зависимость от  $\theta$ . В такой ситуации одним из естественных способов выбора оценки является определение той точки, в которой функция правдоподобия достигает максимального значения. Например, пусть помехи наблюдения — независимые гауссовские с нулевым средним и невырожденной дисперсией  $\sigma_n^2 > 0$ :  $v_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ . Так как  $y_n \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma_n^2)$ , то в этом примере функция правдоподобия имеет вид

$$L(Y, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \prod_{k=1}^N \sigma_k} e^{-\sum_{k=1}^N \frac{(y_k - \theta)^2}{2\sigma_k^2}}.$$

Удобнее решать задачу максимизации по  $\theta$  функции

$$\ln L(Y, \theta) = -\frac{N \ln 2\pi}{2} - \sum_{k=1}^N \ln \sigma_k - \sum_{k=1}^N \frac{(y_k - \theta)^2}{2\sigma_k^2}$$

(*логарифма правдоподобия*). Приравнивая к нулю результат дифференцирования по  $\theta$ , получаем уравнение для  $\hat{\theta}_N$ :

$$\sum_{k=1}^N \frac{y_k - \hat{\theta}_N}{\sigma_k^2} = 0,$$

решением которого является оценка, называемая *усреднением с весами*:

$$\hat{\theta}_N = \frac{\sum_{k=1}^N y_k \sigma_k^{-2}}{\sum_{k=1}^N \sigma_k^{-2}}.$$

Последняя формула легко обосновывается и на интуитивном уровне: в формирование оценки наибольший вклад вносят те наблюдения, которые делались с наименьшими ошибками. Если дополнительно предположить одинаковую распределенность помех наблюдений  $\{v_n\}$ , то, как и выше, получаем среднеарифметическое значение данных наблюдения:

$$\hat{\theta}_N = \frac{\sigma_v^{-2} \sum_{k=1}^N y_k}{N \sigma_v^{-2}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n.$$



Для решения поставленной задачи можно выбрать и какой-нибудь другой способ построения оценок искомой величины  $\theta$ , но все известные содержательные алгоритмы опираются на существенные предположения о статистических свойствах помех наблюдения. Обычно, как и в рассмотренном примере, предполагаются их центрированность и некоррелированность. Далее, в разд. 1.2, разбираются еще несколько примеров такого же типа. Интересна постановка задачи о выборе наилучших в том или ином смысле оценок. Известно, что приведенный первым алгоритм является оптимальным в случае независимых одинаково распределенных гауссовских помех в наблюдениях. Для распределений статистических помех других типов оптимальным может быть иной метод построения оценок. При исследовании выбранного алгоритма стараются дополнительно получить ответ на вопрос о скорости сходимости доставляемых им оценок, если они сходятся к значению неизвестной величины  $\theta$ , т.е. изучают скорость сходимости к нулю последовательности  $\{\hat{\theta}_N - \theta\}$ .

К сожалению, при произвольных помехах в наблюдении приведенные рассуждения не позволяют получить удовлетворительного решения задачи. Хорошо оценить величину постоянного сигнала на фоне детерминированной (неслучайной) неизвестной помехи принципиально невозможно.

## 1.2. Задача об обнаружении сигнала

Рассмотрим задачу обнаружения (детектирования) сигнала  $\{\varphi_n\}$ , который может попадать, а может и не попадать в зашумленный канал наблюдения (измерения производятся с помехами). Здесь для простоты будем считать сигнал  $\{\varphi_n\}$  скалярным. В задачах обнаружения сигнала оцениваемая величина  $\theta$  обычно принимает конечное число значений и часто представляет собой характеристику типа "да — нет". Будем считать, что случай  $\{\theta = 1\}$  соответствует наличию сигнала

в приемнике, а случай  $\{\theta = 0\}$  — его отсутствию. С учетом этого для наблюдаемых величин  $\{y_n\}$  можно записать соотношения

$$y_n = \varphi_n \theta + v_n,$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . В историческом аспекте эта задача является классической. Большинство методов теории оценивания прежде всего апробировались на ней, поэтому набор возможных способов ее решения при различных предположениях о статистических свойствах сигнала  $\{\varphi_n\}$  и "хороших" помехах  $\{v_n\}$  достаточно обширен (см., например, [18]).

При решении важно знать: известны значения величин  $\{\varphi_n\}$  в каждый момент времени или нет. Будем рассматривать случай, когда в каждый момент времени  $n$  значение обнаруживаемого сигнала известно. Помимо этого пусть полезный сигнал — ограниченный и имеет статистическую природу, представляя собой последовательность независимых между собой случайных величин с известным ненулевым средним значением  $M_\varphi \neq 0$  и положительной ограниченной дисперсией  $\sigma_\varphi^2 > 0$ . Как и ранее, просуммировав и усреднив  $n$  последовательных данных наблюдения, для среднеарифметического значения данных наблюдения получим

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_k \theta + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k.$$

В силу усиленного закона больших чисел (см. разд. П.1.3), последовательность величин  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_k$  стремится к среднему значению  $M_\varphi$ . Если взять  $\hat{\theta}_0 = 0$  и в качестве очередной оценки выбрать

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{nM_\varphi} \sum_{k=1}^n y_k,$$

то, предполагая независимость помех наблюдения, их одинаковую распределенность и ограниченность вторых статистических моментов, можно доказать сходимость с вероятностью

единица последовательности оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$  к значению

$$\theta + \frac{M_v}{M_\varphi},$$

здесь  $M_v$  — среднее значение помехи. В момент времени  $n$  при выборе гипотезы о наличии полезного сигнала в канале наблюдения или об его отсутствии разумно взять операцию сравнения величины текущей оценки  $\hat{\theta}_n$  с некоторым *пороговым значением*  $\delta$ . Если  $\hat{\theta}_n < \delta$ , то принимается гипотеза *сигнала нет*, в противном случае — *сигнал есть*. При известной величине  $M_v$  естественно в *решающем правиле* задать пороговое значение  $\delta = \frac{1}{2} + \frac{M_v}{M_\varphi}$ .

При произвольных помехах в наблюдении этот простой алгоритм не годится. Даже если помехи — случайные, независимые, одинаково распределенные, но с неизвестным средним значением, то при  $|\frac{M_v}{M_\varphi}| > \frac{1}{2}$  рассмотренный алгоритм в пределе будет давать неправильные ответы. Как все-таки подступить к решению такой задачи? Пусть помехи задаются неизвестной, но ограниченной детерминированной функцией  $|v_n| \leq C_v$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Обозначим через  $\Delta_n = \varphi_n - M_\varphi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , центрированные входы. Предположим дополнительно ограниченность четвертого центрального момента полезного сигнала:  $E\{|\Delta_n|^4\} < \infty$ . Домножим на  $\Delta_n$  обе части соотношения, определяющего наблюдаемые величины  $y_n$ , и, произведя несложные преобразования, получим при  $n = 1, 2, \dots$

$$\Delta_n y_n = \Delta_n^2 \theta + \Delta_n M_\varphi \theta + \Delta_n v_n.$$

Просуммировав и усреднив, имеем

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k^2 \theta + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k M_\varphi \theta + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k v_k,$$

$n = 1, 2, \dots$ . Первое и второе слагаемые в правой части при  $n \rightarrow \infty$  и сделанных предположениях, в силу усиленного закона больших чисел (см. разд. П.1.3), с вероятностью единица

стремятся к  $\sigma_\varphi^2 \theta$  и нулю соответственно. Можно показать, что по той же причине и последнее слагаемое с вероятностью единица стремится к нулю. Отсюда следует, что при  $\Delta_1 \neq 0$  последовательность оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , формируемых по правилу

$$\hat{\theta}_n = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_k y_k}{\sum_{k=1}^n \Delta_k^2},$$

сходится с вероятностью единица к  $\theta$ . Зададим некоторое пороговое значение  $\delta \in (0, 1)$ , например  $\delta = 1/2$ . В качестве решающего правила в момент времени  $n$  можно выбрать операцию сравнения величины текущей оценки  $\hat{\theta}_n$  с выбранным пороговым значением  $\delta$ . Если  $\hat{\theta}_n < \delta$ , то принимается гипотеза *сигнала нет*, в противном случае — *сигнал есть*.

### 1.3. Предсказание значений случайного процесса

Описание предварительных примеров закончим задачей о предсказании значений скалярного случайного процесса  $\{\theta_n\}$ , порождающегося устойчивым линейным фильтром:

$$\theta_{n+1} = a \theta_n + w_{n+1},$$

где  $|a| < 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\theta_0 = 0$  и последовательность  $\{w_n\}$  представляет собой некоторую реализацию независимых случайных величин. Наблюдению в каждый момент времени доступны величины

$$y_n = \varphi_n \theta_n + v_n,$$

являющиеся смесью преобразованного процесса  $\{\theta_n\}$  и известной помехи  $\{v_n\}$ . Требуется найти оценки  $\hat{\theta}_{n+1}$  значений процесса  $\{\theta_n\}$  в момент времени  $n + 1$  по наблюдениям  $y_i$ ,  $\varphi_i$ ,  $i \leq n$ . Качество предсказания определяется средней величиной квадрата невязки

$$E\{\|\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}\|^2\}.$$

Обычно считают, что в модели наблюдений векторы  $\{\varphi_n\}$  определяются детерминированной последовательностью. Если  $\varphi_n \equiv \varphi$ , а  $\{w_n\}$  и  $\{v_n\}$  — стационарные и стационарно связанные центрированные случайные процессы (см. разд. П.1.4) с известными спектральными характеристиками, то рассматриваемая задача имеет оптимальное решение в рамках теории оптимальной фильтрации Винера–Колмогорова. В нестационарном случае при  $\varphi_n \neq \varphi$  и независимых гауссовских случайных процессах  $\{w_n\}$ ,  $\{v_n\}$  оптимальный прогноз вычисляется рекуррентно по фильтру Калмана–Бьюси. В случае произвольных помех наблюдения  $\{v_n\}$  решение задачи об оптимальном прогнозе с помощью фильтра Калмана–Бьюси и, тем более, в рамках теории Винера–Колмогорова не получается. В [4] при неизвестных, но ограниченных детерминированных помехах наблюдения  $\{v_n\}$  для решения задачи предложен новый радомизированный алгоритм, являющийся модификацией упрощенного варианта фильтра Калмана–Бьюси. При обосновании его относительной эффективности предполагается случайная природа формирования последовательности  $\{\varphi_n\}$ .

## 2. Методы фильтрации

### 2.1. Фильтр Винера–Колмогорова

Ограничимся рассмотрением следующей постановки задачи: последовательность наблюдений при  $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$  удовлетворяет уравнению

$$y_n = \varphi^T \theta_n + v_n,$$

в котором  $\{\theta_n\}$  и  $\{v_n\}$  — вещественные векторные процессы:  $\theta_n \in \mathbb{R}^r$ ,  $v_n \in \mathbb{R}^m$ ;  $\varphi$  — прямоугольная матрица размерностью  $r \times m$ . Требуется получить оценку  $\hat{\theta}_n$  процесса  $\theta_n$  в момент времени  $n$  по наблюдениям за процессом  $\{y_n\}$  до момента времени  $n - l$ ,  $l$  — заданное целое число. Оценка ищется с

помощью *линейного устойчивого стационарного фильтра*, уравнение которого имеет вид

$$\hat{\theta}_n = \sum_{i=l}^{\infty} H(i-l)y_{n-i},$$

где  $H(i)$  — *весовая функция фильтра*. Введем *передаточную функцию фильтра*:

$$H(\lambda) = \lambda^l \sum_{i=0}^{\infty} H(i)\lambda^i.$$

Для упрощения ограничимся рассмотрением фильтров с дробно-рациональными передаточными функциями. Дробно-рациональную функцию  $\lambda^{-l}H(\lambda)$  будем называть *устойчивой*, если у нее нет полюсов, которые по абсолютной величине меньше либо равны единице. Свойство устойчивости фильтра равносильно устойчивости функции  $\lambda^{-l}H(\lambda)$ . Задача фильтрации называется по-разному в зависимости от числа  $l$  в уравнении фильтра. При  $l > 0$  ее называют задачей *экстраполяции (прогноза)* на  $l$  моментов времени, при  $l < 0$  — задачей *интерполяции (сглаживания)*, при  $l = 0$  — собственно *фильтрацией*. Таким образом, при сглаживании оценка может зависеть от некоторого числа "будущих" наблюдений, а передаточная функция фильтра имеет полюс порядка  $l$  в начале координат.

В классической постановке задачи рассматриваются стационарные случайные процессы  $\{y_n\}$  и  $\{\theta_n\}$ , которые вдобавок стационарно связаны, и их матрицы ковариаций вместе со спектральными плотностями:  $B_{yy}(n)$ ,  $S_{yy}(\lambda)$ ,  $B_{y\theta}(n)$ ,  $S_{y\theta}(\lambda)$ ,  $B_{\theta\theta}(n)$ ,  $S_{\theta\theta}(\lambda)$ , существуют и известны (см. разд. П.1.4). Оценка  $\hat{\theta}_n$  должна быть оптимальной в смысле минимума среднеквадратичного функционала:

$$f_l = E\{\|\hat{\theta}_n - \theta_n\|^2\} (= f_l(H(\lambda))).$$

В силу стационарности процессов этот функционал не зависит от времени.

Перепишем на основании определений матриц ковариации функционал качества  $f_l$  в виде

$$\begin{aligned}
f_l &= \text{Tr}[\mathbf{E}\{(\hat{\theta}_n - \theta_n)(\hat{\theta}_n - \theta_n)^T\}] = \\
&= \text{Tr}\left[\mathbf{E}\left\{\left(\sum_{i=l}^{\infty} \mathbf{H}(i-l)y_{n-i} - \theta_n\right)\left(\sum_{j=l}^{\infty} \mathbf{H}(j-l)y_{n-j} - \theta_n\right)^T\right\}\right] = \\
&= \text{Tr}\left[\mathbf{B}_{\theta\theta}(0) + \sum_{i=l}^{\infty} \sum_{j=l}^{\infty} \mathbf{H}(i)\mathbf{B}_{yy}(j-i)\mathbf{H}(j)^T - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=l}^{\infty} \mathbf{H}(i)\mathbf{B}_{y\theta}(-i-l) - \sum_{i=l}^{\infty} \mathbf{B}_{\theta y}(i+l)\mathbf{H}(j)^T\right].
\end{aligned}$$

Известно, что преобразование спектральной плотности в линейном фильтре позволяет записать функционал качества  $f_l$  как квадратичную форму от передаточной функции фильтра:

$$\begin{aligned}
f_l &= \text{Tr}\left[\mathbf{B}_{\theta\theta}(0) + \frac{1}{2\pi i} \oint \left( \mathbf{H}(\lambda)\mathbf{S}_{yy}(\lambda)\mathbf{H}(\lambda^{-1})^T - \mathbf{H}(\lambda)\mathbf{S}_{y\theta}(\lambda) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \mathbf{S}_{\theta y}(\lambda)\mathbf{H}(\lambda^{-1})^T \right) \frac{d\lambda}{\lambda} \right].
\end{aligned}$$

Матрица спектральных плотностей  $\mathbf{S}_{yy}(\lambda)$  — неотрицательно определенная при  $|\lambda| = 1$ . Известно, что такая матричная функция (см. разд. П.3) допускает *факторизацию*, т.е. представление в виде

$$\mathbf{S}_{yy}(\lambda) = \mathbf{\Pi}(\lambda)\mathbf{\Pi}(\lambda^{-1})^T,$$

где  $\mathbf{\Pi}(\lambda)$  — устойчивая матричная функция (ее элементы не имеют полюсов при  $|\lambda| \leq 1$ ). Предположим, что матрица  $\mathbf{S}_{yy}(\lambda)$  — положительно определенная при  $|\lambda| = 1$ . В этом случае можно выбрать такую матрицу  $\mathbf{\Pi}(\lambda)$ , чтобы  $\mathbf{\Pi}(\lambda)^{-1}$  была устойчивой. С помощью формулы факторизации, учитывая выполнение при  $|\lambda| = 1$  соотношения

$$\mathbf{S}_{\theta y}(\lambda) = \mathbf{S}_{y\theta}(\lambda^{-1})^T,$$

для функционала качества  $f_l$  можно вывести формулу

$$f_l = \text{Tr} \left[ \mathbf{Q} + \frac{1}{2\pi i} \oint \left( H(\lambda)\Pi(\lambda) - R(\lambda) \right) \left( H(\lambda)\Pi(\lambda) - R(\lambda) \right)^T \frac{d\lambda}{\lambda} \right],$$

в которой использованы обозначения:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}_{\theta\theta}(0) - \frac{1}{2\pi i} \oint R(\lambda)R(\lambda^{-1})^T \frac{d\lambda}{\lambda},$$

$$R(\lambda) = S_{\theta y}(\lambda) \left( \Pi(\lambda^{-1})^T \right)^{-1}.$$

Так как матрица  $\mathbf{Q}$  не зависит от  $H(\lambda)$ , а второе слагаемое в правой части полученной для  $f_l$  формулы — неотрицательная матрица, то минимум функционала качества  $f_l$  достигается при

$$H(\lambda) = R(\lambda)\Pi(\lambda)^{-1} = S_{\theta y}(\lambda)S_{yy}(\lambda)^{-1},$$

причем минимальное значение функционала качества равно

$$\min_{\{H(\lambda)\}} f_l = \text{Tr}[\mathbf{Q}].$$

Однако найденное решение неудовлетворительно, поскольку, вообще говоря, не выполняется условие устойчивости фильтра, так как матрица  $S_{yy}(\lambda)^{-1}$  может иметь особенности при  $|\lambda| \leq 1$  и это свойство передается  $H(\lambda)$ . Для получения устойчивого фильтра надо произвести *сепарацию* функции  $R(\lambda)$ , т.е. представить ее в виде

$$\lambda^{-1}R(\lambda) = R_+(\lambda) + R_-(\lambda),$$

в котором  $R_+(\lambda)$ ,  $R_-(\lambda^{-1})$  — устойчивые матричные функции и

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} R_-(\lambda) = 0.$$

Основной результат теории оптимальной фильтрации Винера–Колмогорова заключается в том, что *при сделанных выше предположениях и введенных обозначениях передаточная*



функция оптимального устойчивого фильтра, минимизирующего функционал качества  $f_l$ , определяется по формуле

$$H(\lambda) = \lambda^l R_+(\lambda) \Pi(\lambda)^{-1},$$

и соответствующее минимальное значение функционала качества равно

$$\min_{\{H(\lambda)\}} f_l = \text{Tr}[Q] + \frac{1}{2\pi i} \oint \text{Tr}[R_-(\lambda) R_-(\lambda^{-1})^T] \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

В случае скалярного процесса  $y_n$  с дробно-рациональной спектральной плотностью процедура построения функции  $\Pi(\lambda)$  сводится, по существу, к нахождению корней и полюсов дробно-рациональной функции  $S_{yy}(\lambda)$ , которые по абсолютной величине больше единицы. Сепарация функции  $\lambda^{-l} R(\lambda)$  в этом случае состоит в выделении целой части функции с последующим определением "устойчивых" и "неустойчивых" полюсов у полученной дробно-рациональной функции.

*Пример: оптимальный прогноз процесса.* Предположим, что при  $n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$  наблюдается скалярный процесс  $\{y_n\}$ :

$$y_n = \varphi \theta_n + v_n,$$

где  $\{\theta_n\}$  и  $\{v_n\}$  — стохастически независимые стационарно связанные процессы:  $E\{v_n\} = 0$ ,  $E\{v_n^2\} = \sigma_v^2$ , причем  $\{\theta_n\}$  определяется уравнением

$$\theta_{n+1} = a \theta_n + w_{n+1},$$

в котором  $0 < |a| < 1$ ,  $E\{w_n\} = 0$ ,  $E\{w_i w_j\} = \sigma_w^2 \delta_{ij}$ .

В данном случае  $S_{vv} = \sigma_v^2$ ,

$$S_{\theta\theta}(\lambda) = \frac{\sigma_w^2}{(1 - a\lambda)(1 - a\lambda^{-1})}, \quad S_{yy}(\lambda) = S_{vv} + \varphi^2 S_{\theta\theta}(\lambda).$$

Для проведения факторизации функции  $S_{yy}(\lambda)$  найдем вещественные постоянные  $c_1$  и  $c_2$  из уравнения

$$\sigma_v^2(1 - a\lambda)(1 - a\lambda^{-1}) + \varphi^2 \sigma_w^2 = (c_1 + c_2\lambda)(c_1 + c_2\lambda^{-1}).$$

Несложные расчеты дают

$$c_1 = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2), \quad c_2 = \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2),$$

где

$$\rho_1 = \sqrt{\varphi^2 \sigma_w^2 + \sigma_v^2(1 - a)^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{\varphi^2 \sigma_w^2 + \sigma_v^2(1 + a)^2}.$$

Положив

$$\Pi(\lambda) = \frac{c_1 + c_2\lambda}{1 - a\lambda},$$

с учетом введенных обозначений, имеем:

$$S_{yy}(\lambda) = \Pi(\lambda)\Pi(\lambda^{-1})^T.$$

При этом функции  $\Pi(\lambda)$  и  $\Pi(\lambda)^{-1}$  — устойчивые, так как  $|c_1| > |c_2|$ . Далее, поскольку

$$S_{y\theta}(\lambda) = \frac{\varphi\sigma_w^2}{(1 - a\lambda)(1 - a\lambda^{-1})},$$

то

$$R(\lambda) = \frac{\varphi\sigma_w^2\lambda}{(1 - a\lambda)(c_1\lambda + c_2)}.$$

Рассмотрим задачу об оптимальном прогнозе на один шаг, т.е. случай  $l = 1$ . Для ее решения надо произвести сепарацию функции:

$$\lambda^{-1}R(\lambda) = \frac{\varphi\sigma_w^2}{(1 - a\lambda)(c_1\lambda + c_2)}.$$

В результате сепарации получаем

$$R_+(\lambda) = \frac{\varphi\sigma_w^2 a}{c_1 + c_2 a} \frac{1}{1 - a\lambda}, \quad R_-(\lambda) = \frac{\varphi\sigma_w^2 c_1}{c_1 + c_2 a} \frac{1}{c_1\lambda + c_2}.$$

Следовательно, передаточная функция оптимального фильтра имеет вид

$$H(\lambda) = \frac{\varphi\sigma_w^2 a}{c_1 + c_2 a} \frac{\lambda}{c_1 + c_2 \lambda}.$$

Отсюда делаем вывод, что две последовательные оптимальные оценки  $\hat{\theta}_{n+1}$  и  $\hat{\theta}_n$  связаны соотношением

$$c_1 \hat{\theta}_{n+1} + c_2 \hat{\theta}_n = \frac{\varphi\sigma_w^2 a}{c_1 + c_2 a} y_n.$$

Отметим, что последнее уравнение можно переписать в виде

$$\hat{\theta}_{n+1} = a\hat{\theta}_n - a\alpha\varphi(\varphi\hat{\theta}_n - y_n),$$

где

$$\alpha = \frac{\sigma_w^2}{c_1(c_1 + c_2 a)} \left( \equiv \frac{1}{a\varphi^2} \left( \frac{c_2}{c_1} + a \right) \right).$$

## 2.2. Фильтр Калмана–Бьюси

Теория Винера–Колмогорова оптимальной фильтрации послужила мощным стимулом поиска новых путей определения конкретных способов синтеза теоретически оптимального фильтра. Большой практический интерес представляет возможность синтезировать оптимальный фильтр рекуррентным способом, обеспечивая удобство его реализации при использовании ЭВМ.

Предположим, что при  $n = 1, 2, \dots$  наблюдается случайный процесс

$$y_n = \varphi_n^T \theta_n + v_n,$$

представляющий собой смесь преобразованного векторного процесса  $\{\theta_n\}$  и векторной помехи  $\{v_n\}$ . Прямоугольные матрицы  $\varphi_n$  этого преобразования считаются известными и в отличие от теории Винера–Колмогорова могут изменяться во

времени. Векторный процесс  $\{\theta_n\}$  порождается соотношением

$$\theta_{n+1} = A_n \theta_n + w_{n+1},$$

в котором  $\theta_0 = 0$  и  $A_n$  — известная матричная функция времени, а  $\{w_n\}$  — последовательность центрированных независимых случайных векторов с известными матрицами ковариации:

$$E\{w_n w_j^T\} = Q_w(n) \delta_{nj}.$$

Обычно считают, что помеха  $\{v_n\}$  также представляет собой последовательность центрированных независимых случайных векторов с известными матрицами ковариации

$$E\{v_n v_j^T\} = B_v(n) \delta_{nj},$$

которые при всех  $n$  — невырожденные, и  $\{\varphi_n\}$  — детерминированная последовательность матриц.

Ограничимся рассмотрением задачи об оптимальном одношаговом прогнозе. Для  $n = 1, 2, \dots$  требуется по наблюдениям  $y_1, y_2, \dots, y_n$  найти линейные оценки  $\hat{\theta}_{n+1}$  значений процесса  $\{\theta_n\}$  в моменты времени  $n + 1$ , минимизирующие среднеквадратичные отклонения

$$f_n = E\{\|\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}\|^2\}.$$

Выпишем необходимые и достаточные условия оптимальности линейной оценки в терминах корреляционных матриц рассматриваемых процессов. Предположим, что оптимальная оценка имеет вид

$$\hat{\theta}_{n+1} = \sum_{i=1}^n H_n(i) y_i.$$

Если оценка  $\hat{\theta}_{n+1}$  минимизирует функционал качества  $f_n$ , то для любого  $j = 1, 2, \dots, n$  выполнено условие

$$E\{(\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}) y_j^T\} = 0.$$

Это соотношение имеет простой геометрический смысл: случайная величина  $\hat{\theta}_{n+1}$ , являющаяся линейной комбинацией случайных величин  $y_1, \dots, y_n$ , должна быть строго ортогональной проекцией вектора  $\theta_{n+1}$  на подпространство, натянутое на соответствующие векторы наблюдений. В силу предполагаемого вида оптимального фильтра, из последнего выражения получаем нестационарный вариант *уравнения Винера–Хонфа* (в дискретном времени) относительно весовых функций  $H_n(i)$

$$E\{\theta_{n+1}y_j^T\} = \sum_{i=1}^n H_n(i)E\{y_iy_j^T\}.$$

Обозначив  $V_{ij} = E\{y_iy_j^T\}$  и  $K_n = H_n(n)$ , из последнего уравнения, записанного для двух последовательных значений времени  $n$  и  $n+1$ , с одной стороны, получаем

$$E\{(\theta_{n+1} - \theta_n)y_j^T\} = \sum_{i=1}^{n-1} (H_n(i) - H_{n-1}(i))V_{ij} + K_nV_{nj}.$$

С другой стороны, учитывая вид фильтра, порождающего процесс  $\{\theta_n\}$ , имеем

$$E\{(\theta_{n+1} - \theta_n)y_j^T\} = (A_n - I) \sum_{i=1}^{n-1} H_{n-1}(i)V_{ij}.$$

Из последних двух уравнений следует, что при  $j = 1, 2, \dots, n-1$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (A_n H_{n-1}(i) - K_n \varphi_n^T H_{n-1}(i) - H_n(i)) V_{ij} = 0,$$

так как в силу уравнения наблюдений

$$V_{nj} = E\{y_n y_j^T\} = \varphi_n^T E\{\theta_n y_j^T\} + E\{v_n y_j^T\} = \varphi_n^T \sum_{i=1}^{n-1} H_{n-1}(i)V_{ij}.$$

А значит, оптимальной в среднеквадратичном смысле оценкой вектора  $\theta_n$  по наблюдениям  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  также является и оценка

$$\tilde{\theta}^n = \sum_{i=1}^{n-1} (H_{n-1}(i) - D_n(i)) y_i,$$

где

$$D_n(i) = A_n H_{n-1}(i) - K_n \varphi_n^T H_{n-1}(i) - H_n(i).$$

Поэтому

$$E\{\|\tilde{\theta}_n - \hat{\theta}_n\|^2\} = 0$$

или

$$E\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n-1} D_n(i) \varphi_i^T \theta_i\right\|^2\right\} + \sum_{i=1}^{n-1} D_n(i)^T B_v(i) D_n(i) = 0.$$

Так как  $B_v(i) > 0$  при  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , то  $D_n(i) = 0$ , т.е.

$$H_n(i) = A_n H_{n-1}(i) - K_n \varphi_n^T H_{n-1}(i).$$

Это и есть искомое соотношение, которому должна удовлетворять весовая функция оптимального фильтра. Учитывая его, несложно найти разностное уравнение для последовательности оптимальных оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{n+1} &= K_n y_n + \sum_{i=1}^{n-1} H_n(i) y_i = K_n y_n + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (A_n H_{n-1}(i) - K_n \varphi_n^T H_{n-1}(i)) y_i = K_n y_n + (A_n - K_n \varphi_n^T) \hat{\theta}_n = \\ &= A_n \hat{\theta}_n - K_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_n - y_n). \end{aligned}$$

Обозначим через

$$\Gamma_n = E\{(\hat{\theta}_n - \theta_n)(\hat{\theta}_n - \theta_n)^T\}$$

ковариационные матрицы ошибок оценивания. Матричные функции  $K_n$ , называемые *калмановскими коэффициентами усиления*, непосредственно связаны с  $\Gamma_n$ , так как из уравнения Винера–Хопфа следует

$$\begin{aligned} 0 &= E\{(\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1})(y_n - \varphi_n^T \hat{\theta}_n)^T\} = \\ &= -(A_n - K_n \varphi_n^T) \Gamma_n \varphi_n + K_n B_v(n). \end{aligned}$$

Сформулируем окончательный результат.

*Калмановский коэффициент усиления  $K_n$  определяется по формуле*

$$K_n = A_n \Gamma_n \varphi_n (B_v(n) + \varphi_n^T \Gamma_n \varphi_n)^{-1},$$

где  $\Gamma_n$  — ковариационная матрица ошибки оценивания, последовательность которых удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\Gamma_{n+1} = (A_n - K_n \varphi_n^T) \Gamma_n (A_n - K_n \varphi_n^T)^T + K_n B_v(n) K_n^T + Q_w(n+1).$$

Последняя формула легко выводится из разностного уравнения, связывающего две последовательные оценки.

Используя матричное тождество из разд. П.2, рекуррентные соотношения для матриц  $\Gamma_n$  можно переписать в виде

$$\Gamma_{n+1} = A_n \Gamma_n A_n^T - K_n \varphi_n^T \Gamma_n A_n^T + Q_w(n+1)$$

или

$$\Gamma_{n+1} = A_n \left( \Gamma_n - \Gamma_n \varphi_n (B_v(n) + \varphi_n^T \Gamma_n \varphi_n)^{-1} \varphi_n^T \Gamma_n \right) A_n^T + Q_w(n+1).$$

После задания начальных значений  $\hat{\theta}_0$  и  $\Gamma_0$  вместе с формулой для последовательного пересчета оценок

$$\hat{\theta}_{n+1} = A_n \hat{\theta}_n - A_n \Gamma_n \varphi_n (B_v(n) + \varphi_n^T \Gamma_n \varphi_n)^{-1} (\varphi_n^T \hat{\theta}_n - y_n)$$

эти соотношения, называемые *фильтром Калмана–Бьюси*, определяют замкнутую систему для рекуррентного вычисления

$\hat{\theta}_n$  и  $\Gamma_n$  во все моменты времени  $n$ . Такие же формулы можно получить при рассмотрении не только детерминированной последовательности  $\{\varphi_n\}$ , но и если считать ее реализацией некоторого матричного независимого случайного процесса, некоррелированного с помехами  $\{v_n\}$  и с порождающим процессом  $\{w_n\}$ .

Стоит заметить, что при  $A_n \equiv I$ ,  $Q_w(n) \equiv 0$  и выборе матрицы весовых коэффициентов  $R_n = B_v(n)^{-1}$  фильтр Калмана–Бьюси в точности совпадает с обобщенным рекуррентным МНК из разд. 4, что и неудивительно.

На практике полученные соотношения часто упрощают, используя для вычисления оценок формулу

$$\hat{\theta}_{n+1} = A_n \hat{\theta}_n - A_n \Gamma \varphi_n \alpha (\varphi_n^T \hat{\theta}_n - y_n)$$

с заданными положительно определенными матрицами  $\Gamma$  и  $\alpha$ . Дальнейшее упрощение возможно при выборе скалярного значения  $\alpha > 0$ .

В случае вырожденных помех наблюдения  $\{v_n\}$ , в частности при задании их неизвестными детерминированными ограниченными функциями, о качестве оценок фильтра Калмана–Бьюси трудно что-либо сказать. Если предположить, что  $\{\varphi_n\}$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с известным средним значением и положительной ограниченной дисперсией, то для решения задачи о прогнозировании в [4] предложено воспользоваться рандомизированным алгоритмом вида

$$\hat{\theta}_{n+1} = A_n \hat{\theta}_n - \alpha A_n \Gamma \Delta_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_n - y_n),$$

где  $\Delta_n = \varphi_n - E\{\varphi_n\}$ . Там же показано, что в условиях скалярных наблюдений на фоне неизвестной, но ограниченной неслучайной помехи получаемые по этому алгоритму оценки могут давать достаточно хорошее качество предсказания при  $A_n \equiv A : \|A\| < 1$ .



*Пример: оптимальный прогноз процесса.* Предположим, что при  $n = 1, 2, \dots$  наблюдается скалярный процесс  $\{y_n\}$

$$y_n = \varphi_n \theta_n + v_n,$$

где  $\{\varphi_n\}$ ,  $\{\theta_n\}$  и  $\{v_n\}$  — стохастически независимые процессы:  $E\{v_n\} = 0$ ,  $E\{v_n^2\} = \sigma_v^2 > 0$ ,  $\theta_0 = 0$  и  $\{\theta_n\}$  определяется уравнением

$$\theta_{n+1} = a \theta_n + w_{n+1},$$

в котором  $0 < |a| \leq 1$ ,  $E\{w_n\} = 0$ ,  $E\{w_n^2\} = \sigma_w^2 > 0$ . В данном случае

$$B_v(n) \equiv \sigma_v^2, \quad Q_w(n) \equiv \sigma_w^2$$

и при задании  $\hat{\theta}_0 = 0$ ,  $\Gamma_0 = 0$  оптимальная последовательность прогнозирующих оценок вычисляется по формулам

$$\hat{\theta}_{n+1} = a \hat{\theta}_n - a \frac{\Gamma_n}{\sigma_v^2 + \Gamma_n \varphi_n^2} \varphi_n (\varphi_n \hat{\theta}_n - y_n),$$

$$\Gamma_{n+1} = \sigma_w^2 + \frac{a^2 \sigma_v^2}{\varphi_n^2} - \frac{a^2 \sigma_v^4}{\varphi_n^2 (\sigma_v^2 + \Gamma_n \varphi_n^2)} \left( \equiv a^2 \Gamma_n - \frac{a^2 \Gamma_n^2 \varphi_n^2}{\sigma_v^2 + \Gamma_n \varphi_n^2} + \sigma_w^2 \right).$$

В стационарном случае при  $\varphi_n \equiv \varphi$  или в той ситуации, когда  $\{\varphi_n\}$  — бернуллиевский процесс:

$$\varphi_n = \pm \varphi, \quad E\{\varphi_n\} = 0,$$

последовательность  $\{\Gamma_n\}$  сходится к пределу  $\Gamma_\infty$ , который можно найти из уравнения

$$\Gamma_\infty = \sigma_w^2 + \frac{a^2 \sigma_v^2}{\varphi^2} - \frac{a^2 \sigma_v^4}{\varphi^2 (\sigma_v^2 + \Gamma_\infty \varphi^2)},$$

решение которого есть

$$\Gamma_\infty = \frac{\varphi^2 \sigma_w^2 + (a^2 - 1) \sigma_v^2 + \sqrt{(\varphi^2 \sigma_w^2 + (a^2 - 1) \sigma_v^2)^2 + 4 \varphi^2 \sigma_w^2 \sigma_v^2}}{2 \varphi^2}.$$

В пределе при  $n \rightarrow \infty$  для оценок фильтра Калмана–Бьюси имеем приближенное соотношение

$$\hat{\theta}_{n+1} \approx a\hat{\theta}_n - a\alpha\varphi_n(\varphi_n\hat{\theta}_n - y_n),$$

в котором обозначено

$$\alpha = \frac{\Gamma_\infty}{\sigma_v^2 + \Gamma_\infty\varphi^2} = \frac{c_1^2 + c_1c_2/a}{\varphi^2c_1^2} \left( \equiv \frac{1}{a\varphi^2} \left( \frac{c_2}{c_1} + a \right) \right),$$

и

$$c_1 = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2), \quad c_2 = \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2),$$

$$\rho_1 = \sqrt{\varphi^2\sigma_w^2 + \sigma_v^2(1-a)^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{\varphi^2\sigma_w^2 + \sigma_v^2(1+a)^2}.$$

Таким образом, в стационарном случае ( $\varphi_n \equiv \varphi$ ) оценки фильтра Калмана–Бьюси в пределе совпадают с оценками фильтра Винера–Колмогорова. Эта связь обусловлена методом наименьших квадратов, заложенным в основу обоих фильтров. Последняя формула также иллюстрирует обоснованность замены в некоторых случаях оценок фильтра Калмана–Бьюси на оценки, доставляемые алгоритмом упрощенного типа. Кроме того, если  $\{\varphi_n\}$  — бернуллевский независимый процесс, то алгоритм

$$\hat{\theta}_{n+1} = a\hat{\theta}_n - a\alpha\varphi_n(\varphi_n\hat{\theta}_n - y_n)$$

относится к типу рандомизированных. Как показано в [4], он может давать удовлетворительные оценки не только в случае независимых центрированных помех наблюдения, но и при неизвестных ограниченных детерминированных помехах. Заметим, что при  $a \approx 1$  и  $\sigma_w \ll \sigma_v$

$$\alpha \approx \frac{\sigma_w}{\varphi\sigma_v}.$$

### 3. Задачи оценивания и оптимизации при ограниченных, а в остальном — произвольных помехах

Понятие *почти произвольные помехи*, как правило, в тексте пособия строго формально не определяется, подразумевая широкий класс всевозможных помех: как случайных с разной степенью взаимной зависимости, так и неслучайных. Несмотря на отсутствие четкого определения во всех случаях предполагается, что к нему относятся помехи, порождаемые детерминированными, неизвестными, но ограниченными функциями.

#### 3.1. Случайный сигнал, наблюдаемый на фоне ограниченных помех

Рассмотрим задачу об оценивании коэффициента усиления известного скалярного сигнала  $\{\varphi_n\}$ , представляющего собой реализацию последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с ограниченным известным средним значением  $M_\varphi$  и конечной положительной дисперсией  $\sigma_\varphi^2 > 0$ , наблюдаемого на фоне неизвестных ограниченных помех  $\{v_n\}$ . Более точно: по наблюдениям при  $n = 1, 2, \dots$  скалярных случайных величин

$$y_n = \varphi_n \theta + v_n,$$

где

$$|v_n| \leq C_v,$$

*требуется* последовательно оценивать неизвестное значение  $\theta$ .

В литературе при описании способов решения задач такого типа: при ограниченных, а в остальном — произвольных помехах, часто приводится следующий алгоритм.

Пусть задан некоторый интервал  $\Theta = \Theta_0 = [a_0, b_0]$ , гарантированно содержащий значение  $\theta$ . На каждом шаге, получив

новое наблюдение  $y_n$ , можно уточнить границы множества, содержащего  $\theta$ , по следующему правилу:

$$\Theta_n = [a_n, b_n] = \Theta_{n-1} \cap \{X : |y_n - \varphi_n X| \leq C_v\}.$$

Если  $a_n \rightarrow b_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , т.е. интервалы  $\Theta_n$  стягиваются в точку, то очевидно, что хорошей оценкой величины  $\theta$  на шаге с номером  $n$  может быть любой из элементов множества  $\Theta_n$ , например  $\hat{\theta}_n = (a_n + b_n)/2$ . Состоятельность последовательности оценок будет гарантирована.

Но, к сожалению, существенных оснований надеяться на то, что  $a_n \rightarrow b_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , нет. В этой ситуации можно говорить только о получении предельного множества  $\Theta_\infty$ , которое гарантированно содержит неизвестное искомое значение  $\theta$ . Исторически так сложилось, что результатом такого типа обычно удовлетворяются, считая невозможным при решении этой задачи получить лучший ответ. В [?] показано, что и в этой задаче возможно получение последовательности состоятельных оценок.

Далее приведем несколько примеров алгоритмов построения множеств, гарантированно содержащих вектор неизвестных параметров.

### 3.2. Метод рекуррентных целевых неравенств. Конечно-сходящиеся алгоритмы

Как и в примере предыдущего раздела, так и во многих других случаях задачи оценивания, оптимизации, адаптивного управления и т.п. могут быть сформулированы в следующем виде (см. [?, 20, ?, ?]).

Для некоторой функции  $\psi(\cdot, \cdot)$ , заданной на  $\mathbb{W} \times \Theta$ , найти элемент  $\theta \in \Theta$  (не обязательно единственный), для которого при любом  $w \in \mathbb{W}$  выполняются неравенства

$$\psi(w, \theta) \leq 0,$$

которые обычно называют *целевыми неравенствами*. Если множество  $\mathbb{W}$  — не конечное, то набор из целевых неравенств представляет собой бесконечномерную систему неравенств.

В ряде практических задач в распоряжении экспериментатора есть некоторая тренировочная (обучающая) последовательность точек  $w_1, w_2, \dots$  из множества  $\mathbb{W}$ , для которой известны значения функции  $\psi(w_k, \theta)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и, полученная таким образом подсистема неравенств

$$\psi(w_k, \theta) \leq 0,$$

где  $k = 1, 2, \dots$ , может быть использована для отыскания нужного вектора  $\theta$ . Конечно, подлежит специальному исследованию вопрос о том, в каких случаях решения этой подсистемы являются и решениями исходной. Ответ на него можно дать, сделав некоторые предположения о характеристиках функции  $\psi(\cdot, \cdot)$  и о статистических свойствах последовательности  $w_1, w_2, \dots$ . В интересующей нас ситуации очередное неравенство в момент времени  $n$  формируется лишь после нахождения предыдущей оценки  $\hat{\theta}_{n-1}$ . В этом контексте подсистему неравенств  $\psi(w_k, \theta) \leq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , называют *рекуррентными целевыми неравенствами*.

Рассмотрим последовательность множеств

$$\Theta_0 = \Theta, \quad \Theta_n = \Theta_{n-1} \cap \{\theta : \psi(w_n, \theta) \leq 0\},$$

$n = 1, 2, \dots$ ,  $\Theta_0 \supseteq \Theta_1 \supseteq \dots$ . Для любого  $n$  можно утверждать, что для всякого  $\theta$ , являющегося решением исходной системы целевых неравенств, выполнено условие  $\theta \in \Theta_n$ . Иногда при обосновании сходимости алгоритмов стохастической аппроксимации с проектированием важно знать, что рекуррентный способ построения последовательности множеств  $\{\Theta_n\}$  — *конечно-сходящийся* в том смысле, что начиная с некоторого  $n$ , множества  $\Theta_n$  перестают изменяться:

$$\Theta_n = \Theta_{n_*}, \quad n \geq n_*.$$

Конечно-сходящийся алгоритм (КСА) за конечное число шагов доставляет решение бесконечного числа заранее неизвестных рекуррентных неравенств.

Сформулируем два условия, при выполнении которых можно незначительно видоизменить описанный способ рекуррентного построения последовательности множеств  $\{\Theta_n\}$  так, чтобы он стал конечно-сходящимся.

- При каждом  $n = 1, 2, \dots$  множество  $\{\theta : \psi(w_n, \theta) \leq 0\}$  — выпуклое.

- Среди решений всех рекуррентных целевых неравенств есть непустой открытый шар, т.е. существует  $\theta \in \Theta$  и некоторое  $\delta > 0$ , такое, что для любого  $n = 1, 2, \dots$  и любого  $X : \|X - \theta\|^2 \leq \delta$  выполнено условие  $\psi(w_n, X) \leq 0$ .

При выполнении этих условий определим последовательности точек  $\{\hat{\theta}_n\}$  и множеств  $\{\Theta_n\}$  по следующему правилу: при  $n = 0$  полагаем

$$\hat{\theta}_0 \in \Theta, \Theta_0 = \Theta;$$

при  $n = 1, 2, \dots$ ,  
если  $\psi(w_n, \hat{\theta}_{n-1}) \leq 0$ , то

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1}, \Theta_n = \Theta_{n-1},$$

в противном случае в качестве  $\hat{\theta}_n$  выбираем ближайший к  $\hat{\theta}_{n-1}$  элемент из

$$\Theta_n = \Theta_{n-1} \cap \{\theta : \psi(w_n, X) \leq 0 \forall X : \|X - \theta\|^2 \leq \delta\}.$$

Для полученной последовательности имеем  $\Theta_0 \supseteq \Theta_1 \supseteq \dots$ . В результате построения этой последовательности множеств можем потерять некоторые решения исходной системы целевых неравенств, но по крайней мере одно из них, равное  $\theta$ , принадлежит всем множествам:  $\theta \in \bigcap_n \Theta_n$ . Первое условие существенно ограничивает круг задач, решаемых с помощью конечно-сходящегося алгоритма, но во многих практических

приложениях оно выполняется. Второе условие не ограничительно и имеет достаточно естественный характер.

Основная идея доказательства конечной сходимости алгоритма заключается в следующем. Предположим, что множества  $\Theta_n$  изменяются бесконечное число раз. Пусть эти изменения происходят в моменты времени, задаваемые последовательностью  $\{n_i\}$ . Рассмотрим числовую последовательность  $\{d_i\}$ , определяемую по правилу

$$d_i = \|\hat{\theta}_{n_i} - \theta\|^2,$$

где  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Из способа построения подпоследовательности  $\{\hat{\theta}_{n_i}\}$  следует, что для элементов числовой последовательности  $\{d_i\}$  при каждом  $i = 0, 1, 2, \dots$  выполняются неравенства

$$d_i \leq d_{i-1} - \delta.$$

Просуммировав эти неравенства  $N$  раз ( $N > 0$ ), имеем

$$0 \leq d_N \leq d_0 - \delta N.$$

Если в последнем неравенстве  $N > d_0/\delta$ , то получаем противоречие. Следовательно, количество переключений с одного значения  $\hat{\theta}_i$  на другое конечно, а значит, и множества в последовательности  $\{\Theta_n\}$  изменяются только конечное число раз. Из последнего неравенства при ограниченном исходном множестве  $\Theta$  можно получить оценку для максимального числа изменений множеств в КСА:

$$N_{\max} \leq \text{diam}(\Theta)/\delta,$$

здесь  $\text{diam}(\Theta)$  — наибольшее из расстояний между двумя произвольными точками множества  $\Theta$ .

Конкретный вид рекуррентных алгоритмов для решения разнообразных целевых неравенств с обоснованием их сходимости можно найти в [?, 20, ?, ?]. Далее будет рассмотрен лишь частный, но важный случай, относящийся к линейным неравенствам.

### 3.3. Алгоритм "Полоска"

Наиболее простой вид функции  $\psi(w, \theta)$  — линейный:

$$\varphi_n^T \theta + \eta_n \leq 0,$$

$n = 1, 2, \dots$  Здесь

$$w_n = \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \eta_n \end{pmatrix},$$

где  $\{\varphi_n\}$  и  $\{\eta_n\}$  — некоторые последовательности векторов и чисел соответственно. Возможные способы решения такой системы линейных неравенств первоначально рассматривались в [?].

Очевидно, что в этой задаче первое условие построения конечно-сходящегося алгоритма, выполнено. Второе условие означает, что существуют такие вектор  $\theta$  и  $\delta > 0$ , что

$$\varphi_n^T \theta + \eta_n \leq \delta \|\varphi_n\|,$$

где  $n = 1, 2, \dots$  Чаще всего в приложениях к линейным системам с ограниченными помехами встречается частный случай рекуррентных линейных неравенств

$$|\varphi_n^T \theta + \eta_n| \leq \varepsilon_n,$$

здесь  $n = 1, 2, \dots$  и  $\{\varepsilon_n\}$  — некоторая последовательность положительных чисел. В этом случае второе условие построения конечно-сходящегося алгоритма означает, что существуют числа  $0 < \delta < 1$ ,  $0 < \varepsilon_*$  и вектор  $\theta$  (не известный), такие, что при  $n = 1, 2, \dots$

$$\varepsilon_n \leq \varepsilon_* \|\varphi_n\|,$$

$$|\varphi_n^T \theta + \eta_n| \leq \delta \varepsilon_n.$$

В этом случае каждое из рекуррентных неравенств выделяет в векторном пространстве параметров  $\Theta$  определенную *полосу*,



шириной не менее  $2\varepsilon_*$ . Выполнение последнего неравенства гарантирует, что все эти полосы включают в себя некоторый шар радиусом  $\delta$ , содержащий  $\theta$ .

Для последнего случая в [17, ?] формулируется более простой конечно-сходящийся алгоритм построения последовательности точек  $\{\hat{\theta}_n\}$ , при изменении которых надо перестраивать соответствующие множества  $\{\Theta_n\}$ , содержащие  $\theta$ .

Пусть  $\hat{\theta}_0 \in \Theta$  и  $\Theta_0 = \Theta$ .

Если

$$|\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} + \eta_n| \leq \varepsilon_n,$$

то

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} \text{ и } \Theta_n = \Theta_{n-1},$$

в противном случае

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \varphi_n \frac{\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} + \eta_n - \operatorname{sgn}(\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} + \eta_n) \delta \varepsilon_n}{\|\varphi_n\|^2},$$

$$\Theta_n = \Theta_{n-1} \cap \{\theta : \varphi_n^T \theta + \eta_n \leq \delta \varepsilon_n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Эта процедура называется *алгоритмом "Полоска"*.

Если исходное множество совпадает со всем пространством или является многогранным, то получающиеся по сформулированному алгоритму множества — тоже многогранники. Как уже отмечалось, в некоторых алгоритмах стохастической аппроксимации при ограниченных помехах целесообразно использовать операцию проектирования на множество, соответствующую поиску ближайшего элемента. Конечная сходимость алгоритма перестроения множеств  $\Theta_n$  важна по двум причинам. Во-первых, иногда при доказательстве асимптотических свойств поведения оценок, построенных по алгоритму с проектированием, важно быть уверенными, что, начиная с некоторого момента, ограничивающее возможные значения параметров множество не меняется. Во-вторых, при практической реализации алгоритма проектирования на многогранное множество надо иметь конструктивный способ описания

набора плоскостей, которые его ограничивают. При бесконечном количестве ограничивающих плоскостей трудно представить себе реальный способ хранения такой информации.

При своей кажущейся простоте, описанный способ все-таки имеет существенные трудности при реализации на практике. Во многих случаях используют более простые алгоритмы, хотя при этом трудно доказать их конечную сходимость. Если алгоритм предполагается использовать вместе с другим, более чутким, то конечную сходимость алгоритма можно обеспечить простым практическим условием: прекратить коррекции после заранее заданного определенного количества шагов. Наиболее удобным с точки зрения операций проектирования и хранения информации является последовательное построение в пространстве параметров прямоугольников, содержащих некоторое решение системы рекуррентных целевых неравенств.

### 3.4. Метод эллипсоидов

Другим примером алгоритма построения множеств, удобных для выполнения операций проектирования и хранения необходимой информации, является *метод эллипсоидов* (см. [?, ?]).

Рассмотрим задачу о решении линейных рекуррентных неравенств

$$\varphi_n^T \theta + \eta_n \leq 0,$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . Предположим, как и ранее, существование таких вектора  $\theta$  и константы  $\delta > 0$ , что при  $n = 1, 2, \dots$

$$\varphi_n^T \theta + \eta_n \leq \delta \|\varphi_n\|.$$

Не умаляя общности, будем считать, что начальное множество, содержащее  $\theta$  — решение системы рекуррентных неравенств, задано в виде эллипсоида (или шара):

$$\Theta_0 = \{\theta : (\theta - \hat{\theta}_0)^T R_0^{-1} (\theta - \hat{\theta}_0) \leq 1\}$$

с центром в некоторой точке  $\hat{\theta}_0$  и симметричной положительно определенной матрицей  $R_0$ . Рассмотрим рекуррентный алгоритм построения последовательности эллипсоидов  $\{\Theta_n\}$ :

$$\Theta_n = \{\theta : (\theta - \hat{\theta}_n)^T R_n^{-1} (\theta - \hat{\theta}_n) \leq 1\},$$

определяемый последовательно пересчитываемыми точками  $\{\hat{\theta}_n\}$  и положительно определенными матрицами  $\{R_n\}$ . Правильно их пересчета следующее: при  $n = 1, 2, \dots$ ,

если  $\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} + \eta_n \leq 0$ , то  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1}$ ,  $R_n = R_{n-1}$ ,  
в противном случае

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{R_{n-1} \varphi_n}{(r+1) \sqrt{\varphi_n^T R_{n-1} \varphi_n}},$$

$$R_n = \frac{r^2}{r^2 - 1} \left( R_{n-1} - \frac{2}{n+1} \frac{R_{n-1} \varphi_n \varphi_n^T R_{n-1}}{\varphi_n^T R_{n-1} \varphi_n} \right),$$

здесь  $r$  — размерность пространства параметров  $\theta$ . Для максимально возможного числа коррекций эллипсоидов  $\{\Theta_n\}$  можно получить оценку сверху:

$$N_{\max} \leq r \frac{\ln\{\|\hat{\theta}_0 - \theta\|/\delta\}}{\ln\{(r+1)(r^2-1)^{\frac{r-1}{2}} r^{-r}\}},$$

которая при больших  $r$  приблизительно равна

$$2r^2(1 + \mathcal{O}(n^{-2})) \ln \frac{\|\hat{\theta}_0 - \theta\|}{\delta}.$$

Алгоритм имеет простую геометрическую интерпретацию. Если предыдущая оценка  $\hat{\theta}_{n-1}$  не удовлетворяет очередному целевому неравенству, задающему некоторую гиперплоскость в пространстве параметров  $\theta$ , то параллельно ей через центр последнего из построенных эллипсоидов проводится гиперплоскость. Эта гиперплоскость делит эллипсоид на две части,

одна из которых содержит точку  $\theta$ . После этого новый эллипсоид строится как наименьший по объему, содержащий нужную часть предыдущего эллипсоида. При этом оказывается, что отношение объемов нового и старого эллипсоидов не превосходит величины

$$\frac{r^r}{(r+1)(r^2-1)^{\frac{r-1}{2}}} < 1.$$

# Принятие решений

## 1. Принятие решений

## 2. Методы стохастической оптимизации

Развитие и доступность вычислительной техники оказали воздействие и на классические разделы математической статистики, стимулируя разработку и давая приоритет рекуррентным схемам оценивания. Так получили широкое признание процедуры стохастической аппроксимации Роббинса–Монро (1951 г.) [25] и Кифера–Вольфовица (1952 г.) [24]. Рост производительности вычислительных машин и усложнение решаемых практических задач привели ко все более широкому использованию обучающихся систем, в частности нейронных сетей с большим количеством узлов. Оказалось, что и при настройке их параметров теории оценивания и оптимизации на современном уровне предоставляют в распоряжение разработчиков удобные алгоритмы.

На практике широко используются алгоритмы типа случайного поиска. Это вызвано потребностью в решении задач оптимизации в условиях, когда свойства исследуемой функции потерь неизвестны, а измерения значений самой функции доступны чаще всего с помехами. В русскоязычной литературе эти алгоритмы исследовались, например, в работах Л.А. Расстригина [14, 15], [?], С.М. Ермакова и А.А. Жиглявского [7] при условии центрированности и независимости помех наблюдения. Вообще говоря, в условиях, когда информации о функции потерь мало, для поиска точки минимума надо последовательно перебрать все возможные варианты векторов регулируемых параметров. При высокой размерности задачи это сделать за разумное время невозможно. На основании

тех или иных предположений о свойствах функции потерь использование алгоритмов случайного поиска позволяет заменить полный перебор на, в некотором смысле, здоровое блуждание в множестве регулируемых параметров.

## 2.1. Поиск корня неизвестной функции. Алгоритм Роббинса–Монро

Первой по рекуррентным стохастическим алгоритмам была работа Роббинса и Монро [25], в которой исследовалась задача о нахождении корня вещественной функции  $g(X)$  от вещественного аргумента  $X$ . Предполагалось, что функция неизвестна, но наблюдению экспериментатора доступны ее значения в выбираемых им точках, может быть, с помехами.

Если функция  $g(X)$  нам известна и непрерывно дифференцируема, то задача превращается в классическую из численного анализа. Для ее решения можно воспользоваться методом Ньютона, который генерирует последовательность оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$  корня  $\theta$  функции  $g(X)$ :

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - [g'(\hat{\theta}_{n-1})]^{-1}g(\hat{\theta}_{n-1}),$$

$n = 1, 2, \dots$ , или более простой, но менее эффективной, процедурой:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha g(\hat{\theta}_{n-1})$$

с фиксированным достаточно малым коэффициентом  $\alpha > 0$ , которая не требует умения вычислять производную функции. Если начальное значение  $\hat{\theta}_0$  выбрано достаточно близко к  $\theta$ , то процедура гарантирует сходимость оценок к корню  $\theta$  функции  $g(X)$  при предположениях о том, что  $g(X) < 0$  при  $X < \theta$ ,  $g(X) > 0$  при  $X > \theta$ , производная функции ограничена и  $g'(X) > 0$  в некоторой окрестности точки  $\theta$ . Вообще говоря, эта процедура не требует и дифференцируемости функции  $g(X)$ .

Теперь предположим, что точные значения функции  $g(X)$  и ее производной неизвестны, а доступны только значения

функции в выбираемых точках  $X$ , но искаженные помехами. Более точно: пусть каждому вещественному  $X$  соответствует некоторая вещественная случайная величина  $G(w, X)$  с неизвестным распределением вероятностей и средним значением

$$g(X) = E_w\{G(w, X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(w, X)P_w(dw).$$

Требуется найти значение  $\theta$ , при котором  $g(\theta) = 0$ , на основании наблюдений реализованных значений случайных величин  $G(w_1, X_1), G(w_1, X_2), \dots$  при выборе параметров испытаний  $X_1, X_2, \dots$ . Для упрощения будем считать, что функция  $g(X)$  — неубывающая и имеет единственный корень. При наблюдениях с помехами метод Ньютона не применим, но второй (упрощенной) процедурой воспользоваться можно, заменив, к примеру, значения функции на их "хорошие" приближения, получаемые усреднением нескольких наблюдений. На самом деле, как установили Г. Роббинс и С. Монро [25], нет необходимости производить серию наблюдений для каждого ранее выбранного параметра испытаний  $\hat{\theta}_{n-1}$ , поскольку величины  $\hat{\theta}_{n-1}$  играют в вычислениях промежуточную роль и значения функции в этих точках представляют интерес не сами по себе, а только в той степени, насколько они ведут нас в направлении к корню функции. Был предложен новый алгоритм:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n Y_n$$

с некоторой выбираемой пользователем последовательностью положительных чисел  $\{\alpha_n\}$ , стремящейся к нулю при  $n \rightarrow \infty$  и удовлетворяющей условиям

$$\sum_n \alpha_n = \infty, \quad \sum_n \alpha_n^2 < \infty.$$

Этот алгоритм использует на  $n$ -м шаге наблюдение  $Y_n$ , представляющее собой зашумленное значение  $g(\hat{\theta}_{n-1})$ , равное  $G(w_n, \hat{\theta}_{n-1})$ . В многомерном случае, когда  $X \in \mathbb{R}^r$ , алгоритм

имеет такой же вид и  $Y_n \in \mathbb{R}^f$ . Он получил общепризнанное название *процедура Роббинса–Монро*. К настоящему времени развиты методы, доказывающие сходимость получаемой таким образом последовательности оценок к корню функции  $g(X)$  при более общих предположениях о свойствах неизвестной функции и меньших ограничениях на последовательность  $\{\alpha_n\}$  (см. разд. 10). Все способы доказательства состоятельности оценок используют предварительную информацию о помехах, предполагая их центрированность в том или ином смысле.

Для примера приведем некоторые соображения, показывающие, что помехи с нулевым средним и ограниченной дисперсией не влияют на асимптотическое поведение алгоритма при  $n \rightarrow \infty$ . С одной стороны, при больших значениях  $n$  шаг алгоритма  $\alpha_n \rightarrow 0$  и значения  $\hat{\theta}_n$  меняются медленно. С другой, для достаточно малого  $\epsilon > 0$  определим  $N_n^\epsilon$  так, чтобы  $\sum_{i=n}^{n+N_n^\epsilon} \alpha_i \approx \epsilon$ . Процедуру Роббинса–Монро можно переписать в виде

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n g(\hat{\theta}_{n-1}) + \alpha_n (g(\hat{\theta}_{n-1}) - Y_n).$$

А значит,

$$\hat{\theta}_{n+N_n^\epsilon} - \hat{\theta}_{n-1} \approx -\epsilon g(\hat{\theta}_{n-1}) + \text{"ошибка"},$$

где

$$\text{"ошибка"} = \sum_{i=n}^{n+N_n^\epsilon} \alpha_i (g(\hat{\theta}_{i-1}) - Y_i).$$

Если предположить, что помехи  $\{Y_n - g(\hat{\theta}_{n-1})\}_{n=1,2,\dots}$  представляют собой последовательность ортогональных случайных величин с нулевыми средними значениями и ограниченной дисперсией  $\sigma^2(\hat{\theta}_{n-1})$ , тогда для дисперсии ошибки имеем

$$E \left\{ \sum_{i=n}^{n+N_n^\epsilon} \alpha_i (y_n - g(\hat{\theta}_{n-1}))^2 \right\} = \sum_{i=n}^{n+N_n^\epsilon} \mathcal{O}(\alpha_i^2) = \mathcal{O}(\epsilon) \alpha_n.$$



Из последнего соотношения видно, что на итерациях из интервала  $[n, n + N_n^\epsilon)$  для малых  $\epsilon$  и больших  $n$  среднее изменение значения параметра более существенно, чем "ошибка". Следовательно, по крайней мере формально, из приближенной формулы для конечных разностей  $\hat{\theta}_{n+N_n^\epsilon} - \hat{\theta}_{n-1}$  можно сделать заключение о том, что асимптотическое поведение оценок вероятнее всего совпадает с асимптотическим поведением некоторого решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{\theta} = -g(\theta).$$

При дополнительных ограничениях можно показать, что  $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta$  с вероятностью единица, если  $\theta$  является асимптотически устойчивой точкой этого уравнения.

## 2.2. Минимизация функционала среднего риска

Рассмотрим задачу минимизации функции

$$f(x) = E_w\{F(w, x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(w, X)P_w(dw).$$

(функционал среднего риска), зависящей от векторного  $r$ -мерного аргумента  $x$ . Предположим, что  $w$  — случайный вектор и  $E_w\{\cdot\}$  — операция усреднения по его распределению. Пусть  $f(\cdot)$  — непрерывно дифференцируемая функция. Необходимым условием того, что  $\theta$  — точка минимума функции  $f(\cdot)$ , является равенство нулю в этой точке ее вектор-градиента  $\nabla f(\theta) = 0$ .

Предположим, что известны значения вектор-градиента функции  $f(\cdot)$  и ее матрицы-гессиана. Для нахождения точки минимума можно воспользоваться классической схемой вычислений по методу Ньютона:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - [\nabla^2 f(\hat{\theta}_{n-1})]^{-1} \nabla f(\hat{\theta}_{n-1}),$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . Если матрица-гессиан  $\nabla^2 f(\hat{\theta}_{n-1})$  в некоторой окрестности точки  $\theta$  задает положительный ограниченный оператор и начальное значение  $\hat{\theta}_0$  выбрано достаточно близко к точке локального минимума  $\theta$ , то последовательность оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$  сходится к  $\theta$ . Недостатком этого алгоритма является необходимость обращать матрицу-гессиан на каждом шаге, что может представлять собой определенную трудность при большой размерности. В некоторых случаях удается выбрать рекуррентный способ для пересчета матриц, обратных к гессиану. Для упрощения алгоритма, матрицы  $[\nabla^2 f(\hat{\theta}_{n-1})]^{-1}$  иногда обоснованно заменяют на положительные числа  $\alpha_n$ , получая в результате алгоритм типа процедуры Роббинса–Монро.

Если значения градиента функции  $f(\cdot)$  неизвестны, то стандартным подходом к решению задачи является использование конечных разностей для аппроксимации градиента. Пусть  $\{\beta_n\}$  — некоторая последовательность положительных чисел. Обозначим через  $e_i$  стандартный единичный вектор в направлении  $i$ -й координаты. В качестве аппроксимации  $i$ -й компоненты вектор-градиента можно использовать

$$\nabla f(\hat{\theta}_{n-1})_i \approx \frac{f(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n e_i) - f(\hat{\theta}_{n-1} - \beta_n e_i)}{2\beta_n}.$$

Отметим, что этот стандартный подход к аппроксимации вектор-градиента требует на каждом шаге алгоритма оценивания произвести  $2r$  измерений значений минимизируемой функции при размерности искомого минимизирующего вектора, равной  $r$ .

### 2.3. Процедура Кифера–Вольфовица

Как поступить, если нельзя использовать в алгоритме не только градиент функции  $f(\cdot)$ , но и ее точные значения? Такая проблема возникает, если вид функций  $f(\cdot)$  и  $F(\cdot, \cdot)$  извес-

тен не полностью либо если на вычисление соответствующих значений затрачивается чрезмерное количество усилий при дороговизне экспериментов или большой размерности вектора неизвестных параметров. В задачах оптимизации достаточно часто можно воспользоваться только зашумленной информацией о значениях функции  $F(w, X)$  в выбираемых точках  $X$  с неконтролируемыми при этом значениями случайной величины  $w$ .

Дж. Кифер с Дж. Вольфовицем [24] при  $r = 1$  и Дж. Блюм в многомерном случае [21] для построения последовательности оценок предложили использовать процедуру следующего вида:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \frac{Y_n^+ - Y_n^-}{2\beta_n},$$

где обозначено:

$$Y_n^\pm = \begin{pmatrix} F\left(w_{2r(n-1)+\frac{3\pm 1}{2}}, \hat{\theta}_{n-1} \pm \beta_n e_1\right) \\ F\left(w_{2r(n-1)+\frac{7\pm 1}{2}}, \hat{\theta}_{n-1} \pm \beta_n e_2\right) \\ \vdots \\ F\left(w_{2rn-\frac{1\pm 1}{2}}, \hat{\theta}_{n-1} \pm \beta_n e_r\right) \end{pmatrix}.$$

Они обосновали состоятельность оценок при определенных предположениях о распределениях соответствующих случайных величин, свойствах функции  $F(\cdot, \cdot)$  и числовых последовательностей  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\beta_n\}$ . Из накладываемых условий обычно следует, что в среднем по всевозможным реализациям  $w$  значение  $(Y_n^+ - Y_n^-)/(2\beta_n)$  совпадает со значением градиента функции  $f(\cdot)$  в точке  $\hat{\theta}_{n-1}$ , и асимптотическое поведение оценок, получаемых с помощью процедуры Кифера–Вольфовица, характеризуется свойствами решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\dot{\theta} = -\nabla f(\theta).$$

В более широком смысле алгоритмы такого типа принято называть *псевдоградиентными* [?]. При внешней простоте, оригинальная процедура Кифера–Вольфовица имеет ряд существенных недостатков. Для доказательства состоятельности оценок приходится накладывать достаточно ограничительные условия на неконтролируемые возмущения; при измерениях значений функции с почти произвольными помехами состоятельность оценок не получается; и даже в тех случаях, когда ограничения на неконтролируемые возмущения и помехи в наблюдении можно пренебречь, на каждом шаге алгоритма приходится делать  $2r$  наблюдений, что в многомерном случае при достаточно большом  $r$  может оказаться трудно осуществимым.

#### 2.4. Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации

Классическую процедуру Кифера–Вольфовица (КВ) в последнее время часто называют *алгоритмом стохастической аппроксимации с фиксированными направлениями*. Существенно улучшить характеристики ее оценок позволяет включение одновременно в канал наблюдения, через выбираемый параметр, и в направление вектора изменения очередной оценки так называемого *пробного одновременного возмущения*. В отличие от классической процедуры Кифера–Вольфовица при выборе очередной точки измерения функции случайному возмущению подвергаются одновременно все координаты.

Пусть  $\{\Delta_n\}$  — последовательность наблюдаемых, одинаково симметрично распределенных случайных векторов с матрицами ковариаций

$$\text{cov}\{\Delta_n \Delta_j^T\} = \delta_{nj} \sigma_\Delta^2 \mathbf{I},$$

где  $\sigma_\Delta > 0$ , и ограниченным вторым статистическим моментом. Например, для задания пробного одновременного возмущения удобно использовать бернуллиевские случайные векто-

ры (координаты вектора  $\Delta_n$  не зависят друг от друга и принимают с равной вероятностью значения плюс/минус единица). Оказывается, что при зашумленных наблюдениях без существенных потерь в скорости сходимости для построения состоятельной последовательности оценок можно воспользоваться алгоритмом, похожим внешне на классическую процедуру Кифера–Вольфовица, но использующем всего два зашумленных измерения функции  $F(\cdot, \cdot)$  на каждой итерации:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \Delta_n \frac{y_n^+ - y_n^-}{2\beta_n}, \quad y_n^\pm = F(w_n^\pm, \hat{\theta}_{n-1} \pm \beta_n \Delta_n) + v_n^\pm.$$

Более того, аналогичными свойствами обладает алгоритм с одним зашумленным наблюдением на каждой итерации:

$$\hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \Delta_n y_n, \quad y_n = F(w^n, \hat{\theta}^{n-1} + \beta_n \Delta_n) + v_n.$$

Эти рекуррентные процедуры будем называть *рандомизированными алгоритмами стохастической аппроксимации*, так как в их структуру неотъемлемой частью входит случайное пробное одновременное по всем координатам возмущение, которое также одновременно используется и в задании направления очередного изменения оценки и при выборе новой точки измерения. Иногда встречаются названия *стохастическая аппроксимация со случайными направлениями*, *поисковый алгоритм стохастической аппроксимации* или *стохастическая аппроксимация с возмущением на входе*. В англоязычной литературе широко используется название *одновременно возмущаемая стохастическая аппроксимация* (simultaneous perturbation stochastic approximation, SPSA).

В [3, 5, ?, 27] приведены точные условия, обеспечивающие состоятельность оценок рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации, из которых наиболее существенным является условие о слабой коррелированности пробного возмущения  $\{\Delta_n\}$  и последовательностей неопределенностей  $\{w_n\}$  и  $\{v_n\}$ . Естественно, что среднеквадратичная скорость сходимости первого рандомизированного алгоритма с

двумя измерениями обычно выше, чем у второго. Но стоит заметить, что в целом ряде практических задач оптимизации систем реального времени, обнаружения сигналов и адаптивного управления важно иметь возможность использовать алгоритм только с одним наблюдением на каждом шаге, так как в этих задачах трудно сделать не только  $2r$  наблюдений, как в классической процедуре Кифера–Вольфовица, но недоступны даже два наблюдения с независимыми от  $\Delta_n$  помехами.

В отличие от оценивания по классической процедуре Кифера–Вольфовица применение рандомизированных алгоритмов эффективно и при почти произвольных аддитивных помехах в наблюдении  $\{v_n\}$ . В подтверждение этого факта в случае неизвестной, но ограниченной детерминированной последовательности помех  $\{v_n\}$  остановимся здесь только на неформальном объяснении, близком к идее доказательства в работе [?].

Пусть вещественная функция  $f(X)$  вещественного аргумента  $X$  — дважды непрерывно дифференцируемая, ограниченная, сильновыпуклая, т.е. имеет единственный минимум  $\mathbb{R}$  в некоторой точке  $\theta = \theta(f(\cdot))$ :

$$(X - \theta)\nabla f(X) \geq \mu(X - \theta)^2, \forall X \in \mathbb{R}$$

с некоторой постоянной  $\mu > 0$ , и для градиента функции выполнено условие Липшица:

$$\|\nabla f(X) - \nabla f(\theta)\| \leq A\|X - \theta\|, \forall X, \theta \in \mathbb{R}$$

с некоторой постоянной  $A > \mu$ . Выберем пробное одновременное возмущение  $\Delta_n$  принимающим с равной вероятностью значения плюс/минус единица независимо от  $v_n$ .

Рассмотрим последовательность оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$ , формируемых по рандомизированному алгоритму стохастической аппроксимации с одним измерением. Обозначим  $D_n = (\hat{\theta}_n - \theta)^2$  и, учитывая центрированности  $\Delta_n$  и независимость  $\Delta_n$  от  $v_n$ ,

оценим условное математическое ожидание:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{D_n|\hat{\theta}_i, i < n\} &\leq D_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n}(\hat{\theta}_{n-1} - \theta)\mathbb{E}\{\Delta_n y_n|\hat{\theta}_i, i < n\} + \\ &+ \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}\mathbb{E}\{\Delta_n^2 y_n^2|\hat{\theta}_i, i < n\} = D_{n-1} - \\ &- \frac{\alpha_n}{\beta_n}(\hat{\theta}_{n-1} - \theta)\mathbb{E}\{\Delta_n f(\theta_{n-1} + \beta_n \Delta_n)|\hat{\theta}_i, i < n\} + \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}\mathbb{E}\{y_n^2|\hat{\theta}_i, i < n\}. \end{aligned}$$

Разложив значение функции  $f(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n)$  по формуле Тейлора, получим

$$f(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n) = f(\hat{\theta}_{n-1}) + \beta_n \Delta_n \nabla f(\hat{\theta}_{n-1}) + \beta_n^2 \zeta_n,$$

где  $\zeta_n$  — некоторое число между  $\hat{\theta}_{n-1}$  и  $\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n$  (вообще говоря,  $\zeta_n$  — случайная величина). С учетом последней формулы, принимая во внимание центрированность  $\Delta_n$ , выводим:

$$\mathbb{E}\{D_n|\hat{\theta}_i, i < n\} \leq \left(1 + \frac{1}{2}\alpha_n \beta_n\right) D_{n-1} - \alpha_n(\hat{\theta}_{n-1} - \theta)\nabla f(\hat{\theta}_{n-1}) + \xi_n,$$

где  $\xi_n = \mathbb{E}\{\alpha_n \beta_n \zeta_n^2/2 + \alpha_n^2 \beta_n^{-2} y_n^2|\hat{\theta}_i, i < n\}$ . Отсюда, в силу сильной выпуклости функции  $f(\cdot)$ , видно, что последовательность  $\{D_n\}$  — почти супермартинал:

$$\mathbb{E}\{D_n|\hat{\theta}_i, i < n\} \leq (1 - \gamma_n)D_{n-1} + \xi_n,$$

где  $\gamma_n = \mu\alpha_n - \alpha_n\beta_n/2$ . Если предположить, что для числовых последовательностей  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\beta_n\}$  выполняются условия

$$\sum_n \alpha_n = \infty, \quad \beta_n \rightarrow 0, \quad \sum_n \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} < \infty, \quad \sum_n \alpha_n \beta_n < \infty,$$

то выполнены все условия леммы П.1 Роббинса–Сигмунда о сходимости почти супермартигалов. Следовательно, последовательность оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$  — сильносостоятельная. При этом дисперсия ошибки оценивания прямо пропорциональна  $\alpha_n^2/\beta_n^2$ ,

что хуже соответствующего значения дисперсии ошибки в алгоритме Роббинса–Монро, если помехи независимые и центрированные<sup>1</sup>.

## 2.5. Алгоритмы случайного поиска

Алгоритмы стохастической аппроксимации относятся к более широкому классу алгоритмов *случайного поиска* [6, 14, 15].

В упрощенном варианте суть метода случайного поиска применительно к задаче о нахождении точки минимума  $\theta$  функции  $f(\cdot)$  состоит в следующем. Задается случайным или детерминированным способом начальное приближение  $\hat{\theta}_0$ . На шаге с номером  $n$  выбирается случайным образом  $\Delta_n$  — вектор направления изменения предыдущей оценки  $\hat{\theta}_{n-1}$ . Обычно используются случайные векторы, равномерно распределенные на единичной сфере. Вычисляется значение функции в точке  $\hat{\theta}_{n-1} + \beta\Delta_n$  и сравнивается со значением  $f(\hat{\theta}_{n-1})$ . Очередная оценка формируется по правилу

$$\hat{\theta}_n = \begin{cases} \hat{\theta}_{n-1} + \beta\Delta_n, & \text{если } f(\hat{\theta}_{n-1} + \beta\Delta_n) < f(\hat{\theta}_{n-1}), \\ \hat{\theta}_{n-1} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для вычисления очередной оценки по этому алгоритму предполагается возможность точного вычисления значения минимизируемой функции в задаваемых точках.

В обобщающей форме вид поисковых алгоритмов для минимизации функционалов типа среднего риска и для решения ряда других близких задач может быть описан так. Выбираем случайным или детерминированным способом начальное приближение  $\hat{\theta}_0$ . На  $n$ -м шаге также случайным или детерминированным способом выбираются  $l$  векторов  $\Delta_n^1, \Delta_n^2, \dots, \Delta_n^l$

---

<sup>1</sup>Таким же недостатком обладает и классическая процедура Кифера–Вольфовица.



и в  $l+1$  точках  $\hat{\theta}_{n-1}, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n^1, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n^2, \dots, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n^l$  вычисляются значения штрафной функции  $F(\cdot, \cdot)$ :

$$y_{n,i} = F(w_n^i, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n^i) + v_{n,i},$$

где  $i = 0, 1, \dots, l$ ,  $\Delta_n^0 = 0$ . После этих предварительных вычислений новую оценку  $\hat{\theta}_n$  получаем по правилу

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \beta_n^{-1} \sum_{i=1}^l \Delta_n^i (y_{n,i} - y_{n,0}).$$

Отличительная особенность этих алгоритмов — возможность использования при отсутствии априорных жестких ограничений на тип функции  $F(\cdot, \cdot)$ . В частности, обычно трудно проверяемыми являются условия непрерывности и дифференцируемости. Во многих практических случаях этими алгоритмами пользуются без строгого математического обоснования, удовлетворяясь получаемым качеством оценивания, которое достаточно часто удается повысить за счет адаптации (приспособливания) параметров алгоритмов к конкретной ситуации. Адаптация величины рабочего шага  $\{\alpha_n\}$  связана с двумя противоречивыми факторами: шаг должен быть достаточно большим в то время, когда текущая оценка далека от искомой, и необходимо его уменьшать по мере приближения к положению экстремума. Очень плодотворной оказывается следующая эвристика: нужно уменьшать  $\alpha_n$  при "неудачном" шаге и увеличивать при "удачном". Помимо этого возможна адаптация параметров распределений векторов  $\{\Delta_n^i\}$  в зависимости от поступающей на каждом шаге поиска информации об успехе или неуспехе того или иного случайного шага.

## 2.6. Метод "отжига"

П Р И Л О Ж Е Н И Е.  
**НЕКОТОРЫЕ НЕОБХОДИМЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ**

---

## П.1. Теория вероятностей

Для более глубокого понимания основ теории вероятностей и методов обработки случайных процессов советуем прочитать книги [11, 19]. В этом разделе приводятся определения основных понятий и формулировки результатов, используемых в пособии.

### П.1.1. Случайные величины

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  — некоторое измеримое пространство и  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  — числовая прямая с системой борелевских множеств  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Действительная функция  $\xi = \xi(\omega)$ , определенная на  $(\Omega, \mathcal{F})$ , называется  $\mathcal{F}$ -измеримой функцией или случайной величиной, если для любого  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  — произвольное вероятностное пространство. Математическим ожиданием  $E\{\xi\}$  произвольной случайной величины  $\xi$  называется интеграл Лебега от  $\mathcal{F}$ -измеримой функции  $\xi = \xi(\omega)$  по мере  $\mathbf{P}$ , для которого (наряду с  $E\{\xi\}$ ) используются также следующие обозначения:

$$\int_{\Omega} \xi(\omega) \mathbf{P}\{d\omega\}$$

или

$$\int_{\Omega} \xi d\mathbf{P}.$$

*Дисперсией* случайной величины  $\xi$  называется величина  $\sigma^2 = \mathbf{E}\{(\xi - \mathbf{E}\{\xi\})^2\}$ , при этом величина  $\sigma > 0$  называется *стандартным отклонением*.

Пусть  $\zeta$  и  $\eta$  — пара случайных величин. Их *ковариацией* называется величина

$$\text{cov}\{\zeta, \eta\} = \mathbf{E}\{(\zeta - \mathbf{E}\{\zeta\})(\eta - \mathbf{E}\{\eta\})\}.$$

Если  $\text{cov}\{\zeta, \eta\} = 0$ , то говорят, что случайные величины  $\zeta$  и  $\eta$  *не коррелированы*.

*Распределением случайной величины*  $\xi$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  называется вероятностная мера  $\mathbf{P}_\xi(\cdot)$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ :

$$\mathbf{P}_\xi(B) = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Из определения следует, что

$$\mathbf{E}\{\xi\} = \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{P}_\xi(dx).$$

Функция

$$P_\xi(x) = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

называется *функцией распределения случайной величины*  $\xi$ . Неотрицательная функция  $p_\xi(\cdot)$  называется *плотностью* функции распределения случайной величины  $\xi$ , если

$$P_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(t) dt.$$

Случайная величина  $\xi$  называется *гауссовской* (или *нормально распределенной*) с параметрами  $M$  и  $\sigma^2$  ( $\xi \sim \mathcal{N}(M, \sigma^2)$ ),  $|M| < \infty$ ,  $\sigma > 0$ , если выражение для ее плотности  $p_\xi(\cdot)$  имеет следующий вид:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}.$$

Случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  называются *независимыми* (*независимыми в совокупности*), если для любых  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n\} = \mathbf{P}\{\xi_1 \in B_1\} \cdots \mathbf{P}\{\xi_n \in B_n\}.$$

Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — независимые случайные величины с

$$\mathbf{E}\{|\xi|\} < \infty \text{ и } \mathbf{E}\{|\eta|\} < \infty.$$

Тогда

$$\mathbf{E}\{|\xi\eta|\} < \infty$$

и

$$\mathbf{E}\{\xi\eta\} = \mathbf{E}\{\xi\}\mathbf{E}\{\eta\}.$$

Понятие *случайная величина* естественным образом обобщается и на векторный случай. Для *случайных векторов* по аналогии можно определить математическое ожидание, дисперсию, матрицы ковариации, распределение и т.п.

Совокупность случайных величин  $X = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$  называют *случайным процессом с дискретным временем* или *случайной последовательностью*. Для каждого фиксированного  $\omega \in \Omega$  последовательность  $\{\xi_n(\omega)\}$  называется *реализацией* или *траекторией* процесса, соответствующей исходу  $\omega$ .

### П.1.2 Некоторые неравенства для случайных величин

**Неравенство Чебышева** [55, с. 209]. Пусть  $\xi$  — неотрицательная случайная величина. Тогда для всякого  $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{E}\{\xi\}}{\varepsilon}.$$

**Неравенство Иенсена** [55, с. 209]. Пусть  $g(x)$  — выпуклая функция, а  $\xi$  — случайная величина с  $\mathbf{E}\{\xi\} < \infty$ . Тогда

$$g(\mathbf{E}\{\xi\}) \leq \mathbf{E}\{g(\xi)\}.$$

**Неравенство Гёльдера** [55, с. 210] Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $1 < q < \infty$  и

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Если  $E\{|\xi|^p\} < \infty$  и  $E\{|\eta|^q\} < \infty$ , то

$$E\{|\xi\eta|\} < \infty$$

и

$$E\{|\xi\eta|\} < (E\{|\xi|^p\})^{1/p} (E\{|\eta|^q\})^{1/q}.$$

### П.1.3. Закон больших чисел для независимых случайных величин

**Закон больших чисел** [55, с. 347]. Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с

$$E\{\xi_1\} < \infty, \quad E\{\xi_1\} = M$$

и при  $n = 1, 2, \dots$

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$$

Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - M \right| \geq \varepsilon \right\} \rightarrow 0.$$

**Теорема Кантелли** [55, с. 376]. Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — последовательность независимых случайных величин с конечным четвертым моментом:

$$E\{|\xi_n - E\{\xi_n\}|^4\} \leq C < \infty,$$

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда при  $n \rightarrow \infty$  с вероятностью единица

$$\frac{S_n - E\{S_n\}}{n} \rightarrow 0.$$

**Усиленный закон больших чисел (Колмогорова)** [55, с. 377]. Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — последовательность независимых случайных величин с конечными вторыми моментами, положительные числа  $\beta_n$  таковы, что  $\beta_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\sum \frac{\mathbb{E}\{(\xi_n - \mathbb{E}\{\xi_n\})^2\}}{\beta_n^2} < \infty$$

и

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n.$$

Тогда при  $n \rightarrow \infty$  с вероятностью единица

$$\frac{S_n - \mathbb{E}\{S_n\}}{\beta_n} \rightarrow 0.$$

#### П.1.4. Стационарные случайные процессы

Последовательность  $\{\xi_n\}$  случайных векторов  $\xi_n$  называется *стационарным* (в широком смысле) *процессом*, если среднее значение и ковариация не зависят от сдвига по времени. Для стационарного в широком смысле случайного процесса справедливо представление в виде стохастического интеграла Ито:

$$\xi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{i\mu n} d\zeta_\mu + \bar{\xi},$$

где  $-\infty < n < \infty$ ;  $\bar{\xi}$  — константа;  $\{\zeta_\mu\}$  — случайный процесс с некоррелированными центрированными приращениями, т.е. такой, что при любых  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \mu_4$  из интервала  $[0; 2\pi]$  удовлетворяет условиям

$$\mathbb{E}\{(\zeta_{\mu_1} - \zeta_{\mu_2})(\zeta_{\mu_3} - \zeta_{\mu_4})^*\} = 0,$$

$$\mathbb{E}\{(\zeta_{\mu_1} - \zeta_{\mu_2})(\zeta_{\mu_2} - \zeta_{\mu_1})^*\} = U_{\xi\xi}(\mu_2) - U_{\xi\xi}(\mu_1)$$

с монотонно неубывающей (в смысле квадратичных форм) симметричной матричной функцией  $U_{\xi\xi}(\cdot)$ , называемой *спектральной (структурной) функцией* процесса  $\{\xi_n\}$ . Здесь  $\zeta^*$  — строка, комплексно-сопряженная к вектору  $\zeta$ .

Спектральная функция может содержать *сингулярную* и *непрерывную* составляющие:

$$U_{\xi\xi}(\mu) = \overline{\overline{U}}_{\xi\xi}(\mu) + \overline{U}_{\xi\xi}(\mu).$$

Элементы матрицы  $\overline{U}_{\xi\xi}(\mu)$  — абсолютно непрерывные функции, т.е. при почти всех (по мере Лебега)  $\mu \in [0; 2\pi]$  существует производная

$$\overline{S}_{\xi\xi}(\mu) = \frac{d\overline{U}_{\xi\xi}(\mu)}{d\mu}.$$

В основной части пособия рассматриваются только регулярные стационарные процессы, спектральные функции которых не имеют сингулярных частей. Для таких процессов спектральную функцию  $U_{\xi\xi}(\mu)$  можно представить в виде

$$U_{\xi\xi}(\mu) = \int_0^\mu \overline{S}_{\xi\xi}(\mu) d\mu.$$

Матрица  $\overline{S}_{\xi\xi}(\mu)$  называется *матрицей спектральных плотностей* (или *спектральной плотностью*) процесса  $\{\xi_n\}$ . Из определения функции  $U_{\xi\xi}(\mu)$  следует, что матрица  $\overline{S}_{\xi\xi}(\mu)$  — неотрицательно определенная, а для матрицы ковариации можно записать формулу:

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\xi_k, \xi_l\} &= B_{\xi\xi}(k-l) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\mu(k-l)} dU_{\xi\xi}(\mu) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\mu(k-l)} \overline{S}_{\xi\xi}(\mu) d\mu. \end{aligned}$$

Стационарные процессы  $\{\xi_n\}$  и  $\{\eta_n\}$  называются *стационарно связанными*, если совокупный процесс  $\{\xi_n, \eta_n\}$  — стационарный.

нарный. Для стационарно связанных центрированных процессов  $\{\xi_n\}$  и  $\{\eta_n\}$ , имеющих спектральные плотности, справедливы соотношения

$$\text{cov}\{\xi_k, \xi_l\} = B_{\xi\xi}(k-l) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\mu(k-l)} \overline{S_{\xi\xi}(\mu)} d\mu$$

$$\text{cov}\{\xi_k, \eta_l\} = B_{\xi\eta}(k-l) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\mu(k-l)} \overline{S_{\xi\eta}(\mu)} d\mu,$$

где  $\overline{S_{\xi\eta}(\mu)}$  — совместная спектральная плотность;  $B_{\xi\eta}(n)$  — матрица ковариации процессов  $\{\xi_n\}$  и  $\{\eta_n\}$ . Введя комплексную переменную  $\lambda = e^{-i\mu}$ , последние формулы удобно переписать в виде

$$B_{\xi\xi}(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint \lambda^{-n} S_{\xi\xi}(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda},$$

$$B_{\xi\eta}(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint \lambda^{-n} S_{\xi\eta}(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda},$$

где  $\oint$  — интеграл по единичной окружности, ориентированный так, что  $\oint d\lambda/\lambda = 2\pi i$ , и

$$S_{\xi\xi}(\lambda) = \overline{S_{\xi\xi}(\mu)}, \quad S_{\xi\eta}(\lambda) = \overline{S_{\xi\eta}(\mu)}.$$

### П.1.5. Последовательности случайных величин, близкие к супермартиналам

**Лемма П.1** [34, с. 54, лемма 10; 76]. Если  $\nu_0, \dots, \nu_n, \dots$  — последовательность неотрицательных случайных величин:

$$E\{\nu_0\} < \infty, \quad \nu_n \geq 0,$$

$n = 0, 1, \dots, u$

$$E\{\nu_{n+1} | \nu_0, \dots, \nu_n\} \leq (1 - \alpha_n)\nu_n + \beta_n,$$



где  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\beta_n\}$  — некоторые числовые последовательности, удовлетворяющие условиям:

$$0 \leq \alpha_n \leq 1, \quad \beta_n \geq 0, \quad \sum \alpha_n = \infty, \quad \sum \beta_n < \infty, \quad \frac{\beta_n}{\alpha_n} \rightarrow 0,$$

тогда с вероятностью единица

$$\nu_n \rightarrow 0, \quad E\{\nu_n\} \rightarrow 0$$

и для любых  $\varepsilon > 0, n > 0$

$$\mathbf{P}\{\nu_j \leq \varepsilon \forall j \geq n\} \geq 1 - \varepsilon^{-1} \left( E\{\nu_n\} + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \right).$$

## П.2. Некоторые матричные соотношения

**Матричное тождество.** Пусть матрицы  $A, D, A + B^TDB$  — невырожденные. Тогда

$$(A + B^TDB)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B^T(D^{-1} + BA^{-1}B^T)^{-1}BA^{-1}.$$

Проверить выполнение этого тождества можно, умножив обе части формулы на  $(A + B^TDB)$ .

**Матричное неравенство** ([45, с. 69]. Пусть матрица  $A^T A$  — невырожденная. Тогда для произвольной матрицы  $B$  соответствующей размерности

$$B^T B \geq B^T A (A^T A)^{-1} A^T B.$$

## П.3. Факторизация матричных функций

Общие результаты о спектральной факторизации положительных операторов можно найти в [47, см. разд. 2.3, с. 89–93]. Здесь ограничимся формулировкой теоремы, касающейся

важного частного случая: факторизации дробно-рациональных функций (д.-р.ф.).

**Теорема** (теорема 3.П.6 из [44, с. 182]). Пусть  $S(\lambda)$  — дробно-рациональная (матричная) функция с вещественными коэффициентами в матричных элементах, определенная и неотрицательная при всех  $|\lambda| = 1$ . Тогда существует устойчивая д.-р.ф.  $\Pi(\lambda)$ , такая, что справедливо представление

$$S(\lambda) = \Pi(\lambda)\Pi(\lambda^{-1})^T$$

при всех комплексных значениях  $\lambda$ .

При этом, если  $\det S(\lambda) \neq 0$  при  $|\lambda| = 1$ , то  $\Pi(\lambda)^{-1}$  — устойчивая д.-р.ф.

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

В тексте пособия приняты следующие обозначения:

$n$  — дискретное время

$i, j, k, l, m, p, N$  — целые числа (обычно неотрицательные)

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \phi, \rho, x, C$  — скалярные величины

$a, b, \varphi, w, X$  — векторные или скалярные величины

$y, Y$  — наблюдаемые скалярные и векторные переменные

$v$  — помехи (шумы) в наблюдениях (измерениях)

$\zeta, \eta$  — случайные векторы

$A, B, D, \Phi, \Gamma, H, K, Q, R$  — матрицы,  $I$  — единичная матрица

$\{\alpha_n\}, \{X_n\}$  и  $\{A_n\}$  — последовательности чисел, векторов и матриц

$\cdot^T$  — операция транспонирования вектора или матрицы

$B > 0$  ( $B \geq 0$ ) — матрица  $B$  — симметричная и положительно (неотрицательно) определенная:  $B = B^T, a^T B a > 0$  ( $a^T B a \geq 0$ )  $\forall a$

$\text{Tr}[B]$  — след матрицы  $B$  (сумма диагональных элементов)

$\|\cdot\|$  — евклидова норма: для вектора  $\|a\| = \sqrt{\sum_i a_i^2}$  или для матрицы

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sigma_{\max}(A) = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

$f(\cdot), F(\cdot, \cdot), L(\cdot, \cdot), Q(\cdot, \cdot), q(\cdot), K(\cdot)$  — вещественные функции

$L(\cdot, \cdot)$  — функция правдоподобия

$g(\cdot), G(\cdot, \cdot)$  — векторные функции

$f'(\cdot), \nabla f(\cdot)$  — вектор-градиент функции  $f(\cdot)$

$\mathcal{O}(\cdot)$  — функция такого же порядка малости, как и ее аргумент

$o(\cdot)$  — функция более высокого порядка малости, чем ее аргумент

$\mathbb{R}$  — множество вещественных чисел

$r$  — размерность вектора оцениваемых параметров

$\theta$  — оцениваемое (оптимальное) значение

$\hat{\theta}$  — вектор (иногда матрица) в пространстве оцениваемых параметров (оценка)

$\Delta_n$  — вектор пробного одновременного возмущения в  $n$ -й момент времени  
 $\Theta$  — множество в пространстве параметров  
 $\text{diam}(\Theta)$  — наибольшее из расстояний между двумя произвольными точками множества  $\Theta$   
 $\mathcal{P}_{\{\cdot\}}(\cdot)$  — функция (оператор) проектирования на множество  
 $\Omega$  — вероятностное пространство  
 $\omega$  — элемент вероятностного пространства  
 $\mathbf{P}\{\cdot\}$  — вероятность события  
 $\mathbf{P}(\cdot)$  — функция распределения вероятностей  
 $\mathcal{N}(\cdot, \cdot)$  — нормальное распределение случайной величины  
 $\mathbf{E}\{\cdot\}$  — знак математического ожидания  
 $\mathbf{E}\{\cdot\}, \mathbf{E}_w\{\cdot\}$  — условное математическое ожидание  
 $M_\varphi$  — среднее значение случайной величины  $\varphi$  (или его верхняя граница)  
 $\sigma_v^2$  — дисперсия случайной величины  $v$  (или ее верхняя граница)  
 $\delta_{ij}$  — символ Кронекера:  $\delta_{ii} = 1$  и  $\delta_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$   
 $\delta(\cdot)$  — дельта-функция Дирака ( $\delta(x) = 0, \forall x \neq 0$ )  
 $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$  — характеристическая функция множества (функция Хевисайда), равная нулю или единице  
 $\text{sgn}\{\cdot\}$  — знаковая функция, равная плюс/минус единице  
 $\forall$  — квантор "для всякого"

1. **Браммер К., Зиффлинг Г.** Фильтр Калмана–Бьюси: детерминированные наблюдения и стохастическая фильтрация. М.: Наука, 1982. 199 с.
2. **Винер Н.** Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. М.: Наука, 1983. 344 с.
3. **Граничин О.Н.** Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации при произвольных помехах // Автоматика и телемеханика. 2002. No. 2. С. 44–55.
4. **Граничин О.Н.** Неминимаксная фильтрация при неизвестных ограниченных помехах в наблюдениях // Автоматика и телемеханика. 2002. No. 9. С. 125–133.
5. **Граничин О.Н., Поляк Б.Т.** Рандомизированные алгоритмы оптимизации и оценивания при почти произвольных помехах. М.: Наука. 291с.
6. **Ермаков С.М.** Метод Монте–Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1975. 471 с.
7. **Ермаков С.М., Жиглявский А.А.** Математическая теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1987. 320 с.
8. **Калман Р.Е., Бьюси Р.С.** Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания // Труды американского общества инженеров-механиков. Техническая механика. Сер. Д. 1961. Т. 83, No 1. С. 123–141. М.: Наука, 1976. 487 с.

9. **Колмогоров А.Н.** Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Известия АН СССР. Сер. матем. 1941. No. 5. С. 3–14.
10. **Котельников В.А.** Теория потенциальной помехоустойчивости. М.: Госэнергоиздат, 1956. 151 с.
11. **Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.** Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.
12. **Марков А.А.** Исчисление вероятностей. М.: ГИЗ, 1924. 1990. No. 2. С. 45–53.
13. **Поляк Б.Т., Щербаков П.С.** Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
14. **Растрингин Л.А.** Статистические методы поиска. М.: Наука, 1968. 376 с.
15. **Растрингин Л.А.** Адаптация сложных систем. Рига: Зинатне, 1981. 386 с.
16. **Фельдбаум А.А.** О проблемах дуального управления // Методы оптимизации автоматических систем. М.: Наука, 1972. С. 89–108.
17. **Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.** Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. 448 с.
18. **Фомин В.Н.** Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука, 1984. 288 с.
19. **Ширяев А.Н.** Вероятность. М.: Наука, 1980. 574 с.
20. **Якубович В.А.** Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств // Доклады АН СССР. 1966. Т. 166, No. 6. С. 1308–1311.

21. **Blum J.R.** Multidimensional stochastic approximation // Ann. Math. Statist., 1954, vol. 9, p. 737–744.
22. **Bode H.W., Shannon C.E.** A simplified derivation of linear least square smoothing and prediction theory // Proc. IRE, 1950, No. 38, p. 417–425.
23. **Fisher R.A.** The design of experiments. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1935.
24. **Robbins H., Siegmund D.** A convergence theorem for nonnegative almost super-martingales and some applications // Optimizing methods in statistics. / Ed. J.S. Rustagi. New York: Academic Press, 1971. P. 233–257.
25. **Spall J.C.** Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation // IEEE Trans. on Automatic Control. 1992. Vol. 37. P. 332–341.
26. **Vidyasagar M.** Statistical learning theory and randomized algorithms for control // IEEE Control Systems. 1998. N 12. P. 69–85.
27. **Weiner N.** The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series with engineering application. New York: Technology Press and Wiley, 1949.

Учебное издание  
*Олег Николаевич Граничин, Сергей Сысоев*

Как выиграть чемпионат мира  
по виртуальному футболу?

Учебное пособие

Редактор *Т.В. Мызникова*  
Компьютерная верстка *О.Н. Граничин*  
Художественный редактор *Е.И. Егорова*  
Издание подготовлено в MiKTeX 2.0



## Указатель литературы

- [1] *Браммер К., Зиффлинг Г.* Фильтр Калмана–Бьюси: детерминированные наблюдения и стохастическая фильтрация. М.: Наука, 1982, 199 с.
- [2] *Винер Н.* Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. М.: Наука, 1983, 344 с.
- [3] *Граничин О.Н.* Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации при произвольных помехах // Автоматика и телемеханика, 2002, No. 2, с. 44–55.
- [4] *Граничин О.Н.* Неминимаксная фильтрация при неизвестных ограниченных помехах в наблюдениях // Автоматика и телемеханика, 2002, No. 9, с. 125–133.
- [5] *Граничин О.Н., Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы оптимизации и оценивания при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2003.
- [6] *Ермаков С.М.* Метод Монте–Карло и смежные вопросы. М.:Наука, 1975, 471 с.
- [7] *Ермаков С.М., Жиглявский А.А.* Математическая теория оптимального эксперимента. М.:Наука, 1987, 320 с.

- [8] *Калман Р.Е., Бьюси Р.С.* Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания // Труды американского общества инженеров-механиков. Техническая механика, 1961, т. 83, сер. Д, No 1, с. 123–141.
- [9] *Колмогоров А.Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Известия АН СССР, сер. матем., 1941, No. 5, с. 3–14.
- [10] *Котельников В.А.* Теория потенциальной помехоустойчивости. М.: Госэнергоиздат, 1956, 151 с.
- [11] *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
- [12] *Марков А.А.* Исчисление вероятностей. М.: ГИЗ, 1924.
- [13] *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002, 303 с.
- [14] *Растринин Л.А.* Статистические методы поиска. М.: Наука, 1968, 376 с.
- [15] *Растринин Л.А.* Адаптация сложных систем. Рига: Зинатне, 1981, 386 с..
- [16] *Фельдбаум А.А.* О проблемах дуального управления // В кн.: Методы оптимизации автоматических систем. М.: Наука, 1972, с. 89–108.
- [17] *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981, 448 с.
- [18] *Фомин В.Н.* Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука, 1984, 288 с.

- [19] *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980, 574 с.
- [20] *Якубович В.А.* Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств // Доклады АН СССР, 1966, т. 166, No. 6, с. 1308–1311.
- [21] *Blum J.R.* Multidimensional stochastic approximation // Ann. Math. Statist., 1954, vol. 9, p. 737–744.
- [22] *Bode H.W., Shannon C.E.* A simplified derivation of linear least square smoothing and prediction theory // Proc. IRE, 1950, No. 38, p. 417–425.
- [23] *Fisher R.A.* The Design of Experiments. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1935.
- [24] *Kiefer J., Wolfowitz J.* Statistical estimation on the maximum of a regression function // Ann. Math. Statist., 1952, vol. 23, p. 462–466.
- [25] *Robbins H., Monro S.* A stochastic approximation method // Ann. Math. Statist., 1951, vol. 22, p. 400–407.
- [26] *Robbins H., Siegmund D.* A convergence theorem for non-negative almost super-martingales and some applications // In: Optimizing Methods in Statistics, Rustagi J.S. ed.. New York: Academic Press, 1971, p. 233–257.
- [27] *Spall J.C.* Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation // IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, vol. 37, p. 332–341.
- [28] *Vidyasagar M.* Statistical learning theory and randomized algorithms for control // IEEE Control Systems , 1998, No 12, p. 69–85.

- [29] *Weiner N.* The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Application. New York: Technology Press and Wiley, 1949.