

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А.Трапезникова РАН

На правах рукописи

Граничин Олег Николаевич

**РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ
ОЦЕНИВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОМЕХАХ**

05.13.01 — Системный анализ, управление и
обработка информации

**Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

МОСКВА — 2001

Содержание

Введение	6
1 Некоторые задачи и методы теории оценивания	43
1.1 Исторический обзор	43
1.1.1 Стохастические рекуррентные алгоритмы	46
1.2 Предварительные примеры	50
1.2.1 Оценивание величины постоянного сигнала, наблюдаемого на фоне помехи	50
1.2.2 Задача об обнаружении сигнала	52
1.2.3 Рандомизированные алгоритмы	54
1.2.4 Функционал среднего риска	55
1.2.5 Предсказание значений сигнала	56
1.3 Элементы регрессионного анализа, МНК	57
1.3.1 Наилучшая аппроксимация одной случайной величины с помощью другой	58
1.3.2 Рекуррентные модификации МНК	63
1.4 Оптимальная фильтрация случайных процессов	66
1.4.1 Фильтр Винера–Колмогорова	66
1.4.2 Фильтр Калмана–Бьюси	71
1.5 Метод стохастической аппроксимации	76
1.5.1 Поиск корня неизвестной функции. Алгоритм Роббинса–Монро	77
1.5.2 Минимизация функционала среднего риска	78
1.5.3 Процедура Кифера–Вольфовица	79
1.5.4 Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации	80
2 Оценка параметров линейной регрессии при произвольных помехах	83
2.1 Постановка задачи, основные предположения	85

2.2	Оценивание по методу стохастической аппроксимации	86
2.3	Оценки по методу наименьших квадратов	89
2.4	Экспериментальные результаты	90
2.4.1	Задача об обнаружении сигнала при неизвестных, но ограниченных неслучайных помехах	90
2.5	Доказательства теорем 2.1–2.4	93
3	Оценка параметров авторегрессии и скользящего среднего при произвольных помехах	102
3.1	Применение к моделям авторегрессии	104
3.2	Оценивание параметров модели скользящего среднего	105
3.3	Идентификация динамического объекта	107
3.3.1	Пробный сигнал	109
3.3.2	Введение параметра оценивания	110
3.3.3	Рандомизированный алгоритм идентификации	114
3.4	Доказательство теоремы 3.2	115
4	Фильтрация случайных процессов, наблюдаемых на фоне произвольных ограниченных помех	117
4.1	Предсказание сигнала, наблюдаемого на фоне произвольных ограниченных помех	118
4.2	Отслеживание дрейфа параметров модели линейной регрессии	120
4.2.1	Необходимые и достаточные условия стабилизации МНК	121
4.2.2	Анализ свойств оценок при различных типах помех	123
4.3	Экспериментальные результаты	128
4.3.1	Фильтрация (предсказание) сигнала	128
4.3.2	Оценивание изменяющихся параметров сигнала	131
5	Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации при произвольных помехах	133
5.1	Формулировки и обоснования рандомизированных алгоритмов СА	134
5.1.1	Постановка задачи и основные предположения	139
5.1.2	Пробное возмущение и основные алгоритмы	140
5.1.3	Сходимость с вероятностью единица и в среднеквадратичном смысле	141
5.1.4	Дифференцирующие ядра и распределения пробного возмущения	144
5.1.5	Скорость сходимости	146

5.2	Оптимальные порядки точности алгоритмов стохастической оптимизации	148
5.2.1	Минимаксный порядок скорости сходимости рандомизированных алгоритмов СА	148
5.2.2	Нижняя граница для асимптотической скорости сходимости	149
5.3	Экспериментальные результаты	150
5.3.1	Сравнительное моделирование оценок ККВ и SPSA алгоритмов	150
5.3.2	Пошаговое выполнение алгоритма	152
5.3.3	Программа на языке MATLAB	153
5.4	Доказательства теорем 5.1 и 5.2	154
6	Применения рандомизированных алгоритмов	163
6.1	Способ обнаружения некоторых химических элементов в мишени	165
6.2	Практические приложения рандомизированных алгоритмов СА	167
6.2.1	Синхронизация сигналов светофоров для управления движением на сети дорог	168
6.2.2	Оптимальный выбор целей для систем оружия	169
6.2.3	Поиск скрытых объектов с помощью ЭЛО	170
6.3	Обучающиеся системы	171
6.3.1	Аппроксимация функции с помощью линейной комбинации известных функций	171
6.3.2	Модель обучаемой системы. Нейронные сети	172
6.3.3	Задача самообучения	176
6.3.4	Применение при исследовании ритмической структуры стихов	179
6.4	Оптимизация систем реального времени	185
6.4.1	Отслеживание дрейфа экстремума нестационарного функционала	185
6.4.2	Оптимизация работы маршрутизатора	186
6.4.3	Оптимизация работы сервера	188
6.5	Оптимизация расчетов цен опционов	190
6.5.1	Рынки, акции, фьючерсы, опционы	190
6.5.2	Расчет текущей цены опционов	192
6.6	Квантовые компьютеры и рандомизированные алгоритмы	195
6.6.1	Квантовые цепи	196
6.6.2	Квантовая цепь, вычисляющая аппроксимацию вектора-градиента функции	198

7	Адаптивное управление при произвольных ограниченных помехах	200
7.1	Стабилизирующий алгоритм "модифицированная полоска" при управлении дискретным линейным объектом	203
7.2	Алгоритм идентификации	205
7.3	Адаптивная ℓ_1 оптимизация	207
7.4	Экспериментальные результаты	212
7.4.1	Адаптивное оптимальное управление неминимально- фазовым объектом второго порядка	212
7.5	Доказательства лемм 7.1–7.3	217
	Заключение	224
	Приложение	226
	Список обозначений	235
	Список литературы	237

Введение

Актуальность темы. В последнее время развитие электронной техники приблизилось к порогу создания устройств с характеристиками искусственного интеллекта. При решении многих практических задач уже сейчас появилась реальная возможность эффективного использования новых математических алгоритмов оптимизации, оценивания неизвестных параметров динамических систем, оптимального и адаптивного управления объектами. При этом возникают потребности в использовании новых алгоритмов оптимизации или оценивания для более точного решения ряда проблем, в которых ранее довольствовались достижением цели стабилизации поведения динамической системы или получения некоторого наиболее вероятного множества, содержащего вектор неизвестных параметров.

По сравнению со стандартными детерминированными методами стохастическая оптимизация значительно расширяет диапазон практических задач, для которых можно найти точное оптимальное решение. Алгоритмы типа стохастической оптимизации позволяют эффективно решать проблемы в таких областях, как анализ информационных сетей; оптимизация, основанная на моделировании; обработка изображений и распознавание образов; обучение нейронных сетей и адаптивное управление. Ожидается, что роль стохастической оптимизации будет возрастать вместе с усложнением современных систем аналогично тому, как прирост населения и истощение природных богатств инициирует использование более интенсивных технологий там, где прежде они были не нужны. Логика современного развития вычислительной техники также ведет к замене традиционных детерминированных алгоритмов стохастическими, так как уже начали появляться первые квантовые компьютеры, работающие на стохастических принципах.

Точное решение любой проблемы возможно при точной постановке задачи, но связи и отношения в реально существующем мире настолько сложны и многообразны, что практически невозможно математически строго описать многие явления. Типичным подходом в теории является выбор близкой к реальным процессам математической модели и включение в неё различных *помех*, относящихся, с одной стороны, к грубости математической модели и, с другой стороны, характеризующих неконт-

ролируемые внешние возмущения на объект или систему. Во многих задачах погрешности удобно интерпретировать как помехи (ошибки) наблюдения (измерения результатов эксперимента). При разработке алгоритмов оценивания в большинстве математических исследований последних 50-ти лет помехам в измерениях или ошибкам в описании свойств модели приписываются какие-либо полезные статистические характеристики. На их основе теоретически исследуются свойства оценок. Наиболее часто предполагается, например, центрированность помех. В инженерной практике широко используются алгоритмы, основанные на идеях обычного метода наименьших квадратов, представляющего собой усреднение данных наблюдения. Если при этом предположение о центрированности помех было сделано без достаточных обоснований, то практическое использование алгоритмов такого типа нецелесообразно, а иногда и вредно. Так обстоят дела, например, в условиях возможного противодействия "противника". В частности, если помеха определяется детерминированной (неслучайной) неизвестной функцией (противник глушит сигнал) или помехи измерения — зависимая случайная последовательность, то результат применения к наблюдениям обычной операции усреднения никакой полезной информации в себе не несет. Эти трудности в использовании стандартных алгоритмов стохастической оптимизации обуславливают актуальность исследований алгоритмов, обеспечивающих высокое качество оценивания при минимальных предположениях о статистических свойствах помех.

Другая близкая проблема, с которой сталкиваются при практическом применении алгоритмов оценивания и оптимизации, — недостаточная *вариативность* последовательности наблюдений. Например, при синтезе адаптивного управления главная цель состоит в минимизации отклонения вектора состояния системы от заданной траектории, что часто приводит к вырожденной последовательности наблюдений. Это обуславливает сложность проблемы идентификации, для успешного проведения которой должно быть обеспечено "разнообразие" наблюдений. Для "обогащения" последовательности наблюдений в ряде работ предлагается рандомизировать стратегию управления, что делает актуальным изучение свойств рандомизированных алгоритмов идентификации.

Развитие и доступность вычислительной техники оказали воздействие на классические разделы математической статистики, теории оценивания и оптимизации, стимулируя разработку и давая приоритет последовательным схемам оценивания. Так получили широкое признание рекуррентные модификации метода наименьших квадратов, фильтр Калмана–Бьюси, процедуры стохастической аппроксимации Роббинса–Монро и Кифера–Вольфовица.

Основа многих исследований по оптимизации сходимости рекуррентных алгоритмов при наблюдениях с помехами — работы Я.З.Цыпкина и

Б.Т.Поляка. Изучению свойств стохастических алгоритмов посвящены книги М.Вазана, В.Я.Катковника, М.Б.Невельсона и Р.З.Хасьминского, А.С.Позняка, Л.Льюнга и Г.Кушнера. В ситуации нерегулярных ограниченных помех в работах А.Б.Куржанского, А.А.Красовского, В.М.Кунцевича, Ф.Л.Черноусько, В.Н.Фомина, В.А.Якубовича и др. исследуются методы получения гарантированных множеств, содержащих оцениваемые параметры.

Идея использования случайных входных сигналов для устранения эффекта смещения была выдвинута ещё Р.Фишером в виде рандомизированного принципа планирования эксперимента. Эта идея, в частности, привела к широкому использованию алгоритмов типа случайного поиска. В русскоязычной литературе эти алгоритмы детально исследовались, например, в работах Л.А.Растригина, А.Жилинскаса, С.М.Ермакова и А.А.Жиглявского.

Систематические исследования рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации начались около пятнадцати лет назад, опираясь на работы Б.Т.Поляка, А.Б.Цыбакова, Дж.Спала, А.В.Гольденшлюгера, Х.-Ф.Чена, Л.Гао и автора диссертации. Позже состоятельность рандомизированных алгоритмов при почти произвольных помехах также исследовалась в работах Л.Льюнга с Л.Гао (1997) и Х.-Ф.Чена, Т.Дункана, Б.Пассик-Дункан (1999), опубликованных в журнале *IEEE Trans. on Automat. Control*.

Для идентификации неизвестных параметров устойчивого объекта управления в работе Дж.Саридиса и Г.Стейна (1968) был предложен метод, основанный на использовании пробных сигналов, модифицированный для более широкого класса объектов С.А.Агафоновым и В.Н.Фоминным (1981,1982). Модифицированный метод опирался на определенный способ перепараметризации набора неизвестных параметров, правда, размерность вводимого нового матричного параметра была слишком высокой. Автором в совместной с В.Н.Фоминным работе [13] была предложена версия метода, позволяющая минимизировать число оцениваемых параметров. При ограниченных помехах в наблюдениях новый алгоритм идентификации в сочетании с алгоритмом построения минимаксного оптимального регулятора из [9, 5] позволил синтезировать стратегию адаптивного оптимального управления. Подробное решение задачи о построении минимаксного оптимального регулятора при известных параметрах объекта управления было опубликовано автором совместно с А.Е.Барабановым в 1984 г. ([5]). В 1987 г. аналогичный результат был опубликован М.Дахлехом и Дж.Пирсоном, и эта работа была признана лучшей статьей года в журнале *IEEE Trans. on Automat. Control*. Возможности идентификации замкнутых систем управления с использованием пробных сигналов в канале обратной связи исследовались и в работах Х.-Ф.Чена с Л.Гао (1986), Л.Гао (1996).

На веб-сайте <http://www.jhuapl.edu/SPSA/>, организованном Дж.Спа-лом, можно найти множество ссылок на работы, в которых рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации используются в практических приложениях.

Цель работы. Главная цель диссертационного исследования — развитие нового направления в теории стохастической оптимизации и оценивания, связанного с исследованием рандомизированных алгоритмов и обоснованием состоятельности их оценок без обычных предположений о центрированности и независимости помех наблюдения.

Эта цель предполагает разработку способов представления рандомизированных алгоритмов для решения задач минимизации функционалов типа среднего риска, оценивания параметров линейных моделей, слежения за изменяющимися во времени параметрами, фильтрации сигналов и идентификации неизвестных параметров объектов управления, а также выработку методики анализа их эффективности и доказательство состоятельности их оценок при почти произвольных помехах.

Методы исследования. В работе используются методы теории оценивания и оптимизации, математической статистики, теории управления, теории устойчивости, а также компьютерное моделирование.

Научная новизна. В работе получены результаты, дополняющие существующую теорию оценивания и стохастической оптимизации некоторыми новыми понятиями, теоретическими утверждениями общего порядка и эффективными алгоритмами решения задач оптимизации и оценивания. Все выносимые на защиту утверждения и доказательства являются новыми и принадлежат автору.

Практическая ценность. Следящие системы, системы автосопряжения, демпфирования, анализа информационных сетей, обработки изображений, распознавания образов, настройки нейронных сетей и адаптивного управления являются по существу системами подавления возмущений. Они широко распространены в электротехнике и механике, применяются всюду, где требуется повышение точности работы устройств. Точная формулировка ограничений на неопределенности для конкретной технической задачи осуществляется специалистом в предметной области, а возникающие математические проблемы должны иметь решение, доведенное до вычислительных алгоритмов. Данная работа содержит набор таких математических задач и алгоритмов расчета решений.

Особое внимание в диссертации уделено вопросам практической реализации алгоритмов. Работоспособность предлагаемых новых алгоритмов в условиях нестатистических ограниченных помех продемонстрирована значительным количеством примеров имитационного моделирования на ЭВМ.

В работе подробно рассмотрены следующие задачи: обнаружение полезного сигнала в условиях противодействия противника (п. 2.4), предсказание значений скалярного случайного процесса (п. 4.3.1), определение некоторых элементов химического состава мишеней (п. 6.1), оптимизация процесса настройки параметров двухуровневой нейронной сети (п. 6.3.2), оптимизация подбора параметров входных строк в модели реконструктивного моделирования стихосложения (п. 6.3.4), оптимизация работы маршрутизатора (п. 6.4.2), оптимизация работы сервера, обслуживающего очередь заданий (п. 6.4.3), оптимизация определения параметров кривой волатильности для расчета цен опционов в биржевой торговле (п. 6.5), идентификация неизвестных параметров и адаптивное субоптимальное управление дискретным динамическим объектом при ограниченных помехах (п. 7.4).

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях: всесоюзная конференция "Теория адаптивных систем и её приложения" (Ленинград, 1983), 3-я международная школа "Анализ данных, ориентированный на модели" (С.-Петербург, 1992), международная конференция "Аппроксимация, вероятность и близкие вопросы" (Санта-Барбара, США, 1993), 2-ая, 3-я и 4-ая С.-Петербургские школы по моделированию (С.-Петербург, 1996, 1998, 2001), 6-ой С.-Петербургский симпозиум по теории адаптивных систем (С.-Петербург, 1999), 4-ая Пекинская международная конференция "Моделирование систем и научные вычисления" (Пекин, КНР, 1999), международная конференция "Имитационное моделирование, управление и вычисления" (Токио, Япония, 2000), 4-ая Российско-шведская конференция по управлению (Москва, 2001), а также на семинарах в Свободном университете г.Берлин (Германия, 1992), Институте системного анализа АН Китая (Пекин, КНР, 1999), Институте проблем управления им.В.А.Трапезникова РАН (Москва, 2000), Российском государственном педагогическом университете им.А.И.Герцена (С.-Петербург, 2001) и С.-Петербургском государственном университете (1987, 1991, 2001).

Публикации. Результаты работы представлены в 25 публикациях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения, приложения и списка литературы общим объемом 250 страниц. Список литературы содержит 175 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Основной объект изучения в диссертации — алгоритмы поиска с последовательным ($n = 1, 2, \dots$) изменением очередной оценки $\hat{\theta}_{n-1}$ в направлении по оси некоторого случайного центрированного (среднее значение равно нулю) вектора Δ_n , называемого *пробным одновременным*

возмущением,

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Delta_n \bar{y}_n$$

в условиях, когда на фоне почти произвольных помех производятся наблюдения \bar{y}_n , определяемые некоторой функцией, предыдущей оценкой $\hat{\theta}_{n-1}$ и вектором пробного одновременного возмущения Δ_n . Алгоритмы такого типа предлагается называть *рандомизированными алгоритмами оценивания*, так как обоснование их состоятельности при почти произвольных помехах существенно использует стохастическую (вероятностную) природу пробного возмущения.

Первая глава "Некоторые задачи и методы теории оценивания" начинается с исторического обзора (п. 1.1), в котором особое место уделено развитию стохастических рекуррентных алгоритмов (п. 1.1.1).

Фундамент теории оценивания как математической науки был заложен в начале XIX века в работах А.М.Лежандра и К.Ф.Гаусса о методе наименьших квадратов (МНК). В начале XX века теоретические обоснования МНК получили значительное развитие в трудах А.А.Маркова. Фундамент современного состояния теории оценивания заложен Р.Фишером в 20–30-х годах XX века. Р.Фишер показал, что метод максимума правдоподобия обычно удобнее МНК и доставляемые им оценки не могут быть существенно улучшены. Р.Фишером также введены ставшие общепринятыми понятия несмещенности, достаточности, состоятельности, эффективности и асимптотической эффективности оценок. Одновременно с формализацией и развитием математической статистики специалисты по линиям связи столкнулись с задачей синтеза устройств, позволяющих эффективно определять присутствие или отсутствие сигнала, наблюдаемого на фоне помехи. Быстрое развитие теории связи привело к необходимости учета воздействия помех на распространение и приём сигналов. Первые попытки уменьшить нежелательное воздействие помех были связаны с методами расчета фильтров, позволяющими оценить спектр мощности полезного сигнала. Основы теории оптимальной фильтрации стационарных процессов были заложены в работах А.Н.Колмогорова и Н.Винера в 40-х годах прошлого века. Через несколько лет создается основа статистической теории связи или теории информации: В.А.Котельниковым формулируется проблема оптимального статистического синтеза приёмных устройств и даётся решение задачи обнаружения детерминированных сигналов на фоне коррелированной помехи, появляется широко известная работа Г.Боде и К.Шеннона, содержащая знаменитые теоремы о кодировании передаваемых сигналов (с целью устранения избыточной информации) и о пропускной способности каналов со случайными помехами.

С работ Р.Калмана и Р.Бьюси в начале 60-х годов XX века началось широкое развитие методов теории рекуррентного (последовательного)

оценивания, в рамках которой решение задачи оптимальной фильтрации получило существенное продвижение. Возможность синтеза оптимального фильтра рекуррентным способом представляет и большой практический интерес в связи с удобством реализации фильтра на базе современной вычислительной техники. Рекуррентные процедуры оценивания (фильтр Калмана–Бьюси) оказались применимыми и в случае нестационарных процессов.

В 70–80-х годах прошлого века проблемы синтеза адаптивных систем дали дополнительный импульс развитию теории оценивания. Алгоритмы построения оптимального управления обычно предполагают известными некоторые априорные данные о свойствах системы управления и помех. В большинстве практических задач эта информация недоступна проектировщику, но её можно в той или иной степени восстановить из анализа получаемых наблюдений. Если такая возможность имеется, то это позволяет синтезировать алгоритмы, в которых совмещены процессы управления и восполнения недостающей информации. При достаточно эффективном восполнении недостающих сведений система управления приобретает оптимальные свойства либо близкие к ним.

Перед исследователями стохастических последовательных алгоритмов оценивания или оптимизации в той или иной форме всегда стоят три вопроса:

1. Каков самый быстрый алгоритм по числу итераций?
2. Как минимизировать количество измерений и вычислений на каждой итерации?
3. Какой алгоритм состоятелен при почти произвольных помехах?

Именно попытки поиска ответов на эти вопросы привели к тому, что на рубеже 80–90-х годов прошлого века начались активные исследования рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации. Основы этих исследований базируются на работах Б.Т.Поляка с А.Б.Цыбаковым (1990), предложивших самые эффективные в широком классе алгоритмы, Дж.Спала (1987,1992), показавшего существенное сокращение необходимого для оптимизации количества измерений исследуемой функции по сравнению с классическими схемами, автора (1986–92) и Б.Т.Поляка с А.В.Гольденшлюгером (1993), в которых состоятельность алгоритмов обоснована при почти произвольных помехах. Новые алгоритмы стохастической аппроксимации (СА) в русскоязычной литературе ещё называют: *алгоритмы СА с возмущением на входе* или *поисковые алгоритмы СА*, в англоязычной — *одновременно возмущаемая СА (Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation, SPSA)*. В 1993 г. для настройки параметров нейронных сетей похожие алгоритмы были предложены в работах Ю.Маеды и Дж.Алспектора с соавторами.

Далее в первой главе рассматриваются несколько предварительных достаточно простых примеров (п. 1.2), вводятся определения базовых понятий теории оценивания (линейность, несмещенность, состоятельность и сильная состоятельность оценок, оценки МНК, марковские оценки), кратко описываются основы регрессионного анализа (п. 1.3), теории оптимальной фильтрации (п. 1.4) и метода стохастической аппроксимации (п. 1.5).

Во второй главе рассматриваются рандомизированные алгоритмы оценивания параметров линейной регрессии, формулируются и доказываются утверждения о сходимости их оценок при почти произвольных помехах.

Обычное предположение о помехах в задачах линейной регрессии заключается в том, что их считают реализацией некоторой последовательности независимых случайных величин (векторов) с нулевым средним значением. Однако в приложениях это допущение часто нарушается, что может сильно сказываться на работе стандартных оценочных процедур. На первый взгляд кажется удивительным, но параметры регрессии могут быть эффективно оценены в случае нецентрированных, коррелированных и даже неслучайных помех. Это достигается при определенном условии, когда входы (регрессоры) случайны.

Рассмотрим модель линейной регрессии

$$(2.1) \quad y_n = \varphi_n^T \theta_n^* + v_n, \quad \theta_n^* = \theta^* + w_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

с выходами (наблюдениями) $y_n \in \mathbb{R}^1$, входами $\varphi_n \in \mathbb{R}^r$ и помехами $v_n \in \mathbb{R}^1$, $w_n \in \mathbb{R}^r$. Требуется оценить значение θ^* , базируясь на наблюдениях $y_n, \varphi_n, n = 1, 2, \dots$.

Пусть \mathcal{F}_n — σ -алгебра вероятностных событий, порожденная $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_n\}$, $\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}$ — σ -алгебра, порожденная $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, w_1, \dots, w_{n-1}, v_1, \dots, v_n\}$, и $\hat{\mathcal{F}}_{n-1}$ — σ -алгебра, порожденная $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{F}_{n-1} \subset \hat{\mathcal{F}}_{n-1} \subset \tilde{\mathcal{F}}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$.

Перечислим основные условия, те или иные из которых будут предполагаться выполненными при формулировках теорем в главах 2–4.

(LR.A) Входы $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых случайных векторов с ограниченными известными математическими ожиданиями: $\|\mathbb{E}\{\varphi_n\}\| \leq M_\varphi < \infty, \forall n$ векторы φ_n не зависят от $\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}$. Случайные векторы $\Delta_n = \varphi_n - \mathbb{E}\{\varphi_n\}$ имеют симметричные функции распределения $P_n(\cdot)$, т.е. $P_n(\Omega) = P_n(-\Omega)$ для любого борелевского подмножества $\Omega \subset \mathbb{R}^r$, и матрицы ковариаций: $\mathbb{E}\{\Delta_n \Delta_n^T\} = B_n > 0, \|B_n\| \leq \sigma_\Delta^2 < \infty$.

(LR.A') Входы $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов, удовлетворяющих условию

(LR.A) с $B_n = B > 0$ и ограниченным четвертым статистическим моментом: $E\{\|\Delta_n\|^4\} = M_4^4 < \infty$.

(LR.B) $\forall n$ случайные вектора w_n центрированы ($E\{w_n\} = 0$) и не зависят от $\hat{\mathcal{F}}_{n-1}$. Последовательности помех $\{v_n\}_{n \geq 1}$ и $\{w_n\}_{n \geq 1}$ удовлетворяют одному из условий:

$$(i) \quad E\{v_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} \leq \sigma_v^2 < \infty, \quad E\{\|w_n\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} \leq \sigma_w^2 < \infty;$$

$$(ii) \quad E\{v_n^2\} \leq \sigma_v^2 < \infty, \quad E\{w_n w_n^T\} \leq Q_w \leq \sigma_w^2 I < \infty;$$

$$(ii') \quad |v_n| \leq C_v < \infty, \quad E\{w_n w_n^T\} \leq Q_w \leq \sigma_w^2 I < \infty;$$

$$(iii) \quad |v_n| \leq C_v < \infty, \quad \|w_n\| \leq C_w < \infty,$$

где выполнение неравенств со случайными величинами понимается с вероятностью единица и σ_v , σ_w , C_v , C_w — некоторые постоянные, Q_w — симметричная неотрицательно определенная матрица.

Заметим, что стандартные предположения в задаче об оценивании параметров линейной регрессии со случайными входными сигналами несколько различны. Это выражается, в частности, в отсутствии условия $E\{v_n\} = 0$ и предположения о том, что помехи $\{v_n\}_{n \geq 1}$ представляют собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

В п. 2.2 исследуется поведение оценок рандомизированного алгоритма типа стохастической аппроксимации (РСА), который для рассматриваемой модели наблюдений (2.1) имеет вид:

$$(2.2) \quad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \Gamma \Delta_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\alpha_n \geq 0$ — неслучайная последовательность, определяющая шаг алгоритма, и Γ — некоторая положительно определенная матрица.

Предположим, что начальное значение $\hat{\theta}_0$ — произвольный неслучайный вектор из \mathbb{R}^r .

Т е о р е м а 2.1 Пусть для входов модели (2.1) выполнено предположение **(LR.A)** и при $n \rightarrow \infty$

$$\alpha_n \rightarrow 0, \quad \alpha_n E\{\|\Delta_n\|^4\} \rightarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty.$$

Если для помех выполнено условие **(LR.Bi)** и $\{\alpha_n\}$ обеспечивают

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 (1 + E\{\|\Delta_n\|^4\}) < \infty,$$

тогда последовательность оценок, доставляемых алгоритмом (2.2), сильносостоятельная, т.е. $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta^*$ при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью единица.

Если для помех выполнено условие **(LR.Bii)**,

тогда среднеквадратичная ошибка оценок, доставляемых алгоритмом (2.2), стремится к нулю: $E\{(\hat{\theta}_n - \theta^*)(\hat{\theta}_n - \theta^*)^T\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Следующая теорема устанавливает скорость сходимости алгоритма (2.2).

Т е о р е м а 2.2 Пусть выполнены условия: **(LR.A)** для входов модели, **(LR.Bii)** для помех и при $n \rightarrow \infty$

$$\alpha_n \rightarrow 0, \quad \alpha_n E\{\|\Delta_n\|^4\} \rightarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty.$$

Если существуют такие матрицы $B, U > 0$ и сходящаяся последовательность чисел $\{\beta_n\}$, что $-\Gamma B + \frac{1}{2}I$ — устойчивая матрица (все её собственные значения лежат в левой полуплоскости),

$$\|\beta_n^{-1}B_n - B\| = \mathcal{O}(n^{-1}), \quad \beta_n^{-2}E\{\Delta_n \Delta_n^T Q_w \Delta_n \Delta_n^T\} \leq U + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad \|U\| < \infty$$

и $\alpha_n \beta_n = n^{-1}$, $\beta_n = \beta_\infty + \mathcal{O}(n^{-1})$,

тогда асимптотическая скорость сходимости алгоритма (2.2) характеризуется неравенством

$$E\{(\hat{\theta}_n - \theta^*)(\hat{\theta}_n - \theta^*)^T\} \leq n^{-1} S + o(n^{-1}),$$

в котором матрица S является решением матричного уравнения

$$\Gamma B S + S B \Gamma - S = \Gamma R \Gamma,$$

где $R = \beta_\infty(\sigma_v^2(1 + M_\varphi^2 \rho) + M_\varphi^2 \sigma_w^2)B + U$ при каком-либо $\rho > 0$.

Если $\beta_n \equiv 1$ и $\Gamma = B^{-1}$, тогда $\alpha_n = n^{-1}$ и последнее уравнение для матрицы S может быть легко решено:

$$S = B^{-1} R B^{-1}.$$

Для алгоритма (2.2), в этом случае имеющего вид

$$(2.3) \quad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - (nB)^{-1} \Delta_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

при $\sigma_w = 0$ получаем с любым $\rho > 0$

$$(2.4) \quad E\{(\hat{\theta}_n - \theta^*)(\hat{\theta}_n - \theta^*)^T\} \leq n^{-1} \sigma_v^2 (1 + M_\varphi^2 \rho) B^{-1} + o(n^{-1}).$$

Известно, что такой выбор α_n и Γ является оптимальным для обыкновенного алгоритма стохастической аппроксимации:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \Gamma \varphi_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

если $w_n = 0$ и помехи v_n являются независимыми центрированными случайными величинами. При этом

$$(2.5) \quad \mathbb{E}\{\hat{\theta}_n - \theta)(\hat{\theta}_n - \theta)^T\} \leq n^{-1} \sigma_v^2 \mathbf{B}^{-1} + o(n^{-1}),$$

Таким образом, при $\sigma_w = 0$ и помехах $\{v_n\}$, удовлетворяющих условию **(LR.Bii)**, для оценок алгоритма РСА (2.2) с $\alpha_n = 1/n$ и $\Gamma = \mathbf{B}^{-1}$ получили среднеквадратичную скорость сходимости, близкую к наилучшей в ситуации, когда помехи v_n являются независимыми случайными величинами с нулевыми средними. Если $M_\varphi = 0$, то оптимальные обыкновенный и рандомизированный алгоритмы совпадают, и, кроме того, равны соответствующие асимптотические оценки скорости сходимости, хотя предположения о характере помех $\{v_n\}$ существенно отличаются.

К сожалению, оптимальный РСА алгоритм (2.3) не применим, если матрица \mathbf{B} априорно неизвестна.

Рассмотрим рандомизированный алгоритм стохастической аппроксимации с усреднениями:

$$(2.6) \quad \begin{cases} \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \Delta_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \\ \tilde{\theta}_n = (1 - n^{-1}) \tilde{\theta}_{n-1} + n^{-1} \hat{\theta}_{n-1} \left(= n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\theta}_i \right), \end{cases}$$

похожий на предложенный Б.Т.Поляком в случае независимых центрированных помех.

Т е о р е м а 2.3 *Если выполнены условия:*

(LR.A') *для входов модели $\{\varphi_n\}$,*

$w_n = 0$ *и* **(LR.Bii)** *для помех $\{v_n\}$,*

$\alpha_n \rightarrow 0$ *и* $\alpha_n/\alpha_{n+1} = 1 + o(\alpha_n)$ *при* $n \rightarrow \infty$ *для числовой последовательности $\{\alpha_n\}$,*

тогда *для среднеквадратичной скорости сходимости оценок алгоритма (2.6) выполняется неравенство (2.4) с любым $\rho > 0$.*

Как и выше, полученная оценка сверху (2.4) для скорости сходимости почти совпадает с известной ранее в случае независимых помех с нулевым средним. При этом алгоритм (2.6) более простой, чем оптимальный алгоритм (2.3), и его асимптотическая скорость сходимости не зависит от конкретного выбора α_n , удовлетворяющего только условию $\alpha_n/\alpha_{n+1} = 1 + o(\alpha_n)$. Заметим, что последнее соотношение выполняется, например, для $\alpha_n = \alpha n^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, но не для $\alpha_n = \alpha n^{-1}$.

В п. 2.1.3 для регрессионной модели наблюдений (2.1) рассматриваются оценки по рандомизированному МНК (РМНК) вида:

$$(2.7) \quad \begin{cases} \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma_n \Delta_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \\ \Gamma_n = \Gamma_{n-1} - \Gamma_{n-1} \Delta_n \Delta_n^T \Gamma_{n-1} / (1 + \Delta_n^T \Gamma_{n-1} \Delta_n), \quad \Gamma_0 = \gamma_0^{-1} I, \end{cases}$$

где $\gamma_0 > 0$ — малое положительное число. Как и выше, пусть в качестве начального значения $\hat{\theta}_0$ выбран произвольный неслучайный вектор из \mathbb{R}^r .

Т е о р е м а 2.4 Пусть выполнены предположения о входах (LR.A').

Если выполнено условие (LR.Bi) для помех,

тогда последовательность оценок, доставляемых алгоритмом (2.7), сильносостоятельная, т.е. $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta^*$ при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью единица.

Если выполнено условие (LR.Biii) для помех и $\|\Delta_n\| \leq C_\Delta < \infty$, $n = 1, 2, \dots$ с вероятностью единица,

тогда среднеквадратичная ошибка оценок, доставляемых алгоритмом (2.7), стремится к нулю: $E\{(\hat{\theta}_n - \theta^*)(\hat{\theta}_n - \theta^*)^T\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Если дополнительно предположить, что $w_n = 0$, $M_\varphi = 0$, последовательность помех $\{v_n\}_{n \geq 1}$ не зависит от $\{\varphi_n\}$ и удовлетворяет условию (LR.Bii), тогда скорость сходимости для оценок РМНК определяется неравенством (2.5), т.е. среднеквадратичная скорость сходимости оценок алгоритма (2.7) та же самая, что и у МНК в случае независимых помех с нулевым средним.

В п. 2.4 для задачи обнаружения полезного сигнала приводятся примеры сравнительного имитационного моделирования поведения оценок обыкновенного МНК и рандомизированных алгоритмов при различных типах помех. Поведение типичных траекторий оценок рандомизированных алгоритмов при высоком уровне нерегулярной помехи позволяет правильно детектировать сигнал, в то время, как обыкновенный алгоритм с задачей не справляется.

Доказательство теорем 2.1–2.4 приведено в п. 2.5 второй главы.

Третья глава называется "Оценка параметров авторегрессии и скользящего среднего при произвольных помехах". В ней рандомизированные алгоритмы оценивания из второй главы используются для решения тех проблем, в которых модель наблюдений описывается с помощью авторегрессии или скользящего среднего. Для модели авторегрессии оценивается часть неизвестных параметров, для скользящего среднего эти алгоритмы предоставляют возможность полной идентификации. Более сложной является задача полной идентификации параметров модели авторегрессии скользящего среднего, используемой для описания динамической системы управления.

В п. 3.1 изучается возможность применения алгоритмов (2.2), (2.6) и (2.7) к оцениванию параметра θ^* авторегрессионной модели

$$(3.1) \quad y_t + \sum_{i=1}^p a^{(i)} y_{t-i} = \varphi_t^T \theta_t^* + v_t, \quad \theta_t^* = \theta^* + w_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

В следующем п. 3.2 рассматривается задача об оценивании набора векторных параметров $\theta_0^*, \dots, \theta_p^*$ модели скользящего среднего:

$$(3.2) \quad y_t = \sum_{i=0}^p \varphi_{t-i}^T \theta_i^* + v_t, \quad t = 0, 1, \dots,$$

где $y_t \in \mathbb{R}^1$ — выходы (наблюдения), $\varphi_t \in \mathbb{R}^q$ — входы, $v_t \in \mathbb{R}^1$ — помехи, $\theta_0^*, \dots, \theta_p^* \in \mathbb{R}^q$ — векторы неизвестных параметров, φ_{-t} , $t = 1, 2, \dots, p$ — начальные данные.

Пусть $s > p$ — некоторое натуральное число, входы $\{\varphi_t\}_{t \geq 0}$ — последовательность случайных векторов, ограниченных в среднеквадратичном смысле: $E\{\|\varphi_t\|\} \leq \sigma_\varphi^2$, с известными и равномерно ограниченными математическими ожиданиями: $\|E\{\varphi_{sn}\}\| \leq M_\varphi < \infty$ для любого $n \geq 0$. Если $i \in \{0, 1, \dots, p\}$ и последовательность случайных векторов $\{\Delta_n\}$: $\Delta_n = \varphi_{sn} - E\{\varphi_{sn}\}$, удовлетворяет условию:

(МА.1) $\{\Delta_n\}_{n \geq 0}$ — независимые центрированные случайные вектора с симметричными функциями распределения $P_n(\cdot)$ и матрицами ковариаций $E\{\Delta_n \Delta_n^T\} = \beta_n B > 0$, причем $E\{\|\Delta_n\|^4\} \leq \beta_n^2 M_4^4 < \infty$; при заданном s и $\forall n$ векторы Δ_n не зависят от σ -алгебры $\mathcal{F}_{sn,p}$, порожденной $\{\varphi_0, \dots, \varphi_{sn-1}, \varphi_{sn+1}, \dots, \varphi_{sn+p}, v_0, \dots, v_{sn+p}\}$,

то, введя обозначение $\xi_{n,i} = \varphi_{sn+i}^T \theta_0^* + \dots + \varphi_{sn+1}^T \theta_{i-1}^* + \varphi_{sn-1}^T \theta_{i+1}^* + \dots + \varphi_{sn+i-p}^T \theta_p^* + v_{sn+i}$, можно в силу схемы наблюдения (3.2) для последовательности наблюдений $\{y_{sn+i}\}$ записать

$$y_{sn+i} = \varphi_{sn}^T \theta_i^* + \xi_{n,i}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Если для помех $\{v_t\}$ выполнено условие **(LR.Bii)**, тогда

$$\forall n, i \quad E\{\xi_{n,i}^2\} \leq \sigma_\xi^2 = (p+1) \left(\sigma_v^2 + \sigma_\varphi^2 \sum_{j=0}^p \|\theta_j^*\|^2 \right) < \infty.$$

Следовательно, для оценивания вектора θ_i^* применим любой из трех алгоритмов: (2.2), (2.6) и (2.7). В силу произвольности $i \in \{0, 1, \dots, p\}$, для оценивания всех параметров модели скользящего среднего (3.2) можно использовать серию параллельных рандомизированных алгоритмов,

основанных на любом из предложенных ранее для оценивания параметров линейной регрессии. Введём следующие обозначения:

$$Y_n = \begin{pmatrix} y_{sn} \\ y_{sn+1} \\ \vdots \\ y_{sn+p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+1}, \quad \theta^* = (\theta_0^*, \dots, \theta_p^*) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{p+1}.$$

Т е о р е м а 3.1 Пусть $\alpha_n \geq 0$ — неслучайная последовательность и Γ — некоторая положительно определенная $q \times q$ матрица.

Если выполнены упомянутые выше условия и $-\Gamma B + \frac{1}{2}I$ — устойчивая матрица, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 (1 + \beta_n^2) < \infty$, $\alpha_n \beta_n = n^{-1}$, $\alpha_n \rightarrow 0$, $\beta_n = \beta_{\infty} + \mathcal{O}(n^{-1})$ при $n \rightarrow \infty$

тогда последовательность оценок $\{\hat{\theta}_n\}$, доставляемых алгоритмом

$$(3.3) \quad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \Gamma \Delta_n (\varphi_{sn}^T \hat{\theta}_{n-1} - Y_n^T), \quad n = 1, 2, \dots,$$

сильносостоятельная и её асимптотическая скорость сходимости характеризуется неравенствами: $E\{(\hat{\theta}_{n,i} - \theta_i^*)(\hat{\theta}_{n,i} - \theta_i^*)^T\} \leq n^{-1} S + o(n^{-1})$, $i = 0, 1, \dots, p$, в которых $\hat{\theta}_{n,i}$ — i -ый столбец матрицы $\hat{\theta}_n$, а матрица S является решением матричного уравнения $\Gamma B S + S B \Gamma - S = \beta_{\infty}(\sigma_{\xi}^2 + M_{\varphi}^2 \rho) \Gamma B \Gamma$ при каком-либо $\rho > 0$.

В п. 3.3 рассматривается задача об идентификации неизвестных параметров динамического объекта.

Предположим, что объект управления (ОУ) со скалярными входами и выходами описывается в дискретном времени авторегрессионной моделью скользящего среднего (SISO ARMA модель):

$$(3.4) \quad a(q^{-1}, \tau_{\star}) y_t = b(q^{-1}, \tau_{\star}) u_t + v_t, \quad t = k, k+1, \dots,$$

в которой y_t — выход ОУ; u_t — вход ОУ (управляющее воздействие); v_t — помеха (возмущающее воздействие); q^{-1} — операция сдвига на такт назад: $q^{-1} y_t = y_{t-1}$;

$$a(q^{-1}, \tau_{\star}) = 1 + q^{-1} a_{\star}^{(1)} + \dots + q^{-p} a_{\star}^{(p)},$$

$$b(q^{-1}, \tau_{\star}) = q^{-k} b_{\star}^{(k)} + q^{-k-1} b_{\star}^{(k+1)} + \dots + q^{-p} b_{\star}^{(p)};$$

натуральные числа p — порядок модели, и k — запаздывание в управлении; $1 \leq k \leq p$. Обозначим

$$\tau_{\star} = (a_{\star}^{(1)}, a_{\star}^{(2)}, \dots, a_{\star}^{(p)}, b_{\star}^{(k)}, b_{\star}^{(k+1)}, \dots, b_{\star}^{(p)})^T$$

— вектор коэффициентов уравнения. Пусть частично или полностью коэффициенты уравнения ОУ неизвестны. Требуется по наблюдениям

за выходами ОУ $\{y_t\}$ при известных входах (управлениях) $\{u_t\}$ оценить значения неизвестных коэффициентов уравнения ОУ (3.4).

Для того, чтобы последовательность стохастических регрессоров рассматриваемой системы обеспечивала выполнение условия *постоянного возбуждения*, являющегося обычно необходимым для построения состоятельной последовательности оценок, в п. 3.3.1 вводится в рассмотрение новое (дополнительное) случайное возмущение (возбуждение).

Пусть $s > 2p - k$ — некоторое натуральное число и $\{\Delta_n\}_{n \geq 0}$ — скалярное пробное возмущение (случайная последовательность), удовлетворяющее условию **(МА.1)**.

Условимся управления $\{u_t\}$ формировать по правилу

$$(3.5) \quad u_{sn+i} = \begin{cases} \bar{u}_{sn} + R_n \Delta_n, & \text{при } i = 0, \\ \bar{u}_{sn+i}, & \text{при } i = 1, 2, \dots, s-1, \end{cases}$$

где

$$R_n = C_R \left(1 + \sum_{j=1}^p |y_{sn+k-j}| + \sum_{j=1}^{p-k} |\bar{u}_{sn-j}| \right)$$

с некоторой постоянной $C_R > 0$, и собственно управления $\{\bar{u}_t\}$ определяются по закону обратной связи

$$(3.6) \quad \bar{u}_t = \mathcal{U}_t(y_t, y_{t-1}, \dots, \bar{u}_{t-1}, \dots),$$

в котором функции $\mathcal{U}_t(\cdot, \dots, \cdot)$ удовлетворяют условию

$$(R1.1) \quad \mathcal{U}_t(y_t, y_{t-1}, \dots, \bar{u}_{t-1}, \dots) \leq R_n, \quad \forall n = 0, 1, \dots, t \in [sn, s(n+1)).$$

В частности, возможно $\bar{u}_t = 0$, $t = 0, 1, \dots$

Предположим, что

(R1.2) начальные значения $y_t : t < k$, и $u_t : t < 0$, являются или произвольными и неслучайными числами, или случайными переменными с конечными вторыми моментами и независимыми от $\{\Delta_n\}$;

(R1.3) известно ограниченное и замкнутое множество $\mathcal{T} : \tau_* \in \mathcal{T}$.

Обсуждаемый далее идентифицирующий алгоритм основан на перепараметризации уравнения (3.4), позволяющей преобразовать его к виду, который незначительно отличается от *линейной схемы наблюдения* по отношению к пробному сигналу. В п. 3.3.2 описывается это преобразование.

Поскольку $a(0, \tau) = 1$, то для произвольного фиксированного $l \in \mathbb{N}$ уравнение

$$\Psi_l(\lambda, \tau) a(\lambda, \tau) + \lambda^l \Upsilon_l(\lambda, \tau) = 1$$

однозначно разрешимо относительно многочленов $\Psi_l(\lambda, \tau)$ и $\Upsilon_l(\lambda, \tau)$ при том условии, что степень многочлена $\Psi_l(\lambda, \tau)$ меньше l . Действуя на обе части уравнения ОУ (3.4) оператором $\Psi_l(q^{-1}, \tau_*)$, на интервале времени $\{sn+k, sn+k+1, \dots, s(n+1)+k-1\}$ получаем при $l = k, k+1, \dots, s+k-1$

$$y_{sn+l} = \Upsilon_l(q^{-1}, \tau_*)y_{sn} + \Psi_l(q^{-1}, \tau_*)b(q^{-1}, \tau_*)u_{sn+l} + \Psi_l(q^{-1}, \tau_*)v_{sn+l}.$$

Обозначим через $\theta_*^{(i)} = \theta^{(i)}(\tau_*)$ коэффициент при u_{sn} в правой части последней формулы при $l = k+i-1$. Величины $\theta_*^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, s$ возьмём в качестве *новых параметров* вместо исходных τ_* . Веденный новый набор параметров может оказаться избыточным в том смысле, что для восстановления неизвестных компонент вектора τ_* необязательно нужны значения всех $\theta_*^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, s$. Например, если неизвестен всего один коэффициент $b_*^{(k)}$, то для его восстановления достаточно знать только $\theta_*^{(1)}$. Выберем размерность векторов новых параметров r ($r \leq s$) из условия возможности однозначного восстановления вектора τ_* по соответствующему ему вектору новых параметров. Более точно, пусть $r \in \mathbb{N}$. Для любого вектора $\tau \in \mathcal{T}$ определим $r \times r$ матрицу $A(\tau)$ и r -вектор $B(\tau)$ по правилу:

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^{(1)} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a^{(2)} & a^{(1)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a^{(p)} \dots & a^{(1)} & 1 \end{pmatrix}, B(\tau) = \begin{pmatrix} b^{(k)} \\ \vdots \\ b^{(p)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор θ^* размерности r , составленный из введенных выше новых параметров, задается формулой:

$$\theta^* = \theta(\tau_*) = \begin{pmatrix} \theta^{(1)}(\tau_*) \\ \theta^{(2)}(\tau_*) \\ \vdots \\ \theta^{(r)}(\tau_*) \end{pmatrix} = A^{-1}(\tau_*)B(\tau_*),$$

которая определяет отображение $\theta(\tau)$ множества $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^{2p-k+1}$ на некоторое подмножество $\Theta \subset \mathbb{R}^r$. Наиболее подходящее значение r — это минимальная размерность множества Θ , при которой только что определенное отображение $\theta(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow \Theta$ имеет в некоторой окрестности точки θ^* непрерывное обратное:

$$(3.7) \quad \bar{\tau}(\cdot) = \theta^{-1}(\cdot) : \Theta \rightarrow \mathcal{T}.$$

Если неизвестны все коэффициенты многочленов $a(\cdot, \tau_*)$, $b(\cdot, \tau_*)$ до степеней p_a , p_b соответственно и

(RI.4) для неизвестного параметра $\tau_\star \in \mathcal{T}$ многочлены $a(\cdot, \tau_\star)$ и $b(\cdot, \tau_\star)$ взаимно несократимы,

то можно взять $r = p_a + p_b - k + 1$.

Заканчивается пункт 3.3.2 примером, иллюстрирующим способ введения нового параметра оценивания в задаче идентификации неизвестных параметров линейного дискретного ОУ (3.4), динамика которого описывается разностным уравнением второго порядка

$$y_t + a_\star^{(1)}y_{t-1} + y_{t-2} = b_\star^{(1)}u_{t-1} + b_\star^{(2)}u_{t-2} + v_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

с неизвестными тремя коэффициентами: $a_\star^{(1)} \in [2, 10]$, $b_\star^{(1)} \in [1, 10]$, $b_\star^{(2)} \in [-10, 0]$.

Обозначим через

$$\tau_\star = \begin{pmatrix} a_\star^{(1)} \\ 1 \\ b_\star^{(1)} \\ b_\star^{(2)} \end{pmatrix} \in \mathcal{T} = [2, 10] \times \{1\} \times [1, 10] \times [-10, 0] \subset \mathbb{R}^4$$

вектор коэффициентов уравнения объекта. Трехмерный вектор "новых" параметров θ^\star ($r = 3$) определяется так:

$$\theta^\star = \theta(\tau_\star) = \begin{pmatrix} b_\star^{(1)} \\ b_\star^{(2)} - a_\star^{(1)}b_\star^{(1)} \\ ((a_\star^{(1)})^2 - 1)b_\star^{(1)} - a_\star^{(1)}b_\star^{(2)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

При заданных ограничениях на неизвестные параметры ОУ отображение $\theta(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow \Theta = \theta(\mathcal{T}) \subset \mathbb{R}^3$ обратимо. Вектор коэффициентов ОУ τ_\star связан с θ^\star обратным соотношением:

$$\tau_\star = \bar{\tau}(\theta^\star) = \begin{pmatrix} -\frac{\theta_\star^{(1)} + \theta_\star^{(3)}}{\theta_\star^{(2)}} \\ 1 \\ \theta_\star^{(1)} \\ \theta_\star^{(2)} - \frac{\theta_\star^{(1)}(\theta_\star^{(1)} + \theta_\star^{(3)})}{\theta_\star^{(2)}} \end{pmatrix}.$$

В следующем пункте 3.3.3 для идентификации параметров предлагается рандомизированный алгоритм специального вида и формулируется утверждение об условиях состоятельности его оценок.

Если при $t \in [sn + k, \dots, s(n + 1) + k)$ обозначить $\bar{y}_t = y_t/R_n$ и $\varphi_t = u_t/R_n$, то последовательности $\{\bar{y}_t\}$ и $\{\varphi_t\}$ связаны уравнением скользящего среднего с коэффициентами $\theta_1^\star, \dots, \theta_r^\star$ и некоторыми помехами $\{\bar{v}_t\}$. При выполнении условий: **(RI.1)** для функций обратной связи, **(RI.2)** для начальных данных, **(RI.3)** для множества неопределенности и **(LR.Viii)** для помех $\{v_t\}$, удовлетворяются все условия теоремы 3.1

и для построения сильносостоятельной последовательности оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ вектора θ^* можно воспользоваться алгоритмом (3.3), который в этом случае имеет вид:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha \frac{\beta_n^{-1}}{n} \left(\Delta_n^2 \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\Delta_n}{R_n} \begin{pmatrix} y_{sn+k} \\ y_{sn+k+1} - \hat{\theta}_{n-1}^{(1)} \bar{u}_{sn+1} \\ \vdots \\ y_{sn+r+k-1} - \sum_{j=1}^{r-1} \hat{\theta}_{n-1}^{(j)} \bar{u}_{sn+r-j} \end{pmatrix} \right),$$

где $2\alpha B \geq 1$. Выполнение условия **(RI.4)** будет гарантировать возможность с помощью функции $\bar{\tau}(\cdot)$ из (3.7) получить сильносостоятельные оценки вектора τ_* .

Специфика задачи позволяет выписать ещё один алгоритм:

$$(3.8) \quad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma \frac{\beta_n^{-1}}{n} \Delta_n \left(\Delta_n \hat{\theta}_{n-1} - \frac{Y_n - \psi_n(\hat{\theta}_{n-1})}{R_n} \right),$$

где Γ — некоторая положительно определенная матрица,

$$Y_n = \begin{pmatrix} y_{sn+k} \\ y_{sn+k+1} \\ \vdots \\ y_{sn+r+k-1} \end{pmatrix}, \quad \psi_n(\theta) = \begin{pmatrix} \psi_n^{(1)}(\theta) \\ \psi_n^{(2)}(\theta) \\ \vdots \\ \psi_n^{(r)}(\theta) \end{pmatrix},$$

$$\psi_n^{(i)}(\theta) = \Psi_{i+k-1}(q^{-1}, \tau) b(q^{-1}, \tau) \bar{u}_{sn+i+k-1} + \Upsilon_{i+k-1}(q^{-1}, \tau) y_{sn}.$$

Т е о р е м а 3.2 Пусть управления $\{u_t\}$ задаются по (3.5)–(3.6) и пробное возмущение $\{\Delta_n\}$ удовлетворяет допущению **(MA.1)**.

Если выполнены условия **(RI.1)–(RI.4)**, **(LR.Biii)**, $\beta_n = \beta_\infty + \mathcal{O}(n^{-1})$ и $2\lambda_{\min}(\Gamma)B \geq 1$,

тогда при произвольном начальном условии $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^r$ алгоритмы идентификации

$$(3.9) \quad \tau_t = \bar{\tau}(\hat{\theta}_n), \quad sn < t \leq s(n+1), \quad s = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots,$$

($\bar{\tau}(\cdot)$ — функция из (3.7)) и (3.8) доставляют сильносостоятельные оценки $\{\tau_t\}$ и $\{\hat{\theta}_n\}$.

Если $\beta_n = (1 + \ln\{n\})^{-1}$, то при произвольном $\rho > 0$ с вероятностью 1 и в среднеквадратичном смысле справедливы предельные соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1-\rho} \|\tau_t - \tau_*\|^2 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\rho} \|\hat{\theta}_n - \theta(\tau_*)\|^2 = 0.$$

Доказательство теоремы 3.2 приведено в п. 3.4.

В четвертой главе — "Фильтрация случайных процессов, наблюдаемых на фоне произвольных ограниченных помех" — рассматриваются

линейные задачи оценивания в нестационарной постановке, когда вектор неизвестных параметров меняется со временем.

Под *фильтрацией* понимаются алгоритмы обработки реализаций случайных процессов, направленные на подавление помех, зашумляющих (обычно аддитивно) полезный сигнал. В основе теории оптимальной фильтрации лежит метод Винера-Колмогорова и его рекуррентные модификации, известные под общим названием фильтра Калмана-Бьюси. В случае произвольных ограниченных помех задача оптимальной фильтрации возможна в минимаксной постановке, но получающиеся в её рамках решения при высоком уровне помех наблюдения малоинформативны.

В п. 4.1 рассматривается задача о предсказании сигнала, наблюдаемого на фоне произвольных ограниченных детерминированных помех и обосновывается разумность применения некоторого рандомизированного алгоритма в той ситуации, когда можно считать случайной и "невырожденной" последовательность входов модели — коэффициентов преобразования изучаемого сигнала. Предлагаемый фильтр имеет структуру, похожую на упрощенный вариант фильтра Калмана-Бьюси, что может говорить о его определенных оптимальных свойствах.

Пусть наблюдения $y_n \in \mathbb{R}^1$:

$$(4.1) \quad y_n = \varphi_n^T \theta_n^* + v_n,$$

представляют собой смесь преобразованного векторного сигнала $\{\theta_n^*\}$, $\theta_n^* \in \mathbb{R}^r$, и помехи наблюдения $\{v_n\}$. Здесь φ_n — r -мерный вектор, известный в момент времени n . Векторный сигнал $\{\theta_n^*\}$ порождается устойчивым линейным фильтром

$$(4.2) \quad \theta_{n+1}^* = A\theta_n^* + w_{n+1},$$

в котором A — известная матрица: $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(AA^T)} < 1$, а $\{w_n\}$ — центрированный независимый случайный процесс: w_n не зависит от \mathcal{F}_{n-1} и вместе с $\{v_n\}$ удовлетворяет условию **(LR.Bii)**.

Задача фильтрации с прогнозом на один шаг состоит в нахождении оценки $\hat{\theta}_{n+1}$ значения процесса $\{\theta_n^*\}$ в момент времени $n+1$ по наблюдениям $y_i, \varphi_i, i \leq n$. Качество фильтрации определяется средней величиной квадрата невязки

$$E\{\|\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}^*\|^2\}.$$

Обычно считают, что в модели наблюдений векторы $\{\varphi_n\}$ определяются детерминированной последовательностью. Здесь будем предполагать, что последовательность векторов $\{\varphi_n\}$ случайная и удовлетворяет предположению **(LR.A')**.

Зададим следующий рандомизированный алгоритм построения очередной оценки:

$$(4.3) \quad \hat{\theta}_{n+1} = A\hat{\theta}_n - \alpha A\Gamma \Delta_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_n - y_n), \quad \Delta_n = \varphi_n - E\{\varphi_n\},$$

где $n = 0, 1, \dots$, $\alpha > 0$ — размер шага и Γ — положительно определенная симметричная матрица. Будем считать, что начальные данные $\hat{\theta}_0$ заданы произвольным неслучайным вектором из \mathbb{R}^r .

Т е о р е м а 4.1 Пусть $\alpha > 0$, Γ — положительно определенная матрица и $\hat{\theta}_0$ — произвольный неслучайный вектор из \mathbb{R}^r .

Если выполнены предположения **(LR.A')** и **(LR.Bii)**,

тогда для среднеквадратичных ошибок предсказания оценок $\{\hat{\theta}_n\}$, генерируемых по алгоритму (4.3), выполняются неравенства

$$\mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}^*\|^2\} \leq \frac{r\sigma_w^2 + \alpha^2 b(1 + M_\varphi \rho)\sigma_v^2}{1 - a(\alpha, \rho)} + a(\alpha, \rho)^n \mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_0 - \theta_0^*\|^2\}$$

для любого $\rho > 0$ и достаточно малого α : $a(\alpha, \rho) < 1$. Величины $a(\alpha, \rho)$ и b определяются формулами

$$(4.4) \quad a(\alpha, \rho) = (1 - 2\alpha\lambda_{\min}(\mathbf{B}\Gamma) + \alpha^2\|\Gamma\|^2 M_4^4)\|\mathbf{A}\|^2 + \alpha^2(M_\varphi + \frac{1}{\rho})M_\varphi b,$$

$$(4.5) \quad b = \|\Gamma\|^2 \text{Tr}[\mathbf{B}].$$

Пусть $\Gamma = \mathbf{B}^{-1}$, $\|\mathbf{A}\|^{-2} = 1 + \mathcal{O}(\alpha^3)$ и $\mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_0 - \theta_0^*\|^2\} = 0$. Обозначим через

$$c = \frac{r\sigma_w^2}{2}, \quad d(\rho) = \frac{M_4^4 + (M_\varphi + 1/\rho)M_\varphi \text{Tr}[\mathbf{B}]}{2\lambda_{\min}^2(\mathbf{B})}.$$

В этом случае для достаточно малых α из заключения теоремы 4.1 следует, что

$$\mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}^*\|^2\} \leq D(\alpha, \rho) + \mathcal{O}(\alpha^2),$$

где

$$D(\alpha, \rho) = c\left(\frac{1}{\alpha} + d(\rho) + \left(d(\rho)^2 + \frac{(1 + M_\varphi \rho)b\sigma_v^2}{2c}\right)\alpha\right).$$

Последнее выражение характеризует взаимное влияние возможности фильтрации и чувствительности к помехам.

Оптимизируя по α выражение для $D(\alpha, \rho)$, находим

$$\alpha^* = \left(d(\rho^*)^2 + \frac{(1 + M_\varphi \rho^*)b\sigma_v^2}{2c}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где ρ^* — точка минимума функции

$$(4.6) \quad \bar{D}(\rho) = c\left(d(\rho) + 2\sqrt{d(\rho)^2 + (1 + M_\varphi \rho)b\sigma_v^2/(2c)}\right).$$

Если $M_\varphi = 0$, то функция $D(\alpha, \rho)$ не зависит от ρ . В такой ситуации получаем, что

$$\alpha^* = \frac{2\sigma_w \lambda_{\min}^2(\mathbf{B})}{\sqrt{M_4^8 \sigma_w^2 + 4\lambda_{\min}^2(\mathbf{B}) \text{Tr}[\mathbf{B}] \sigma_v^2 / r}}$$

и

$$\bar{D}^* = \frac{r\sigma_w}{4\lambda_{\min}^2(\mathbf{B})} \left(M_4^4 \sigma_w + 2\sqrt{M_4^8 \sigma_w^2 + 4\lambda_{\min}^2(\mathbf{B}) \text{Tr}[\mathbf{B}] C_v^2 / r} \right).$$

В п. 4.2 анализируются при различных типах помех возможности решения задачи об отслеживании дрейфа параметров модели линейной регрессии. Предполагается, как и ранее, что последовательности наблюдений $\{y_n\}$ и входных сигналов $\{\varphi_n\}$ связаны уравнением (4.1), в котором θ_n^* — векторы истинных или фиктивных параметров, $\{v_n\}$ — помехи (возмущения). Для отслеживания изменений параметров рассматривается алгоритм стохастической аппроксимации с постоянным шагом

$$(4.7) \quad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha \varphi_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \quad \hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^r,$$

где $n = 1, 2, \dots$, $\alpha > 0$ — размер шага.

Пусть $\{\varphi_n\}$ — случайная центрированная последовательность, а помехи наблюдения $\{v_n\}$ — неизвестные детерминированные, но ограниченные. Ошибка отслеживания связана с процессом изменения параметров $\{w_n\}$, задаваемым формулой: $w_n = \theta_n^* - \theta_{n-1}^*$. Определим для $p \geq 1$ множество последовательностей

$$\mathcal{M}_p = \{ \{w_n\} : \sup_k \mathbb{E} \left\{ \left\| \sum_{i=k+1}^{k+n} w_i \right\|^p \right\}^{1/p} \leq c_p^{(w)} \sqrt{n}, \forall n \geq 1 \},$$

где $c_p^{(w)}$ — некоторые постоянные, зависящие только от p и распределения $\{w_n\}$.

Следующее утверждение (теорема 4.3, п. 4.2.2) дает критерий качества оценок, получаемых с помощью алгоритма (4.7). *Если выполнены условия: $\mathbb{E}\{\varphi_n\} = 0$, (LR.A'), (LR.Bii') и $\{w_n\} \in \mathcal{M}_p$ с постоянной $c_p^{(w)}$ при некотором $2 < p \leq 4$,*

тогда для оценок, генерируемых алгоритмом (4.7), $\forall n \geq 1$ и малого $\alpha > 0$

$$\mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta_n^*\|^2\} = \mathcal{O}\left(\alpha M_4^2 C_v^2 + \frac{(c_p^{(w)})^2}{\alpha}\right) + \mathcal{O}((1 - \alpha\beta)^n),$$

где $\beta \in (0, 1)$ — некоторая постоянная.

Последняя формула показывает возможности компромисса между чувствительностью к помехам и способностью отслеживания изменений параметров. Оптимизируя по α , получаем для оптимального размера шага, что

$$\alpha^* = c_p^{(w)} (M_4 C_v)^{-1}.$$

В п. 4.3 приводятся примеры сравнительного имитационного моделирования поведения оценок стандартных и рандомизированных алгоритмов при различных типах помех в задачах о предсказании значений скалярного случайного процесса и об обнаружении полезного сигнала при временном его включении. Численное моделирование продемонстрировало эффективность новых алгоритмов при разнообразных помехах $\{v_n\}$. В частности, эксперименты выполнялись с неслучайной константой, нецентрированной случайной переменной и различными неслучайными последовательностями помех. Поведение типичных траекторий оценок рандомизированных алгоритмов при высоком уровне нерегулярной помехи существенно лучше поведения траекторий обычных алгоритмов.

Пятая глава "Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации при произвольных помехах" занимает центральное место в диссертации. Многомерная стохастическая оптимизация играет важную роль в анализе и управлении многими техническими системами. Практически во всех прикладных задачах оптимизации используется какой-нибудь математический алгоритм, который последовательно отыскивает нужное решение, так как аналитическое решение задачи редко доступно. Для решения трудных многомерных задач оптимизации и разрабатывались рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации с возмущением на входе. Эти алгоритмы в последнее время активно используются в таких областях, как статистическая оценка параметров; управление с обратной связью; основанная на моделировании оптимизация; обработка сигналов и изображений; планирование экспериментов. Их существенная особенность состоит в том, что для аппроксимации градиента функции потерь, лежащей в основе многих алгоритмов, требуется только одно или два измерения функции независимо от размерности задачи оптимизации. Эта особенность обеспечивает относительную легкость представления алгоритмов и позволяет добиться существенного уменьшения затрат на решение, особенно в задачах оптимизации по большому количеству переменных. Кроме того, в случае зашумленных измерений функции потерь для этих алгоритмов удастся доказать состоятельность доставляемых оценок при очень незначительных ограничениях на помехи.

Основная черта алгоритмов стохастической аппроксимации, рассматриваемых в пятой главе, состоит в том, что неизвестная минимизируемая функция на каждом шаге измеряется не в точке, соответствующей предыдущей оценке, а в её слегка возбужденной позиции, при этом изучается более общая, чем обычно, постановка задачи минимизации функционала типа среднего риска в условиях измерений значений подынтегральной функции стоимости с почти произвольными помехами.

Пусть $F(w, \theta) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^1$ — дифференцируемая по второму аргументу функция, $x_1, x_2 \dots$ — выбираемая экспериментатором после-

довательность точек измерения (план наблюдения), в которых в каждый момент времени $n = 1, 2, \dots$ доступно наблюдению с аддитивными помехами v_n значение функции $F(w_n, \cdot)$:

$$y_n = F(w_n, x_n) + v_n,$$

где $\{w_n\}$ — неконтролируемая последовательность случайных векторов $w_n \in \mathbb{R}^p$ с одинаковым неизвестным распределением $P_w(\cdot)$, имеющим конечный носитель. *Требуется* по наблюдениям $y_1, y_2 \dots$ построить последовательность оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ неизвестного вектора θ^* , минимизирующего функционал среднего риска

$$f(\theta) = E\{F(w, \theta)\} = \int_{\mathbb{R}^p} F(w, \theta) P_w(dw).$$

Обычно рассматривается задача минимизации функции $f(\cdot)$ при более простой модели наблюдений

$$y_n = f(x_n) + v_n,$$

которая легко укладывается в общую схему. Сделанное обобщение в постановке задачи диктуется стремлением учесть случай мультипликативных помех в наблюдениях

$$y_n = w_n f(x_n) + v_n,$$

входящий в общую схему с функцией $F(w, x) = wf(x)$, и желанием обобщить модель наблюдений (2.1) из п. 2.1.

Перечислим основные предположения, которые в дальнейшем в той или иной степени будут сделаны при точных формулировках результатов.

(SA.1) Функция $f(\cdot)$ — сильновыпуклая, т.е. имеет единственный минимум в \mathbb{R}^r в некоторой точке $\theta^* = \theta^*(f(\cdot))$ и

$$\langle x - \theta^*, \nabla f(x) \rangle \geq \mu \|x - \theta^*\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^r$$

с некоторой постоянной $\mu > 0$.

(SA.2) Условие Липшица на градиент функции $f(\cdot)$

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(\theta)\| \leq A \|x - \theta\|, \quad \forall x, \theta \in \mathbb{R}^r$$

с некоторой постоянной $A > \mu$.

(SA.3) Функция $f(\cdot) \in C^\ell$ (ℓ -раз непрерывно дифференцируема) и все её частные производные до порядка ℓ включительно удовлетворяют на \mathbb{R}^r условию Гёльдера порядка ρ , $0 < \rho \leq 1$, так что

$$|f(x) - \sum_{|\bar{l}| \leq \ell} \frac{1}{\bar{l}!} \mathcal{D}^{\bar{l}} f(\theta)(x - \theta)^{\bar{l}}| \leq M \|x - \theta\|^\gamma,$$

где $\gamma = \ell + \rho \geq 2$, $\bar{l} = (l^{(1)}, \dots, l^{(r)})^T \in \mathbb{N}^r$ — мультииндекс,

$$|\bar{l}| = l^{(1)} + \dots + l^{(r)}, \bar{l}! = l^{(1)}! \dots l^{(r)}!, l^{(i)} \geq 0, i = 1, \dots, r,$$

$$x \in \mathbb{R}^r, x^{\bar{l}} = (x^{(1)})^{l^{(1)}} \dots (x^{(r)})^{l^{(r)}}, \mathcal{D}^{\bar{l}} = \partial^{|\bar{l}|} / (\partial x^{(1)})^{l^{(1)}} \dots (\partial x^{(r)})^{l^{(r)}}.$$

При $\gamma = 2$ полагаем $M = A/2$.

Пусть пробное одновременное возмущение Δ_n , $n = 1, 2, \dots$ — наблюдаемая последовательность независимых случайных векторов из \mathbb{R}^r с функциями распределения $P_n(\cdot)$; $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — последовательности положительных чисел, стремящиеся к нулю; $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^r$ — фиксированный начальный вектор. Для построения последовательностей точек измерения $\{x_n\}$ и оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ предлагаются три алгоритма. Первый из них использует на каждой итерации одно наблюдение:

$$(5.1) \quad \begin{cases} x_n = \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n, y_n = F(w_n, x_n) + v_n, \\ \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n) y_n, \end{cases}$$

а второй и третий, представляющие собой рандомизированные версии процедуры Кифера–Вольфовица, — по два наблюдения:

$$(5.2) \quad \begin{cases} x_{2n} = \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n, x_{2n-1} = \hat{\theta}_{n-1} - \beta_n \Delta_n, \\ \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{2\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n)(y_{2n} - y_{2n-1}), \end{cases}$$

$$(5.3) \quad \begin{cases} x_{2n} = \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n, & x_{2n-1} = \hat{\theta}_{n-1}, \\ \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n)(y_{2n} - y_{2n-1}). \end{cases}$$

Во всех трех алгоритмах используются некоторые вектор–функции (ядра) $\mathcal{K}_n(\cdot) : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ с компактным носителем, равномерно ограниченные в среднеквадратичном смысле по мере $P_n(\cdot)$, удовлетворяющие вместе с $P_n(\cdot)$ условиям:

$$(5.4) \quad \int \mathcal{K}_n(x) P_n(dx) = 0, \quad \int \mathcal{K}_n(x) x^T P_n(dx) = I, \quad n = 1, 2, \dots$$

В п. 5.1.3 формулируется основной результат о сходимости оценок рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации, причём вместо алгоритма (5.1) рассматривается алгоритм с проектированием:

$$(5.5) \quad \begin{cases} x_n = \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n, y_n = F(w_n, x_n) + v_n, \\ \hat{\theta}_n = \mathcal{P}_{\Theta_n}(\hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n) y_n), \end{cases}$$

в котором \mathcal{P}_{Θ_n} , $n = 1, 2, \dots$ — операторы проектирования на некоторые выпуклые замкнутые ограниченные подмножества $\Theta_n \subset \mathbb{R}^r$, содержащие, начиная с некоторого $n \geq 1$, точку θ^* . Если заранее известно ограниченное замкнутое выпуклое множество Θ : $\theta^* \in \Theta$, то можно считать $\Theta_n = \Theta$.

Обозначим $\mathbb{W} = \text{supp}(P_w(\cdot)) \subset \mathbb{R}^p$ — носитель распределения $P_w(\cdot)$; \mathcal{F}_{n-1} — σ -алгебру вероятностных событий, порождаемую случайными величинами $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{n-1}$, формируемыми по алгоритму (5.2) (или (5.3), или (5.5)); при использовании алгоритмов (5.2) или (5.3)

$$\bar{v}_n = v_{2n} - v_{2n-1}, \bar{w}_n = \begin{pmatrix} w_{2n} \\ w_{2n-1} \end{pmatrix}, d_n = 1,$$

а при построении оценок по алгоритму (5.5)

$$\bar{v}_n = v_n, \bar{w}_n = w_n, d_n = \text{diam}(\Theta_n),$$

где $\text{diam}(\cdot)$ — евклидовыи диаметр множества.

Т е о р е м а 5.1 Пусть выполнены условия:

(SA.1) для функции $f(\theta) = E\{F(w, \theta)\}$;

(SA.2) для функций $F(w, \cdot)$, $\forall w \in \mathbb{W}$;

$\forall \theta \in \mathbb{R}^r$ функции $F(\cdot, \theta)$ и $\nabla_{\theta} F(\cdot, \theta)$ равномерно на \mathbb{W} ограничены;

(5.4) для функций $\mathcal{K}_n(\cdot)$ и $P_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots$;

$\forall n \geq 1$ случайные величины $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ и вектора $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{n-1}$ не зависят от \bar{w}_n, Δ_n , а случайный вектор \bar{w}_n не зависит от Δ_n ;

$E\{\bar{v}_n^2\} \leq \sigma_n^2$, $n = 1, 2, \dots$.

Если $\sum_n \alpha_n = \infty$ и $\alpha_n \rightarrow 0$, $\beta_n \rightarrow 0$, $\alpha_n^2 \beta_n^{-2} (1 + d_n^2 + \sigma_n^2) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$,

тогда последовательность оценок $\{\hat{\theta}_n\}$, доставляемых алгоритмом (5.2) (или (5.3), или (5.5)), сходится к θ^* в среднеквадратичном смысле: $E\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$,

Если $\sum_n \alpha_n \beta_n^2 < \infty$ и $\sum_n \alpha_n^2 \beta_n^{-2} (1 + E\{\bar{v}_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}\}) < \infty$ с вероятностью единица,

тогда $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta^*$ при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью единица.

Для функции $F(w, x) = wf(x)$ условия теоремы 5.1 выполняются, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям **(SA.1,2)**.

Задача об оценке параметров линейной регрессии с моделью наблюдений (2.1) соответствует минимизации функционала среднего риска

$$F(w, x) = \frac{1}{2}(x - \theta^* - w)^T(x - \theta^* - w).$$

Алгоритм (2.2) с $\Gamma = B^{-1}$ в точности совпадает с (5.2). При выполнении условия **(LR.A')** для входов модели линейной регрессии утверждения теоремы 2.1 о сильной состоятельности оценок алгоритма (2.2) и их сходимости в среднеквадратичном смысле являются следствием теоремы 5.1.

В теореме 5.1 помехи наблюдения v_n можно условно назвать почти произвольными, так как они могут быть неслучайными, но неизвестными и ограниченными или представлять из себя реализацию некоторого стохастического процесса с произвольной структурой зависимостей. В частности, ничего не предполагается о зависимости между \bar{v}_n и \mathcal{F}_{n-1} .

Условие независимости помех наблюдения от пробного возмущения может быть ослаблено. Достаточно потребовать: $E\{\bar{v}_n \mathcal{K}_n(\Delta_n)\} \leq \alpha_n \beta_n^{-1}$.

Несмотря на кажущуюся близость алгоритмов (5.2) и (5.3) в случае произвольных помех в наблюдениях использование последнего из них в системах реального времени более оправданно. Для алгоритма (5.2) выполнение условия о независимости помехи наблюдения v_{2n} от пробного возмущения Δ_n слишком ограничительно, так как в предыдущий момент времени $2n - 1$ вектор Δ_n уже использовался в системе. При работе с алгоритмом (5.3) помеха v_{2n} и вектор пробного возмущения Δ_n появляются в системе одновременно, что позволяет надеяться на их независимость.

В пп. 5.1.4–5.1.5 за счет использования в алгоритмах более конкретной структуры функций распределения пробного возмущения и некоторого специального вида вектор-функций $\mathcal{K}_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots$ показано, что алгоритмы (5.2), (5.3) и (5.5) достигают асимптотически оптимальной среднеквадратичной скорости сходимости $\mathcal{O}(n^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}})$, если исследуемая функция удовлетворяет условию гладкости **(SA.3)**.

Пусть независимые случайные величины $\{\Delta_n\}$ распределены одинаково при $n = 1, 2, \dots$, все компоненты вектора Δ_n не зависят друг от друга и имеют одинаковую скалярную функцию распределения $P_\Delta(\cdot)$ с конечным носителем, а вектор-функции $\mathcal{K}_n(\cdot)$ не зависят от n :

$$\mathcal{K}_n(x) = \mathcal{K}(x) = (\mathcal{K}^{(1)}(x), \dots, \mathcal{K}^{(r)}(x))^T, \quad x \in \mathbb{R}^r, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и их компоненты $\mathcal{K}^{(i)}(\cdot)$, $i = 1, \dots, r$ вычисляются по формулам:

$$(5.6) \quad \mathcal{K}^{(i)}(x) = K_0(x^{(i)}) \prod_{j \neq i} K_1(x^{(j)}), \quad i, j = 1, \dots, r, \quad x \in \mathbb{R}^r,$$

где $K_0(\cdot)$ и $K_1(\cdot)$ — некоторые скалярные ограниченные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\int u K_0(u) P_\Delta(du) = 1, \quad \int u^k K_0(u) P_\Delta(du) = 0, \quad k = 0, 2, \dots, \ell, \quad (5.7)$$

$$\int K_1(u) P_\Delta(du) = 1, \quad \int u^k K_1(u) P_\Delta(du) = 0, \quad k = 1, \dots, \ell - 1.$$

В частности, в одномерном случае ($r = 1$) для задания $\mathcal{K}(x)$ достаточно одной функции $K_0(x)$.

Если выбрать в качестве вероятностного распределения компонент пробного возмущения равномерное на интервале $[-1/2, 1/2]$, то можно взять для начальных значений $\ell = 1, 2$ (т.е. $2 \leq \gamma \leq 3$)

$$K_0(u) = 12u, \quad K_1(u) = 1, \quad |u| \leq 1/2,$$

для следующих значений $\ell = 3, 4$ (т.е. $3 < \gamma \leq 5$)

$$K_0(u) = 5u(15 - 84u^2), \quad K_1(u) = 9/4 - 15u^2, \quad |u| \leq 1/2,$$

далее, для $\ell = 5, 6$ (т.е. $5 < \gamma \leq 7$)

$$K_0(u) = 5u(15.1875 - 87.5u^2 + 2079u^4),$$

$$K_1(u) = 3.515625 - 65.625u^2 + 236.25u^4, \quad |u| \leq 1/2.$$

При $|u| > 1/2$ выбираем $K_0(u) = 0$ и $K_1(u) = 0$.

Т е о р е м а 5.2 Пусть в алгоритме (5.2) (или (5.3), или (5.5)) вектор-функции $\mathcal{K}_n(\cdot)$ определяются по формулам (5.6) и

$$\alpha_n = \alpha n^{-1}, \quad \beta_n = \beta n^{-\frac{1}{2\gamma}}, \quad \beta > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если выполнены условия:

(SA.1,3) при $\gamma \geq 2$, $\alpha > \frac{\gamma-1}{2\mu\gamma}$ для функции $f(\theta) = E\{F(w, \theta)\}$;

(SA.2) для функций $F(w, \cdot)$, $\forall w \in \mathbb{W}$;

$\forall \theta \in \mathbb{R}^r$ функции $F(\cdot, \theta)$ и $\nabla_\theta F(\cdot, \theta)$ равномерно на \mathbb{W} ограничены;

(5.7) для функций $K_0(\cdot)$, $K_1(\cdot)$ и $P_\Delta(\cdot)$;

$d_n n^{-1+\frac{1}{2\gamma}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

$\forall n \geq 1$ случайные вектора \bar{w}_n, Δ_n не зависят от $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{n-1}$ и случайный вектор Δ_n не зависит от \bar{w}_n ;

$E\{(v_{2n} - v_{2n-1})^2/2\} \leq \sigma_2^2$, $(E\{v_n^2\} \leq \sigma_1^2)$;

тогда для среднеквадратичной скорости сходимости последовательности оценок $\{\hat{\theta}_n\}$, сгенерированных алгоритмом (5.2) (или (5.3), или (5.5)), асимптотически при $n \rightarrow \infty$ выполняется

$$E\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2\} = \mathcal{O}(n^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}).$$

Доказательство теорем 5.1–5.2 приведено в п. 5.4.

Как и в теореме 5.1, условие независимости помех наблюдения и пробного возмущения можно ослабить. При доказательстве теоремы 5.2 установлены оптимальные значения параметров α^* и β^* .

В п. 5.2, следуя идеям работы Б.Т.Поляка и А.Б.Цыбакова [51], показано, что полученный в теореме 5.2 асимптотический порядок среднеквадратичной скорости сходимости оценок не может быть улучшен никаким другим алгоритмом оценивания из достаточно широкого класса.

Следующий п. 5.3 содержит экспериментальные результаты сравнительного моделирования оценок по классической процедуре Кифера–Вольфовица и рандомизированному алгоритму (5.2) в той форме, как он был предложен Дж.Спалом; пример пошагового описания процедуры реализации алгоритма и вариант программы для ЭВМ на языке MATLAB.

В шестой главе описываются некоторые возможные практические применения рандомизированных алгоритмов.

В п. 6.1 предлагается использовать алгоритмы (2.2), (2.6) и (2.7) в устройстве дистанционного определения ряда химических элементов в мишени. Одной из характеристик, указывающей на присутствие в мишени некоторых радиоактивных материалов, является возникновение запаздывающего во времени потока нейтронов после облучения мишени релятивистским пучком электронов. На этом базируется одна из основных методик инспекции подозрительных объектов "противника", при этом по изменению во времени интенсивности запаздывающего излучения можно сделать вывод о типе радиоактивного вещества. Если у противника есть возможность противодействия, то при этой методике легко определить момент начала инспекции (засечь электронный пучок) и, имея некоторый запас во времени возникновения запаздывающего излучения, добавить к потоку запаздывающих нейтронов заглушающий поток, ликвидирующий возможность инспекции. Основная идея предлагаемого метода, использующего пробные возмущения, заключается в задании серии облучающих электронных пучков, последовательность интенсивностей каждого из которых определяется некоторым случайным процессом с хорошо известными статистическими свойствами. Этот способ позволяет фиксировать наличие и характеристики запаздывающего излучения нейтронов, даже несмотря на высокий уровень генерируемых противником помех.

Краткий обзор практических приложений рандомизированных алгоритмов СА дан в п. 6.2. Там же приведены три показательных примера, иллюстрирующих некоторые работы по многомерной оптимизации, проведенные в "Лаборатории прикладной физики" университета им.Дж.Хопкинса (США).

Некоторые способы использования рандомизированных алгоритмов

в задачах обучения приведены в п. 6.3. В частности, в п. 6.3.2 описан процесс оптимизации настройки параметров двухуровневой нейронной сети, в п. 6.3.4 подробно разобрана задача об оптимизации способа подбора параметров ритмических строк, поступающих на вход механизма рецепции модели М.А.Красноперовой, при реконструктивном моделировании стихосложения.

Описание двух возможностей практического применения рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации в системах массового обслуживания приведено в п. 6.4. В процессе оптимизации работы маршрутизатора, распределяющего задания в сети, эти алгоритмы предлагается использовать для адаптивного подбора размера шага некоторого предсказывающего алгоритма (п. 6.4.2). При оптимизации процесса обработки последовательных заказов сервером целесообразно использовать рандомизированный алгоритм с постоянным шагом для адаптивного выбора настраиваемого параметра (п. 6.4.3).

Задачи финансовой математики предоставляют широкий простор для применения методов многомерной оптимизации (п. 6.5). Оправданности использования рандомизированных алгоритмов для подбора параметров кривой волатильности при расчете цен опционов в биржевой торговле посвящен п. 6.5.2.

В п. 6.6 обсуждаются перспективы реализации рандомизированных алгоритмов на "гипотетическом" квантовом вычислителе. Простота в представлении алгоритмов позволяет использовать их не только в специальных вычислительных устройствах, но и, как, например в ряде работок, непосредственно заложить принцип *одновременного возмущения* в конструкцию электронного устройства классического типа, предназначенного для настройки параметров нейронной сети. Эффективность оптимизации при этом обусловлена двумя основными моментами.

- Для вычисления приближенного значения вектора–градиента функции от многих переменных по её значениям требуется всего одно или два измерения значения функции.
- Алгоритмы обладают качествами робастности в очень высокой степени, в том смысле, что состоятельность их оценок доказана при "почти произвольных" помехах в измерениях функции.

Фундаментальным вопросом обоснования эффективности использования методов на практике является выбор такого способа генерации пробного возмущения, чтобы помехи в канале наблюдения были с ним независимы; кроме того, компоненты вектора пробного возмущения должны быть независимы между собой. При реализации алгоритма на классическом компьютере, последовательно выполняющем элементарные операции одну за другой, эффективность предлагаемых алгоритмов снижается по сравнению с теоретическими ожиданиями. В самом названии

одновременно возмущаемый есть требование к практической реализации — быть *параллельной*. В рассматриваемой модели "гипотетического" квантум–компьютера не только естественно генерируется пробное одновременное возмущение, но и основное нетривиальное понятие — *измерение результата квантового вычисления* — реализуется за счет того, что оно само по себе заложено в структуре рандомизированного алгоритма в виде умножения результата вычисления значения исследуемой функции на пробное возмущение.

В седьмой главе описана возможность применения рандомизированного алгоритма идентификации для построения ℓ_1 оптимальной адаптивной стратегии управления.

В п. 7.1 обсуждается задача о синтезе адаптивной стабилизирующей стратегии для управления дискретным линейным объектом (ОУ) с произвольными ограниченными помехами. Рассматривается ОУ, описываемый уравнением (3.4) с аддитивными помехами $\{v_t\}$: $|v_t| \leq C_v$, $t = k, k + 1, \dots$. Для решения задачи о его адаптивной стабилизации, когда цель управления — обеспечение неравенства

$$(7.1) \quad \sup_{t=k, k+1, \dots} |y_t| + |u_t| < \infty,$$

предлагается использовать стабилизирующий алгоритм *модифицированная полоска*. Пусть при каждом значении вектора $\tau \in \mathcal{T}$ существует обратная связь вида

$$(7.2) \quad c(q^{-1}, \tau)u_t = d(q^{-1}, \tau)y_t,$$

которая стабилизирует объект управления (3.4) при $\tau_\star = \tau$, и коэффициенты многочленов $c(\lambda, \tau) = 1 + \lambda c^{(1)}(\tau) + \dots + \lambda^p c^{(p)}(\tau)$, $d(\lambda, \tau) = d^{(0)}(\tau) + \lambda d^{(1)}(\tau) + \dots + \lambda^p d^{(p)}(\tau)$ известны и являются непрерывными функциями на множестве \mathcal{T} . Стабилизируемость обратной связи (регулятора) (7.2) равносильна тому, что все корни характеристического многочлена замкнутой системы (3.4), (7.2) (при $\tau_\star = \tau$) по абсолютной величине больше единицы.

Для управления объектом (3.4) в условиях, когда вектор τ_\star полностью или частично неизвестен, естественно использовать обратную связь с подстраиваемыми коэффициентами:

$$(7.3) \quad c(q^{-1}, \tau_t)u_t = d(q^{-1}, \tau_t)y_t,$$

где τ_t — оценка вектора τ_\star в момент времени t (предполагается, что $\tau_t \in \mathcal{T}$). Если алгоритм формирования оценок $\tau_t = \tau_t(y_t, y_{t-1}, \dots, u_{t-1}, \dots)$ обеспечивает состоятельность оценок:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_t = \tau_\star,$$

то управление, формируемое обратной связью (7.3), становится при $t \rightarrow \infty$ неотличимым от управления, формируемого обратной связью (7.2). Другими словами, если критерий качества управления не зависит от переходных процессов в замкнутой системе управления, то регулятор (7.3) обеспечивает то же качество управления, что и регулятор (7.2), синтезированный для конкретного значения вектора коэффициентов τ_* . Управление, формируемое регулятором (7.3) с настраиваемыми параметрами, называется в этом случае *адаптивным*.

В силу условия ограниченности помех, система целевых неравенств

$$|y_t - \varphi_t^T \hat{\tau}| \leq 2C_v + \delta \|\varphi_t\|, \quad \varphi_t = \begin{pmatrix} -y_{t-1} \\ \vdots \\ -y_{t-p} \\ u_{t-k} \\ \vdots \\ u_{t-p} \end{pmatrix}, \quad t = k, k+1, \dots$$

разрешима относительно $\hat{\tau}$ при любом $\delta \geq 0$ (им удовлетворяет, например, вектор $\hat{\tau} = \tau_*$). Эти целевые неравенства порождают алгоритм

$$(7.4) \quad \hat{\tau}_t = \mathcal{P}_{\mathcal{T}} \left(\hat{\tau}_{t-1} + \frac{\eta_t \mathbf{1}_{\{|\eta_t| - 2C_v - \delta \|\varphi_t\| > 0\}}}{\|\varphi_t\|^2} \varphi_t \right),$$

$$\eta_t = y_t - \varphi_t^T \hat{\tau}_{t-1} = \varphi_t^* (\tau_* - \hat{\tau}_t) + v_t,$$

где $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ — проектор на множество \mathcal{T} , сопоставляющий произвольному вектору $\hat{\tau} \in \mathbb{R}^{2p-k+1}$ ближайший к нему вектор из \mathcal{T} .

Алгоритм (7.4) при задании произвольного начального вектора $\hat{\tau}_0$ для любого $\delta > 0$ сходится за конечное число шагов, т.е. существует такой конечный момент времени $t_* = t_*(\hat{\tau}_0, \{v_t\}, \delta)$, что $\hat{\tau}_t = \hat{\tau}_{t_*}$ при $t \geq t_*$. При этом совсем не обязательно $\hat{\tau}_{t_*} = \tau_*$, но из вида (7.4) следует, что если $t \geq t_*$, то выполнены неравенства

$$|v'_t| \leq 2C_v + \delta \|\varphi_t\|, \quad v'_t = \varphi_{t-1}^T (\hat{\tau}_{t-1} - \tau_*) + v_t.$$

Систему управления (3.4), (7.3) при $t \geq t_*$ можно переписать в виде:

$$a(q^{-1}, \hat{\tau}_{t_*})y_t = b(q^{-1}, \hat{\tau}_{t_*})u_t + v'_t, \quad c(q^{-1}, \hat{\tau}_{t_*})u_t = d(q^{-1}, \hat{\tau}_{t_*})y_t.$$

В силу выполнения всех целевых неравенств при больших t , система управления диссипативна при достаточно малом $\delta > 0$.

Способ использования рандомизированного алгоритма идентификации (3.8),(3.9) из третьей главы описан в п. 7.2. При установлении состоятельности оценок, доставляемых идентифицирующим алгоритмом (3.8),(3.9), наибольшую трудность представляет обеспечение ограниченности выходных и управляющих переменных. На начальных этапах

действия алгоритма оценки могут сильно отличаться от оцениваемого параметра, а потому формируемые с их помощью управляющие воздействия могут "раскачивать" систему управления. Это, в свою очередь, затрудняет установление состоятельности оценок. В идентифицирующий алгоритм (3.8),(3.9), дающий последовательность оценок τ_t , для обеспечения ограниченности выходных и управляющих переменных можно имплантировать стабилизирующий алгоритм "модифицированная полоска". Зададим $\bar{R} > 0$ — достаточно большое число. При построении очередного управления на базе идентификационного подхода в момент времени t будем использовать оценку

$$(7.5) \quad \tilde{\tau}_t = \begin{cases} \tau_t, & \text{если } |y_t| + |u_{t-1}| \leq \bar{R} \text{ и } \tau_t \in \mathcal{T}, \\ \hat{\tau}_t & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $s > 2p - k$ — некоторое натуральное число, $\{\Delta_n\}$ — пробное возмущение, скалярный временной ряд, составленный из центрированных случайных величин, независимых в совокупности и обладающих свойствами

$$(7.6) \quad E\{\Delta_n^3\} = 0, \quad |\Delta_n| \leq \frac{C_\Delta}{\sqrt{1 + \ln\{n\}}}, \quad E\{\Delta_n^2\} = \frac{\sigma_\Delta^2}{1 + \ln\{n\}},$$

где σ_Δ^2 и C_Δ — некоторые положительные постоянные.

Условимся управление $\{u_t\}$ формировать по правилу (3.5), в котором собственно управление $\{\bar{u}_t\}$ определяется с помощью регулятора

$$(7.7) \quad c(q^{-1}, \tilde{\tau}_t)\bar{u}_t = d(q^{-1}, \tilde{\tau}_t)y_t$$

с настраиваемыми параметрами $\tilde{\tau}_t$ из (7.5) и

$$R_n = C_R \left(1 + \sum_{j=1}^p |y_{sn+k-j}| + \sum_{j=1}^{p-k} |\bar{u}_{sn-j}| \right)$$

с некоторой постоянной $C_R > 0$.

Если помеха $\{v_t\}$ и (или) начальные данные в уравнении (3.4) — случайные, то будем предполагать, что пробное возмущение $\{\Delta_n\}$, вводимое специально в канал управления, от них не зависит. Начальными данными в уравнении (3.4) являются величины $y_t : t < k$, и $u_t : t < 0$. Начальные данные в регуляторе (7.7) принимаются нулевыми.

Итак, функции $\mathcal{U}_t(\cdot)$ обратной связи, задаваемые формулой (7.7), удовлетворяют условию **(RI.1)**. При сделанных предположениях условие **(RI.2)** также выполняется. Если выполнены условия **(RI.3)**–**(RI.4)**, Γ — некоторая положительно определенная матрица и $2\lambda_{\min}(\Gamma)\sigma_\Delta^2 \geq 1$, тогда в формуле (7.5) надо использовать оценки (3.9):

$$\tau_t = \bar{\tau}(\hat{\theta}_{n-1}), \quad s(n-1) < t \leq sn, \quad s = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\bar{\tau}(\cdot)$ — функция из (3.7) — и оценки $\{\hat{\theta}_n\}$ формируются рандомизированным алгоритмом (3.8):

$$(7.8) \quad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma \frac{1 + \ln\{n\}}{n} \Delta_n \left(\Delta_n \hat{\theta}_{n-1} - \frac{Y_n - \psi_n(\hat{\theta}_{n-1})}{R_n} \right).$$

Пробный сигнал $R_n \Delta_n$ нивелируется с течением времени, так как, за счет использования стабилизирующего алгоритма "модифицированная полоска", величины R_n равномерно ограничены. Это свойство алгоритма идентификации позволяет синтезировать с его помощью адаптивные системы, выход которых с течением времени становится неотличимым от выхода оптимальной системы, синтезированной при известном параметре ОУ.

Способ построения адаптивной субоптимальной стратегии управления формулируется в п. 7.3.

Пусть при каждом значении вектора $\tau \in \mathcal{T}$ существует обратная связь вида (7.2), не только стабилизирующая ОУ (3.4) при $\tau_* = \tau$, но и обеспечивающая в классе линейных стабилизирующих регуляторов минимизацию предельного отклонения выходной переменной от заранее заданной ограниченной последовательности желаемых выходов $\{\bar{y}_t\}$, т.е.

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y_t - \bar{y}_t| \rightarrow \min.$$

Обозначим $\Sigma(\tau_*)$ — набор всевозможных линейных стабилизирующих регуляторов для ОУ (3.4), обеспечивающих условие (7.1) ограниченности выходных и управляющих переменных. Рассмотрим цель управления, заключающуюся в конструировании такой обратной связи, чтобы управляющие $\{u_t\}$ и выходные $\{y_t\}$ переменные были ограниченными и выход ОУ удовлетворял бы неравенству:

$$(7.9) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y_t - \bar{y}_t| \leq \mathcal{I}(\tau_*) + \varepsilon,$$

где

$$(7.10) \quad \mathcal{I}(\tau_*) = \inf_{(c(\cdot, \cdot), d(\cdot, \cdot)) \in \Sigma(\tau_*)} \sup_{\substack{|v_t| \leq C_v \\ t=k, k+1, \dots}} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y_t - \bar{y}_t|$$

и $\varepsilon \geq 0$ — некоторый уровень субоптимальности. Эта задача о построении субоптимального управления является адаптивной, так как при формировании u_t не разрешается использовать неизвестные значения коэффициентов τ_* , а можно только опираться на наблюдаемые к моменту времени t величины и оценки вектора τ_* , получаемые на основании наблюдений. Другими словами, управляющие воздействия u_t , ($t = 0, 1, \dots$) могут зависеть от неизвестных компонент вектора τ_* только косвенным образом через наблюдения за поведением системы.

Опишем способ построения коэффициентов субоптимального линейного стабилизирующего регулятора для ОУ (3.4) при известном наборе его коэффициентов. Будем считать, что многочлены $a(\lambda, \tau)$ и $b(\lambda, \tau)$, составленные из коэффициентов ОУ (3.4) при $\tau_* = \tau$, удовлетворяют условию:

(АС.1) многочлен $b(\lambda, \tau)$ не имеет корней, равных по абсолютной величине единице, и его корни, меньшие единицы по абсолютной величине, не являются одновременно корнями многочлена $a(\lambda, \tau)$.

Пусть для некоторого набора коэффициентов ОУ (3.4) многочлен $b(\lambda, \tau)$ имеет m ненулевых корней $\lambda_{(1)}, \dots, \lambda_{(m)}$, меньших единицы по абсолютной величине. Будем считать, что все они различны. Для формулировки алгоритма построения субоптимального линейного стабилизирующего регулятора необходимо произвести несколько вспомогательных построений.

Пусть многочлен $\bar{c}(\lambda, \tau)$ степени, меньшей k , определяется из уравнения

$$a(\lambda, \tau)\bar{c}(\lambda, \tau) - \lambda^k \bar{d}(\lambda, \tau) = 1,$$

которое однозначно разрешимо, и

$$\bar{l} = \begin{pmatrix} l^{(1)} \\ \vdots \\ l^{(m)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^m = \{\bar{l} \in \mathbb{R}^m : 0 \leq l^{(1)}, l^{(i-1)} < l^{(i)}, i = 2, \dots, m\}$$

— некоторый вектор из \mathbb{R}_+^m . Определим на \mathbb{R}_+^m числовую функцию

$$D(\bar{l}, \tau) = \det \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^{l^{(1)}} & \lambda_{(1)}^{l^{(2)}} & \dots & \lambda_{(1)}^{l^{(m)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{(m)}^{l^{(1)}} & \lambda_{(m)}^{l^{(2)}} & \dots & \lambda_{(m)}^{l^{(m)}} \end{pmatrix}$$

и набор функций $\tilde{c}^{(i)}(\bar{l}, \tau) =$

$$= \frac{1}{D(\bar{l}, \tau)} \det \begin{pmatrix} \dots & \lambda_{(1)}^{l^{(i-1)}} & \lambda_{(1)}^{-k} \left(\frac{1}{a(\lambda_{(1)}, \tau)} - \bar{c}(\lambda_{(1)}, \tau) \right) & \lambda_{(1)}^{l^{(i+1)}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \lambda_{(m)}^{l^{(i-1)}} & \lambda_{(m)}^{-k} \left(\frac{1}{a(\lambda_{(m)}, \tau)} - \bar{c}(\lambda_{(m)}, \tau) \right) & \lambda_{(m)}^{l^{(i+1)}} & \dots \end{pmatrix},$$

$i = 1, \dots, m$. Здесь и далее: обозначение $\det A$ соответствует операции вычисления определителя матрицы A . Отметим, что в матрице из определения i -ой функции $\tilde{c}^{(i)}(\bar{l}, \tau)$ все столбцы кроме i -го совпадают с соответствующими столбцами матрицы из определения функции $D(\bar{l}, \tau)$.

Л е м м а 7.1 Пусть для некоторого набора τ коэффициентов уравнения ОУ (3.4) выполнено условие **(АС.1)**,

тогда оценка "снизу" для минимально возможного значения функционала (7.10) совпадает с минимумом функционала

$$(7.11) \quad \mathcal{I}(\bar{l}, \tau) = C_v \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} |\tilde{c}^{(i)}(\tau)| + \sum_{i=1}^m |\tilde{c}^{(i)}(\bar{l}, \tau)| \right)$$

по $\bar{l} \in \mathbb{R}_+^m$.

Функционал (7.11) достигает своего минимального значения в некоторой внутренней точке $\bar{l}_{opt} \in \mathbb{R}_+^m$ или на границе: $l^{(1)} = 0$, так как его значение неограниченно возрастает при $\bar{l} \rightarrow \infty$ и при $l^{(i-1)} \rightarrow l^{(i)}$, $i = 2, \dots, m$. Несложно сформулировать необходимые условия, которым должна удовлетворять точка \bar{l}_{opt} , минимизирующая в \mathbb{R}_+^m функционал (7.11). Обозначим

$$\mu^{(j)}(\bar{l}, \tau) = \det \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^{l^{(1)}} & \lambda_{(1)}^{l^{(2)}} & \dots & \lambda_{(1)}^{l^{(m)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{(j-1)}^{l^{(1)}} & \lambda_{(j-1)}^{l^{(2)}} & \dots & \lambda_{(j-1)}^{l^{(m)}} \\ \text{sign}(\tilde{c}^{(1)}(\bar{l}, \tau)) & \text{sign}(\tilde{c}^{(2)}(\bar{l}, \tau)) & \dots & \text{sign}(\tilde{c}^{(m)}(\bar{l}, \tau)) \\ \lambda_{(j+1)}^{l^{(1)}} & \lambda_{(j+1)}^{l^{(2)}} & \dots & \lambda_{(j+1)}^{l^{(m)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{(m)}^{l^{(1)}} & \lambda_{(m)}^{l^{(2)}} & \dots & \lambda_{(m)}^{l^{(m)}} \end{pmatrix},$$

$$j = 1, \dots, m, \quad \text{sign}(c) = \begin{cases} c / |c|, & \text{если } c \neq 0, \\ 0, & \text{если } c = 0. \end{cases}$$

Л е м м а 7.2 При выполнении условий леммы 7.1 справедливо следующее необходимое условие минимума функционала (7.11):

точка $\bar{l}_{opt} \in \mathbb{R}_+^m$ должна удовлетворять системе m трансцендентных уравнений

$$(7.12) \quad \begin{cases} l_{opt}^{(1)} \tilde{c}^{(1)}(\bar{l}_{opt}, \tau) \sum_{j=1}^m \mu^{(j)}(\bar{l}_{opt}, \tau) \ln\{\lambda_{(j)}\} \lambda_{(j)}^{l_{opt}^{(1)}} = 0, \\ \tilde{c}^{(2)}(\bar{l}_{opt}, \tau) \sum_{j=1}^m \mu^{(j)}(\bar{l}_{opt}, \tau) \ln\{\lambda_{(j)}\} \lambda_{(j)}^{l_{opt}^{(2)}} = 0, \\ \dots \\ \tilde{c}^{(m)}(\bar{l}_{opt}, \tau) \sum_{j=1}^m \mu^{(j)}(\bar{l}_{opt}, \tau) \ln\{\lambda_{(j)}\} \lambda_{(j)}^{l_{opt}^{(m)}} = 0. \end{cases}$$

Заметим, что функции $\mu^{(j)}(\bar{l}, \tau)$, $j = 1, \dots, m$ можно представить в виде:

$$\mu^{(j)}(\bar{l}, \tau) = \sum_{J_j} s_{J_j} \lambda_{(1)}^{l^{(i_1)}} \dots \lambda_{(j-1)}^{l^{(i_{j-1})}} \lambda_{(j+1)}^{l^{(i_{j+1})}} \dots \lambda_{(m)}^{l^{(i_m)}}, \quad s_{J_j} = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases},$$

где J_j — мультииндекс: $J_j = (i_1, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_m)$, $i_q \in \{1, \dots, m\}$, $i_{q_1} \neq i_{q_2}$ при $q_1 \neq q_2$. При $m = 1$ система уравнений (7.12) имеет тривиальный вид:

$$l_{opt}^{(1)} = 0$$

и, соответственно, единственное решение.

Опишем способ построения субоптимального регулятора при известных коэффициентах уравнения объекта управления (3.4). Пусть $\bar{l}_{opt} \in \mathbb{R}_+^m$ — решение системы уравнений (7.12), соответствующее минимальному значению функционала (7.11), и $\bar{l}_* = \bar{l}_*(\tau)$ — ближайший к нему вектор из \mathbb{R}_+^m с целочисленными координатами

$$\bar{l}_* = \begin{pmatrix} l_*^{(1)} \\ \vdots \\ l_*^{(m)} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_+^m = \{\bar{l}_* \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N} : 0 \leq l_*^{(1)}, 0 < l_*^{(i-1)} < l_*^{(i)}, i > 1\}.$$

Л е м м а 7.3 При выполнении условий леммы 7.1 и введенных выше обозначениях регулятор

$$(7.13) \quad c(q^{-1}, \tau)u_t = d(q^{-1}, \tau)(y_t - \bar{y}_t)$$

с многочленами $c(\lambda, \tau)$ и $d(\lambda, \tau)$, определяемыми по формулам

$$c(\lambda, \tau) = \left(\lambda^{-k} \bar{c}(\lambda, \tau) + \tilde{c}^{(1)}(\bar{l}_*, \tau) \lambda^{l_*^{(1)}} + \dots + \tilde{c}^{(m)}(\bar{l}_*, \tau) \lambda^{l_*^{(m)}} \right) \frac{b(\lambda, \tau)}{\prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_{(i)})},$$

$$d(\lambda, \tau) = \frac{a(\lambda, \tau) (\lambda^{-k} \bar{c}(\lambda, \tau) + \tilde{c}^{(1)}(\bar{l}_*, \tau) \lambda^{l_*^{(1)}} + \dots + \tilde{c}^{(m)}(\bar{l}_*, \tau) \lambda^{l_*^{(m)}}) - \lambda^{-k}}{\prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_{(i)})},$$

является субоптимальным стабилизирующим с уровнем субоптимальности

$$\varepsilon = \mathcal{I}(\bar{l}_*, \tau) - \mathcal{I}(\bar{l}_{opt}, \tau).$$

Доказательство лемм 7.1–7.3 приведено в п. 7.5.

При выполнении условий леммы 7.1 можно предложить такой способ выбора целочисленного вектора $\bar{l}_*(\tau)$, чтобы при изменяющихся τ коэффициенты многочленов $c(\lambda, \tau)$ и $d(\lambda, \tau)$ субоптимального регулятора (7.13) являлись бы непрерывными функциями на множестве \mathcal{T} .

Полученные результаты применимы для синтеза адаптивного субоптимального управления объектом (3.4) с произвольными ограниченными помехами.

Т е о р е м а 7.1 Пусть выполнены условия: (7.6), (RI.2)–(RI.4), $\forall \tau \in \mathcal{T}$ (AC.1), Γ — некоторая положительно определенная матрица и $2\lambda_{\min}(\Gamma)\sigma_\Delta^2 \geq 1$.

Если оценки $\tilde{\tau}_t$ неизвестного вектора параметров ОУ (3.4) искать по алгоритму (7.5) с (7.4) и (3.9), (7.8), основанному на использовании затухающего пробного возбуждения $\{\Delta_n\}$ при формировании последовательности управлений $\{u_t\}$, определяемых формулой (3.5), и регулятором с подстраиваемыми коэффициентами

$$c(q^{-1}, \tilde{\tau}_t)\bar{u}_t = d(q^{-1}, \tilde{\tau}_t)(y_t - \bar{y}_t),$$

многочлены $c(\lambda, \tilde{\tau}_t), d(\lambda, \tilde{\tau}_t)$ которого строятся по формулам леммы 7.3,

тогда, во-первых, при произвольном начальном условии $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^r$ последовательность $\{\tilde{\tau}_t\}$ сходится к τ_* в среднеквадратичном смысле и с вероятностью единица, и, во-вторых, цель управления (7.1), (7.9) обеспечивается с уровнем субоптимальности

$$\varepsilon = \mathcal{I}(\bar{l}_*(\tau_*), \tau_*) - \mathcal{I}(\bar{l}_{opt}(\tau_*), \tau_*).$$

В п. 7.4 седьмой главы рассмотрена задача об адаптивном управлении линейным дискретным неминимально-фазовым объектом (3.4), динамика которого описывается разностным уравнением второго порядка

$$y_t + a_*^{(1)}y_{t-1} + y_{t-2} = b_*^{(1)}u_{t-1} + b_*^{(2)}u_{t-2} + v_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

с неизвестными тремя коэффициентами $a_*^{(1)} \in [2, 10]$, $b_*^{(1)} \in [1, 10]$, $b_*^{(2)} \in [-10, 0]$ и аддитивной ограниченной помехой: $|v_t| \leq 2$, $t = 1, 2, \dots$. Этот пример иллюстрирует методику синтеза адаптивного оптимального управления на основе использования пробных возмущений в канале обратной связи. Работоспособность соответствующего рандомизированного алгоритма идентификации и "модифицированной полоски" подтверждается имитационным моделированием на ЭВМ.

В заключении перечислены основные результаты диссертационной работы. В приложении сформулированы основные известные математические факты, на которые в тексте диссертации имеются ссылки.

Глава 1

Некоторые задачи и методы теории оценивания

Под понятием *оценивание* обычно подразумевается способ уточнения значений параметров некоторой функции (в теории связи — *сигнала*), измеряемой (наблюдаемого) с ошибками (на фоне помех). В математической статистике основным инструментом оценивания является регрессионный анализ, основанный на методе наименьших квадратов. В этой главе описываются некоторые из методов статистического оценивания. При этом, как правило, при формулировании каких-либо утверждений не дается строгое математическое обоснование, так как главное внимание уделяется содержательной стороне вопросов. В последующих главах утверждения приводятся с обоснованиями и доказательствами.

1.1 Исторический обзор

Теория оценивания, как математическая наука, была основана в 1806 г., когда появилась работа А.М.Лежандра о наименьших квадратах. Честь основателя принадлежит и К.Ф.Гауссу, опубликовавшему свою версию метода наименьших квадратов (МНК) в 1809 году. В этот период стимулом развития МНК служили запросы развития небесной механики, и метод быстро стал стандартным для определения орбит небесных тел. Неудивительно, что в ряду авторов работ по небесной механике находятся имена Ф.А.Бесселя, Ж.Л.Лагранжа, П.С.Лапласа, С.Д.Пуассона, известных своим вкладом в основания статистики.

В начале XX века теоретические обоснования метода наименьших квадратов получили значительное развитие в трудах А.А.Маркова [40]. Постепенно методика оценивания была поглощена статистикой, но не сразу в достаточно строгой математической форме. Лишь в середине XX века теория вероятностей и важнейшие разделы статистики получили соответствующее математическое оформление, прежде всего, благо-

даря использованию концепций теории меры. Фундамент современного состояния теории оценивания заложен Р.Фишером в 20–30-х годах прошлого века [90]. Р.Фишер показал, что метод максимума правдоподобия обычно удобнее МНК, и доставляемые им оценки не могут быть существенно улучшены. Р.Фишером также введены ставшие общепринятыми понятия несмещенности, достаточности, состоятельности, эффективности и асимптотической эффективности оценок. Тщательно рассматривая основания теории оценивания, Р.Фишер избавил её от жестких ограничений, существовавших с момента появления работ К.Ф.Гаусса. Обобщения его теории привели, в частности, к развитию современных методов непараметрического и робастного оценивания, в которых точная природа распределения вероятностей оцениваемых случайных величин не предполагается известной.

Одновременно с формализацией и развитием математической статистики проводились исследования в, казалось бы, далеких от них областях. До 1940 года оценивание касалось, прежде всего, классических проблем определения наилучших оценок распределений параметров на основе выборки из генеральной совокупности. Между тем, специалисты по линиям связи имели дело с задачей синтеза устройств, позволяющих эффективно обнаруживать присутствие или отсутствие сигнала, наблюдаемого на фоне помехи. Именно их исследования составили конкуренцию статистическим исследованиям Р.Фишера. Быстрое развитие теории связи привело к необходимости учета воздействия помех на распространение и приём сигналов. Первые попытки уменьшить нежелательное воздействие помех были связаны с введением методов расчета фильтров, позволяющих оценить спектр мощности полезного сигнала. Эти попытки делались в перспективном направлении, но их ограничивала неразвитость теории фильтрации. Математические основы этой теории только закладывались: в начале 30-х годов XX века А.Я.Хинчин и Н.Винер создали теорию гармонического анализа случайных функций, центральное место в которой занимает теорема о спектральном представлении стационарных процессов. Основы теории оптимальной фильтрации стационарных процессов были заложены в работах А.Н.Колмогорова [31] и закрытом отчете Н.Винера [173], написанном в 1942 году по заданию Национального Совета оборонных исследований США. Н.Винер, в частности, показал, что теория оценивания может быть применена для синтеза электрического фильтра, который обеспечивает наилучшее выделение сигнала при наличии стационарной помехи. При этом основной акцент он делал не столько на рассмотрение частотных спектров сигналов, сколько на их обработку как стохастических процессов. Центральным местом теории оптимальной фильтрации Винера–Колмогорова является уравнение Винера–Хопфа, решение которого непосредственно связано с синтезом оптимального фильтра. Аналитические труднос-

ти решения этого уравнения (в частности, проблема факторизации) явились главным препятствием на пути широкого внедрения методов фильтрации в практику. Кроме того, значительным ограничением для многих приложений было важное предположение о стационарности обрабатываемого сигнала.

В конце 40-х годов XX века закладываются основы статистической теории связи или теории информации. В 1947 году в докторской диссертации В.А.Котельникова [33] "Теория потенциальной помехоустойчивости" впервые сформулирована задача оптимального статистического синтеза приемных устройств и дается решение задачи обнаружения и различения детерминированных сигналов на фоне коррелированной помехи. В этой работе с новых позиций анализируются многие фундаментальные понятия. Спустя немногим более года появляется широко известная работа К.Шеннона, содержащая знаменитые теоремы о кодировании передаваемых сигналов с целью устранения избыточной информации и о пропускной способности каналов со случайными помехами. Широкое признание среди инженеров-проектировщиков систем связи получила интерпретация Боде-Шеннона [75] процедуры синтеза оптимального фильтра. В то же время Н.Винер публикует книгу "Кибернетика, или управление и связь в животном и машине", возвестившую о становлении новой науки *Кибернетики*, в которой информационно-управленческая связь в явлениях материального мира выступает как фундаментальное его свойство.

Позже теория оптимальной фильтрации обогащается байесовской идеологией. Структуру оптимального приемника-обнаружителя начали определять из анализа отношения правдоподобия и при определенных условиях научились получать согласованный фильтр, максимизирующий отношение "сигнал/шум" на входе решающего устройства. Наряду с проблемой обнаружения на первый план в статистической теории связи выдвигаются проблемы различения сигналов и восстановления сообщений. Эти проблемы оказываются тесно связанными с оценкой параметров, от которых могут зависеть принимаемые сигналы. Так, например, проектировщики радиолокатора уже не удовлетворяются решением только проблемы детектирования сигнала. Для них важно получить дополнительную информацию об амплитуде и фазе принятых радиолокатором сигналов. Хотя первоначально преобразование сигналов и оценивание их параметров изучалось со специальными целями, вскоре было установлено, что после соответствующей интерпретации эти проблемы естественно укладываются в рамки статистики.

1.1.1 Стохастические рекуррентные алгоритмы

В конце 50-х годов XX века при исследовании оптимальных фильтров, синтезируемых для обработки результатов наблюдения на конечном интервале времени, были предложены подходы, не использующие интегральное уравнение Винера–Хопфа. Первоначальный импульс для создания активности в новом направлении был дан Р.Калманом и Р.Бьюси [76]. Независимо друг от друга они поняли, что вместо исследования уравнения Винера–Хопфа часто бывает желательно (и возможно) превратить интегральное уравнение в нелинейное дифференциальное, решение которого дает ковариацию ошибки оптимального фильтра. В свою очередь, эта ковариация содержит всю необходимую информацию для проектирования оптимального фильтра. Этот подход, по существу представляющий собой рекуррентный вариант МНК, в частных случаях исследовался ранее и другими авторами, но именно с работ Р.Калмана и Р.Бьюси в начале 60-х годов XX века началось широкое развитие методов теории рекуррентного (последовательного) оценивания, в рамках которой задача оптимальной фильтрации получила существенное продвижение. Возможность синтеза оптимального фильтра рекуррентным способом представляет и большой практический интерес в связи с удобством реализации фильтра на базе современной вычислительной техники. Рекуррентные процедуры оценивания (фильтр Калмана–Бьюси) оказались применимыми и в случае нестационарных процессов. Работы Р.Калмана по рекуррентному оцениванию появились в связи с необходимостью оптимального оценивания вектора состояния линейных нестационарных систем. Оценивание производилось по наблюдениям за зашумленной компонентой вектора состояния. При этом в теоретическом плане существенным моментом является линейная зависимость наблюдаемого процесса от оцениваемого параметра (линейная фильтрация). Вместе с тем, многие практические задачи приводят к нелинейной зависимости данных наблюдения от оцениваемого параметра. Этот раздел теории оценивания — нелинейная фильтрация — развит значительно меньше, основные идеи были выдвинуты в 1960 году Р.Л.Стратоновичем [54]. Предложенная им рекуррентная процедура оценивания в линейном случае преобразуется в фильтр Калмана–Бьюси. Позднее результаты теории Винера–Колмогорова оптимальной фильтрации и теории Калмана–Бьюси рекуррентной фильтрации стали широко использоваться в теории оптимального управления, в частности, в задачах линейно-квадратичной оптимизации при неполных и зашумленных наблюдениях за вектором состояний объекта управления. В конце XX века В.Н.Фомину [61] удалось существенно обобщить исследования классических задач линейной оптимальной фильтрации, развивая *операторный подход к решению задач линейной фильтрации*.

Теория оценивания в 70–80-х годах прошлого века получила дополнительный импульс в развитии при синтезе адаптивных систем, способных успешно функционировать в условиях априорной неопределенности о свойствах внешней среды. Алгоритмы построения оптимального управления обычно предполагают известными некоторые априорные данные о свойствах системы управления и помех. В большинстве практических задач эта информация недоступна проектировщику, но её можно в той или иной степени восстановить из анализа получаемых наблюдений. Если такая возможность имеется, то можно синтезировать алгоритмы, в которых совмещены процессы управления и восполнения недостающей информации. Этот подход близок понятию *дуального (двойственного) управления* А.А.Фельдбаума [57], так как "управляющие воздействия должны быть в известной мере изучающими, но в известной мере направляющими". При достаточно эффективном восполнении недостающих сведений система управления приобретает оптимальные свойства, либо близкие к ним. Такие системы называют *адаптивными*, поскольку в процессе функционирования они проявляют свойство приспосабливаться к заранее неизвестным помехо-сигнальным условиям (см. [29, 36, 35, 44, 58, 60, 62]). Сказанное в равной степени относится и к другим адаптивным устройствам, в частности, к обучающимся машинам и адаптивным фильтрам (см., например, [59]). При синтезе таких устройств теория оценивания играет важную роль, предоставляя рекуррентные алгоритмы адаптации.

Развитие и доступность вычислительной техники оказали воздействие и на классические разделы математической статистики, стимулируя разработку и давая приоритет рекуррентным схемам оценивания. Так получили широкое признание процедуры стохастической аппроксимации Роббинса–Монро (1951) [147] и Кифера–Вольфовица (1952) [118]. В последние десятилетия XX века рост производительности вычислительных машин и усложнение решаемых практических задач привели к всё более широкому использованию нейронных сетей с большим количеством узлов. Оказалось, что при настройке параметров нейронных сетей современные результаты теорий оценивания и оптимизации дают в распоряжение разработчиков удобные для использования алгоритмы.

К настоящему времени методика исследования свойств оценок, предоставляемых рекуррентными алгоритмами оценивания и оптимизации при зашумленных наблюдениях, приобрела в целом достаточно законченный вид. Основой многих работ по оптимизации сходимости алгоритмов являются работы Я.З.Цыпкина [47, 48, 62, 63] и Б.Т.Поляка [45, 50], М.Вазана [6], М.Б.Невельсона и Р.З.Хасьминского [42], В.Я.Катковника [28], в которых при предположении о центрированности и независимости помех для анализа свойств сходимости оценок и определения оптимальных способов выбора параметров алгоритмов использовались методы,

основывающиеся на стохастическом методе Ляпунова или непосредственно оценивающие наихудшие значения статистических моментов ошибок оценивания. При коррелированных статистических помехах в работах Л.Льюнга и Г.Кушнера с соавторами (см., например, [39, 121, 122, 125, 126]) на основе исследования свойств слабой сходимости предлагается методика анализа асимптотических свойств оценок рекуррентных алгоритмов, опирающаяся на изучение устойчивости решений соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Асимптотические свойства предельных распределений ошибок оценивания алгоритмов стохастической аппроксимации часто исследуются, основываясь на работе В.Фабиана [89]. Стохастические квазиградиентные алгоритмы для решения задач невыпуклой оптимизации рассматривались Ю.М.Ермоловым, А.М.Гупалом, С.П.Урясьевым и др. [26, 41, 55]. В.Г.Гапошкин и Т.П.Красулина в [8] предложили метод изучения асимптотического поведения траекторий, базирующийся на законе повторного логарифма. В работе Э.Валкейлы и А.В.Мельникова [7] асимптотические свойства диффузионных и дискретных моделей стохастической аппроксимации изучаются на единой основе. При нерегулярных помехах в наблюдении (например, ограниченных, а в остальном произвольных) в книгах В.Н.Фомина, А.Л.Фрадкова, В.А.Якубовича [58], А.Б.Куржанского [38], Ф.Л.Черноусько [64], В.М.Кунцевича, М.М.Лычака [37] используются методы получения гарантированных множеств, содержащих оцениваемые параметры. Систематическое параллельное изложение методов оценивания при статистических и нерегулярных помехах проведено Ф.Швеппе [156].

Предлагаемый в этой книге новый тип алгоритмов, основанный на использовании статистической информации о включаемом в рассмотрение пробном одновременном возмущении, относится к более широкому классу алгоритмов случайного поиска. Значительное использование на практике алгоритмов случайного поиска вызвано потребностью в решении задач оптимизации в условиях, когда свойства исследуемой функции потерь неизвестны, а измерение значений самой функции доступны чаще всего с помехами. В русскоязычной литературе эти алгоритмы исследовались, например, в работах Л.А.Растригина [53], А.Жилинскаса [27], С.М.Ермакова и А.А.Жиглявского [25] при условии центрированности и независимости помех наблюдения. Вообще говоря, в условиях, когда о функции потерь почти ничего неизвестно, для поиска точки минимума надо последовательно перебрать все возможные варианты векторов регулируемых параметров. При высокой размерности задачи это сделать за разумное время невозможно. На основании тех или иных предположений о свойствах функции потерь использование алгоритмов случайного поиска позволяет заменить полный перебор на, в некотором смысле, здоровое (осмысленное) блуждание в множестве регулируемых парамет-

ров. В отличие от рассматриваемых в более ранней литературе предлагаемые в этой книге новые алгоритмы типа случайного поиска используют на каждой итерации всего одно или два зашумленных измерения функции потерь. Сходимость последовательностей доставляемых ими оценок к оптимальному значению вектора регулируемых параметров будет доказана при существенно менее значительных предположениях о свойствах неизвестной функции потерь и помех в измерении её значений.

Интересна история появления на свет первых существенных теоретических результатов о свойствах рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации, для которых была доказана сходимость при произвольных помехах. Перед исследователями последовательных алгоритмов оценивания или оптимизации в той или иной форме всегда стоят три вопроса:

1. Каков самый быстрый алгоритм по числу итераций?
2. Как минимизировать количество измерений и других вычислений на каждой итерации?
3. Какой алгоритм будет сходиться при почти произвольных помехах?

Именно попытки поиска ответов на эти вопросы привели к тому, что на рубеже 80–90-х годов прошлого века начались активные исследования рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации. Основы этих исследований базируются на работах Б.Т.Поляка с А.Б.Цыбаковым [51], предложивших самые эффективные в широком классе алгоритмы, Дж.Спала [160, 161], показавшего существенное сокращение необходимого для оптимизации количества измерений исследуемой функции по сравнению с классическими схемами, автора [15, 16, 18, 19] и Б.Т.Поляка с А.В.Гольденшлюгером [94], в которых состоятельность алгоритмов обоснована при почти произвольных помехах. Новый алгоритм в англоязычной литературе получил название *одновременно возмущаемая стохастическая аппроксимация (Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation, SPSA)*, в русскоязычной — алгоритм стохастической аппроксимации с возмущением на входе или поисковый алгоритм стохастической аппроксимации. В начале 90-х годов прошлого века при разработке способов настройки параметров нейронных сетей похожие алгоритмы были предложены в работах Ю.Маеды [129] и Дж.Алспектора [69] с соавторами. Состоятельность рандомизированных алгоритмов при почти произвольных помехах позже исследовалась в работах Л.Льюнга с Л.Гао [127] и Х.-Ф.Чена, Т.Дункана, Б.Пассик–Дункан [80]. Стоит дополнительно отметить, что обоснованное включение пробного возмущения в канал управления при синтезе адаптивного управления впервые было одновременно предложено в середине 80-х годов XX века Х.-Ф.Ченом с Л.Гао [78], использовавшими для оценивания модифицированный

МНК, и С.А.Агафоновым совместно с В.Н.Фоминим и автором диссертации [1, 2, 13], которые рассматривали алгоритмы типа стохастической аппроксимации.

При разработке нового алгоритма к перечисленным выше трем аспектам желательно было добавить и четвертый: представление алгоритма должно быть достаточно простым для понимания и реализации в виде электронного устройства. Именно такими и получились новые рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации, которые не только имеют простой вид, но и естественно "вписываются" в конструкцию нового квантового устройства для вычисления оценок вектора-градиента функции потерь.

1.2 Предварительные примеры

Рассматриваемые во всем тексте диссертации примеры не представляют собой набор конкретных практических задач. Многие из них заданы в достаточно общей модельной форме, но, на взгляд автора, для практиков не составит труда при необходимости конкретизировать любой из них.

1.2.1 Оценивание величины постоянного сигнала, наблюдаемого на фоне помехи

Предположим, что наблюдаемый (регистрируемый измерительным прибором) сигнал $\{y_n\}$ имеет вид

$$y_n = \theta^* + v_n,$$

где θ^* — неизвестная постоянная величина (полезный сигнал), $\{v_n\}$ — неизвестная помеха наблюдения, изменяющаяся во времени, $n = 1, 2, \dots$. Интервал времени наблюдения может быть либо неограниченным, либо конечным. При рассмотрении второго случая мы будем писать $n = 1, 2, \dots, N$.

Требуется по набору величин y_1, \dots, y_n , состоящему из наблюдений, полученных к моменту времени n , оценить значение величины θ^* .

В такой общей постановке нет возможности получить какое-нибудь удовлетворительное решение задачи. Для большей содержательности в постановку задачи вносят уточняющие дополнения. Например, при статистическом подходе делают те или иные предположения о свойствах помех $\{v_n\}$. Достаточно характерным является предположение о *центрированности* (среднее значение равно нулю) и *независимости* (в упрощенном смысле, нет зависимости между значениями в различные моменты времени) помехи. В этой ситуации, просуммировав и усреднив n

значений наблюдений, можем получить

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \theta^* + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k.$$

В зависимости от сделанных статистических предположений, в силу закона больших чисел (см. пункт П.1.3 на стр. 225), величины $\epsilon_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k$ могут сходиться в некотором вероятностном смысле к нулю. Тогда оценки $\{\hat{\theta}_n\}$ величины θ^* , вычисленные по формуле:

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k,$$

будут сходиться в том же вероятностном смысле к значению неизвестной величины θ^* .

С практической точки зрения для удобства реализации алгоритма оценивания на ЭВМ его целесообразно переписать в рекуррентной форме, использующей на каждом шаге *конечную память* (фиксированное количество значений). Пусть $\hat{\theta}_0 = 0$. Произведя несложные преобразования:

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \frac{n-1}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{1}{n} y_n,$$

получаем рекуррентный вариант алгоритма для вычисления оценок

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{1}{n} (\hat{\theta}_{n-1} - y_n).$$

Обратим внимание, что для вычисления очередной оценки используется только новое наблюдение и предыдущая оценка.

Для решения поставленной задачи можно выбрать и какой-нибудь другой способ построения оценок искомой величины θ^* , но все известные содержательные алгоритмы опираются на существенные предположения о статистических свойствах помех наблюдения. Обычно, как и в рассмотренном примере, предполагается их центрированность и некоррелированность. Интересна постановка задачи о выборе в том или ином смысле наилучших оценок. Известно, что приведенный выше алгоритм является оптимальным в случае гауссовых помех в наблюдении. При выборе в модели наблюдений других типов распределений статистических помех получают другие оптимальные алгоритмы оценивания. При исследовании выбранного алгоритма стараются дополнительно получить результаты о скорости сходимости доставляемых им оценок, если они сходятся к значению неизвестной величины θ^* , т.е. исследовать скорость сходимости к нулю последовательности $\{\hat{\theta}_n - \theta^*\}$.

К сожалению, при произвольных помехах в наблюдении приведенные выше рассуждения не приводят к удовлетворительному решению задачи. Хорошо оценить величину постоянного сигнала на фоне детерминированной (неслучайной) неизвестной помехи принципиально невозможно. Эта задача представляет собой пример ограниченности возможностей применения рандомизированных алгоритмов оценивания и оптимизации, речь о которых пойдет далее.

1.2.2 Задача об обнаружении сигнала

Рассмотрим задачу обнаружения (детектирования) скалярного сигнала $\{\varphi_n\}$, который может быть попадает, а может быть и нет в зашумленный канал наблюдения (измерения производятся с помехами). В задачах обнаружения сигнала оцениваемая величина θ^* обычно принимает конечное число значений и часто представляет из себя характеристику типа "да — нет". Будем считать, что случай $\{\theta^* = 1\}$ соответствует наличию сигнала в приемнике, а $\{\theta^* = 0\}$ — его отсутствию. С учетом этого, для наблюдаемых величин $\{y_n\}$ можно записать соотношения:

$$y_n = \varphi_n \theta^* + v_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

С исторической точки зрения эта задача является классической. Большинство методов теории оценивания прежде всего апробировались на ней, поэтому набор возможных способов её решения при различных предположениях о статистических свойствах сигнала $\{\varphi_n\}$ и "хороших" помехах $\{v_n\}$ достаточно обширен (см., например, [59]).

При решении важно знать: известны ли значения величин $\{\varphi_n\}$ в каждый момент времени или нет. Будем рассматривать случай, когда в каждый момент времени n значение обнаруживаемого сигнала известно. Кроме этого, пусть полезный сигнал — ограниченный и имеет статистическую природу, представляя собой последовательность независимых между собой случайных величин с известным ненулевым средним значением $M_\varphi \neq 0$ и положительной ограниченной дисперсией $\sigma_\varphi^2 > 0$. Как и ранее, просуммировав и усреднив n последовательных данных наблюдения, можем получить

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_k \theta^* + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k.$$

В силу усиленного закона больших чисел (см. пункт П.1.3 на стр. 225), последовательность величин $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_k$ стремится к среднему значению M_φ . Если взять $\hat{\theta}_0 = 0$ и в качестве очередной оценки выбрать

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n M_\varphi} \sum_{k=1}^n y_k,$$

то, предполагая независимость помех наблюдения, их одинаковую распределенность и ограниченность вторых статистических моментов, можно доказать сходимость с вероятностью единица последовательности оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ к значению

$$\theta^* + \frac{M_v}{M_\varphi},$$

где M_v — среднее значение помехи. В момент времени n при выборе гипотезы о наличии полезного сигнала в канале наблюдения или об его отсутствии разумно взять операцию сравнения величины текущей оценки $\hat{\theta}_n$ с некоторым пороговым значением δ . Если $\hat{\theta}_n < \delta$, то принимается гипотеза *сигнала нет*, в противном случае — *сигнал есть*. При известной величине M_v естественно в *решающем* правиле задать пороговое значение $\delta = \frac{1}{2} + \frac{M_v}{M_\varphi}$.

При произвольных помехах в наблюдении этот простой алгоритм не годится. Даже если помехи случайные, независимые, одинаково распределенные, но с неизвестным средним значением, то при $|\frac{M_v}{M_\varphi}| > \frac{1}{2}$ рассмотренный выше алгоритм в пределе будет давать неправильные ответы. Как всё-таки подступиться к решению такой задачи? Пусть помеха задается неизвестной, но ограниченной детерминированной функцией $|v_n| \leq C_v$, $n = 1, 2, \dots$. Предположим дополнительно ограниченность четвертого момента полезного сигнала: $E\{|\varphi_n|^4\} < \infty$. Обозначим $\Delta_n = \varphi_n - M_\varphi$, $n = 1, 2, \dots$ — центрированные входы. Домножим на Δ_n обе части соотношения, определяющего наблюдаемые величины y_n , и, произведя несложные преобразования, получаем

$$\Delta_n y_n = \Delta_n^2 \theta^* + \Delta_n M_\varphi \theta^* + \Delta_n v_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Просуммировав и усреднив, имеем

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k^2 \theta^* + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k M_\varphi \theta^* + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k v_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

Первое и второе слагаемое в правой части, в силу усиленного закона больших чисел (см. пункт П.1.3 на стр. 225), при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью единица стремятся к $\sigma_\varphi^2 \theta^*$ и нулю соответственно. Покажем, что с вероятностью единица при достаточно больших n последнее слагаемое по абсолютной величине не будет превосходить любое заранее выбранное малое число $\varepsilon > 0$, т.е. при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Пусть $h = \frac{\varepsilon}{2\sigma_\varphi(1+\varepsilon)}$. По предположению, возможные значения помехи v_n лежат в интервале $[-C_v, C_v]$. Разобьём его на $l = [2C_v/h] + 1$ частей $\mathcal{V}_i = [\bar{v}_{i-1}, \bar{v}_i)$, $\bar{v}_0 = -C_v$, $\bar{v}_i = -C_v + ih$, $i = 1, \dots, l$. Обозначим $\epsilon_n = \sum_{i=1}^l \mathbf{1}_{\{v_n \in \mathcal{V}_i\}} (v_n - \bar{v}_i)$, $n \geq 1$. Заметим, что $|\epsilon_n| \leq h$. Так как число l фиксировано, то, в силу усиленного закона больших чисел, при достаточно больших n с

вероятностью единица

$$\left| \frac{\bar{v}_i}{n} \sum_{k \leq n, k: v_k \in \mathcal{V}_i} \Delta_k \right| \leq \frac{\varepsilon^2}{8C_v \sigma_\varphi (1 + \varepsilon)}, \quad i = 1, \dots, l$$

и $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k^2 \leq \sigma_\varphi^2 (1 + \varepsilon)^2$. При этом, в силу неравенства Гёльдера (см. пункт П.1.2 на стр. 224), получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k v_k \right| &= \left| \sum_{i=1}^l \frac{\bar{v}_i}{n} \sum_{k \leq n, k: v_k \in \mathcal{V}_i} \Delta_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k \epsilon_k \right| \leq \\ &\leq \frac{l \varepsilon^2}{8C_v \sigma_\varphi (1 + \varepsilon)} + \sigma_\varphi (1 + \varepsilon) h \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, при $\Delta_1 \neq 0$ последовательность оценок $\{\hat{\theta}_n\}$, формируемых по правилу

$$\hat{\theta}_n = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_k y_k}{\sum_{k=1}^n \Delta_k^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

сходится с вероятностью единица к θ^* . Зададим некоторое пороговое значение $\delta \in (0, 1)$, например, $\delta = 1/2$. В качестве решающего правила в момент времени n можно выбрать операцию сравнения величины текущей оценки $\hat{\theta}_n$ с выбранным пороговым значением δ . Если $\hat{\theta}_n < \delta$, то принимается гипотеза *сигнала нет*, в противном случае — *сигнал есть*.

1.2.3 Рандомизированные алгоритмы

Рассмотрим более детально последний алгоритм оценивания из предыдущего пункта. Из его вида следует, что если обозначить

$$\Gamma_n = \left(\sum_{k=1}^n \Delta_k^2 \right)^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то две последовательные оценки связаны соотношением

$$\frac{\hat{\theta}_n}{\Gamma_n} = \frac{\hat{\theta}_{n-1}}{\Gamma_{n-1}} + \Delta_n y_n.$$

Следовательно, при выборе $\hat{\theta}_0 = 0$ рассматриваемый алгоритм может быть записан в рекуррентной форме:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_n &= \hat{\theta}_{n-1} - \Delta_n \Gamma_n (\Delta_n \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \\ \Gamma_n &= (\Gamma_{n-1}^{-1} + \Delta_n^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Напомним, что при сделанных предположениях Δ_n — независимые центрированные случайные величины. Обозначив через $\bar{y}_n = \Gamma_n(\Delta_n\theta_{n-1} - y_n)$ величины, вычисляемые по наблюдаемым к моменту времени n данным, полученный рекуррентный алгоритм оценивания можно переписать в виде

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Delta_n \bar{y}_n.$$

В этом алгоритме случайные величины Δ_n будем называть *пробным одновременным возмущением*. Для примера из предыдущего пункта была показана сходимость последовательности оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ к значению неизвестного параметра при неслучайной неизвестной, но ограниченной последовательности помех в наблюдении. Алгоритмы такого типа в дальнейшем будем называть *рандомизированными*, так как обоснование их сходимости при почти произвольных помехах существенно использует стохастическую (вероятностную) природу пробного одновременного возмущения.

1.2.4 Функционал среднего риска

Приведенные в пунктах 1.2.1 и 1.2.2 примеры относятся к более широкому классу задач *минимизации функционалов среднего риска*. Пусть задана последовательность p -мерных случайных векторов $\{w_n\}$ из \mathbb{R}^p , порожденная распределением вероятностей $P_w(\cdot)$. Задача минимизации функционала среднего риска состоит в нахождении точки минимума функции $f(\cdot)$, имеющей вид

$$f(\theta) = E\{F(w, \theta)\} = \int_{\mathbb{R}^p} F(w, \theta) P_w(dw),$$

где $F(w, \theta) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ — заданная *штрафная функция*. Функцию $f(\cdot)$ обычно называют *функцией средних потерь*. В том случае, когда функция распределения $P_w(\cdot)$ неизвестна, эта задача выходит за рамки классической теории оптимизации, но её можно попытаться решать в тех случаях, когда в заданных точках $\{(w_n, x_n)\}$ доступны наблюдению (может быть с помехами) или значения функции $F(w_n, x_n)$, или значения вектора-градиента $\nabla_{\theta} F(w_n, x_n)$. При этом обычно предполагают, что экспериментатору доступны только процессы формирования и (или) наблюдения последовательности $\{x_n\}$, а соответствующие значения $\{w_n\}$ порождаются распределением $P_w(\cdot)$ и неподконтрольны и даже, может быть, неизвестны.

В примерах пп. 1.2.1 и 1.2.2 можно взять $p = r = 1$. Если помеха наблюдения $\{v_n\}$ имеет случайную природу и её функция распределения — $P_v(\cdot)$, тогда задача из п. 1.2.1 об оценивании величины постоянного

сигнала эквивалентна задаче минимизации функционала среднего риска

$$f(\theta) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}(\theta^* - \theta + w)^2 P_v(dw),$$

а вторая задача из п. 1.2.2 связана с функционалом

$$f(\theta) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}(w^{(1)}(\theta^* - \theta) + w^{(2)})^2 P_{\varphi, v}(dw),$$

где

$$w = \begin{pmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix},$$

а $P_{\varphi, v}(\cdot)$ — функция совместного распределения полезного сигнала и помехи. При обозначении $x_n = \hat{\theta}_{n-1}$ наблюдению в каждый момент времени n доступны значения $\nabla_{\theta} F(w_n, x_n)$, равные $x_n - y_n$ в первом случае или $\varphi_n x_n - y_n$ во втором, при этом в первой задаче значения w_n , $n = 1, 2, \dots$ неизвестны полностью, а во второй — полностью неизвестны только вторые компоненты векторов w_n , $n = 1, 2, \dots$

Если измерения значений функции $F(w_n, x_n)$ фактически делаются с некоторой аддитивной случайной ошибкой $\xi_n \in \mathbb{R}^q$ с хорошими статистическими свойствами, то в силу общности поставленной задачи это усложнение непринципиально. Расширив вектор w дополнительными компонентами $\xi^{(k)}$, $k = 1, \dots, q$ и обозначив

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} w \\ \xi \end{pmatrix},$$

можно рассматривать вместо $F(w, \theta)$ новую функцию

$$\bar{F}(\bar{w}, \theta) = F(w, \theta) + \xi$$

со схемой наблюдения без помех и новое совместное неизвестное распределение $P_{w, \xi}(\cdot)$ вместо $P_w(\cdot)$, которое всё равно ранее предполагалось неизвестным. Если ошибки измерения не обладают хорошими статистическими свойствами, то упрощать задачу нельзя. Надо рассматривать модель наблюдений с помехами:

$$y_n = F(w_n, x_n) + v_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

1.2.5 Предсказание значений сигнала

Описание предварительных примеров закончим задачей о предсказании значений скалярного сигнала $\{\theta_n^*\}$, порождающегося устойчивым линейным фильтром

$$\theta_{n+1}^* = a \theta_n^* + w_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \theta_0^* = 0,$$

где $|a| < 1$ и последовательность $\{w_n\}$ представляет собой реализацию независимых случайных величин. Наблюдению в каждый момент времени доступны величины

$$y_n = \varphi_n \theta_n^* + v_n,$$

являющиеся смесью преобразованного сигнала $\{\theta_n^*\}$ и неизвестной помехи $\{v_n\}$. Требуется найти оценки $\hat{\theta}_{n+1}$ значений процесса $\{\theta_n^*\}$ в момент времени $n + 1$ по наблюдениям $y_i, \varphi_i, i \leq n$. Качество предсказания определяется средней величиной квадрата невязки

$$E\{\|\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}^*\|^2\}.$$

Обычно считают, что в модели наблюдений векторы $\{\varphi_n\}$ определяются детерминированной последовательностью. Если $\varphi_n \equiv \varphi$, а $\{w_n\}$ и $\{v_n\}$ — стационарные и стационарно связанные центрированные случайные процессы (см. пункт П.1.4 на стр. 226) с известными спектральными характеристиками, то рассматриваемая задача имеет оптимальное решение в рамках теории оптимальной фильтрации Винера–Колмогорова. В нестационарном случае при $\varphi_n \neq \varphi$ и независимых гауссовых случайных процессах $\{w_n\}, \{v_n\}$ оптимальный прогноз вычисляется рекуррентно по фильтру Калмана–Бьюси. В случае произвольных помех наблюдения $\{v_n\}$ решение задачи об оптимальном прогнозе с помощью фильтра Калмана–Бьюси и, тем более, в рамках теории Винера–Колмогорова не получается. В четвёртой главе при неизвестных, но ограниченных детерминированных помехах наблюдения $\{v_n\}$ для решения задачи будет предложен некоторый радомизированный алгоритм. При обосновании его относительной эффективности будет предполагаться случайная природа формирования последовательности $\{\varphi_n\}$.

1.3 Элементы регрессионного анализа, МНК

Одним из наиболее часто встречающихся вопросов, встающих перед исследователями различных специальностей, является проблема нахождения зависимости между некоторым набором величин. Эта зависимость может быть выведена из теории и (или) может быть получена на основании экспериментальных исследований. Если зависимость получена из теоретических соображений, то довольно часто её можно приближённо представить в аналитическом виде, заданном с точностью до нескольких неизвестных параметров. Если же в основе построения зависимости лежат экспериментальные исследования, то параметрическая зависимость постулируется. В обоих случаях при построении математической модели должны использоваться сведения об исследуемом объекте, на основании которых мог бы быть сделан вывод о степени точности его описания этой моделью.

1.3.1 Наилучшая аппроксимация одной случайной величины с помощью другой

Задача регрессионного анализа состоит в получении наилучшей аппроксимации (*регрессии*) одной случайной величины с помощью семейства функций от другой случайной величины. Наилучшая аппроксимация понимается в смысле наименьших квадратов.

Пусть ζ и ξ — произвольные случайные величины (векторы), принимающие значения соответственно в \mathbb{R} и \mathbb{R}^s , определенные на некотором вероятностном пространстве Ω , и \mathcal{G} — некоторое семейство функций, отображающих \mathbb{R}^s в \mathbb{R} , заданных с точностью до конечномерного набора параметров $\theta \in \mathbb{R}^r$, называемое *регрессионной моделью*. Требуется найти функцию $g(\cdot) \in \mathcal{G}$, минимизирующую

$$E\{\|\zeta - g(\xi)\|^2\}.$$

Если \mathcal{G} — класс всех измеримых функций из \mathbb{R}^s в \mathbb{R} , то соответствующей минимизирующей функцией $g(\cdot)$ является $g(\xi) = E\{\zeta|\xi\}$ — условное (при условии ξ) среднее случайной величины ζ , называемое *регрессией ζ по ξ* .

Наиболее распространенной является *линейная регрессионная модель*, когда требуется найти наилучшую в среднеквадратичном смысле аппроксимацию случайной величины ζ с помощью линейной функции от случайной величины ξ . Векторный Ψ и числовой ψ коэффициенты модели линейной регрессии определяются из условия минимизации функционала

$$f(\psi, \Psi) = E\{\|\zeta - \psi - \Psi\xi\|^2\}$$

типа среднего риска из п. 1.2.4, в котором набор параметров θ состоит из ψ и компонент вектора Ψ . Введя обозначения для соответствующих матриц *ковариации*

$$B_{\zeta\xi} = cov\{\zeta, \xi\} = E\{(\zeta - E\{\zeta\})(\xi - E\{\xi\})^T\},$$

$$B_{\xi\xi} = cov\{\xi, \xi\} = E\{(\xi - E\{\xi\})(\xi - E\{\xi\})^T\}$$

и предположив, что матрица $B_{\xi\xi}$ имеет обратную, нетрудно для ψ и Ψ получить следующие формулы:

$$\psi = E\{\zeta\} - B_{\zeta\xi}B_{\xi\xi}^{-1}E\{\xi\}, \quad \Psi = B_{\zeta\xi}B_{\xi\xi}^{-1}.$$

Функция

$$g(\varphi) = E\{\zeta\} + B_{\zeta\xi}B_{\xi\xi}^{-1}(\xi - E\{\xi\})$$

называется *линейной регрессии*.

Понятие линейной регрессии допускает ясную геометрическую интерпретацию. Два случайных вектора ξ_1 и ξ_2 называются *строго ортогональными*, если их матрица ковариации равна нулю: $cov\{\xi_1, \xi_2\} = 0$. Так как $cov\{g(\xi), \xi\} = cov\{\zeta, \xi\}$, то случайные векторы ξ и $\zeta - g(\xi)$ строго ортогональны. Следовательно, линейная регрессия соответствует строго ортогональной проекции ζ на ξ .

На практике бывает, что вероятностные характеристики случайных величин ζ и ξ известны не полностью, но зато имеются выборочные значения этих случайных величин, которые фактически представляют собой наблюдаемые значения реализаций соответствующих случайных величин. Оценка одной случайной величины с помощью выборочных значений другой также является случайной величиной, и её качество обычно характеризуется средним значением, дисперсией и т. п. Если имеется выборочная последовательность x_1, x_2, \dots, x_N реализаций случайной величины ξ , то в рамках линейной регрессионной модели реализации y_1, y_2, \dots, y_N случайной величины ζ удобно представить в виде

$$y_n = \varphi_n^T \theta^* + v_n, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

где, например, обозначено: $\varphi_n = x_n$, если известна центрированность случайных величин ζ и ξ , или

$$\varphi_n = \begin{pmatrix} 1 \\ x_n \end{pmatrix},$$

θ^* — вектор коэффициентов. В этом представлении невязки v_n , $n = 1, 2, \dots, N$, интерпретируются как ошибки наблюдения. Обозначим

$$Y = Y_N = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

— наблюдаемый в момент времени N вектор сигналов, являющийся функцией входных воздействий, помех в канале измерения и некоторого векторного параметра θ^* . *Требуется* по значению вектора Y получить хорошую оценку $\hat{\theta} = \hat{\theta}_N$ вектора θ^* .

- Оценка $\hat{\theta}$ называется *линейной*, если она имеет вид $\hat{\theta} = \Gamma Y$ с некоторой матрицей коэффициентов Γ .
- Оценка $\hat{\theta}$ называется *несмещенной*, если $E\{\hat{\theta}\} = \theta^*$.
- Последовательность оценок $\{\hat{\theta}_N\}_{N=1}^{\infty}$ называется *состоятельной*, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\|\hat{\theta}_N - \theta^*\|^2 > \varepsilon) = 0,$$

• и называется *сильносостоятельной*, если с вероятностью единица

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_N = \theta^*.$$

Для характеристики качества оценки $\hat{\theta}$ используется теоретически предсказываемый выбранной моделью выходной сигнал Z , т. е. выход принятой модели, который зависит от $\hat{\theta}$. Эта зависимость, вообще говоря, может быть выбрана различными способами. Простейшей является линейная: $Z = \bar{\varphi}^T \hat{\theta}$, в которой матрица $\bar{\varphi}$ состоит из векторов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$. Ошибку оценивания естественно определить как $\epsilon = Y - Z$. Оценки $\hat{\theta}$, минимизирующие функционал качества

$$f_N(\theta) = \|\epsilon\|^2 = \sum_{n=1}^N \|y_n - \varphi_n^T \theta\|^2 = \sum_{n=1}^N \|v_n\|^2,$$

называются *оценками метода наименьших квадратов (МНК)*. Функционал $f_N(\theta)$ зависит от выборочных значений реализаций случайных величин и называется *эмпирическим*. В ситуации использования бесконечной выборки последовательность величин $f_N(\theta)/N$ при $N \rightarrow \infty$, в силу закона больших чисел, может в том или ином вероятностном смысле стремиться к значению квадратичного функционала, определяющего линейную регрессию. В частности, если предположить независимость ошибок наблюдения и ограниченность их вторых моментов, то сходимость будет с вероятностью единица.

Несложно убедиться, что оценки МНК должны удовлетворять системе уравнений

$$\bar{\varphi} \bar{\varphi}^T \hat{\theta} = \bar{\varphi} Y.$$

Если матрица $\bar{\varphi} \bar{\varphi}^T$ невырождена, то эта система имеет единственное решение

$$\hat{\theta} = (\bar{\varphi} \bar{\varphi}^T)^{-1} \bar{\varphi} Y.$$

Можно рассмотреть более общее правило выбора оценки. Пусть R — некоторая симметричная неотрицательная матрица *весовых коэффициентов*. Введём функционал качества (функцию потерь) по правилу

$$f_N(\theta) = \epsilon^T R \epsilon.$$

Для линейной модели с матрицей $\bar{\varphi}$ при невырожденной (имеющей обратную) матрице $\bar{\varphi} R \bar{\varphi}^T$ оптимальная оценка имеет вид

$$\hat{\theta} = (\bar{\varphi} R \bar{\varphi}^T)^{-1} \bar{\varphi} R Y = \Gamma Y, \quad \Gamma = (\bar{\varphi} R \bar{\varphi}^T)^{-1} \bar{\varphi} R,$$

и называется *обобщенной оценкой МНК*. При этом, если принять, что

$$Y = \bar{\varphi}^T \theta^* + \bar{v},$$

то векторы θ^* и $\hat{\theta}$ связаны соотношением

$$\theta^* = \hat{\theta} - \Gamma \bar{v}.$$

Последнее соотношение справедливо при любой природе ошибки оценивания. Если предположить, что условное математическое ожидание $E\{\bar{v}|\bar{\varphi}\} = 0$, то полученная оценка является несмещенной. При этом же предположении нетрудно получить формулы для условных дисперсии и матрицы ковариации оценки

$$E\{\|\hat{\theta} - \theta^*\|^2|\bar{\varphi}\} = \text{Tr}[\Gamma B_{\bar{v}} \Gamma^T], \quad \text{cov}\{\hat{\theta} \hat{\theta}^T|\bar{\varphi}\} = \Gamma B_{\bar{v}} \Gamma^T,$$

где $B_{\bar{v}} = E\{\bar{v} \bar{v}^T|\bar{\varphi}\}$.

Если матрица $B_{\bar{v}}$ имеет обратную, то можно выбрать $R = B_{\bar{v}}^{-1}$. Получаемые оценки

$$\hat{\theta} = (\bar{\varphi} B_{\bar{v}}^{-1} \bar{\varphi}^T)^{-1} \bar{\varphi} B_{\bar{v}}^{-1} Y$$

называются *марковскими*. Условная ковариация марковской оценки при $E\{\bar{v}|\bar{\varphi}\} = 0$ равна

$$\text{cov}(\hat{\theta}^T \hat{\theta}|\bar{\varphi}) = (\bar{\varphi} B_{\bar{v}}^{-1} \bar{\varphi}^T)^{-1},$$

при этом среди всех одностипных линейных оценок, получаемых при различных матрицах весовых коэффициентов R , условная ковариация марковских оценок минимальна.

Пример. Рассмотрим задачу об оценивании коэффициента усиления известного скалярного сигнала $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$, наблюдаемого на фоне помех. Пусть полезный сигнал, помехи и наблюдаемые величины связаны уравнением:

$$y_n = \varphi_n \theta^* + v_n, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

в котором θ^* — неизвестный коэффициент усиления, y_1, \dots, y_N — наблюдения и v_1, \dots, v_N — помехи. Предположим, что помехи $\{v_n\}_{n=1}^N$ представляют собой реализацию стохастически независимых, одинаково распределенных, центрированных случайных величин с дисперсией σ_v^2 :

$$E\{v_n\} = 0, \quad E\{v_n^2\} = \sigma_v^2 > 0.$$

Обозначив

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad \bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N), \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix},$$

получаем

$$Y = \bar{\varphi}^T \theta^* + \bar{v}.$$

Если $\sum_{n=1}^N \varphi_n^2 > 0$, то оценка МНК имеет вид

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{n=1}^N \varphi_n y_n}{\sum_{n=1}^N \varphi_n^2}.$$

Марковские оценки в данном случае совпадают с оценками МНК, что является следствием некоррелированности случайных величин $\{v_n\}_{n=1}^N$. В той ситуации, когда полезный сигнал $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ и помехи $\{v_n\}_{n=1}^N$ независимы, дисперсия оценки равна

$$\sigma_N^2 = \frac{\sigma_v^2}{\sum_{n=1}^N \varphi_n^2}.$$

Пусть $N \rightarrow \infty$. Если предположить, что полезный сигнал имеет статистическую природу, представляя собой реализацию независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным четвертым моментом, независимых с помехами наблюдения:

$$E\{\varphi_n\} = M_\varphi, E\{(\varphi_n - M_\varphi)^2\} = \sigma_\varphi^2 > 0, E\{\varphi_n^4\} < \infty, E\{\varphi_n v_n\} = 0,$$

то, в силу усиленного закона больших чисел (см. пункт П.1.3 на стр. 225), можно сделать заключение о сходимости

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi_n^2 \rightarrow \sigma_\varphi^2$$

с вероятностью единица. Следовательно, $\sigma_N^2 \rightarrow 0$, т.е. оценки МНК сильносостоятельны.

При центрированных входных сигналах ($M_\varphi = 0$) оценки МНК совпадают с предложенным в пп. 1.2.2–1.2.3 рандомизированным алгоритмом построения оценок. Значит, при доказательстве сильной состоятельности оценок рандомизированного МНК условие о центрированности и независимости помех может быть значительно ослаблено. Как и в рассмотренном примере, в литературе (см., например, [3, 25, 39, 59]) обычно изучают задачу об оценке параметров линейной регрессии при "хороших" помехах. В следующей главе эта задача будет рассматриваться в случае почти произвольных помех, для которых, может быть, среднее значение неизвестно и отлично от нуля, или они, может быть, представляют собой реализацию коррелированного случайного процесса, или они, может быть, даже неслучайные, но ограниченные. Существенное предположение, которое будет сделано, заключается в том, что входы являются случайными, центрированными и независимыми от помехи. Будут установлены сильная состоятельность и порядок среднеквадратичной скорости сходимости для рандомизированных алгоритмов типа МНК и типа стохастической аппроксимации.

Кроме рассмотренной выше линейной регрессии часто изучают более общие модели: *скользящего среднего*

$$y_n = \sum_{i=0}^p \varphi_{n-i}^T \Psi_i^* + v_n, \quad n = 1, 2, \dots, N;$$

авторегрессии

$$\sum_{i=0}^p a_{\star}^{(i)} y_{n-i} = \varphi_n^T \Psi_0^* + v_n, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

и *авторегрессии скользящего среднего*

$$\sum_{i=0}^p a_{\star}^{(i)} y_{n-i} = \sum_{i=0}^p \varphi_{n-i}^T \Psi_i^* + v_n, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

с помехами v_n , числовыми $a_{\star}^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, p$ и векторными коэффициентами Ψ_i^* , $i = 0, 1, \dots, p$. Модель авторегрессии возникает в тех случаях, когда пытаются определить линейное уравнение, которому удовлетворяют выборочные реализации случайной величины ζ . Модель авторегрессии скользящего среднего используется для описания поведения линейных динамических объектов управления. В третьей главе задачи об оценивании параметров такого типа моделей будут детально рассмотрены при почти произвольных, но ограниченных помехах в наблюдении $\{v_n\}$.

1.3.2 Рекуррентные модификации МНК

Рассмотрим задачу о построении оценки $\hat{\theta}_N \in \mathbb{R}^r$, минимизирующей определенный в предыдущем пункте эмпирический функционал качества $f_N(\theta)$ при блочно-диагональной матрице весовых коэффициентов R , с блоками R_1, R_2, \dots, R_n размерности $p \times p$: $N = np$. Объединив в наборы по p наблюдения и в $(r \times p)$ -матрицы соответствующие входы модели, переобозначив их опять y_i и φ_i , выражение для функционал качества можно переписать в виде

$$f_n(\theta) = \sum_{i=1}^n (\varphi_i^T \theta - y_i)^T R_i (\varphi_i^T \theta - y_i),$$

где матрицы φ_i и векторы y_i можно интерпретировать как данные наблюдения в момент времени $i = 1, 2, \dots, n$.

Вектор-градиент функции $f_n(\theta)$ можно вычислить

$$\nabla f_n(\theta) = 2 \sum_{i=1}^n \varphi_i R_i (\varphi_i^T \theta - y_i).$$

После второго дифференцирования получаем независящую от θ матрицу-гессиан

$$H_n = \nabla^2 f_n(\theta) = 2 \sum_{i=1}^n \varphi_i R_i \varphi_i^T.$$

Если оценка $\hat{\theta}_{n-1}$ обеспечивает наименьшее значение функционалу качества $f_{n-1}(\theta)$, то $\nabla f_{n-1}(\hat{\theta}_{n-1}) = 0$. По формуле Тейлора для $\nabla f_n(\hat{\theta}_n)$ имеем

$$\begin{aligned} 0 = \nabla f_n(\hat{\theta}_n) &= \nabla f_n(\hat{\theta}_{n-1}) + H_n(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{n-1}) = \nabla f_{n-1}(\hat{\theta}_{n-1}) + \\ &+ 2\varphi_n R_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n) + H_n(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{n-1}). \end{aligned}$$

Отсюда, обозначив $\Gamma_n = H_n^{-1}$, легко выписать формулу для вычисления следующей оценки по $\hat{\theta}_{n-1}$:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma_n \varphi_n R_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n).$$

Используя матричное тождество из пункта П.2.2 на стр. 229, для матриц Γ_n можно вывести рекуррентную формулу

$$\Gamma_n = \Gamma_{n-1} - \Gamma_{n-1} \varphi_n (R_n^{-1} + \varphi_n^T \Gamma_{n-1} \varphi_n)^{-1} \varphi_n^T \Gamma_{n-1}.$$

Полученные рекуррентные соотношения для пересчета $\hat{\theta}_n$ и Γ_n называются *обобщенным рекуррентным методом наименьших квадратов*.

Чтобы воспользоваться рекуррентной формой получения оценок, следует некоторым образом задать начальные значения $\hat{\theta}_0$ и Γ_0 . При их произвольном выборе, определяемые полученными рекуррентными формулами оценки, вообще говоря, не обязаны обеспечивать минимум соответствующим функционалам качества. При задании начальных значений естественно выбирать обратимую матрицу Γ_0 .

Для приложений наиболее интересен случай, когда $p = 1$, т.е. y_i и R_i — скалярные величины, а φ_i , $i = 1, 2, \dots$ — векторы. Эмпирический функционал качества в этом случае имеет вид

$$f_n(\theta) = \sum_{i=1}^n R_i (\varphi_i^T \theta - y_i)^2.$$

Формулы для записи оценок обобщенного рекуррентного МНК с числовыми весовыми коэффициентами $R_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$ принимают вид

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma_n \varphi_n R_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n),$$

$$\Gamma_n = \Gamma_{n-1} - \frac{\Gamma_{n-1} \varphi_n \varphi_n^T \Gamma_{n-1}}{R_n^{-1} + \varphi_n^T \Gamma_{n-1} \varphi_n}.$$

Полагая $R_i = 1$, $i = 1, 2, \dots$, получаем формулы обыкновенного рекуррентного МНК

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_n &= \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma_n \varphi_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \quad \hat{\theta}_0 = 0, \\ \Gamma_n &= \Gamma_{n-1} - \frac{\Gamma_{n-1} \varphi_n \varphi_n^T \Gamma_{n-1}}{1 + \varphi_n^T \Gamma_{n-1} \varphi_n}, \quad \Gamma_0 = \gamma_0^{-1} \mathbf{I},\end{aligned}$$

где $\gamma_0 > 0$ — малый параметр регуляризации. Иногда этот алгоритм называют *фильтром Калмана–Бьюси* (см. п. 1.4.2). В случае независимых наблюдений и гауссовых помех этот алгоритм обладает оптимальными свойствами. В более широком классе задач эффективнее использовать *модифицированный МНК*, получающийся при функционале качества с $R_i = \gamma^{N-i}$, $i = 1, 2, \dots, N$,

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_n &= \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma_n \varphi_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \quad \hat{\theta}_0 = 0, \\ \Gamma_n &= \gamma^{-1} \left(\Gamma_{n-1} - \frac{\Gamma_{n-1} \varphi_n \varphi_n^T \Gamma_{n-1}}{\gamma + \varphi_n^T \Gamma_{n-1} \varphi_n} \right), \quad \Gamma_0 = \gamma^{-1} \mathbf{I},\end{aligned}$$

где $\gamma \in (0, 1)$ — *забывающий множитель*. В [109] использование в качестве весовых коэффициентов последовательности величин

$$R_n = \frac{1}{\ln(\gamma^{-1} + \sum_{i=1}^n \|\varphi_i\|^2)},$$

позволяет эффективно использовать рекуррентный МНК при синтезе адаптивного управления стохастическим линейным объектом в той ситуации, когда нельзя предполагать независимость наблюдений.

Рекуррентная процедура МНК, являясь оптимальной при соответствующем выборе начальных статистик, становится практически малоприменимой, если приходится оценивать вектор параметров высокой размерности: основной объем вычислений связан с пересчетом матриц Γ_n . Естественно попытаться упростить её, даже если придется поступиться оптимальными свойствами. Впрочем, последнее обстоятельство не является определяющим, так как нужные начальные данные обычно неизвестны, а произвольный выбор начальных данных оставляет процедуру только предельно оптимальной. Следующие упрощения рекуррентной процедуры МНК в типичных случаях не сказываются на предельных свойствах оценок. Матрицы Γ_n монотонно убывают в том случае, когда φ_n равномерно ограничены. Если $\Gamma_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то при достаточно больших n справедливо: $(R_n^{-1} + \varphi_n^T \Gamma_{n-1} \varphi_n)^{-1} \approx R_n$. Следовательно, рекуррентный алгоритм для пересчета оценок можно записать в виде

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_n &= \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma_n \varphi_n R_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \\ \Gamma_n &= \Gamma_{n-1} - \Gamma_{n-1} \varphi_n R_n \varphi_n^T \Gamma_{n-1}.\end{aligned}$$

Другим существенным упрощением в рекуррентной процедуре МНК является использование в алгоритме вместо матриц Γ_n числовых коэффициентов.

В общем случае, при почти произвольных помехах в наблюдении удается доказать состоятельность оценок, доставляемых приведенными выше рекуррентными алгоритмами МНК, только в некоторых специальных случаях [94, 110, 127]. При предположении, что входы $\{\varphi_n\}$ имеют статистическую природу и известны их средние значения, во второй главе в условиях почти произвольных помех в наблюдениях будут детально рассмотрены условия сходимости оценок *рандомизированного рекуррентного МНК*, имеющего при $\gamma_0 > 0$ вид

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma_n \Delta_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \quad \hat{\theta}_0 = 0,$$

$$\Gamma_n = \Gamma_{n-1} - \frac{\Gamma_{n-1} \Delta_n \Delta_n^T \Gamma_{n-1}}{1 + \Delta_n^T \Gamma_{n-1} \Delta_n}, \quad \Gamma_0 = \gamma_0^{-1} \mathbf{I},$$

где $\Delta_n = \varphi_n - \mathbf{E}\{\varphi_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ — центрированные входы.

1.4 Оптимальная фильтрация случайных процессов

Под *оптимальной фильтрацией* понимаются алгоритмы обработки реализаций случайных процессов, направленные на максимальное в смысле некоторого критерия подавление помех, зашумляющих (обычно аддитивно) полезный сигнал. В фундаменте теории оптимальной фильтрации лежит *метод Винера–Колмогорова* и его рекуррентные модификации, известные под общим названием *фильтра Калмана–Бьюси*. Теория Винера–Колмогорова в существенном базируется на методе наименьших квадратов. Оценивание параметров в этой теории происходит на основе обработки последовательно поступающих входных данных, являющихся некоторой траекторией стохастического процесса. Это приводит к важным концепциям физической реализуемости и оптимальности синтезируемого фильтра. Здесь будет описываться только случай дискретного времени.

1.4.1 Фильтр Винера–Колмогорова

Ограничимся рассмотрением следующей постановки задачи: наблюдается сигнал, удовлетворяющий уравнению

$$y_n = \varphi^T \theta_n^* + v_n,$$

в котором $\{\theta_n^*\}$ и $\{v_n\}$ — вещественные векторные процессы: $\theta_n^* \in \mathbb{R}^r$, $v_n \in \mathbb{R}^p$; φ — прямоугольная матрица размерности $r \times p$. Требуется получить оценку $\hat{\theta}_n$ сигнала θ_n^* в момент времени n по наблюдениям за процессом $\{y_n\}$ до момента времени $n - k$, k — заданное целое число. Оценка ищется с помощью *линейного устойчивого стационарного фильтра*, уравнение которого имеет вид

$$\hat{\theta}_n = \sum_{i=k}^{\infty} H(i-k)y_{n-i},$$

где $H(i)$ — *весовая функция фильтра*. Введем *передаточную функцию фильтра*

$$H(\lambda) = \lambda^k \sum_{i=0}^{\infty} H(i)\lambda^i.$$

Функцию $\lambda^{-k}H(\lambda)$ будем называть *устойчивой*, если у неё нет полюсов, которые по абсолютной величине меньше либо равны единице. Свойство устойчивости фильтра равносильно устойчивости функции $\lambda^{-k}H(\lambda)$. Задача фильтрации называется по-разному в зависимости от числа k в уравнении фильтра. При $k > 0$ её называют задачей *экстраполяции (прогноза)* на k моментов времени, при $k < 0$ — задачей *интерполяции (сглаживания)*, при $k = 0$ — собственно фильтрацией. Таким образом, при сглаживании оценка может зависеть от некоторого числа "будущих" наблюдений, а передаточная функция фильтра имеет полюс порядка k в начале координат.

В классической постановке задачи рассматриваются стационарные случайные процессы $\{y_n\}$ и $\{\theta_n^*\}$, которые вдобавок стационарно связаны, и их матрицы ковариаций вместе со спектральными плотностями: $B_{yy}(n)$, $S_{yy}(\lambda)$, $B_{y\theta}(n)$, $S_{y\theta}(\lambda)$, $B_{\theta\theta}(n)$, $S_{\theta\theta}(\lambda)$, существуют и известны (см. п. П.1.4 на стр. 226). Оценка $\hat{\theta}_n$ должна быть оптимальной в смысле минимума среднеквадратичного функционала

$$f_k = E\{\|\hat{\theta}_n - \theta_n^*\|^2\} (= f_k(H(\lambda))).$$

В силу стационарности процессов этот функционал не зависит от времени.

Перепишем функционал качества f_k в виде квадратичной формы от передаточной функции фильтра:

$$\begin{aligned} f_k &= \text{Tr}[E\{(\hat{\theta}_n - \theta_n^*)(\hat{\theta}_n - \theta_n^*)^T\}] = \\ &= \text{Tr}[E\{(\sum_{i=k}^{\infty} H(i-k)y(n-i) - \theta_n^*)(\sum_{j=k}^{\infty} H(j-k)y(n-j) - \theta_n^*)^T\}] = \text{Tr}[B_{\theta\theta}(0) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} H(i)B_{yy}(j-i)H(j)^T - \sum_{i=k}^{\infty} H(i)B_{y\theta}(-i-k) - \sum_{i=k}^{\infty} B_{\theta y}(i+k)H(j)^T] = \\
& = \text{Tr}[B_{\theta\theta}(0) + \frac{1}{2\pi i} \oint (H(\lambda)S_{yy}(\lambda)H(\lambda)^* - H(\lambda)S_{y\theta}(\lambda) - S_{\theta y}(\lambda)H(\lambda)^*) \frac{d\lambda}{\lambda}].
\end{aligned}$$

Здесь $H(\lambda)^*$ — комплексно-сопряженная матрица к $H(\lambda)$. Матрица спектральных плотностей $S_{yy}(\lambda)$ неотрицательна при $|\lambda| = 1$. Известно, что такая матричная функция (см. пункт П.2.3 на стр. 231) допускает *факторизацию*, т. е. представление в виде

$$S_{yy}(\lambda) = \Pi(\lambda)\Pi(\lambda^{-1})^T,$$

где $\Pi(\lambda)$ — устойчивая матричная функция (её элементы не имеют полюсов при $|\lambda| \leq 1$). Предположим, что матрица $S_{yy}(\lambda)$ — положительно определенная при $|\lambda| = 1$. В этом случае можно выбрать такую матрицу $\Pi(\lambda)$, чтобы $\Pi(\lambda)^{-1}$ была устойчивой. С помощью формулы факторизации, учитывая выполнение при $|\lambda| = 1$ соотношений

$$H(\lambda)^* = H(\lambda^{-1})^T, \quad S_{\theta y}(\lambda) = S_{y\theta}(\lambda^{-1})^T,$$

получаем формулу

$$f_k = \text{Tr}[\Psi + \frac{1}{2\pi i} \oint (H(\lambda)\Pi(\lambda) - R(\lambda))(H(\lambda)\Pi(\lambda) - R(\lambda))^T \frac{d\lambda}{\lambda}],$$

в которой использованы обозначения:

$$R(\lambda) = S_{\theta y}(\lambda)(\Pi(\lambda^{-1})^T)^{-1}, \quad \Psi = R_{\theta\theta}(0) - \frac{1}{2\pi i} \oint R(\lambda)R(\lambda)^* \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Так как матрица Ψ не зависит от $H(\lambda)$, а второе слагаемое в правой части полученной для f_k формулы — неотрицательная матрица, то минимум функционала качества f_k достигается при

$$H(\lambda) = R(\lambda)\Pi(\lambda)^{-1} = S_{\theta y}(S_{yy}(\lambda))^{-1},$$

причем минимальное значение функционала качества равно

$$\min_{\{H(\lambda)\}} f_k = \text{Tr}[\Psi].$$

Однако, найденное решение неудовлетворительно, поскольку, вообще говоря, не выполняется условие устойчивости фильтра, так как матрица $[S_{yy}(\lambda)]^{-1}$ может иметь особенности при $|\lambda| \leq 1$ и это свойство передается $H(\lambda)$. Для получения устойчивого фильтра надо произвести *сепарацию* функции $R(\lambda)$, т. е. представить её в виде

$$\lambda^{-k} R(\lambda) = R_+(\lambda) + R_-(\lambda),$$

в котором $R_+(\lambda), R_-(\lambda^{-1})$ — устойчивые матричные функции и

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} R_-(\lambda) = 0.$$

Основной результат теории оптимальной фильтрации Винера–Колмогорова заключается в том, что при сделанных выше предположениях и введенных обозначениях передаточная функция оптимального устойчивого фильтра, минимизирующего функционал качества f_k , определяется по формуле

$$H(\lambda) = \lambda^k R_+(\lambda) \Pi(\lambda)^{-1},$$

и соответствующее минимальное значение функционала качества равно

$$\min_{\{H(\lambda)\}} f_k = \text{Tr}[\Psi] + \frac{1}{2\pi i} \oint \text{Tr}[R_-(\lambda)R_-(\lambda)^*] \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

В случае скалярного процесса y_n с дробно–рациональной спектральной плотностью процедура построения функции $\Pi(\lambda)$ сводится, по существу, к нахождению корней и полюсов дробно–рациональной функции $S_{yy}(\lambda)$, которые по абсолютной величине больше единицы. Сепарация функции $\lambda^{-k}R(\lambda)$ в этом случае состоит в выделении целой части функции с последующим определением "устойчивых" и "неустойчивых" полюсов у полученной в результате дробно–рациональной функции.

Пример: оптимальный прогноз сигнала. Предположим, что наблюдается скалярный процесс $\{y_n\}$:

$$y_n = \varphi \theta_n^* + v_n,$$

где $\{\theta_n^*\}$ и $\{v_n\}$ — стохастически независимые стационарно связанные процессы: $E\{v_n\} = 0$, $E\{v_n^2\} = \sigma_v^2$, причем $\{\theta_n^*\}$ определяется уравнением

$$\theta_{n+1}^* = a \theta_n^* + w_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \theta_0^* = 0,$$

в котором $0 < |a| < 1$, $E\{w_n\} = 0$, $E\{w_i w_j\} = \sigma_w^2 \delta_{i,j}$.

В данном случае

$$S_{vv} = \sigma_v^2, \quad S_{\theta\theta}(\lambda) = \frac{\sigma_w^2}{(1-a\lambda)(1-a\lambda^{-1})}, \quad S_{yy}(\lambda) = S_{vv} + \varphi^2 S_{\theta\theta}(\lambda).$$

Для проведения факторизации функции $S_{yy}(\lambda)$ найдём вещественные постоянные c_1 и c_2 из уравнения

$$\sigma_v^2(1-a\lambda)(1-a\lambda^{-1}) + \varphi^2 \sigma_w^2 = (c_1 + c_2\lambda)(c_1 + c_2\lambda^{-1}).$$

Несложные расчеты дают

$$c_1 = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2), \quad c_2 = \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2),$$

где

$$\rho_1 = \sqrt{\varphi^2 \sigma_w^2 + \sigma_v^2 (1-a)^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{\varphi^2 \sigma_w^2 + \sigma_v^2 (1+a)^2}.$$

Обозначив

$$\Pi(\lambda) = \frac{c_1 + c_2 \lambda}{1 - a \lambda},$$

с учётом введенных обозначений, имеем

$$S_{yy}(\lambda) = \Pi(\lambda) \Pi(\lambda^{-1})^T,$$

при этом, так как $|c_1| > |c_2|$, то функции $\Pi(\lambda)$ и $\Pi(\lambda)^{-1}$ — устойчивые. Далее, поскольку

$$S_{y\theta}(\lambda) = \frac{\varphi \sigma_w^2}{(1 - a \lambda)(1 - a \lambda^{-1})},$$

то

$$R(\lambda) = \frac{\varphi \sigma_w^2 \lambda}{(1 - a \lambda)(c_1 \lambda + c_2)}.$$

Рассмотрим случай $k = 1$, т.е. задачу об оптимальном прогнозе на один шаг. Для её решения надо произвести сепарацию функции

$$\lambda^{-1} R(\lambda) = \frac{\varphi \sigma_w^2}{(1 - a \lambda)(c_1 \lambda + c_2)}.$$

В результате сепарации получаем

$$R_+(\lambda) = \frac{\varphi \sigma_w^2 a}{c_1 + c_2 a} \cdot \frac{1}{1 - a \lambda}, \quad R_-(\lambda) = \frac{\varphi \sigma_w^2 c_1}{c_1 + c_2 a} \cdot \frac{1}{c_1 \lambda + c_2}.$$

Передаточная функция оптимального фильтра имеет вид

$$H(\lambda) = \frac{\varphi \sigma_w^2 a}{c_1 + c_2 a} \cdot \frac{\lambda}{c_1 + c_2 \lambda}.$$

Отсюда следует, что две последовательные оптимальные оценки $\hat{\theta}_{n+1}$ и $\hat{\theta}_n$ связаны соотношением

$$c_1 \hat{\theta}_{n+1} + c_2 \hat{\theta}_n = \frac{\varphi \sigma_w^2 a}{c_1 + c_2 a} y_n.$$

Отметим, что последнее уравнение можно переписать в виде

$$\hat{\theta}_{n+1} = a \hat{\theta}_n - a \alpha \varphi (\varphi \hat{\theta}_n - y_n),$$

где

$$\alpha = \frac{\sigma_w^2}{c_1(c_1 + c_2 a)} \left(\equiv \frac{1}{a \varphi^2} \left(\frac{c_2}{c_1} + a \right) \right).$$

1.4.2 Фильтр Калмана–Бьюси

Теория Винера–Колмогорова оптимальной фильтрации послужила мощным стимулом поиска новых путей определения конкретных способов синтеза теоретически оптимального фильтра. Большой практический интерес представляет возможность синтезировать оптимальный фильтр рекуррентным способом, обеспечивая удобство его реализации при использовании ЭВМ.

Предположим, что наблюдается случайный процесс

$$y_n = \varphi_n^T \theta_n^* + v_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

представляющий собой смесь преобразованного векторного сигнала $\{\theta_n^*\}$ и векторной помехи $\{v_n\}$. Прямоугольные матрицы φ_n этого преобразования считаются известными и в отличие от теории Винера–Колмогорова могут изменяться во времени. Векторный сигнал $\{\theta_n^*\}$ порождается соотношением

$$\theta_{n+1}^* = A_n \theta_n^* + w_{n+1},$$

в котором A_n — известная матричная функция времени, а $\{w_n\}$ — последовательность центрированных независимых случайных векторов с известными матрицами ковариации:

$$E\{w_n w_j^T\} = Q_w(n) \delta_{n,j}.$$

Обычно считают, что помеха $\{v_n\}$ также представляет собой последовательность центрированных независимых случайных векторов с известными матрицами ковариации

$$E\{v_n v_j^T\} = B_v(n) \delta_{n,j},$$

которые при всех n невырождены, и $\{\varphi_n\}$ — детерминированная последовательность матриц.

Ограничимся рассмотрением задачи об оптимальном одношаговом прогнозе. Для $n = 1, 2, \dots$ требуется найти линейные оценки $\hat{\theta}_{n+1}$ значений процесса $\{\theta_n^*\}$ в моменты времени $n + 1$ по наблюдениям y_1, y_2, \dots, y_n , минимизирующие функционалы качества

$$f_n = E\{\|\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}^*\|^2\}.$$

Выпишем необходимые и достаточные условия оптимальности линейной оценки в терминах корреляционных матриц рассматриваемых процессов. Предположим, что оптимальная оценка имеет вид:

$$\hat{\theta}_{n+1} = \sum_{i=1}^n H_n(i) y_i.$$

Если оценка $\hat{\theta}_{n+1}$ минимизирует функционал качества f_n , то для любого $j = 1, 2, \dots, n$ выполнено условие

$$\mathbb{E}\{(\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}^*)y_j^T\} = 0$$

или

$$\mathbb{E}\{\theta_{n+1}^*y_j^T\} = \sum_{i=1}^n H_n(i)\mathbb{E}\{y_iy_j^T\}.$$

Последнее уравнение представляет собой нестационарный вариант *уравнения Винера–Хопфа* (в дискретном времени) относительно весовых функций $H_n(i)$. Это соотношение имеет простой геометрический смысл: случайная величина $\hat{\theta}_{n+1}$, являющаяся линейной комбинацией случайных величин y_1, \dots, y_n , должна быть строго ортогональной проекцией вектора θ_{n+1}^* на подпространство, натянутое на соответствующие векторы наблюдений.

Обозначив $V_{ij} = \mathbb{E}\{y_iy_j^T\}$ и $K_n = H_n(n)$, из последнего уравнения, записанного для двух последовательных значений времени n и $n+1$, с одной стороны, получаем

$$\mathbb{E}\{(\theta_{n+1}^* - \theta_n^*)y_j^T\} = \sum_{i=1}^{n-1} (H_n(i) - H_{n-1}(i))V_{ij} + K_nV_{nj}.$$

С другой стороны, учитывая вид фильтра, порождающего процесс $\{\theta_n^*\}$, имеем

$$\mathbb{E}\{(\theta_{n+1}^* - \theta_n^*)y_j^T\} = (A_n - I) \sum_{i=1}^{n-1} H_{n-1}(i)V_{ij}.$$

Из этих двух уравнений следует, что

$$\sum_{i=1}^{n-1} (A_n H_{n-1}(i) - K_n \varphi_n^T H_{n-1}(i) - H_n(i))V_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

так как в силу уравнения наблюдений,

$$V_{nj} = \mathbb{E}\{y_n y_j^T\} = \varphi_n^T \mathbb{E}\{\theta_n^* y_j^T\} + \mathbb{E}\{v_n y_j^T\} = \varphi_n^T \sum_{i=1}^{n-1} H_{n-1}(i)V_{ij}.$$

А значит, оценка

$$\tilde{\theta}_n = \sum_{i=1}^{n-1} (H_{n-1}(i) - D_n(i))y_k,$$

где

$$D_n(i) = A_n H_{n-1}(i) - K_n \varphi_n^T H_{n-1}(i) - H_n(i),$$

также является оптимальной в среднеквадратичном смысле оценкой вектора θ_n^* при наблюдениях y_1, y_2, \dots, y_{n-1} . Поэтому

$$\mathbb{E}\{\|\tilde{\theta}_n - \hat{\theta}_n\|^2\} = 0,$$

или

$$\mathbb{E}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n-1} D_n(i) \varphi_i^T \theta_i^*\right\|^2\right\} + \sum_{i=1}^{n-1} D_n(i)^T B_v(i) D_n(i) = 0.$$

Так как $B_v(i) > 0$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$, то $D_n(i) = 0$, т. е.

$$H_n(i) = A_n H_{n-1}(i) - K_n \varphi_n^T H_{n-1}(i).$$

Это и есть искомое соотношение, которому должна удовлетворять весовая функция оптимального фильтра. Отсюда несложно найти разностное уравнение для последовательности оптимальных оценок $\{\hat{\theta}_n\}$:

$$\hat{\theta}_{n+1} - \hat{\theta}_n = K_n y_n + \sum_{i=1}^{n-1} (H_n(i) - H_{n-1}(i)) y_i = K_n y_n +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} ((A_n H_{n-1}(i) - K_n \varphi_n^T H_{n-1}(i) - H_{n-1}(i)) y_i = K_n y_n + (A_n - K_n \varphi_n^T - I) \hat{\theta}_n$$

или

$$\hat{\theta}_{n+1} = A_n \hat{\theta}_n - K_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_n - y_n).$$

Матричные функции K_n , называемые *калмановскими коэффициентами усиления*, также удовлетворяют рекуррентному соотношению. Обозначим ковариационные матрицы ошибок оценивания

$$\Gamma_n = \mathbb{E}\{(\hat{\theta}_n - \theta_n^*)(\hat{\theta}_n - \theta_n^*)^T\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Их последовательность, если заданы начальные данные $\hat{\theta}_0$ и Γ_0 , в силу полученного соотношения для оптимальных оценок, может быть вычислена рекуррентно по формулам:

$$\Gamma_{n+1} = (A_n - K_n \varphi_n^T) \Gamma_n (A_n - K_n \varphi_n^T)^T + K_n B_v(n) K_n^T + Q_w(n+1).$$

При этом из уравнения Винера–Хопфа непосредственно устанавливается связь между матрицами K_n и Γ_n :

$$0 = \mathbb{E}\{(\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}^*)(y_n - \varphi_n^T \hat{\theta}_n)^T\} = -(A_n - K_n \varphi_n^T) \Gamma_n \varphi_n + K_n B_v(n).$$

Следовательно,

$$K_n = A_n \Gamma_n \varphi_n (B_v(n) + \varphi_n^T \Gamma_n \varphi_n)^{-1}.$$

Используя матричное тождество из пункта П.2.2 на стр. 229, рекуррентные соотношения для матриц Γ_n можно переписать в виде

$$\Gamma_{n+1} = A_n(\Gamma_n - \Gamma_n \varphi_n (B_v(n) + \varphi_n^T \Gamma_n \varphi_n)^{-1} \varphi_n^T \Gamma_n) A_n^T + Q_w(n+1).$$

После задания начальных значений $\hat{\theta}_0, \Gamma_0$ вместе с формулой для последовательного пересчета оценок:

$$\hat{\theta}_{n+1} = A_n \hat{\theta}_n - A_n \Gamma_n \varphi_n (B_v(n) + \varphi_n^T \Gamma_n \varphi_n)^{-1} (\varphi_n^T \hat{\theta}_n - y_n),$$

эти соотношения, называемые *фильтром Калмана–Бьюси*, определяют замкнутую систему для рекуррентного вычисления $\hat{\theta}_n, \Gamma_n$ во все моменты времени n . Такие же формулы можно получить и при рассмотрении не только детерминированной последовательности $\{\varphi_n\}$, но и считая её реализацией некоторого матричного независимого случайного процесса, некоррелированного с помехами $\{v_n\}$ и с порождающим процессом $\{w_n\}$.

Стоит заметить, что при $A_n \equiv I$, $Q_w(n) \equiv 0$ и обозначении $R_n = B_v(n)^{-1}$, фильтр Калмана–Бьюси в точности совпадают с обобщенным рекуррентным МНК из п. 1.3.2, что и неудивительно.

На практике полученные соотношения часто упрощают, используя для вычисления оценок формулу:

$$\hat{\theta}_{n+1} = A_n \hat{\theta}_n - A_n \Gamma \varphi_n \alpha (\varphi_n^T \hat{\theta}_n - y_n),$$

с заданными положительно определенными матрицами Γ и α . Дальнейшее упрощение возможно при выборе скалярного значения $\alpha > 0$.

В случае вырожденных помех наблюдения $\{v_n\}$, в частности, при задании их неизвестными детерминированными ограниченными функциями, о качестве оценок фильтра Калмана–Бьюси трудно что-либо утверждать. В такой ситуации для решения задачи о прогнозировании можно предложить использовать рандомизированный алгоритм вида

$$\hat{\theta}_{n+1} = A_n \hat{\theta}_n - \alpha A_n \Gamma (\varphi_n - E\{\varphi_n\}) (\varphi_n^T \hat{\theta}_n - y_n).$$

В четвёртой главе будет показано, что в условиях скалярных наблюдений на фоне неизвестной, но ограниченной неслучайной помехи, $A_n = A$: $\|A\| < 1$, и при статистической природе последовательности $\{\varphi_n\}$ получаемые по этому алгоритму оценки в ряде задач могут давать достаточно хорошее качество предсказания.

Пример: оптимальный прогноз сигнала. Предположим, что наблюдается скалярный процесс $\{y_n\}$

$$y_n = \varphi_n \theta_n^* + v_n,$$

где $\{\varphi_n\}$, $\{\theta_n^*\}$ и $\{v_n\}$ — стохастически независимые процессы: $E\{v_n\} = 0$, $E\{v_n^2\} = \sigma_v^2 > 0$, $\{\theta_n^*\}$ определяется уравнением:

$$\theta_{n+1}^* = a \theta_n^* + w_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \theta_0^* = 0,$$

в котором $0 < |a| \leq 1$, $E\{w_n\} = 0$, $E\{w_n^2\} = \sigma_w^2 > 0$.

В данном случае

$$B_v(n) \equiv \sigma_v^2, \quad Q_w(n) \equiv \sigma_w^2$$

и при задании $\hat{\theta}_0 = 0$, $\Gamma_0 = 0$ оптимальная последовательность прогнозирующих оценок вычисляется по формулам

$$\hat{\theta}_{n+1} = a\hat{\theta}_n - a \frac{\Gamma_n}{\sigma_v^2 + \Gamma_n \varphi_n^2} \varphi_n (\varphi_n \hat{\theta}_n - y_n),$$

$$\Gamma_{n+1} = \sigma_w^2 + \frac{a^2 \sigma_v^2}{\varphi_n^2} - \frac{a^2 \sigma_v^4}{\varphi_n^2 (\sigma_v^2 + \Gamma_n \varphi_n^2)} \left(\equiv a^2 \left(\Gamma_n - \frac{\Gamma_n^2 \varphi_n^2}{\sigma_v^2 + \Gamma_n \varphi_n^2} \right) + \sigma_w^2 \right).$$

В стационарном случае при $\varphi_n \equiv \varphi$ или в той ситуации, когда $\{\varphi_n\}$ — бернуллиевский процесс: $\varphi_n = \pm \varphi$, $E\{\varphi_n\} = 0$, последовательность $\{\Gamma_n\}$ сходится к пределу Γ_∞ , который можно найти из уравнения

$$\Gamma_\infty = \sigma_w^2 + \frac{a^2 \sigma_v^2}{\varphi^2} - \frac{a^2 \sigma_v^4}{\varphi^2 (\sigma_v^2 + \Gamma_\infty \varphi^2)}.$$

Итак,

$$\Gamma_\infty = \frac{\varphi^2 \sigma_w^2 + (a^2 - 1) \sigma_v^2 + \sqrt{(\varphi^2 \sigma_w^2 + (a^2 - 1) \sigma_v^2)^2 + 4 \varphi^2 \sigma_w^2 \sigma_v^2}}{2 \varphi^2}$$

и, обозначив

$$\alpha = \frac{\Gamma_\infty}{\sigma_v^2 + \Gamma_\infty \varphi_n^2} = \frac{c_1^2 + c_1 c_2 / a}{\varphi^2 c_1^2} \left(\equiv \frac{1}{a \varphi^2} \left(\frac{c_2}{c_1} + a \right) \right),$$

где

$$c_1 = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2), \quad c_2 = \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2),$$

$$\rho_1 = \sqrt{\varphi^2 \sigma_w^2 + \sigma_v^2 (1 - a)^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{\varphi^2 \sigma_w^2 + \sigma_v^2 (1 + a)^2},$$

в пределе при $n \rightarrow \infty$ получаем:

$$\hat{\theta}_{n+1} \approx a\hat{\theta}_n - a\alpha \varphi_n (\varphi_n \hat{\theta}_n - y_n).$$

Таким образом, в стационарном случае ($\varphi_n \equiv \varphi$) оценки фильтра Калмана–Бьюси в пределе совпадают с оценками фильтра Винера–Колмогорова. Эта связь обусловлена оценками МНК, заложенными в основу обоих фильтров. Последняя формула также иллюстрирует обоснованность замены в некоторых случаях оценок фильтра Калмана–Бьюси на оценки, доставляемые алгоритмом упрощенного типа. Кроме этого, в той ситуации, когда $\{\varphi_n\}$ — бернуллиевский независимый процесс, алгоритм

$$\hat{\theta}_{n+1} = a\hat{\theta}_n - a\alpha \varphi_n (\varphi_n \hat{\theta}_n - y_n)$$

относится к типу рандомизированных, и, как будет показано в четвёртой главе, в случае неизвестных, но ограниченных детерминированных помех наблюдения может давать удовлетворительные оценки. Заметим, что при $a \approx 1$ и $\sigma_w \ll \sigma_v$

$$\alpha \approx \frac{\sigma_w}{\varphi \sigma_v}.$$

1.5 Метод стохастической аппроксимации

В широком смысле *методом стохастической аппроксимации* называют последовательный способ улучшения оценки, использующий на каждом шаге новые наблюдения и предшествующую оценку. Если штрафная функция $F(w, \theta)$ в функционале среднего риска $f(\theta) = E\{F(w, \theta)\}$ из пункта 1.2.4 дифференцируема по θ , то минимизирующие этот функционал значения вектора θ находятся среди решений *уравнения регрессии*

$$g(\theta) = \int \nabla_{\theta} F(w, \theta) P_w(dw) = 0.$$

Пусть распределение вероятностей $P_w(\cdot)$ неизвестно, но задана обучающая последовательность w_1, w_2, \dots им порожденная и в каждый момент времени n ($n = 1, 2, \dots$) доступны измерению величины y_n , являющиеся при определенном выборе точек x_n либо значениями функции $F(w_n, x_n)$, либо значениями её вектора-градиента $\nabla_{\theta} F(w_n, x_n)$, измеренными, может быть, с помехами. В такой ситуации для поиска решений уравнения регрессии можно использовать рекуррентную процедуру типа

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \hat{g}_n(\theta_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\hat{g}_n(\hat{\theta}_{n-1}) = \tilde{g}_n(y_n, y_{n-1}, \dots, y_1, x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, \hat{\theta}_{n-1})$ — некоторая "хорошая" аппроксимация в точке $\hat{\theta}_{n-1}$ для вектора-градиента функции $f(\cdot)$, а $\{\alpha_n\}$ — специальным образом подбираемая последовательность неотрицательных величин. Алгоритмы такого типа являются типичными для метода стохастической аппроксимации. Иногда формальное определение метода стохастической аппроксимации опирается именно на последнюю формулу, в которой предполагается, что $\{\alpha_n\}$ — заданная детерминированная последовательность неотрицательных чисел.

1.5.1 Поиск корня неизвестной функции.

Алгоритм Роббинса–Монро

Первой по рекуррентным стохастическим алгоритмам была работа Роббинса и Монро [147], в которой исследовалась задача о нахождении корня вещественной функции $g(\theta)$ от вещественного аргумента θ . Предполагалось, что функция неизвестна, но для экспериментатора доступны

наблюдению её значения в выбираемых им точках, может быть, с помехами.

Если функция $g(\theta)$ нам известна, то задача превращается в классическую из численного анализа. Для её решения можно воспользоваться методом Ньютона, который генерирует последовательность оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ корня θ^* функции $g(\theta)$

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - [g'(\hat{\theta}_{n-1})]^{-1}g(\hat{\theta}_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

или более простой, но менее эффективной, процедурой

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha g(\hat{\theta}_{n-1})$$

с фиксированным достаточно малым $\alpha > 0$, которая не требует умения вычислять производную функции. Если начальное значение $\hat{\theta}_0$ выбрано достаточно близко к θ^* , то она гарантирует сходимость оценок к корню θ^* функции $g(\theta)$ при предположениях о том, что $g(\theta) < 0$ при $\theta < \theta^*$, $g(\theta) > 0$ при $\theta > \theta^*$, производная функции ограничена и $g'(\theta) > 0$ в некоторой окрестности точки θ^* . Вообще говоря, эта процедура не требует и дифференцируемости функции $g(\theta)$.

Теперь предположим, что точные значения функции $g(\theta)$ и её производной неизвестны, а доступны только значения функции в выбираемых точках θ , но подпорченные помехами. Более точно, пусть каждому вещественному θ соответствует некоторая вещественная случайная величина $G(w, \theta)$ с неизвестным распределением вероятностей и средним значением

$$g(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(w, \theta) P_w(dw).$$

Требуется найти значение θ^* , при котором $g(\theta^*) = 0$, на основании наблюдения реализованных значений соответствующих случайных величин при выборе параметра испытаний θ . Для упрощения будем считать, что функция $g(\theta)$ — неубывающая и имеет единственный корень. При наблюдениях с помехами метод Ньютона неприменим, но второй (упрощенной) процедурой воспользоваться можно, заменив, к примеру, значения функции на их "хорошие" приближения, получаемые усреднением нескольких наблюдений. На самом деле, как установили Г.Роббинс и С.Монро [147], не нужно производить чрезмерное количество наблюдений для каждого $\hat{\theta}_{n-1}$, поскольку величины $\hat{\theta}_{n-1}$ играют в вычислениях промежуточную роль и значения функции в этих точках представляют интерес не сами по себе, а только в той степени, насколько они ведут нас в направлении к корню функции. Был предложен новый алгоритм

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n y_n$$

с некоторой выбираемой пользователем последовательностью положительных чисел $\{\alpha_n\}$, стремящейся к нулю при $n \rightarrow \infty$ и удовлетворяющей условиям

$$\sum_n \alpha_n = \infty, \quad \sum_n \alpha_n^2 < \infty.$$

Этот алгоритм использует на n -ном шаге наблюдение y_n , представляющее собой зашумленное значение $g(\hat{\theta}_{n-1})$, равное $G(w_n, \hat{\theta}_{n-1})$. Он получил общепризнанное название *процедура Роббинса–Монро*. К настоящему времени развиты методы, доказывающие сходимость получаемой таким образом последовательности оценок к корню функции $g(\theta)$ при более общих предположениях о свойствах неизвестной функции. Все способы доказательства состоятельности оценок используют предварительную информацию о помехах, предполагая их центрированность в том или ином смысле.

1.5.2 Минимизация функционала среднего риска

Рассмотрим задачу минимизации функции $f(\theta) = E\{F(w, \theta)\}$ (типа функционала среднего риска из пункта 1.2.4), зависящей от векторного r -мерного параметра θ . Предположим, что w — случайный вектор и $E\{\cdot\}$ — операция усреднения по его распределению. Пусть $f(\cdot)$ — непрерывно-дифференцируемая функция. Необходимым условием того, что θ^* — точка минимума функции $f(\cdot)$, является обращение в ноль в этой точке её вектора-градиента $\nabla f(\theta^*) = 0$.

Если вид функции $f(\cdot)$ и её значения полностью известны, то для нахождения точки минимума можно воспользоваться классической схемой вычислений по методу Ньютона

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - [\nabla^2 f(\hat{\theta}_{n-1})]^{-1} \nabla f(\hat{\theta}_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Предположим, что матрица-гессиан $\nabla^2 f(\hat{\theta}_{n-1})$ в некоторой окрестности точки θ^* задает строгоположительный ограниченный оператор. Последовательность оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ сходится к точке локального минимума или максимума θ^* , если начальное значение выбрано достаточно близко к ней. Недостатком этого алгоритма является необходимость обращать матрицу-гессиан на каждом шаге, что может представлять собой определенную трудность при большой размерности. В некоторых случаях удается выбрать рекуррентный способ для пересчета матриц, обратных к гессиану. Для упрощения алгоритма, матрицы $\{[\nabla^2 f(\hat{\theta}_{n-1})]^{-1}\}$ иногда обоснованно заменяют на положительные числа $\{\alpha_n\}$, получая в результате алгоритм типа процедуры Роббинса–Монро.

Если значения градиента функции $f(\cdot)$ неизвестны, то стандартным подходом к решению задачи является использование конечных разностей

для аппроксимации градиента. Пусть $\{\beta_n\}$ — некоторая последовательность положительных чисел. Обозначим e_i — стандартный единичный вектор в направлении i -ой координаты. В качестве аппроксимации i -ой компоненты вектора-градиента можно использовать

$$(\nabla f(\hat{\theta}_{n-1}))^{(i)} \approx \frac{f(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n e_i) - f(\hat{\theta}_{n-1} - \beta_n e_i)}{2\beta_n}.$$

Отметим, что этот стандартный подход к аппроксимации вектора-градиента требует на каждом шаге алгоритма оценивания произвести $2r$ измерений значений минимизируемой функции при размерности искомого минимизирующего вектора, равной r .

1.5.3 Процедура Кифера–Вольфовица

Как поступить, если нельзя использовать в алгоритме не только градиент функции $f(\cdot)$ но и её точные значения? Такая проблема возникает если вид функций $f(\cdot)$ и $F(\cdot, \cdot)$ известен неполностью, либо на вычисление соответствующих значений затрачивается чрезмерное количество усилий при дороговизне экспериментов или большой размерности вектора неизвестных параметров. В задачах оптимизации достаточно часто можно воспользоваться только зашумленной информацией о значениях функции $F(w, x)$ в выбираемых точках x с неконтролируемыми при этом значениями случайной величины w .

Дж.Кифер с Дж.Вольфовицем [118] при $r = 1$ и Дж.Блюм в многомерном случае [74] для построения последовательности оценок предложили использовать процедуру следующего вида:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \frac{Y_n^+ - Y_n^-}{2\beta_n},$$

где обозначено:

$$Y_n^\pm = \begin{pmatrix} Y_n^{\pm(1)} \\ Y_n^{\pm(2)} \\ \vdots \\ Y_n^{\pm(r)} \end{pmatrix}, \quad Y_n^{\pm(i)} = F(w_{n,i}^\pm, \hat{\theta}_{n-1} \pm \beta_n e_i).$$

Они обосновали состоятельность оценок при определенных предположениях о распределениях соответствующих случайных величин, свойствах функции $F(\cdot, \cdot)$ и числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Из накладываемых условий обычно следует, что в среднем по всевозможным реализациям $w_{n,i}^\pm$ значение $(Y_n^+ - Y_n^-)/(2\beta_n)$ совпадает со значением градиента функции $f(\cdot)$ в точке $\hat{\theta}_{n-1}$ и асимптотическое поведение оценок,

получаемых с помощью процедуры Кифера–Вольфовица, характеризуется свойствами решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\dot{\theta} = -\nabla f(\theta).$$

В более широком смысле алгоритмы такого типа принято называть *псевдоградиентными*. При внешней простоте, оригинальная процедура Кифера–Вольфовица имеет ряд существенных недостатков. Для доказательства состоятельности оценок приходится накладывать достаточно ограничительные условия на неконтролируемые возмущения; при измерениях значений функции с почти произвольными помехами состоятельность оценок не получается; и даже в тех случаях, когда ограничениями на неконтролируемые возмущения и помехи в наблюдении можно пренебречь, на каждом шаге алгоритма приходится делать $2r$ наблюдений, что в многомерном случае при достаточно большом r может оказаться трудноосуществимым.

1.5.4 Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации

Классическую процедуру Кифера–Вольфовица (ККВ) в последнее время часто называют алгоритмом стохастической аппроксимации с фиксированными направлениями. Существенно улучшить характеристики её оценок позволяет включение одновременно в канал наблюдения, через выбираемый параметр θ , и в направлении вектора изменения очередной оценки, так называемого, *пробного одновременного возмущения*. Кроме того, при выборе направления вектора изменения очередной оценки случайному возмущению подвергаются одновременно все координаты.

Пусть $\{\Delta_n\}$ — последовательность наблюдаемых, одинаково симметрично распределенных случайных векторов с матрицей ковариаций

$$\text{cov}\{\Delta_n \Delta_n^T\} = \delta_{n,j} \sigma_\Delta^2 \mathbf{I}$$

и ограниченным вторым статистическим моментом. Например, для задания пробного одновременного возмущения удобно использовать бернуллиевские случайные вектора (координаты вектора Δ_n принимают с равной вероятностью значения плюс/минус единица). Оказывается, что при зашумленных наблюдениях без существенных потерь в скорости сходимости для построения состоятельной последовательности оценок можно воспользоваться алгоритмом, внешне похожим на ККВ, но использующем всего два зашумленных измерения функции $F(\cdot, \cdot)$ на каждой итерации:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \Delta_n \frac{y_n^+ - y_n^-}{2\beta_n}, \quad y_n^\pm = F(w_n^\pm, \hat{\theta}_{n-1} \pm \beta_n \Delta_n) + v_n^\pm.$$

Более того, аналогичными свойствами обладает алгоритм с одним зашумленным наблюдением на каждой итерации

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \Delta_n (F(w_n, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n) + v_n).$$

Эти рекуррентные процедуры будем называть *рандомизированными алгоритмами стохастической аппроксимации*, так как в их структуру неотъемлемой частью входит случайное пробное одновременное по всем координатам возмущение, которое также одновременно используется и в задании направления очередного изменения оценки и в выборе новой точки измерения. В англоязычной литературе используется название *одновременно возмущаемая стохастическая аппроксимация (simultaneous perturbation stochastic approximation, SPSA)*. Иногда встречаются названия *стохастическая аппроксимация со случайными направлениями*, *поисковый алгоритм стохастической аппроксимации* или *стохастическая аппроксимация с возмущением на входе*.

Естественно, что среднеквадратичная скорость сходимости первого рандомизированного алгоритма с двумя измерениями обычно выше, чем у второго. Но стоит заметить, что в целом ряде практических задач оптимизации систем реального времени, обнаружения сигналов и адаптивного управления важно иметь возможность использовать алгоритм только с одним наблюдением на каждом шаге, так как в этих задачах трудно сделать не только $2r$ наблюдений, как в классической процедуре Кифера–Вольфовица, но даже два наблюдения с независимыми помехами недоступны.

В пятой главе будут приведены точные условия, обеспечивающие состоятельность оценок рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации, из которых наиболее существенным является условие о слабой коррелированности пробного возмущения $\{\Delta_n\}$ и последовательностей неопределенностей $\{w_n\}$ и $\{v_n\}$. В отличие от оценивания по ККВ применение рандомизированных алгоритмов эффективно и при почти произвольных аддитивных помехах в наблюдении $\{v_n\}$. В подтверждение этого факта в случае неизвестной, но ограниченной детерминированной последовательности помех $\{v_n\}$ можно привести некоторые интуитивные соображения. Пусть функция $F(\cdot, \cdot)$ — дважды непрерывно-дифференцируема по второму аргументу θ , вектор пробного одновременного возмущения Δ_n состоит из бернуллиевских случайных величин, независимых с w_n и v_n . Используя разложение по формуле Тейлора

$$F(w_n, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n) = F(w_n, \hat{\theta}_{n-1}) + \beta_n \Delta_n^T \nabla_{\theta} F(w_n, \hat{\theta}_{n-1}) + \mathcal{O}((\beta_n \Delta_n)^2),$$

рандомизированный алгоритм с одним измерением можно переписать в виде:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \mathbb{E}\{\nabla_{\theta} F(w_n, \hat{\theta}_{n-1}) | \hat{\theta}_i, i < n\} + \frac{\alpha_n}{\beta_n} \zeta_n + \alpha_n \beta_n \xi_n,$$

где, в силу центрированности Δ_n и независимости Δ_n с w_n, v_n , случайные векторы $\zeta_n = \beta_n(\mathbb{E}\{\nabla_{\theta}F(w_n, \hat{\theta}_{n-1})|\hat{\theta}_i, i < n\} - \Delta_n\Delta_n^T\nabla_{\theta}F(w_n, \hat{\theta}_{n-1})) + \Delta_n(F(w_n, \hat{\theta}_{n-1}) + v_n) - \xi_n$ — центрированные с ограниченной дисперсией, а ξ_n — равномерно ограничены. Если предположить, что для числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ выполняются условия:

$$\sum_n \alpha_n = \infty, \beta_n \rightarrow 0, \sum_n \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} < \infty, \sum_n \alpha_n \beta_n < \infty,$$

то асимптотические свойства оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ совпадают, как и для ККВ, с характеристиками асимптотической устойчивости решений ОДУ

$$\dot{\theta} = -\nabla f(\theta).$$

Глава 2

Оценка параметров линейной регрессии при произвольных помехах

Обычное предположение о помехах в задачах линейной регрессии заключается в том, что их считают реализацией некоторой последовательности независимых случайных величин с нулевым средним значением. Однако в приложениях это допущение часто нарушается, что может сильно сказываться на работе стандартных оценочных процедур. Поэтому важно исследовать возможность оценки параметров регрессии при минимальных предположениях о статистических свойствах помех. На первый взгляд, это кажется удивительным, но параметры регрессии могут быть эффективно оценены в случае нецентрированных, коррелированных и даже неслучайных помех (см.[15, 19, 94, 127]). Это достигается при определенном условии, когда входы (регрессоры) случайны. Для модели линейной регрессии

$$y_n = \varphi_n^T \theta^* + v_n$$

с вектором неизвестных параметров $\theta^* \in \mathbb{R}^r$, который должен быть оценен по наблюдениям y_n , φ_n ($n = 1, 2, \dots$), выполнение условия независимости регрессоров $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ с помехами $\{v_n\}_{n \geq 1}$ гарантирует хорошие свойства оценок при чрезвычайно умеренных ограничениях на помехи.

Идея использования случайных входных сигналов для устранения эффекта смещения была выдвинута Р.Фишером [90] в виде рандомизированного принципа планирования эксперимента. Помимо задачи планирования эксперимента, в которой регрессоры могут быть рандомизированы экспериментатором, случайные входы возникают во многих задачах идентификации, фильтрации, распознавания и т.д. (см., например, [63, 106, 120, 39, 175]). Имея в виду эти приложения, далее будем использовать термины *входы*, *выходы* вместо названий, используемых в

регрессионном анализе (подобных термину *регрессор*).

Рекуррентные алгоритмы оценивания параметров регрессии при случайных входных сигналах рассматривались также в [3, 39, 63, 106, 120, 175]. В [47, 52] изучалась скорость сходимости таких алгоритмов и были предложены оптимальные алгоритмы, имеющие наилучшую из возможных скорость сходимости. Во всех этих работах делались стандартные предположения о помехах, а именно, считалось, что они представляют собой последовательность случайных величин с нулевым средним, независимых или слабо зависимых. Здесь основная цель изложения состоит в отказе от этих предположений. Ниже будет показано, что при случайных входных сигналах новые рандомизированные алгоритмы, похожие во многом на стандартные, дают состоятельные оценки и при нецентрированных, коррелированных и даже неслучайных помехах. Кроме того, новые оптимальные алгоритмы имеют ту же самую скорость сходимости, как и оптимальные в стандартном случае.

В [15], наверное, впервые был предложен состоятельный алгоритм оценки параметров линейной регрессии при почти произвольных помехах, при этом рассматривалась более общая, по сравнению со стандартной, постановка задачи. Предполагалось, что вектор неизвестных параметров может меняться со временем, и в алгоритме оценивалось его среднее значение. Решение такой же обобщенной задачи разбиралось в виде примера в [19]. Использование при её решении методов исследования сходимости при почти произвольных помехах, разработанных в [94], позволяет получить алгоритмы, достигающие оптимальной в среднеквадратичном смысле скорости сходимости.

При случайных входных сигналах предлагаемые алгоритмы для обоснования сходимости требуют выполнения достаточно умеренных условий на помехи. В частности, помехи могут быть неизвестной, но ограниченной детерминированной функцией. По этой обнадеживающей причине новые алгоритмы могут быть полезны во многих приложениях. Численное моделирование продемонстрировало эффективность алгоритмов при разнообразных помехах v_n . В частности, в скалярном случае эксперименты были выполнены с неслучайной константой, нецентрированной случайной переменной и различными неслучайными последовательностями помех. В этих экспериментах исследовались траектории оценок стохастической аппроксимации и оценок метода наименьших квадратов. Поведение типичных траекторий оценок рандомизированных алгоритмов при высоком уровне нерегулярной помехи существенно лучше поведения траекторий для обычных алгоритмов. Некоторые примеры этих экспериментов приведены в четвертом разделе.

2.1 Постановка задачи, основные предположения

Рассмотрим модель линейной регрессии

$$(2.1) \quad y_n = \varphi_n^T \theta_n^* + v_n, \quad \theta_n^* = \theta^* + w_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

с выходами (наблюдениями) $y_n \in \mathbb{R}^1$, входами $\varphi_n \in \mathbb{R}^r$ и помехами $v_n \in \mathbb{R}^1$, $w_n \in \mathbb{R}^r$. Требуется оценить значение θ^* , базируясь на наблюдениях $y_n, \varphi_n, n = 1, 2, \dots$.

Пусть \mathcal{F}_n — σ -алгебра вероятностных событий, порожденная $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_n\}$, $\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}$ — σ -алгебра, порожденная $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, w_1, \dots, w_{n-1}, v_1, \dots, v_n\}$, и $\hat{\mathcal{F}}_{n-1}$ — σ -алгебра, порожденная $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{F}_{n-1} \subset \tilde{\mathcal{F}}_{n-1} \subset \hat{\mathcal{F}}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$.

Перечислим основные условия, те или иные из которых будут предполагаться выполненными при формулировках теорем в этой и последующих двух главах.

(LR.A) Входы $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ представляют собой последовательность независимых случайных векторов с ограниченными известными математическими ожиданиями: $\|\mathbb{E}\{\varphi_n\}\| \leq M_\varphi < \infty, \forall n$ векторы φ_n не зависят от $\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}$. Случайные векторы $\Delta_n = \varphi_n - \mathbb{E}\{\varphi_n\}$ имеют симметричные функции распределения $P_n(\cdot)$, т.е. $P_n(\Omega) = P_n(-\Omega)$ для любого борелевского подмножества $\Omega \subset \mathbb{R}^r$, и матрицы ковариаций удовлетворяют условиям

$$\mathbb{E}\{\Delta_n \Delta_n^T\} = B_n > 0, \|B_n\| \leq \sigma_\Delta^2 < \infty.$$

(LR.A') Входы $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ представляют собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов, удовлетворяющих условию **(LR.A)** с $B_n = B > 0$ и ограниченным четвертым статистическим моментом:

$$\mathbb{E}\{\|\Delta_n\|^4\} = M_4^4 < \infty.$$

(LR.B) Для любого n случайные вектора w_n центрированы ($\mathbb{E}\{w_n\} = 0$) и не зависят от $\hat{\mathcal{F}}_{n-1}$. Последовательности помех $\{v_n\}_{n \geq 1}$ и $\{w_n\}_{n \geq 1}$ удовлетворяют одному из условий:

$$(i) \quad \mathbb{E}\{v_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} \leq \sigma_v^2 < \infty, \quad \mathbb{E}\{\|w_n\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} \leq \sigma_w^2 < \infty;$$

$$(ii) \quad \mathbb{E}\{v_n^2\} \leq \sigma_v^2 < \infty, \quad \mathbb{E}\{w_n w_n^T\} \leq Q_w \leq \sigma_w^2 I < \infty;$$

$$(ii') \quad |v_n| \leq C_v < \infty, \quad \mathbb{E}\{w_n w_n^T\} \leq Q_w \leq \sigma_w^2 I < \infty;$$

$$(iii) \quad |v_n| \leq C_v < \infty, \quad \|w_n\| \leq C_w < \infty,$$

где выполнение неравенств со случайными величинами понимается с вероятностью единица и σ_v , σ_w , C_v , C_w — некоторые постоянные, Q_w — симметричная неотрицательно определенная матрица.

Заметим, что стандартные предположения в задаче об оценивании параметров линейной регрессии со случайными входными сигналами несколько различны (см., например, [47, 52]). Это выражается, в частности, в отсутствии условия $\mathbb{E}\{v_n\} = 0$ и предположения о том, что помехи $\{v_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

2.2 Оценивание по методу стохастической аппроксимации

Исследуем сначала рандомизированный алгоритм типа стохастической аппроксимации (РСА), который для рассматриваемой модели наблюдений (2.1) имеет вид

$$(2.2) \quad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \Gamma \Delta_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\alpha_n \geq 0$ — неслучайная последовательность, определяющая шаг алгоритма, и Γ — некоторая положительно определенная матрица (см. [47, 63, 94, 106, 120, 39, 175]).

Предположим, что начальное значение $\hat{\theta}_0$ — произвольный неслучайный вектор из \mathbb{R}^r .

Т е о р е м а 2.1 Пусть для входов модели выполнено предположение (LR.A) и при $n \rightarrow \infty$

$$\alpha_n \rightarrow 0, \quad \alpha_n \mathbb{E}\{\|\Delta_n\|^4\} \rightarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty.$$

Если для помех выполнено условие (LR.Bi) и $\{\alpha_n\}$ обеспечивают

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 (1 + \mathbb{E}\{\|\Delta_n\|^4\}) < \infty,$$

тогда последовательность оценок, доставляемых алгоритмом (2.2), сильносостоятельная, т.е. $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta^*$ при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью единица.

Если для помех выполнено условие **(LR.Bii)**,
тогда среднеквадратичная ошибка оценок, доставляемых алгоритмом (2.2), стремится к нулю: $E\{(\hat{\theta}_n - \theta^*)(\hat{\theta}_n - \theta^*)^T\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Следующая теорема устанавливает скорость сходимости алгоритма (2.2).

Т е о р е м а 2.2 Пусть выполнены условия: **(LR.A)** для входов модели, **(LR.Bii)** для помех и при $n \rightarrow \infty$

$$\alpha_n \rightarrow 0, \quad \alpha_n E\{\|\Delta_n\|^4\} \rightarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty.$$

Если существуют такие матрицы $B, U > 0$ и сходящаяся последовательность чисел $\{\beta_n\}$, что $-\Gamma B + \frac{1}{2}I$ — устойчивая матрица (все её собственные значения лежат в левой полуплоскости),

$$\|\beta_n^{-1}B_n - B\| = \mathcal{O}(n^{-1}), \quad \beta_n^{-2}E\{\Delta_n \Delta_n^T Q_w \Delta_n \Delta_n^T\} \leq U + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad \|U\| < \infty$$

и $\alpha_n \beta_n = n^{-1}$, $\beta_n = \beta_\infty + \mathcal{O}(n^{-1})$,

тогда асимптотическая скорость сходимости алгоритма (2.2) характеризуется неравенством

$$E\{(\hat{\theta}_n - \theta^*)(\hat{\theta}_n - \theta^*)^T\} \leq n^{-1} S + o(n^{-1}),$$

в котором матрица S является решением матричного уравнения

$$\Gamma B S + S B \Gamma - S = \Gamma R \Gamma,$$

где $R = \beta_\infty(\sigma_v^2(1 + M_\varphi^2 \rho) + M_\varphi^2 \sigma_w^2)B + U$ при каком-либо $\rho > 0$.

Если $\beta_n \equiv 1$ и $\Gamma = B^{-1}$, тогда $\alpha_n = n^{-1}$, и последнее уравнение для матрицы S может быть легко решено:

$$S = B^{-1} R B^{-1}.$$

Для алгоритма (2.2), в этом случае имеющего вид

$$(2.3) \quad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - (nB)^{-1} \Delta_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

при $\sigma_w = 0$ получаем с любым $\rho > 0$

$$(2.4) \quad E\{(\hat{\theta}_n - \theta^*)(\hat{\theta}_n - \theta^*)^T\} \leq n^{-1} \sigma_v^2 (1 + M_\varphi^2 \rho) B^{-1} + o(n^{-1}).$$

В [47] показано, что такой же выбор α_n и Γ является оптимальным для обыкновенного алгоритма стохастической аппроксимации:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \Gamma \varphi_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

если $w_n = 0$ и помехи v_n являются независимыми случайными величинами с нулевыми средними. При этом

$$(2.5) \quad \mathbb{E}\{\hat{\theta}_n - \theta)(\hat{\theta}_n - \theta)^T\} \leq n^{-1}\sigma_v^2\mathbf{B}^{-1} + o(n^{-1}),$$

Таким образом, при $\sigma_w = 0$ и помехах $\{v_n\}$, удовлетворяющих условию **(LR.Bii)**, для оценок алгоритма РСА (2.2) с $\alpha_n = 1/n$ и $\Gamma = \mathbf{B}^{-1}$ получили среднеквадратичную скорость сходимости, близкую к наилучшей в ситуации, когда помехи v_n являются независимыми случайными величинами с нулевыми средними. Если $M_\varphi = 0$, то оптимальные обыкновенный и рандомизированный алгоритмы совпадают, и, кроме того, равны соответствующие асимптотические оценки скорости сходимости, хотя предположения о характере помех $\{v_n\}$ существенно отличаются.

В [94] для решения рассматриваемой задачи при $w_n = 0$ в условиях почти произвольных помех v_n предлагалось использовать несколько отличающийся от (2.2) рандомизированный алгоритм стохастической аппроксимации:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - (n\mathbf{B})^{-1}\Delta_n(\Delta_n^T\hat{\theta}_{n-1} - y_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

для которого $\mathbf{R} = (\sigma_v + M_\varphi\theta^*)^2\mathbf{B}$ и, следовательно,

$$\mathbf{S} = (\sigma_v + M_\varphi\theta^*)^2\mathbf{B}^{-1}.$$

Сравнивая соответствующие выражения для матриц \mathbf{S} , несложно убедиться в том, что при $M_\varphi\theta^* \neq 0$ алгоритм (2.3) дает лучшие оценки, чем предлагавшийся ранее в [94].

К сожалению, оптимальный РСА алгоритм (2.3) не применим, если матрица \mathbf{B} априорно неизвестна. Рассмотрим рандомизированный алгоритм стохастической аппроксимации с усреднениями:

$$(2.6) \quad \begin{cases} \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n\Delta_n(\varphi_n^T\hat{\theta}_{n-1} - y_n), \\ \tilde{\theta}_n = (1 - n^{-1})\tilde{\theta}_{n-1} + n^{-1}\hat{\theta}_{n-1} \left(= n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\theta}_i \right), \end{cases}$$

похожий на предложенный Б.Т.Поляком [52] в случае помех с нулевым средним. Далее, для упрощения, будем считать, что входы модели являются одинаково распределенными случайными величинами, удовлетворяющими условию **(LR.A')**.

Т е о р е м а 2.3 *Если выполнены условия:*

(LR.A') для входов модели $\{\varphi_n\}$,

$w_n = 0$ и **(LR.Bii)** для помех $\{v_n\}$,

$\alpha_n \rightarrow 0$ и $\alpha_n/\alpha_{n+1} = 1 + o(\alpha_n)$ при $n \rightarrow \infty$ для числовой последовательности $\{\alpha_n\}$,

тогда для среднеквадратичной скорости сходимости оценок алгоритма (2.6) выполняется неравенство (2.4) с любым $\rho > 0$.

Как и выше, полученная оценка сверху (2.4) для скорости сходимости почти совпадает с известной ранее в случае независимых помех с нулевым средним (см. [52]). При этом алгоритм (2.6) более простой, чем оптимальный алгоритм (2.3), и его асимптотическая скорость сходимости не зависит от конкретного выбора α_n , удовлетворяющего только условию $\alpha_n/\alpha_{n+1} = 1 + o(\alpha_n)$. Заметим, что последнее соотношение выполняется, например, для $\alpha_n = \alpha n^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, но не для $\alpha_n = \alpha n^{-1}$.

Замечание 2.1. Утверждения теорем 2.1–2.3 также выполняются, если предположить равенство нулю третьего центрального момента φ_n вместо симметричности распределения Δ_n .

Замечание 2.2. В случае равенства в предположении (Bi) в утверждениях теорем 2.2 и 2.3 неравенства в оценках скорости сходимости также можно заменить на равенства.

2.3 Оценки по методу наименьших квадратов

Теперь рассмотрим для той же регрессионной модели наблюдений (2.1)

$$y_n = \varphi_n^T \theta_n^* + v_n, \quad \theta_n^* = \theta^* + w_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

оценки по рандомизированному методу наименьших квадратов (РМНК) вида:

$$(2.7) \quad \begin{cases} \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma_n \Delta_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \\ \Gamma_n = \Gamma_{n-1} - \Gamma_{n-1} \Delta_n \Delta_n^T \Gamma_{n-1} / (1 + \Delta_n^T \Gamma_{n-1} \Delta_n), \quad \Gamma_0 = \gamma_0^{-1} I, \end{cases}$$

где $\Delta_n = \varphi_n - E\{\varphi_n\}$, $\gamma_0 > 0$ — малое положительное число (параметр регуляризации, см. [39, 175]). Как и выше, пусть в качестве начального значения $\hat{\theta}_0$ выбран произвольный неслучайный вектор из \mathbb{R}^r .

Т е о р е м а 2.4 Пусть выполнены предположения о входах (LR.A').

Если выполнено условие (LR.Bi) для помех,

тогда последовательность оценок, доставляемых алгоритмом (2.7), сильносостоятельная, т.е. $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta^*$ при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью единица.

Если выполнено условие (LR.Biii) для помех и с вероятностью единица $\|\Delta_n\| \leq C_\Delta < \infty$, $n = 1, 2, \dots$,

тогда среднеквадратичная ошибка оценок, доставляемых алгоритмом (2.7), стремится к нулю: $E\{(\hat{\theta}_n - \theta^*)(\hat{\theta}_n - \theta^*)^T\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство теорем 2.1–2.4 приведено в конце этой главы.

Замечание 2.3. Если дополнительно предположить, что $w_n = 0$, $M_\varphi = 0$, последовательность помех $\{v_n\}_{n \geq 1}$ не зависит от $\{\varphi_n\}$ и удовлетворяет условию (LR.Bii), тогда скорость сходимости для оценок РМНК

определяется неравенством (2.5), т. е. среднеквадратичная скорость сходимости оценок алгоритма (2.7) та же самая, что и у МНК в случае независимых помех с нулевым средним.

2.4 Экспериментальные результаты

2.4.1 Задача об обнаружении сигнала при неизвестных, но ограниченных неслучайных помехах

Рассмотрим задачу об обнаружении (детектировании) скалярного полезного сигнала $\{\bar{\varphi}_n\}$, который может быть попадает, а может быть и нет в зашумленный канал наблюдения (измерения производятся с почти произвольными помехами). В задачах обнаружения сигнала оцениваемая величина $\bar{\theta}^*$ обычно принимает конечное число значений и часто представляет из себя характеристику типа "да— нет". Будем считать, что $\{\bar{\theta}^* = 1\}$ соответствует наличию сигнала в приемнике, а $\{\bar{\theta}^* = 0\}$ — его отсутствию. С учетом вышесказанного, наблюдаемые величины $\{y_n\}$ можно представить в виде

$$y_n = \bar{\varphi}_n \bar{\theta}^* + v_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\{v_n\}$ — почти произвольные помехи в наблюдении: $|v_n| \leq C_v$, $n = 1, 2, \dots$, которые, в частности, может быть задаются неизвестной ограниченной детерминированной функцией. Если помехи наблюдения являются случайными величинами, то будем считать их независимыми с полезным сигналом и имеющими равномерно ограниченные вторые моменты.

Предположим, что полезный сигнал ограничен и имеет статистическую природу, представляя собой последовательность независимых между собой случайных величин. При решении важно знать, известны ли значения величин $\{\bar{\varphi}_n\}$ в каждый момент времени или нет. Если неизвестны, то в ряде практических задач (см., например, п. 6.1) иногда целесообразно рассматривать обнаруживаемый сигнал состоящим из двух частей (сомножителей): известной $\{\varphi_n\}$ и неизвестной $\{\xi_n\}$:

$$y_n = \varphi_n \xi_n \bar{\theta}^* + v_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть случайные величины $\{\varphi_n\}$ и $\{\xi_n\}$ независимы и имеют ограниченные вторые моменты. Обозначим M_φ — среднее значение и $\sigma_\varphi^2 > 0$ — дисперсию случайных величин φ_n , предполагая, что они одинаково распределены, и, соответственно, M_ξ — среднее значение и σ_ξ^2 — дисперсию случайных величин ξ_n . Для определенности будем считать, что $M_\xi > 0$. Если обозначить $\theta^* = M_\xi \bar{\theta}^*$ и $w_n = (\xi_n - M_\xi) \bar{\theta}^*$, то получаем схему наблюдения, рассмотренную в п. 2.1

$$y_n = \varphi_n \theta_n^* + v_n, \quad \theta_n^* = \theta^* + w_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

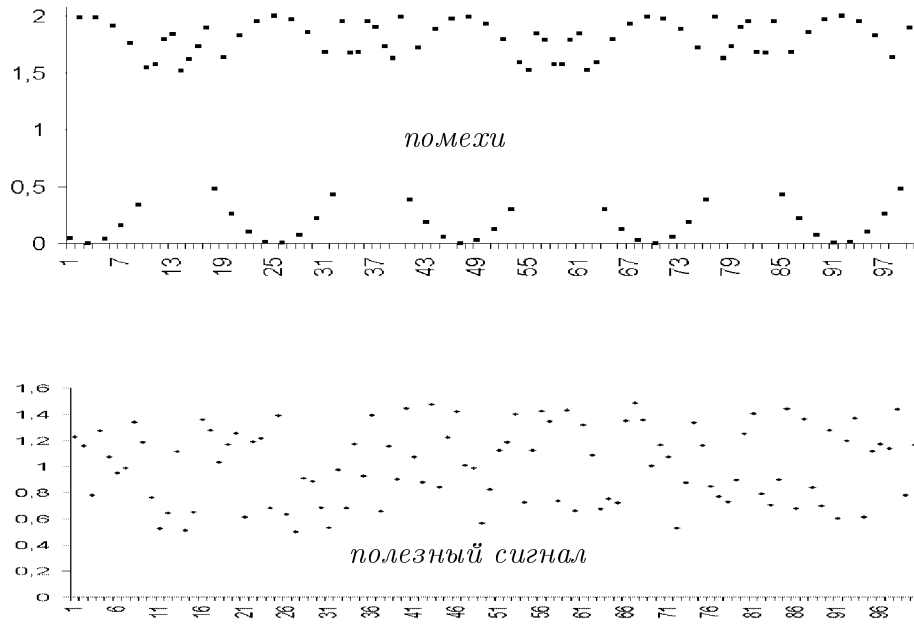


Рис. 1. Полезный сигнал и помехи

В том случае, когда центрированные случайные величины $\Delta_n = \varphi_n - M_\varphi$ имеют симметричное распределение, выполнены все условия теорем 2.1–2.4 и для построения последовательности состоятельных оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ величины θ^* можно воспользоваться любым из алгоритмов стохастической аппроксимации (2.2),(2.6) или РМНК (2.7), выбрав в качестве начального приближения $\hat{\theta}_0 = 0$.

Для решения задачи об обнаружении сигнала можно задать некоторое пороговое значение $\delta > 0$, например, $\delta = M_\xi/2$. В качестве решающего правила в момент времени n , определяющего выбор гипотезы о наличии полезного сигнала в канале наблюдения или об его отсутствии, можно задать операцию сравнения величины текущей оценки с пороговым значением δ . Если $\hat{\theta}_n < \delta$, то принимается гипотеза *сигнала нет*, в противном случае — *сигнал есть*.

Рассмотрим алгоритм стохастической аппроксимации (2.2) с $\alpha_n \Gamma = 1/(\sigma_\varphi^2 n)$

$$(2.8) \quad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\varphi_n - M_\varphi}{\sigma_\varphi^2 n} (\varphi_n \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Вероятность принятия неправильного решения можно оценить с помощью неравенства Чебышёва (см. пункт П.1.2 на стр. 224), применив его к результату теоремы 2.2 об оценке среднеквадратичной скорости

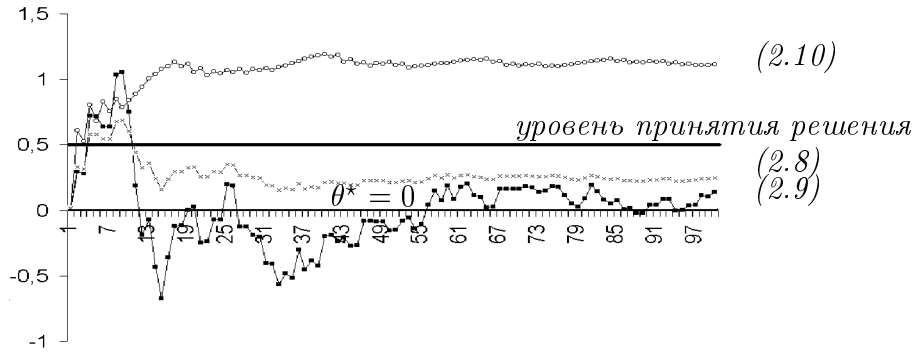


Рис. 2. Оценки МНК, РСА и РМНК при отсутствии сигнала

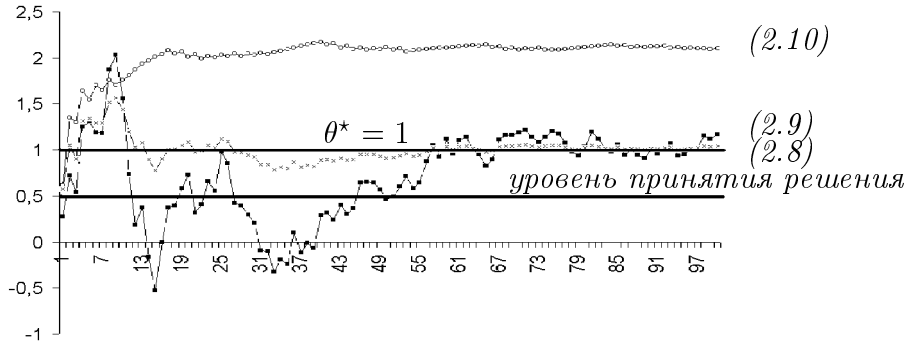


Рис. 3. Оценки МНК, РМНК и РСА при наличии сигнала

сходимости. Для любого n при $\delta = M_\xi/2$ имеем

$$\mathbf{P}\{|\hat{\theta}_n - \theta^*| \geq \delta\} < \frac{4}{n} \left(\frac{C_v^2 + M_\varphi^2 \sigma_\xi^2}{M_\xi^2 \sigma_\varphi^2} + \frac{\sigma_\xi^2 M_4}{M_\xi^2 \sigma_\varphi^4} \right) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда несложно получить оценку для количества итераций, необходимых для принятия решения с той или иной степенью уверенности.

Для иллюстрации работоспособности предложенных рандомизированных алгоритмов (РСА, РМНК) и сравнения получаемых оценок при *плохих* помехах с оценками обыкновенного МНК была проведена серия экспериментов на ЭВМ. Приведем один типичный результат сравнительного моделирования работы алгоритмов (2.8), РМНК

$$(2.9) \quad \begin{cases} \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma_n (\varphi_n - M_\varphi) (\varphi_n \hat{\theta}_{n-1} - y_n), & \hat{\theta}_0 = 0, \\ \Gamma_n = \Gamma_{n-1} - \frac{\Gamma_{n-1}^2 (\varphi_n - M_\varphi)^2}{1 + \Gamma_{n-1} (\varphi_n - M_\varphi)^2}, & \Gamma_0 = 0.99^{-1}, \end{cases}$$

и обыкновенного регуляризованного МНК

$$(2.10) \quad \hat{\theta}_n = \frac{\sum_{k=1}^n \varphi_k y_k}{\sum_{k=1}^n \varphi_k^2 + (0.99)^{-1}}.$$

Полезный сигнал $\{\varphi_n\}$ был выбран равномерно распределенным на интервале $[0.5, 1.5]$ и наблюдался на фоне неизвестной, но ограниченной детерминированной функции $|v_n| \leq C_v = 2$ (см. рис. 1) со средним значением больше единицы. Для экспериментатора среднее значение помехи неизвестно, в рассматриваемом примере оно вполне могло быть и меньшим минус единицы.

Для упрощения считалось, что полезный сигнал наблюдается полностью, т.е. $\sigma_\xi = 0$ и $M_\xi = 1$. Если выбрать уровень принятия решения $\delta = 0.5$, то в двух случаях, когда полезного сигнала нет и когда — есть, для вероятностей принятия правильного решения по оценкам алгоритма (2.8) теоретический анализ дает

$$\mathbf{P}\{|\hat{\theta}_n| \geq 0.5 | \theta^* = 0\} \leq \frac{48}{n} C_v^2 + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\mathbf{P}\{|\hat{\theta}_n - 1| \geq 0.5 | \theta^* = 1\} \leq \frac{48}{n} (C_v + 1)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Рисунки 2 и 3 показывают траектории последовательного изменения оценок для трех алгоритмов. Уровень помехи настолько высок, что оценки обыкновенного МНК почти всегда превышают уровень принятия решения вне зависимости от наличия или отсутствия сигнала, в то время как после 50 итераций рандомизированные алгоритмы дают правильные ответы. Скорость их сходимости оказалась выше теоретически предсказанной, так как, наверное, в примере рассматривалась не самая плохая последовательность помех.

2.5 Доказательства теорем 2.1–2.4

Техника доказательств теорем 2.1–2.4 опирается на [94].

Доказательство теоремы 2.1. Обозначив $\eta_n = \hat{\theta}_{n-1} - \theta^*$, $\xi_n = v_n - \mathbf{E}\{\varphi_n\}^T \eta_n$, из уравнений для модели наблюдений (2.1) и алгоритма (2.2) получаем

$$\hat{\theta}_n - \theta^* = \hat{\theta}_{n-1} - \theta^* - \alpha_n \Gamma \Delta_n \Delta_n^T \eta_n + \alpha_n \Gamma \Delta_n \xi_n$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 &= ((\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)^T - \eta_n^T \alpha_n \Delta_n \Delta_n^T \Gamma) ((\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*) - \alpha_n \Gamma \Delta_n \Delta_n^T \eta_n) + \\ &+ \alpha_n^2 \xi_n^2 \Delta_n^T \Gamma^2 \Delta_n + ((\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)^T - \eta_n^T \alpha_n \Delta_n \Delta_n^T \Gamma) \alpha_n \xi_n \Gamma \Delta_n + \\ &+ \alpha_n \xi_n \Delta_n^T \Gamma ((\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*) - \alpha_n \Gamma \Delta_n \Delta_n^T \eta_n). \end{aligned}$$

Рассмотрим условные по отношению к σ -алгебре $\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}$ математические ожидания от обеих частей последней формулы. Предварительно заметим, что, в силу предположения **(LR.A)**, выполняются соотношения

$$\mathbf{E}\{\eta_n^T \alpha_n \xi_n \Gamma \Delta_n | \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\} = \eta_{n-1}^T \alpha_n v_n \Gamma \mathbf{E}\{\Delta_n | \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\} = \eta_{n-1}^T \alpha_n \xi_n \Gamma \mathbf{E}\{\Delta_n\} = 0$$

и

$$\mathbb{E}\{(\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)^\top \alpha_n \xi_n \Gamma \Delta_n \mid \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\} = 0,$$

а также из-за симметричности распределения $P_n(\cdot)$

$$\mathbb{E}\{\eta_n^\top \alpha_n^2 \Delta_n \Delta_n^\top \Gamma^2 \Delta_n \xi_n \mid \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\} = 0.$$

С учетом последних соотношений, имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 \mid \hat{\mathcal{F}}_{n-1}\} &= \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 - \eta_n^\top \alpha_n \mathbb{E}\{\Delta_n \Delta_n^\top\} \Gamma (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*) - \\ &\quad - (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)^\top \alpha_n \Gamma \mathbb{E}\{\Delta_n \Delta_n^\top\} \eta_n + \alpha_n^2 \eta_n^\top \mathbb{E}\{\Delta_n \Delta_n^\top \Gamma^2 \Delta_n \Delta_n^\top\} \eta_n + \\ &\quad + \alpha_n^2 \mathbb{E}\{\xi_n^2 \mid \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\} \mathbb{E}\{\Delta_n^\top \Gamma^2 \Delta_n\} \leq \\ &\leq \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 - \eta_n^\top \alpha_n B_n \Gamma (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*) - (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)^\top \alpha_n \Gamma B_n \eta_n + \\ &\quad + \alpha_n^2 \|\eta_n\|^2 \mathbb{E}\{\text{Tr}[\Delta_n \Delta_n^\top \Gamma^2 \Delta_n \Delta_n^\top]\} + \alpha_n^2 \xi_n^2 \text{Tr}[\Gamma B_n \Gamma]. \end{aligned}$$

Усредняя по w_n , получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 \mid \hat{\mathcal{F}}_{n-1}\} &\leq \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 (I + \alpha_n^2 (\|\Gamma\|^2 \mathbb{E}\{\|\Delta_n\|^4\} + 2M_\varphi^2 \text{Tr}[\Gamma B_n \Gamma])) - \\ &\quad - (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)^\top \alpha_n (B_n \Gamma + \Gamma B_n) (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*) + \\ &\quad + \alpha_n^2 r \sigma_w^2 \|\Gamma\|^2 \mathbb{E}\{\|\Delta_n\|^4\} + \alpha_n^2 (2v_n^2 + M_\varphi^2 \sigma_w^2) \text{Tr}[\Gamma B_n \Gamma]. \end{aligned}$$

Далее, усредняя по v_n , имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\} &\leq \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 (I + \alpha_n^2 (\|\Gamma\|^2 \mathbb{E}\{\|\Delta_n\|^4\} + 2M_\varphi^2 \text{Tr}[\Gamma B_n \Gamma])) - \\ &\quad - (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)^\top \alpha_n (B_n \Gamma + \Gamma B_n) (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*) + \\ &\quad + \alpha_n^2 (r \sigma_w^2 \|\Gamma\|^2 \mathbb{E}\{\|\Delta_n\|^4\} + (2\sigma_v^2 + r M_\varphi^2 \sigma_w^2) \text{Tr}[\Gamma B_n \Gamma]). \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \mathbb{E}\{\|\Delta_n\|^4\} < \infty$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \text{Tr}[\Gamma B_n \Gamma] < \infty,$$

то, применяя лемму Роббинса–Сигмунда (лемма П.1 на стр. 227), получаем существование конечного предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2$ и, более того, сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)^\top \alpha_n (B_n \Gamma + \Gamma B_n) (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*) < \infty.$$

Из того, что $\sum \alpha_n = \infty$ и $\|B_n\| \leq \sigma_\Delta^2 < \infty$, следует $\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 \rightarrow 0$ с вероятностью единица. Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение теоремы. Обозначим $D_n = (\hat{\theta}_n - \theta^*)(\hat{\theta}_n - \theta^*)^T$. Как и выше, из уравнений для модели наблюдений (2.1) и алгоритма (2.2) можем получить

$$\begin{aligned} D_n &= D_{n-1} - \alpha_n \Gamma \Delta_n \Delta_n^T \eta_n (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)^T - \alpha_n (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*) \eta_n^T \Delta_n \Delta_n^T \Gamma + \\ &\quad + \alpha_n^2 \Gamma \Delta_n \Delta_n^T \eta_n \eta_n^T \Delta_n \Delta_n^T \Gamma + \alpha_n^2 \xi_n^2 \Gamma \Delta_n \Delta_n^T \Gamma + \\ &+ (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^* - \alpha_n \Gamma \Delta_n \Delta_n^T \eta_n) \alpha_n \xi_n \Delta_n^T \Gamma + \alpha_n \xi_n \Gamma \Delta_n (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^* - \alpha_n \Gamma \Delta_n \Delta_n^T \eta_n)^T. \end{aligned}$$

Далее, усреднив обе части последнего соотношения по σ -алгебре $\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}$, в силу допущения **(LR.A)**, заключаем, что

$$\begin{aligned} E\{D_n | \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\} &= D_{n-1} - \alpha_n \Gamma B_n \eta_{n-1} (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)^T - \alpha_n (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*) \eta_{n-1}^T B_n \Gamma + \\ &\quad + \alpha_n^2 \Gamma E\{\Delta_n \Delta_n^T \eta_n \eta_n^T \Delta_n \Delta_n^T | \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\} \Gamma + \alpha_n^2 \xi_n^2 \Gamma B_n \Gamma \leq \\ &\leq D_{n-1} - \alpha_n \Gamma B_n \eta_{n-1} (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)^T - \alpha_n (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*) \eta_{n-1}^T B_n \Gamma + \\ &\quad + \alpha_n^2 \Gamma E\{\Delta_n \Delta_n^T (D_{n-1} + Q_w) \Delta_n \Delta_n^T\} \Gamma + \\ &\quad + \alpha_n^2 (v_n^2 (1 + M_\varphi^2 \rho) + \|D_{n-1}\| \rho^{-1} + M_\varphi^2 \|w_n\|^2) \Gamma B_n \Gamma. \end{aligned}$$

Теперь произведем усреднение по σ -алгебре $\hat{\mathcal{F}}_{n-1}$, используя вторую часть **(LR.Bii)**:

$$\begin{aligned} E\{D_n | \hat{\mathcal{F}}_{n-1}\} &\leq D_{n-1} - \alpha_n \Gamma B_n D_{n-1} - \alpha_n D_{n-1}^T B_n \Gamma + \alpha_n^2 \|D_{n-1}\| E\{\|\Delta_n\|^4\} \Gamma^2 + \\ &\quad + \alpha_n^2 \Gamma \left((v_n^2 (1 + M_\varphi^2 \rho) + \|D_{n-1}\| \rho^{-1} + r M_\varphi^2 \sigma_w^2) B_n + E\{\Delta_n \Delta_n^T Q_w \Delta_n \Delta_n^T\} \right) \Gamma. \end{aligned}$$

В заключение, взяв безусловное математическое ожидание и используя первую часть допущения **(LR.Bii)**, получаем для матриц $V_n := E\{D_n\}$

$$\begin{aligned} V_n &\leq V_{n-1} - \alpha_n \Gamma B_n V_{n-1} - \alpha_n V_{n-1} B_n \Gamma + \alpha_n^2 \Gamma ((\sigma_v^2 (1 + M_\varphi^2 \rho) + M_\varphi^2 \sigma_w^2) B_n + U) \Gamma + \\ &\quad + \alpha_n \gamma_n \mathcal{O}(\|V_{n-1}\|) \end{aligned}$$

с $\gamma_n = \alpha_n (1 + E\{\|\Delta_n\|^4\})$. Так как $\gamma_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то применяя к последнему неравенству лемму П.9 на стр. 230, имеем $V_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 2.2. Для начала покажем, что матричное уравнение из утверждения теоремы имеет решение. Перепишем его в виде

$$\left(\Gamma B - \frac{1}{2}I\right)S + S\left(B\Gamma - \frac{1}{2}I\right) = \Gamma R \Gamma.$$

Так как $-\Gamma B + \frac{1}{2}I$ является устойчивой, то по лемме Ляпунова (см. лемма П.8 на стр. 229) существует положительно-определенная матрица S , которая является решением соответствующего матричного уравнения.

Вернемся к последнему неравенству из доказательства предыдущей теоремы. В силу $\|\beta_n^{-1}B_n - B\| = \mathcal{O}(n^{-1})$ и других свойств последовательности $\{\beta_n\}$, получаем

$$V_n \leq V_{n-1} - n^{-1}\Gamma B V_{n-1} - n^{-1}V_{n-1}B\Gamma + n^{-2}\Gamma R\Gamma + n^{-1}\bar{\gamma}_n \mathcal{O}(\|V_{n-1}\|),$$

с некоторой последовательностью $\{\bar{\gamma}_n\} : \bar{\gamma}_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $W_n = nV_n - S$. Тогда в условиях теоремы 2.2 имеем

$$\begin{aligned} W_n &\leq W_{n-1} - (n-1)^{-1}(\Gamma B - \frac{1}{2}I)W_{n-1} - (n-1)^{-1}W_{n-1}(B\Gamma - \frac{1}{2}I) + \\ &\quad + n^{-1}\bar{\gamma}_n \mathcal{O}(\|W_{n-1}\|). \end{aligned}$$

Следовательно, применяя опять лемму П.9 на стр. 230, получаем $W_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и, таким образом, теорема 2.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.3. Для матриц $V_n = E\{(\hat{\theta}_n - \theta^*)(\hat{\theta}_n - \theta^*)^\Gamma\}$, как и при доказательстве теоремы 2.1, учитывая $\Gamma = I$, $B_n = B$ и $\sigma_w = 0$, имеем

$$V_n \leq V_{n-1} - \alpha_n(V_{n-1}B + BV_{n-1}) + \alpha_n^2\sigma_v^2(1 + M_\varphi^2\rho)V + \alpha_n\gamma_n \mathcal{O}(\|V_{n-1}\|).$$

Отсюда, в силу условия теоремы 2.3 для α_n , пользуясь леммой П.10 на стр. 230, можно сделать вывод о том, что

$$V_n = \frac{1}{2}\alpha_n\sigma_v^2(1 + M_\varphi^2\rho)I + o(\alpha_n).$$

Обозначив $\eta_n = \hat{\theta}_n - \theta^*$, $\xi_n = v_n - E\{\varphi_n\}^\Gamma\eta_n$, из уравнений для модели наблюдений и алгоритма (2.6) получаем

$$\hat{\theta}_n - \theta^* = \hat{\theta}_{n-1} - \theta^* - \alpha_n \Delta_n \Delta_n^\Gamma \eta_{n-1} + \alpha_n \Delta_n \xi_n,$$

$$\tilde{\theta}_n - \theta^* = (1 - \frac{1}{n})(\tilde{\theta}_{n-1} - \theta^*) + \frac{1}{n}(\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*).$$

Следовательно, при $D_n = (\hat{\theta}_n - \theta^*)(\hat{\theta}_n - \theta^*)^\Gamma$ имеем

$$\begin{aligned} (\hat{\theta}_n - \theta^*)(\tilde{\theta}_n - \theta^*)^\Gamma &= (1 - \frac{1}{n})(\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)(\tilde{\theta}_{n-1} - \theta^*)^\Gamma + \frac{1}{n}D_{n-1} - \\ &\quad - \alpha_n \Delta_n \Delta_n^\Gamma \eta_{n-1} \left((1 - \frac{1}{n})(\tilde{\theta}_{n-1} - \theta^*) + \frac{1}{n}(\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*) \right)^\Gamma + \\ &\quad + \alpha_n \Delta_n \xi_n \left((1 - \frac{1}{n})(\tilde{\theta}_{n-1} - \theta^*) + \frac{1}{n}(\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*) \right)^\Gamma. \end{aligned}$$

В силу предположения **(LR.A)**, произведя усреднение сначала при условии σ -алгебры $\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}$, а затем по σ -алгебре $\hat{\mathcal{F}}_{n-1}$, приходим к заключению

$$E\{(\hat{\theta}_n - \theta^*)(\tilde{\theta}_n - \theta^*)^\Gamma | \hat{\mathcal{F}}_{n-1}\} = (1 - \frac{1}{n})(I - \alpha_n B)(\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)(\tilde{\theta}_{n-1} - \theta^*)^\Gamma +$$

$$+ \frac{1}{n}(\mathbf{I} - \alpha_n \mathbf{B})\mathbf{D}_{n-1}.$$

Следовательно, для матриц $\mathbf{W}_n := \mathbb{E}\{(\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)(\tilde{\theta}_{n-1} - \theta^*)^T\}$ справедливо соотношение

$$\mathbf{W}_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)(\mathbf{I} - \alpha_n \mathbf{B})\mathbf{W}_{n-1} + (\mathbf{I} - \alpha_n \mathbf{B})\frac{1}{n}\mathbf{V}_{n-1}.$$

Учитывая установленный ранее вид асимптотического поведения \mathbf{V}_n и тот факт, что $1/n = o(\alpha_n)$, можно применить к последнему уравнению лемму П.11 на стр. 230 и получить

$$\mathbf{W}_n = \frac{1}{2}\sigma_v^2(1 + M_\varphi^2\rho)\mathbf{B}^{-1}\frac{1}{n} + o(n^{-1}).$$

Подобным образом, взяв сначала последовательно условные усреднения по отношению $\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}$ и $\hat{\mathcal{F}}_{n-1}$, а потом безусловное математическое ожидание, можно убедиться в том, что для $\mathbf{T}_n := \mathbb{E}\{(\tilde{\theta}_n - \theta^*)(\tilde{\theta}_n - \theta^*)^T\}$ выполняется

$$\mathbf{T}_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\mathbf{T}_{n-1} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}(\mathbf{W}_n + \mathbf{W}_n^T) + \frac{1}{n^2}\mathbf{V}_n.$$

Подставив в последнее соотношение полученные ранее выражения для \mathbf{V}_n и \mathbf{W}_n и применив лемму П.12 на стр. 231 имеем

$$\mathbf{T}_n = \frac{1}{n}\sigma_v^2(1 + M_\varphi^2\rho)\mathbf{B}^{-1} + o(n^{-1}).$$

Теорема 2.3 доказана.

Доказательство теоремы 2.4. Обозначим $\eta_n = \hat{\theta}_n - \theta_n^*$, $\xi_n = v_n - \mathbb{E}\{\varphi_n\}^T\eta_n$. Следующие вспомогательные результаты будут использоваться в доказательстве теоремы 2.4.

В условиях теоремы 2.4 выполняются свойства:

$$(a) \mathbb{E}\{\eta_n^T \Gamma_n \xi_n \Delta_n | \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\} = 0 \text{ и } \mathbb{E}\{\eta_n^T \Delta_n \Delta_n^T \Gamma_n^2 \Delta_n \xi_n | \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\} = 0,$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n^T \Gamma_n^2 \Delta_n < \infty \text{ с вероятностью единица,}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n^T \Gamma_n \Delta_n = \infty \text{ с вероятностью единица,}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \|\Delta_n\|^4 \lambda_{max}^2(\Gamma_n) < \infty \text{ с вероятностью единица.}$$

Доказательство (a). Из (2.7) имеем

$$\Gamma_n \Delta_n = \Gamma_{n-1} \Delta_n - \frac{\Gamma_{n-1} \Delta_n \Delta_n^T \Gamma_{n-1} \Delta_n}{1 + \Delta_n^T \Gamma_{n-1} \Delta_n} = \frac{\Gamma_{n-1} \Delta_n}{1 + \Delta_n^T \Gamma_{n-1} \Delta_n},$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{\eta_n^T \Gamma_n \xi_n \Delta_n | \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\} &= \eta_n^T \xi_n \mathbb{E}\left\{\frac{\Gamma_{n-1} \Delta_n}{1 + \Delta_n^T \Gamma_{n-1} \Delta_n} \middle| \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\right\} = \\
&= \eta_n^T \xi_n \Gamma_{n-1} \int \frac{x}{1 + x^T \Gamma_{n-1} x} P_n(dx) = 0,
\end{aligned}$$

так как интеграл от нечетной функции аргумента x по симметричному распределению $P_n(\cdot)$ равен нулю. Далее,

$$\Delta_n \Delta_n^T \Gamma_n^2 \Delta_n = \Delta_n \frac{\Delta_n^T \Gamma_{n-1}^2 \Delta_n}{(1 + \Delta_n^T \Gamma_{n-1} \Delta_n)^2}$$

и $\mathbb{E}\{\Delta_n \Delta_n^T \Gamma_n^2 \Delta_n \xi_n | \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\} = 0$ по тем же причинам.

Доказательство (b). Также из (2.7) получаем

$$\text{Tr}[\Gamma_n] = \text{Tr}[\Gamma_{n-1}] - \frac{\text{Tr}[\Gamma_{n-1} \Delta_n \Delta_n^T \Gamma_{n-1}]}{1 + \Delta_n^T \Gamma_{n-1} \Delta_n} = \text{Tr}[\Gamma_{n-1}] - \frac{\Delta_n^T \Gamma_{n-1}^2 \Delta_n}{1 + \Delta_n^T \Gamma_{n-1} \Delta_n}.$$

Так как $\text{Tr}[\Gamma_n] \leq \text{Tr}[\Gamma_{n-1}] \leq \dots \leq \text{Tr}[\Gamma_0]$, то в силу того, что Γ_n — положительно определенные матрицы для всех n , существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Tr}[\Gamma_n]$. Далее получаем

$$\text{Tr}[\Gamma_n] = \text{Tr}[\Gamma_0] - \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k^T \Gamma_{k-1}^2 \Delta_k}{1 + \Delta_k^T \Gamma_{k-1} \Delta_k} \leq \text{Tr}[\Gamma_0] - \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k^T \Gamma_{k-1}^2 \Delta_k}{(1 + \Delta_k^T \Gamma_{k-1} \Delta_k)^2}.$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$, так как

$$\Delta_k^T \Gamma_{k-1}^2 \Delta_k = \frac{\Delta_k^T \Gamma_{k-1}^2 \Delta_k}{(1 + \Delta_k^T \Gamma_{k-1} \Delta_k)^2},$$

получаем доказательство (b).

Доказательство (c). По свойству собственных значений матрицы заключаем, что

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n^T \Gamma_n \Delta_n &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \|\Delta_n\|^2 \lambda_{\min}(\Gamma_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \|\Delta_n\|^2 / \lambda_{\max}(\Gamma_n^{-1}) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\Delta_n\|^2 \text{Tr}[\Gamma_n^{-1}]}{(\rho + \sum_{k=1}^n \|\Delta_k\|^2) \lambda_{\max}(\Gamma_n^{-1})}.
\end{aligned}$$

Но по лемме Абея–Дини (см. [142]) $\sum_{n=1}^{\infty} \|\Delta_n\|^2 / (\gamma_0 + \sum_{k=1}^n \|\Delta_k\|^2) = \infty$ с вероятностью единица. Кроме того, $\text{Tr}[\Gamma_n^{-1}] / \lambda_{\max}(\Gamma_n^{-1}) = \mathcal{O}(1)$. Следовательно, утверждение (c) верно.

Доказательство (d). Нетрудно убедиться, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\Delta_n\|^4 \lambda_{\max}^2(\Gamma_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \|\Delta_n\|^4 \lambda_{\min}^{-2}(\Gamma_n^{-1}).$$

В соответствии с усиленным законом больших чисел Колмогорова (см. пункт П.1.3 на стр. 225),

$$n^{-1} \sum_{k=1}^n \Delta_k \Delta_k^T \rightarrow B$$

с вероятностью единица при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $(nB)^{-1} \Gamma_n^{-1} \rightarrow I$ с вероятностью единица и $n^{-1} \lambda_{\min}(\Gamma_n^{-1}) \rightarrow C_\Gamma > 0$ с вероятностью единица. Сходимость с вероятностью единица $\sum_{n=1}^{\infty} (\Delta_n^T \Gamma_n \Delta_n)^2$ будет обеспечена, если с вероятностью единица сходится $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \|\Delta_n\|^4$.

Для того, чтобы доказать сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \|\Delta_n\|^4$, используем суммирование частями

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^{-2} \|\Delta_k\|^4 &= n^{-1} (n^{-1} \sum_{k=1}^n \|\Delta_k\|^4) + \sum_{k=1}^{n-1} (k^{-2} - (k+1)^{-2}) \sum_{t=1}^k \|\Delta_t\|^4 \leq \\ &\leq n^{-1} (n^{-1} \sum_{k=1}^n \|\Delta_k\|^4) + \sum_{k=1}^{n-1} 2k^{-2} \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k \|\Delta_t\|^4. \end{aligned}$$

Но $\epsilon_k := k^{-1} \sum_{t=1}^k \|\Delta_t\|^4$ сходится с вероятностью единица при $k \rightarrow \infty$, так как $E\{\|\Delta_n\|^4\} < \infty$, следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty} 2k^{-2} \epsilon_k < \infty$ с вероятностью единица. Более того, $n^{-2} \sum_{k=1}^n \|\Delta_k\|^4 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \|\Delta_n\|^4$ доказана, а значит, закончено доказательство (d).

Вернемся к доказательству теоремы 2.4. В силу алгоритма оценивания (2.7) имеем

$$\hat{\theta}_n - \theta^* = \hat{\theta}_{n-1} - \theta^* - \Gamma_n \Delta_n \Delta_n^T \eta_n + \Gamma_n \Delta_n \xi_n$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 &= ((\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)^T - \eta_n^T \Delta_n \Delta_n^T \Gamma_n) ((\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*) - \Gamma_n \Delta_n \Delta_n^T \eta_n) + \\ &+ \xi_n^2 \Delta_n^T \Gamma_n^2 \Delta_n + ((\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)^T - \eta_n^T \Delta_n \Delta_n^T \Gamma_n) \xi_n \Gamma_n \Delta_n + \\ &+ \xi_n \Delta_n^T \Gamma_n ((\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*) - \Gamma_n \Delta_n \Delta_n^T \eta_n). \end{aligned}$$

Учитывая полученные выше соотношения (a), рассмотрим условные по отношению к σ -алгебре $\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}$ математические ожидания от обеих частей последней формулы

$$\begin{aligned} E\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 | \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\} &= \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 - \eta_n^T E\{\Delta_n \Delta_n^T \Gamma_n | \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\} (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*) - \\ &- (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)^T E\{\Gamma_n \Delta_n \Delta_n^T | \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\} \eta_n + \eta_n^T E\{\Delta_n \Delta_n^T \Gamma_n^2 \Delta_n \Delta_n^T | \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\} \eta_n + \\ &+ E\{(v_n - E\{\varphi_n\})^T \eta_n\}^2 | \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\} E\{\Delta_n^T \Gamma_n^2 \Delta_n | \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\}. \end{aligned}$$

Усреднив по отношению к σ -алгебре $\hat{\mathcal{F}}_{n-1}$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 | \hat{\mathcal{F}}_{n-1}\} &\leq \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 + \mathbb{E}\{\|\Delta_n\|^4 \lambda_{max}^2(\Gamma_n) \|\eta_n\|^2 | \hat{\mathcal{F}}_{n-1}\} - \\ &\quad - (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)^T \mathbb{E}\{(\Gamma_n \Delta_n \Delta_n^T + \Delta_n \Delta_n^T \Gamma_n) | \hat{\mathcal{F}}_{n-1}\} (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*) + \\ &\quad + (2v_n^2 + 2M_\varphi^2 \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta_\star\|^2 + rM_\varphi^2 \sigma_w^2) \mathbb{E}\{\Delta_n^T \Gamma_n^2 \Delta_n | \hat{\mathcal{F}}_{n-1}\}. \end{aligned}$$

Далее, усредняя по v_n , на основании допущения **(LR.Bi)**, заключаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta_\star\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} &\leq (1 + \mathbb{E}\{2M_\varphi^2 \Delta_n^T \Gamma_n^2 \Delta_n + \|\Delta_n\|^4 \lambda_{max}^2(\Gamma_n) | \mathcal{F}_{n-1}\}) \times \\ &\times \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta_\star\|^2 - (\hat{\theta}_{n-1} - \theta_\star)^T \mathbb{E}\{(\Gamma_n \Delta_n \Delta_n^T + \Delta_n \Delta_n^T \Gamma_n) | \mathcal{F}_{n-1}\} (\hat{\theta}_{n-1} - \theta_\star) + \\ &\quad + r\sigma_w^2 \mathbb{E}\{\|\Delta_n\|^4 \lambda_{max}^2(\Gamma_n) | \mathcal{F}_{n-1}\} + (2\sigma_v^2 + rM_\varphi^2 \sigma_w^2) \mathbb{E}\{\Delta_n^T \Gamma_n^2 \Delta_n | \mathcal{F}_{n-1}\}. \end{aligned}$$

Применяя лемму Роббинса–Сигмунда (см. лемма П.1 на стр. 227) к последнему соотношению, в силу утверждений (b) и (d), заключаем, что последовательность $\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2\}$ с вероятностью единица имеет конечный предел и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*)^T \mathbb{E}\{\Gamma_n \Delta_n \Delta_n^T + \Delta_n \Delta_n^T \Gamma_n | \hat{\mathcal{F}}_{n-1}\} (\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*) < \infty.$$

В силу утверждения (c), $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\{\Gamma_n \Delta_n \Delta_n^T | \hat{\mathcal{F}}_{n-1}\} = \infty$, а, следовательно, $\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 \rightarrow 0$ с вероятностью единица при $n \rightarrow \infty$. Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение теоремы. Из логики построения оценок РМНК следует, что

$$\hat{\theta}_n = \Gamma_n \sum_{k=1}^n \Delta_k (y_k - \mathbb{E}\{\varphi_k^T\} \theta_{n-1}), \quad \Gamma_n = \left(\sum_{k=1}^n \Delta_k \Delta_k^T + \gamma_0 \mathbf{I} \right)^{-1}$$

и, значит,

$$\hat{\theta}_n - \theta^* = \left(\sum_{k=1}^n \Delta_k \Delta_k^T + \gamma_0 \mathbf{I} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \Delta_k (\xi_k + \Delta_k^T (\theta_k^* - \theta^*)) - \gamma_0 \theta^* \right).$$

Обозначив $\epsilon_k = \xi_k + \Delta_k^T (\theta_k^* - \theta^*)$, имеем

$$\begin{aligned} (\hat{\theta}_n - \theta^*) (\hat{\theta}_n - \theta^*)^T &= \left(\sum_{k=1}^n \Delta_k \Delta_k^T + \gamma_0 \mathbf{I} \right)^{-1} \left(\gamma_0^2 \theta_\star \theta_\star^T + \sum_{k=1}^n \Delta_k \Delta_k^T \epsilon_k^2 - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_0 \theta_\star \sum_{i=1}^n \Delta_i^T \epsilon_i - \gamma_0 \sum_{i=1}^n \Delta_i \epsilon_i \theta_\star^T + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \Delta_i \Delta_j^T \epsilon_i \epsilon_j \right) \left(\sum_{k=1}^n \Delta_k \Delta_k^T + \gamma_0 \mathbf{I} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Сначала покажем, что для любого $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$

$$(e) \quad \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{k=1}^n \Delta_k \Delta_k^T + \gamma_0 \mathbf{I}\right)^{-1} \Delta_i \Delta_j^T \epsilon_i \epsilon_j \left(\sum_{k=1}^n \Delta_k \Delta_k^T + \rho \mathbf{I}\right)^{-1}\right\} = 0.$$

Пусть для определенности $i > j$ и \mathcal{F}_n^i — σ -алгебра, порождаемая случайными величинами $\{\Delta_1, \dots, \Delta_{i-1}, \Delta_{i+1}, \dots, \Delta_n, \theta_1^*, \dots, \theta_{i-1}^*, \theta_{i+1}^*, \dots, \theta_n^*, \xi_1, \dots, \xi_n\}$. Рассмотрим условное математическое ожидание, учитывая независимость случайной величины Δ_i от θ_i^* :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{k=1}^n \Delta_k \Delta_k^T + \gamma_0 \mathbf{I}\right)^{-1} \Delta_i \Delta_j^T \epsilon_i \epsilon_j \left(\sum_{k=1}^n \Delta_k \Delta_k^T + \gamma_0 \mathbf{I}\right)^{-1} \middle| \mathcal{F}_n^i\right\} = \\ & = \Delta_j^T \epsilon_j \mathbb{E}\{\Gamma_n(\Delta_i \xi_i + \Delta_i \Delta_i^T w_i) \Gamma_n \middle| \mathcal{F}_n^i\} = \\ & = \Delta_j^T \epsilon_j \mathbb{E}\{\Gamma_n \Delta_i \xi_i \Gamma_n \middle| \mathcal{F}_n^i\} + \Delta_j^T \epsilon_j \mathbb{E}\{\Gamma_n \Delta_i \Delta_i^T\} \mathbb{E}\{w_i \Gamma_n\} = \\ & = \Delta_j^T \epsilon_j \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{k=1}^n \Delta_k \Delta_k^T + \gamma_0 \mathbf{I}\right)^{-1} \Delta_i \xi_i \left(\sum_{k=1}^n \Delta_k \Delta_k^T + \gamma_0 \mathbf{I}\right)^{-1} \middle| \mathcal{F}_n^i\right\} = 0, \end{aligned}$$

так как, в силу допущения **(LR.A)**, случайная величина Δ_i не зависит от $\{\Delta_1, \dots, \Delta_{i-1}, \Delta_{i+1}, \dots, \Delta_n, \xi_i\}$, и выражение под знаком условного математического ожидания является нечетной функцией от Δ_i , интегрируемой по симметричному распределению $P_i(\cdot)$. Следовательно, (e) выполняется.

Аналогично можно показать, что для любого $i = 1, \dots, n$

$$\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{k=1}^n \Delta_k \Delta_k^T + \gamma_0 \mathbf{I}\right)^{-1} \rho \theta_i^* \Delta_i^T \epsilon_i \left(\sum_{k=1}^n \Delta_k \Delta_k^T + \rho \mathbf{I}\right)^{-1}\right\} = 0.$$

Теперь получаем, в соответствии с предположением об ограниченности Δ_n и **(LR.Biii)**, при достаточно больших n

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\{(\hat{\theta}_n - \theta^*)(\hat{\theta}_n - \theta^*)^T\} = \\ & \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{k=1}^n \Delta_k \Delta_k^T + \gamma_0 \mathbf{I}\right)^{-1} (\rho^2 \theta_\star \theta_\star^T + \sum_{k=1}^n \Delta_k \Delta_k^T \epsilon_k^2) \left(\sum_{k=1}^n \Delta_k \Delta_k^T + \gamma_0 \mathbf{I}\right)^{-1}\right\} \leq \\ & \leq \hat{C} \mathbb{E}\{\Gamma_n\} \end{aligned}$$

с некоторой постоянной \hat{C} . Так как $\sum_{k=1}^n \Delta_k \Delta_k^T \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью единица и $\|\Gamma_n\| \leq \gamma_0^{-1}$, то, по теореме Лебега о доминирующей последовательности, получаем $\mathbb{E}\{(\hat{\theta}_n - \theta^*)(\hat{\theta}_n - \theta^*)^T\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 2.4 закончено.

Глава 3

Оценка параметров авторегрессии и скользящего среднего при произвольных помехах

Рандомизированные алгоритмы оценивания из второй главы можно использовать и для решения тех проблем, в которых модель наблюдений описывается с помощью авторегрессии или скользящего среднего. В модели авторегрессии можно оценивать часть неизвестных параметров, для скользящего среднего эти алгоритмы предоставляют возможность полной идентификации. Более сложной является задача полной идентификации параметров моделей авторегрессии скользящего среднего, которые используются для описания динамических систем управления.

Сложность проблемы идентификации часто обусловлена недостаточной вариативностью входного сигнала. В системах управления возможность подачи на вход объекта управления (ОУ) специальных управляющих (пробных, тестовых) сигналов может существенно облегчить проблему восстановления неизвестных параметров ОУ. Так, например, если на вход линейного устойчивого стационарного ОУ подать гармонический сигнал, то после окончания переходного процесса выход ОУ будет также гармоническим сигналом (предполагается, что помехи отсутствуют). Амплитуда этого сигнала пропорциональна значению передаточной функции ОУ на частоте гармонического сигнала. Изменяя частоту, таким образом можно построить передаточную функцию ОУ, т.е., по существу, идентифицировать его. Аналогично, подача входных воздействий в виде единичных скачков позволяет восстановить импульсную функцию ОУ.

Использование специальных пробных сигналов в качестве управляющих позволяет осуществить идентификацию ОУ и при аддитивно действующей на него помехе. При этом помеха может не обладать ка-

кими-либо полезными стохастическими свойствами и вообще не быть случайной. Восстановление неизвестных значений параметров обеспечивается свойствами пробного сигнала, который подается в смеси с собственно управляющим воздействием. Рассматриваемый ниже метод идентификации параметров ОУ, описываемого моделью авторегрессии скользящего среднего, основан на перепараметризации математической модели ОУ. Вместо исходных параметров объекта — его коэффициентов — удобно использовать некоторые другие параметры, находящиеся с исходными во взаимно однозначном соответствии. Такая перепараметризация приводит к записи ОУ в виде модели скользящего среднего. Это позволяет для оценивания неизвестных значений параметров обоснованно воспользоваться рекуррентным рандомизированным алгоритмом типа стохастической аппроксимации.

Обсуждаемая версия метода идентификации с использованием пробных сигналов была первоначально предложена в работе [153], затем в [154] была обобщена на случай замкнутых систем управления. В этих работах предполагалась априорная устойчивость ОУ, беложумность помехи и на зашумленное управление накладывалось ещё одно довольно ограничительное условие, которое, как было показано в [155], может выполняться только при специальных видах обратной связи и достаточно точном знании параметров ОУ. В [1, 2] для объектов, описываемых уравнениями в пространстве состояний, была предложена модификация метода, в которой не требовалось выполнения предположения об априорной устойчивости ОУ, а относительно внешней аддитивно действующей на ОУ помехи предполагалась лишь ограниченность ее вторых моментов и некоррелированность с пробным сигналом (возмущением в канале управления). Новый метод опирался на определенный способ перепараметризации набора неизвестных параметров, но размерность вводимого нового матричного параметра была слишком высокой. В [13] для объектов, описываемых разностными уравнениями в форме *вход-выход*, была предложена версия метода, позволяющая минимизировать число оцениваемых параметров.

В пункте 3.3.3 для метода идентификации с использованием пробных воздействий приводятся условия состоятельности доставляемых им оценок неизвестных коэффициентов линейного дискретного объекта управления, подверженного действию аддитивной ограниченной помехи. Помеха может не быть случайной и не обладать полезными статистическими свойствами, позволяющими обоснованно использовать традиционные методы математической статистики.

3.1 Применение к моделям авторегрессии

Предположения **(LR.B)** о помехах наблюдения вполне умеренные и выполняются для широкого класса помех. В частности, последовательность $\{v_t\}$ может формироваться процессом скользящего среднего. Более того, предположения **(LR.A,B)** не нарушаются, если помехи v_t зависимы с предыдущими входами $\varphi_{t-1}, \varphi_{t-2}, \dots$ и выходами y_{t-1}, y_{t-2}, \dots . Это позволяет применить полученные выше результаты к авторегрессионным моделям.

Рассмотрим модель наблюдений

$$(3.1) \quad y_t + \sum_{i=1}^p a^{(i)} y_{t-i} = \varphi_t^T \theta_t^* + v_t, \quad \theta_t^* = \theta^* + w_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

с некоторыми начальными значениями $y_{-t}, t = 0, 1, \dots, p-1$ (см., например, [39, 175]). Обычный подход состоит в оценивании двух групп параметров. Здесь для начала остановимся на задаче об оценке только вектора параметров $\theta^* \in \mathbb{R}^r$, а оставшиеся коэффициенты $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(p)}$ будем считать несущественными параметрами. Принимая

$$\xi_t = -a^{(1)} y_{t-1} - a^{(2)} y_{t-2} - \dots - a^{(p)} y_{t-p} + v_t,$$

можно сократить запись для схемы наблюдения (3.1)

$$y_t = \varphi_t^T \theta_t^* + \xi_t, \quad \theta_t^* = \theta^* + w_t.$$

Пусть дополнительно выполняются следующие предположения.

(AR.1) Все корни многочлена $a(\lambda) = a^{(p)} \lambda^p + a^{(p-1)} \lambda^{p-1} + \dots + a^{(1)} \lambda + 1$ по абсолютной величине больше единицы.

(AR.2) Начальные значения $y_{-t}, t = 0, 1, \dots, p-1$ являются или произвольными и неслучайными числами, или случайными переменными с конечными вторыми моментами и независимыми от входов $\varphi_t, t = 1, 2, \dots$

Заметим, что при выполнении допущений **(LR.A,AR.1)** входы модели φ_t независимы от σ -алгебры, генерируемой $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{t-1}, w_1, \dots, w_t, \xi_1, \dots, \xi_t\}$.

Если выполнены допущения **(LR.A,Bii,AR.1,2)**, тогда вторые моменты ξ_t ограничены. Поэтому теоремы 2.2 и 2.3 применимы и гарантируют среднеквадратичную сходимость оценок, полученных по алгоритму (2.2) типа PCA и описывают их точность.

Если выполнены более строгие условия **(LR.A',Biii)**, а входы φ_t также ограничены: $|\varphi_t| \leq C_\varphi$ с вероятностью единица, тогда можно показать,

что ξ_t ограничены. Следовательно, в случае рассматриваемой модели (3.1) для любого из трех алгоритмов: (2.2), (2.6) и (2.7), выполняются результаты теорем 2.1–2.4 о сходимости с вероятностью единица и в среднеквадратичном смысле.

Можно показать при некоторых дополнительных предположениях о помехах v_t (например, они случайные величины), что сходимость обоих алгоритмов оценивания становится медленнее в случае авторегрессионной модели (3.1), хотя порядок t^{-1} остается тем же самым. Эти алгоритмы в случае "хороших" помех наблюдения хуже в смысле скорости сходимости, чем, например, некоторые из предлагаемых в [63], оценивающих сразу все параметры уравнения наблюдений (3.1). Однако, они имеют ряд вычислительных преимуществ. Во-первых, снижение размерности вектора оцениваемых параметров упрощает вычисления. Во-вторых, оценки параметров авторегрессии могут выпадать из области устойчивости модели (3.1), что ухудшает их качество и заставляет использовать некоторые дополнительные уловки, например, проекцию оценок на область устойчивости. Оценки, предложенные здесь, не обладают этим недостатком.

3.2 Оценивание параметров модели скользящего среднего

Пусть модель наблюдений описывается уравнением

$$(3.2) \quad y_t = \sum_{i=0}^p \varphi_{t-i}^T \theta_i^* + v_t, \quad t = 0, 1, \dots,$$

где $y_t \in \mathbb{R}^1$ — выходы (наблюдения), $\varphi_t \in \mathbb{R}^q$ — входы, $v_t \in \mathbb{R}^1$ — помехи, $\theta_0^*, \dots, \theta_p^* \in \mathbb{R}^q$ — векторы неизвестных параметров, φ_{-t} , $t = 1, 2, \dots, p$ — начальные данные.

Зададим $s > p$ — некоторое натуральное число.

Пусть $i \in \{0, 1, \dots, p\}$. Принимая

$$\xi_{n,i} = \varphi_{sn+i}^T \theta_0^* + \dots + \varphi_{sn+1}^T \theta_{i-1}^* + \varphi_{sn-1}^T \theta_{i+1}^* + \dots + \varphi_{sn+i-p}^T \theta_p^* + v_{sn+i},$$

можно, в силу схемы наблюдения (3.2), для последовательности наблюдений $\{y_{sn+i}\}_{n \geq 0}$ записать

$$y_{sn+i} = \varphi_{sn}^T \theta_i^* + \xi_{n,i}.$$

Заметим, что при выполнении допущения:

(LR.A'') входы $\{\varphi_t\}_{t \geq 0}$ представляют собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов, удовлетворяющих условию **(LR.A')**, и при любом t векторы φ_t не зависят от σ -алгебры $\bar{\mathcal{F}}_{t,p}$, порожденной $\{\varphi_0, \dots, \varphi_{t-1}, v_0, \dots, v_{t+p}\}$,

входы модели φ_{sn} ($s = 1, 2, \dots, n = 0, 1, \dots$) не зависят от σ -алгебры, генерируемой $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{s(n-1)}, \xi_1, \dots, \xi_n\}$. Если дополнительно для помех $\{v_t\}$ выполнено условие **(LR.Bii)** и входы φ_t также в среднеквадратичном ограничены: $E\{\|\varphi_t\|\} \leq \sigma_\varphi^2$, тогда

$$\forall n, i \quad E\{\xi_{n,i}^2\} \leq \sigma_\xi^2 = (p+1) \left(\sigma_v^2 + \sigma_\varphi^2 \sum_{j=0}^p \|\theta_j^*\|^2 \right) < \infty.$$

Следовательно, для оценивания вектора θ_i^* можно использовать любой из трех алгоритмов: (2.2), (2.6) и (2.7). В силу произвольности $i \in \{0, 1, \dots, p\}$, для оценивания всех параметров модели скользящего среднего (3.2) можно использовать $p+1$ параллельных рандомизированных алгоритмов, основанных на любом из предложенных ранее для оценивания параметров линейной регрессии. Обозначим через

$$Y_n = \begin{pmatrix} y_{sn} \\ y_{sn+1} \\ \vdots \\ y_{sn+p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+1}, \quad \theta^* = (\theta_0^*, \dots, \theta_p^*) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{p+1}.$$

В матричной форме алгоритм РСА (2.2) для оценивания всех параметров модели скользящего среднего имеет вид

$$(3.3) \quad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \Gamma \Delta_n (\varphi_{sn}^T \hat{\theta}_{n-1} - Y_n^T), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\alpha_n \geq 0$ — неслучайная последовательность, определяющая шаг алгоритма, и Γ — некоторая положительно определенная $q \times q$ матрица: $-\Gamma V + \frac{1}{2}I$ — устойчивая. Аналогичным образом записываются алгоритм с усреднением на основе (2.6) и РМНК на базе (2.7).

Оценки алгоритма (3.3) остаются сильносостоятельными и при более слабых предположениях о входах, чем **(LR.A")**.

(МА.1) Последовательность $\{\Delta_n\}_{n \geq 0}$ представляет собой набор реализаций независимых центрированных случайных векторов с симметричными функциями распределения $P_n(\cdot)$ и матрицами ковариаций $E\{\Delta_n \Delta_n^T\} = \beta_n V > 0$, причем $E\{\|\Delta_n\|^4\} \leq \beta_n^2 M_4^4 < \infty$. При любом n и заданном s векторы Δ_n не зависят от σ -алгебры $\mathcal{F}_{sn,p}$, порожденной $\{\varphi_0, \dots, \varphi_{sn-1}, \varphi_{sn+1}, \dots, \varphi_{sn+p}, v_0, \dots, v_{sn+p}\}$.

(МА.2) Пусть $s > p$ — некоторое натуральное число. Входы $\{\varphi_t\}_{t \geq 0}$ представляют собой последовательность случайных векторов, ограниченных в среднеквадратичном смысле: $E\{\|\varphi_t\|\} \leq \sigma_\varphi^2$. При любом $n \geq 0$ математические ожидания $E\{\varphi_{sn}\}$ известны и равномерно ограничены: $\|E\{\varphi_{sn}\}\| \leq M_\varphi < \infty$. Последовательность случайных векторов $\{\Delta_n\}_{n \geq 0}$: $\Delta_n = \varphi_{sn} - E\{\varphi_{sn}\}$, удовлетворяет условию **(МА.1)**.

Следующая теорема является непосредственным следствием доказательств теорем 2.1 и 2.2.

Т е о р е м а 3.1 *Если выполнены условия:*

(МА.2) для входов модели, (LR.Bii) для помех, матрица $-\Gamma B + \frac{1}{2}I$ — устойчивая и при $n \rightarrow \infty$

$$\alpha_n \rightarrow 0, \alpha_n \beta_n = n^{-1}, \beta_n = \beta_\infty + \mathcal{O}(n^{-1}), \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 (1 + \beta_n^2) < \infty,$$

тогда последовательность оценок $\{\hat{\theta}_n\}$, доставляемых алгоритмом (3.3), сильнососостоятельная и её асимптотическая скорость сходимости характеризуется неравенствами:

$$E\{(\hat{\theta}_{n,i} - \theta_i^*)(\hat{\theta}_{n,i} - \theta_i^*)^T\} \leq n^{-1} S + o(n^{-1}), \quad i = 0, 1, \dots, p,$$

в которых $\hat{\theta}_{n,i}$ — i -ый столбец матрицы $\hat{\theta}_n$, а матрица S является решением матричного уравнения

$$\Gamma B S + S B \Gamma - S = \beta_\infty (\sigma_\xi^2 + M_\varphi^2 \rho) \Gamma B \Gamma$$

при каком-либо $\rho > 0$.

3.3 Идентификация динамического объекта

Предположим, что объект управления (ОУ) со скалярными входами и выходами описывается в дискретном времени авторегрессионной моделью скользящего среднего (SISO ARMA модель):

$$(3.4) \quad a(q^{-1}, \tau_\star) y_t = b(q^{-1}, \tau_\star) u_t + v_t, \quad t = k, k+1, \dots,$$

в которой y_t — выход ОУ; u_t — вход ОУ (управляющее воздействие); v_t — помеха (возмущающее воздействие); q^{-1} — операция сдвига на такт назад: $q^{-1} y_t = y_{t-1}$;

$$a(q^{-1}, \tau_\star) = 1 + q^{-1} a_\star^{(1)} + \dots + q^{-p} a_\star^{(p)},$$

$$b(q^{-1}, \tau_\star) = q^{-k} b_\star^{(k)} + q^{-k-1} b_\star^{(k+1)} + \dots + q^{-p} b_\star^{(p)};$$

натуральное число p — порядок модели; k — запаздывание в управлении, $1 \leq k \leq p$. Обозначим

$$\tau_\star = \begin{pmatrix} a_\star^{(1)} \\ a_\star^{(2)} \\ \vdots \\ a_\star^{(p)} \\ b_\star^{(k)} \\ b_\star^{(k+1)} \\ \vdots \\ b_\star^{(p)} \end{pmatrix}$$

— вектор коэффициентов уравнения. Пусть частично или полностью коэффициенты уравнения ОУ неизвестны. *Требуется* по наблюдениям за выходами ОУ $\{y_t\}$ при известных входах (управлениях) $\{u_t\}$ оценить значения неизвестных коэффициентов уравнения ОУ (3.4).

Обозначив через

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} -y_{t-1} \\ \vdots \\ -y_{t-p} \\ u_{t-k} \\ \vdots \\ u_{t-p} \end{pmatrix},$$

уравнение ОУ (3.4) можно переписать в виде

$$y_t = \varphi_t^T \tau_\star + v_t,$$

где $\varphi_t^T \tau_\star$ можно интерпретировать как полезный сигнал, зависящий от неизвестного вектора параметров τ_\star . Этот сигнал наблюдается на фоне помехи. В такой постановке задача идентификации (восстановления, либо оценивания параметра θ^\star) близка по смыслу к задаче оценивания параметров линейной регрессии из второй главы.

Построение идентифицирующего алгоритма обычно основано на использовании тех или иных свойств помехи $\{v_t\}$ в уравнении (3.4). При определенных предположениях о статистических свойствах помех и управляющих воздействий задача идентификации допускает решение, и оно имеет вид рекуррентных соотношений, доставляющих последовательность оценок, сколь угодно близких к вектору неизвестных параметров при неограниченном увеличении объема наблюдений. Так, если помеха белозумная, то широко используется метод наименьших квадратов (либо его рекуррентные модификации), при конечно коррелированной помехе часто используется метод инструментальной переменной, при известных плотностях распределения временного ряда $\{v_t\}$ применяется метод максимума правдоподобия. В рассматриваемой здесь задаче помеха $\{v_t\}$ полезными статистическими свойствами может не обладать (да и вообще может не быть случайной), поэтому упомянутые методы неприменимы. Если управления формируются в виде детерминированных неупреждающих функций обратной связи

$$u_t = \mathcal{U}_t(y_t, y_{t-1}, \dots, u_{t-1}, \dots),$$

то при произвольных неизвестных, но ограниченных помехах

$$|v_t| \leq C_v$$

($C_v > 0$ — известный уровень помехи), надеяться на возможность точной идентификации нереально. На основании t наблюдений можно уверенно утверждать только то, что вектор неизвестных параметров принадлежит некоторому множеству

$$\mathcal{T}_t = \cap_{i=k}^t \{ \tau : |y_i - \varphi_i^T \tau| \leq C_v \},$$

размер которого совсем не обязательно должен уменьшаться до нуля при $t \rightarrow \infty$. Для точного решения так "плохо" поставленной задачи один из способов, дающих состоятельные оценки вектора неизвестных параметров, заключается в рандомизации стратегии управления за счет добавления к управлениям, генерируемым по законам обратной связи, пробного случайного возмущения с задаваемыми статистическими свойствами. Оказывается, использование случайных пробных сигналов в канале управления позволяет восстановить неизвестные коэффициенты уравнения (3.4) при весьма общих предположениях о помехе $\{v_t\}$.

3.3.1 Пробный сигнал

Для того, чтобы последовательность стохастических регрессоров рассматриваемой системы обеспечивала выполнение условия *постоянного возбуждения*, являющегося обычно необходимым для построения состоятельной последовательности оценок, введем в рассмотрение новое (дополнительное) случайное возмущение (возбуждение). Если его ковариационная матрица стремится к нулевой при $t \rightarrow \infty$, то помимо состоятельности оценок можно будет надеяться на предельную оптимальность используемой стратегии управления. Этот подход, называемый в литературе *метод затухающего возбуждения* (см.[13, 78]), заключается в следующем.

Пусть $s > 2p - k$ — некоторое натуральное число, и $\{\Delta_n\}_{n \geq 0}$ — скалярное пробное возмущение (случайная последовательность), удовлетворяющее условию (МА.1).

Условимся управления $\{u_t\}$ формировать по правилу

$$(3.5) \quad u_{sn+i} = \begin{cases} \bar{u}_{sn} + R_n \Delta_n, & \text{при } i = 0, \\ \bar{u}_{sn+i}, & \text{при } i = 1, 2, \dots, s-1, \end{cases}$$

где

$$R_n = C_R \left(1 + \sum_{j=1}^p |y_{sn+k-j}| + \sum_{j=1}^{p-k} |\bar{u}_{sn-j}| \right)$$

с некоторой постоянной $C_R > 0$, и собственно управления $\{\bar{u}_t\}$ определяются по закону обратной связи

$$(3.6) \quad \bar{u}_t = \mathcal{U}_t(y_t, y_{t-1}, \dots, \bar{u}_{t-1}, \dots),$$

в котором функции $\mathcal{U}_t(\cdot, \dots, \cdot)$ удовлетворяют условию

(**RI.1**) скорость роста значений функций $\mathcal{U}_t(\cdot, \dots, \cdot)$, $t = 0, 1, \dots$ равномерно ограничена:

$$\mathcal{U}_t(y_t, y_{t-1}, \dots, \bar{u}_{t-1}, \dots) \leq R_n, \quad \forall n = 0, 1, \dots, t \in [sn, s(n+1)).$$

В частности, возможно $\bar{u}_t = 0$, $t = 0, 1, \dots$

Предположим, что

(**RI.2**) начальные значения $y_t : t < k$ и $u_t : t < 0$, являются или произвольными и неслучайными числами, или случайными переменными с конечными вторыми моментами и независимыми от $\{\Delta_n\}$;

(**RI.3**) известно ограниченное и замкнутое множество $\mathcal{T} : \tau_\star \in \mathcal{T}$.

3.3.2 Введение параметра оценивания

Обсуждаемый далее идентифицирующий алгоритм основан на перепараметризации уравнения ОУ (3.4), позволяющей преобразовать его к виду, который незначительно отличается от *линейной схемы наблюдения* по отношению к пробному сигналу. Перейдем к описанию этого преобразования.

Поскольку $a(0, \tau) = 1$, то для произвольного фиксированного $l \in \mathbb{N}$ уравнение

$$\Psi_l(\lambda, \tau)a(\lambda, \tau) + \lambda^l \Upsilon_l(\lambda, \tau) = 1$$

однозначно разрешимо относительно многочленов $\Psi_l(\lambda, \tau)$ и $\Upsilon_l(\lambda, \tau)$ при том условии, что степень многочлена $\Psi_l(\lambda, \tau)$ меньше l . Для нахождения коэффициентов $\Psi_l^{(i)}$ многочлена $\Psi_l(\lambda, \tau)$ можно решить систему линейных уравнений

$$\Psi_l^{(0)} = 1, \quad \frac{d^i}{(dt)^i} \Psi_l(\lambda, \tau)a(\lambda, \tau)|_{\lambda=0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

матрица коэффициентов которой имеет нижнетреугольную форму. После этого формула

$$\Upsilon_l(\lambda, \tau) = \frac{1 - \Psi_l(\lambda, \tau)a(\lambda, \tau)}{\lambda^l}$$

определяет многочлен $\Upsilon_l(\lambda, \tau)$ (числитель в правой части делится нацело на λ^l в силу определяющего соотношения, связывающего многочлены $\Psi_l(\lambda, \tau)$ и $\Upsilon_l(\lambda, \tau)$). Далее считаем, что многочлены $\Psi_l(\lambda, \tau)$ и $\Upsilon_l(\lambda, \tau)$ известны при каждом $\tau \in \mathcal{T}$. Действуя на обе части уравнения ОУ (3.4) оператором $\Psi_l(q^{-1}, \tau_\star)$, получаем

$$y_t = \Upsilon_l(q^{-1}, \tau_\star)y_{t-l} + \Psi_l(q^{-1}, \tau_\star)b(q^{-1}, \tau_\star)u_t + \Psi_l(q^{-1}, \tau_\star)v_t.$$

Разобьём множество \mathbb{N} натуральных чисел на непересекающиеся подмножества (дискретные интервалы): $\mathbb{N}_n = \{sn + k, sn + k + 1, \dots, s(n + 1) + k - 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. На интервале с номером n уравнение ОУ (3.4) может быть представлено в виде

$$y_{sn+l} = \Upsilon_l(q^{-1}, \tau_\star)y_{sn} + \Psi_l(q^{-1}, \tau_\star)b(q^{-1}, \tau_\star)u_{sn+l} + \Psi_l(q^{-1}, \tau_\star)v_{sn+l},$$

$l = k, 2, \dots, s + k - 1$. Обозначим через $\theta_\star^{(i)} = \theta^{(i)}(\tau_\star)$ коэффициент при u_{sn} в правой части последней формулы при $l = k + i - 1$. Эти коэффициенты удовлетворяют соотношению

$$\theta_\star^{(i)} = \theta^{(i)}(\tau_\star) = \sum_{l=k}^{i+k-1} \Psi_l^{(l-k)}(\tau_\star)b_\star^{(i+2k-l-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Величины $\theta_\star^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, s$ возьмём в качестве *новых параметров* вместо исходных параметров τ_\star . Новые параметры обладают следующим почти очевидным свойством. В силу определения, они удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a(q^{-1}, \tau_\star)\theta_\star^{(i)} = b_\star^{(k+i-1)}, & i = 1, 2, \dots, s, \\ \theta_\star^{(i)} = 0, \quad i < 1, & b_\star^{(j)} = 0, \quad j > p. \end{cases}$$

Введенный новый набор параметров может оказаться избыточным в том смысле, что для восстановления неизвестных компонент вектора τ_\star не обязательно нужны значения всех $\theta_\star^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, s$. Например, если неизвестен всего один коэффициент $b_\star^{(k)}$, то для его восстановления достаточно знать только $\theta_\star^{(1)}$. Выберем $r \leq s$ — размерность векторов новых параметров — из условия возможности однозначного восстановления вектора τ_\star по соответствующему ему вектору новых параметров. Более точно, пусть $r \in \mathbb{N}$. Для любого вектора $\tau \in \mathcal{T}$ определим $r \times r$ матрицу $A(\tau)$ и r -вектор $B(\tau)$ по правилу:

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^{(1)} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a^{(2)} & a^{(1)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a^{(p)} & \dots & a^{(1)} & 1 \end{pmatrix}, B(\tau) = \begin{pmatrix} b^{(k)} \\ \vdots \\ b^{(p)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор θ^\star размерности r , составленный из введенных выше новых параметров, задается формулой

$$\theta^\star = \theta(\tau_\star) = \begin{pmatrix} \theta^{(1)}(\tau_\star) \\ \theta^{(2)}(\tau_\star) \\ \vdots \\ \theta^{(r)}(\tau_\star) \end{pmatrix} = A^{-1}(\tau_\star)B(\tau_\star),$$

которая определяет отображение $\theta(\tau)$ множества $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^{2p-k+1}$ на некоторое подмножество $\Theta \subset \mathbb{R}^r$. Наиболее подходящее значение r — это минимальная размерность множества Θ , при которой только что определенное отображение $\theta(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow \Theta$ имеет в некоторой окрестности точки θ^* непрерывное обратное:

$$\bar{\tau}(\cdot) = \theta^{-1}(\cdot) : \Theta \rightarrow \mathcal{T}.$$

Если неизвестны все коэффициенты многочленов $a(\cdot, \tau_*)$ и $b(\cdot, \tau_*)$ до степеней p_a и p_b соответственно, то можно взять $r = p_a + p_b - k + 1$ и обратное преобразование $\tau(\theta)$ определить так. Для произвольного вектора θ из \mathbb{R}^r зададим набор из $p_a + 1$ векторов $\mathcal{A}_l(\theta) \in \mathbb{R}^r$ по правилу:

$$\mathcal{A}_l(\theta) = \begin{pmatrix} \theta^{(l+p_b-k)} \\ \theta^{(l+p_b-k-1)} \\ \vdots \\ \theta^{(l+p_b-k-p_a)} \end{pmatrix}, \quad (\theta^{(i)} = 0, \quad i \leq 0), \quad l = 0, 1, \dots, p_a.$$

Пусть вектор

$$\bar{a} = \bar{a}(\theta) = \begin{pmatrix} \bar{a}^{(1)}(\theta) \\ \bar{a}^{(2)}(\theta) \\ \vdots \\ \bar{a}^{(p_a)}(\theta) \end{pmatrix}$$

найден из условия

$$\bar{a} = \arg \min_{a \in \mathbb{R}^{p_a}} \left(\left(\mathcal{A}_{p_a-1}(\theta) \mathcal{A}_{p_a-2}(\theta) \cdots \mathcal{A}_0(\theta) \right) \bar{a} + \mathcal{A}_{p_a}(\theta) \right),$$

где под $\arg \min_a f(a)$ понимается произвольный вектор a , на котором функция $f(\cdot)$ принимает наименьшее значение. Если определить вектор

$$\bar{b}(\theta) = \begin{pmatrix} \bar{b}^{(k)}(\theta) \\ \bar{b}^{(k+1)}(\theta) \\ \vdots \\ \bar{b}^{(p_b)}(\theta) \end{pmatrix}$$

с помощью соотношений:

$$\bar{b}^{(l)} = \bar{b}^{(l)}(\theta) = \theta^{(l)} + \bar{a}^{(1)}(\theta)\theta^{(l-1)} + \bar{a}^{(2)}(\theta)\theta^{(l-2)} + \dots + \bar{a}^{(p_a)}(\theta)\theta^{(l-p_a)},$$

$l = k, \dots, p_b$, то можно ввести функцию

$$(3.7) \quad \bar{\tau}(\theta) = (\bar{a}(\theta), a^{(p_a+1)}, \dots, a^{(p)}, \bar{b}(\theta), b^{(p_b+1)}, \dots, b^{(p)})^T,$$

заданную на всем \mathbb{R}^r . При этом совсем не обязательно $\bar{\tau}(\theta(\tau_*)) = \tau_*$. Однако, если векторы $\mathcal{A}_l(\theta_*)$, $l = 0, 1, \dots, p_a - 1$ линейно независимы, то последние формулы определяют единственную пару векторов (\bar{a}, \bar{b}) , и эта пара совпадает с (a_*, b_*) , т.е. в этом случае $\bar{\tau}_* = \tau_*$.

Предположим, что выполнено условие

(RI.4) для неизвестного параметра $\tau_\star \in \mathcal{T}$ многочлены $a(\cdot, \tau_\star)$ и $b(\cdot, \tau_\star)$ взаимно несократимы.

Следующее утверждение вскрывает более глубокую связь между векторами τ и θ .

Л е м м а 3.1 ([60], лемма 5.6.1). *Если выполнено условие **(RI.4)**, тогда r -векторы $\mathcal{A}_l(\theta_\star)$, $l = 0, 1, \dots, p_a - 1$ линейно независимы и $\bar{\tau}(\theta(\tau_\star)) = \tau_\star$, где $\bar{\tau}(\cdot)$ — функция из (3.7).*

Пример. Проиллюстрируем способ введения нового параметра оценивания в задаче идентификации неизвестных параметров линейного дискретного ОУ (3.4), динамика которого описывается разностным уравнением второго порядка

$$y_t + a_\star^{(1)}y_{t-1} + y_{t-2} = b_\star^{(1)}u_{t-1} + b_\star^{(2)}u_{t-2} + v_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

с неизвестными тремя коэффициентами: $a_\star^{(1)} \in [2, 10]$, $b_\star^{(1)} \in [1, 10]$, $b_\star^{(2)} \in [-10, 0]$.

Обозначим через

$$\tau_\star = \begin{pmatrix} a_\star^{(1)} \\ 1 \\ b_\star^{(1)} \\ b_\star^{(2)} \end{pmatrix} \in \mathcal{T} = [2, 10] \times \{1\} \times [1, 10] \times [-10, 0] \subset \mathbb{R}^4$$

вектор коэффициентов уравнения объекта. Трехмерный вектор "новых" параметров θ^\star ($r = 3$) определяется так:

$$\theta^\star = \theta(\tau_\star) = \begin{pmatrix} b_\star^{(1)} \\ b_\star^{(2)} - a_\star^{(1)}b_\star^{(1)} \\ ((a_\star^{(1)})^2 - 1)b_\star^{(1)} - a_\star^{(1)}b_\star^{(2)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

При заданных ограничениях на неизвестные параметры ОУ отображение $\theta(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow \Theta = \theta(\mathcal{T}) \subset \mathbb{R}^3$ обратимо. Вектор коэффициентов ОУ τ_\star связан с θ^\star следующим обратным соотношением:

$$\tau_\star = \bar{\tau}(\theta^\star) = \begin{pmatrix} -\frac{\theta_\star^{(1)} + \theta_\star^{(3)}}{\theta_\star^{(2)}} \\ 1 \\ \theta_\star^{(1)} \\ \theta_\star^{(2)} - \frac{\theta_\star^{(1)}(\theta_\star^{(1)} + \theta_\star^{(3)})}{\theta_\star^{(2)}} \end{pmatrix}.$$

3.3.3 Рандомизированный алгоритм идентификации

Если при $t \in [sn+k, \dots, s(n+1)+k]$ обозначить $\bar{y}_t = y_t/R_n$ и $\varphi_t = u_t/R_n$, то последовательности $\{\bar{y}_t\}$ и $\{\varphi_t\}$ связаны уравнением скользящего среднего с коэффициентами $\theta_1^*, \dots, \theta_r^*$ и некоторыми помехами $\{\bar{v}_t\}$. При выполнении условий: **(RI.1)** для функций обратной связи, **(RI.2)** для начальных данных, **(RI.3)** для множества неопределенности и **(LR.Viii)** для помех $\{v_t\}$, удовлетворяются все условия теоремы 3.1 и для построения сильносостоятельной последовательности оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ вектора θ^* можно воспользоваться алгоритмом (3.3), который в этом случае имеет вид

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha \frac{\beta_n^{-1}}{n} \left(\Delta_n^2 \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\Delta_n}{R_n} \begin{pmatrix} y_{sn+k} \\ y_{sn+k+1} - \hat{\theta}_{n-1}^{(1)} \bar{u}_{sn+1} \\ \vdots \\ y_{sn+r+k-1} - \sum_{j=1}^{r-1} \hat{\theta}_{n-1}^{(j)} \bar{u}_{sn+r-j} \end{pmatrix} \right),$$

где $2\alpha\beta \geq 1$. Выполнение условия **(RI.4)** будет гарантировать возможность с помощью функции $\bar{\tau}(\cdot)$ из (3.7) получить сильносостоятельные оценки вектора τ_* .

Специфика задачи позволяет выписать ещё один алгоритм. На временном интервале $\bar{\mathbb{N}}_n = \{sn+k, sn+2, \dots, sn+r+k-1\}$, $n \in \mathbb{N}$, в силу уравнения (3.4), справедливо соотношение:

$$Y_n = \theta(\tau_*) R_n \Delta_n + \psi_n(\theta(\tau_*)) + \nu_n,$$

где $\theta_* = \theta(\tau_*)$ — вектор новых параметров и

$$Y_n = \begin{pmatrix} y_{sn+k} \\ y_{sn+k+1} \\ \vdots \\ y_{sn+r+k-1} \end{pmatrix}, \quad \psi_n(\theta^*) = \begin{pmatrix} \psi_n^{(1)}(\theta^*) \\ \psi_n^{(2)}(\theta^*) \\ \vdots \\ \psi_n^{(r)}(\theta^*) \end{pmatrix}, \quad \nu_n = \begin{pmatrix} \nu_n^{(1)} \\ \nu_n^{(2)} \\ \vdots \\ \nu_n^{(r)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \psi_n^{(i)}(\theta^*) &= \Psi_{i+k-1}(q^{-1}, \tau_*) b(q^{-1}, \tau_*) \bar{u}_{sn+i+k-1} + \Upsilon_{i+k-1}(q^{-1}, \tau_*) y_{sn}, \\ \nu_n^{(i)} &= \Psi_{i+k-1}(q^{-1}, \tau_*) v_{sn+i+k-1}, \quad i = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Последнее соотношение имеет вид *линейной схемы наблюдения* по отношению к векторному параметру $\theta(\tau_*)$, в которой случайные векторы $R_n \Delta_n$ и $\psi_n + \nu_n$ стохастически "почти некоррелированы". Это соображение подсказывает вид алгоритма оценивания (идентификации) неизвестного вектора $\theta(\tau_*)$

$$(3.8) \quad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma \frac{\beta_n^{-1}}{n} \Delta_n \left(\Delta_n \hat{\theta}_{n-1} - \frac{Y_n - \psi_n(\hat{\theta}_{n-1})}{R_n} \right),$$

где Γ — некоторая положительно определенная матрица.

Утверждение о состоятельности оценок, доставляемых предложенным алгоритмом (3.8), сформулируем следующим образом.

Т е о р е м а 3.2 Пусть управления $\{u_t\}$ задаются по (3.5)–(3.6) и пробное возмущение $\{\Delta_n\}$ удовлетворяет допущению (МА.1). Если выполнены условия (RI.1)–(RI.4), (LR.Biii), $\beta_n = \beta_\infty + \mathcal{O}(n^{-1})$ и $2\lambda_{\min}(\Gamma)B \geq 1$,

тогда при произвольном начальном условии $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^r$ алгоритмы идентификации

$$(3.9) \quad \tau_t = \bar{\tau}(\hat{\theta}_n), \quad sn < t \leq s(n+1), \quad s = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots,$$

($\bar{\tau}(\cdot)$ — функция из (3.7)) и (3.8) доставляют сильносостоятельные оценки $\{\tau_t\}$ и $\{\hat{\theta}_n\}$.

Если $\beta_n = (1 + \ln\{n\})^{-1}$, то при произвольном $\rho > 0$ с вероятностью 1 и в среднеквадратичном смысле справедливы предельные соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1-\rho} \|\tau_t - \tau_\star\|^2 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\rho} \|\hat{\theta}_n - \theta(\tau_\star)\|^2 = 0.$$

Замечание 3.1. Из вида формул для управления (3.5) следует, что при равномерной ограниченности R_n и $\beta_\infty = 0$ пробный сигнал $R_n \Delta_n$ нивелируется с течением времени.

3.4 Доказательство теоремы 3.2

Доказательство теоремы 3.2. Первая часть доказывается так же, как и в теореме 2.1. Остановимся только на доказательстве второй части. Величины $\epsilon_n^{(\rho)} = n^{\frac{1-\rho}{2}} (\theta_\star - \hat{\theta}_n)$, в силу (3.8), связаны соотношением

$$\epsilon_n^{(\rho)} \approx \left(I - \frac{1}{2n} (2\Gamma(1 + \ln\{n\})\Delta_n^2 - (1 - \rho)I) \right) \epsilon_{n-1}^{(\rho)} + \Gamma \frac{\sqrt{1 + \ln\{n\}}}{n^{\frac{1+\rho}{2}}} \xi_n,$$

где

$$\xi_n = \sqrt{1 + \ln\{n\}} \Delta_n \frac{\psi_n(\theta_\star) - \psi_n(\hat{\theta}_{n-1}) + \nu_n}{R_n},$$

и знак \approx означает, что равенство понимается с точностью до величин, имеющих при $n \rightarrow \infty$ высший порядок малости. Таким образом, ими можно пренебречь. Из условий (МА.1) и (RI.3), в силу ограниченности помех $\{v_t\}$ и компактности множества \mathcal{T} , имеем

$$\|\xi_n\| \leq C_\xi \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta_\star\|$$

с некоторой постоянной C_ξ . В условиях теоремы 3.2 справедливо соотношение

$$E\{\|\epsilon_n^{(\rho)}\|^2 | y_0, \dots, y_{sn}, u_0, \dots, u_{sn-1}\} \approx \left(1 - \frac{2\lambda_{\min}(\Gamma)B - 1 + \rho}{n} \right) \|\epsilon_{n-1}^{(\rho)}\|^2 +$$

$$+ \lambda_{\max}(\Gamma)^2 \frac{2\ln\{n\}}{n^{1+\rho}} \mathbb{E}\{\|\xi_n\|^2 | y_0, \dots, y_{sn}, u_0, \dots, u_{sn-1}\}.$$

Поскольку выполнены условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\{n\}}{n^{1+\rho}} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_{\min}(\Gamma)\mathbb{B} - 1 + \rho}{n} = \infty,$$

то, в силу леммы Роббинса–Сигмунда (см. лемма П.1 на стр. 227) о сходимости почти полумартингалов и леммы П.7 на стр. 229, убеждаемся в справедливости второго заключения теоремы 3.2.

Глава 4

Фильтрация случайных процессов, наблюдаемых на фоне произвольных ограниченных помех

Под *фильтрацией* понимаются алгоритмы обработки реализаций случайных процессов, направленные на подавление помех, зашумляющих (обычно аддитивно) полезный сигнал. В основе теории оптимальной фильтрации лежит *метод Винера–Колмогорова* и его рекуррентные модификации, известные под общим названием *фильтра Калмана–Бьюси*. В ситуации произвольных ограниченных помех возможна минимаксная постановка задачи об оптимальной фильтрации (см., например, [59]), но получающиеся в её рамках решения при высоком уровне помех наблюдения малоинформативны.

В первом разделе описывается способ фильтрации при неизвестных, но ограниченных детерминированных помехах. Обосновывается разумность его применения в той ситуации, когда можно считать случайной и "невырожденной" последовательность входов модели — коэффициентов преобразования изучаемого сигнала. Предлагаемый фильтр имеет структуру, похожую на упрощенный вариант фильтра Калмана–Бьюси, что может говорить о его определенных оптимальных свойствах.

Во втором разделе анализируются при различных типах помех возможности алгоритма стохастической аппроксимации с постоянным шагом в задаче об отслеживании дрейфа параметров модели линейной регрессии.

В третьем — качество оценивания рандомизированных и обычных алгоритмов фильтрации сравнивается на основе компьютерного моделирования процессов при различных последовательностях помех.

4.1 Предсказание сигнала, наблюдаемого на фоне произвольных ограниченных помех

Ограничимся рассмотрением следующей постановки задачи: наблюдается скалярный сигнал, удовлетворяющий уравнению

$$(4.1) \quad y_n = \varphi_n^T \theta_n^* + v_n,$$

представляющий собой смесь преобразованного векторного сигнала $\{\theta_n^*\}$, $\theta_n^* \in \mathbb{R}^r$ и помехи наблюдения $\{v_n\}$. Здесь φ_n — r -мерный вектор, известный в момент времени n . Векторный сигнал $\{\theta_n^*\}$ порождается устойчивым линейным фильтром

$$(4.2) \quad \theta_{n+1}^* = A\theta_n^* + w_{n+1},$$

в котором A — известная матрица: $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(AA^T)} < 1$, а $\{w_n\}$ — центрированный независимый случайный процесс: w_n не зависит от \mathcal{F}_{n-1} и вместе с $\{v_n\}$ удовлетворяет условию **(LR.Bii)** из п. 2.1.

Задача фильтрации с прогнозом на один шаг состоит в нахождении оценки $\hat{\theta}_{n+1}$ значения процесса $\{\theta_n^*\}$ в момент времени $n+1$ по наблюдениям $y_i, \varphi_i, i \leq n$. Качество фильтрации определяется средней величиной квадрата невязки

$$f_n = E\{\|\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}^*\|^2\}.$$

Обычно считают, что в модели наблюдений векторы $\{\varphi_n\}$ определяются детерминированной последовательностью. Здесь будем предполагать, что последовательность векторов $\{\varphi_n\}$ случайная и удовлетворяет предположению **(LR.A')** из раздела 2.1.

Рассмотрим следующий рандомизированный алгоритм построения очередной оценки

$$(4.3) \quad \hat{\theta}_{n+1} = A\hat{\theta}_n - \alpha A\Gamma\Delta_n(\varphi_n^T \hat{\theta}_n - y_n), \quad \Delta_n = \varphi_n - E\{\varphi_n\},$$

где $n = 0, 1, \dots$, $\alpha > 0$ — размер шага и Γ — положительно определенная симметричная матрица. Будем считать, что начальные данные $\hat{\theta}_0$ заданы произвольным неслучайным вектором из \mathbb{R}^r .

Подставив формулы (4.1) и (4.2) в алгоритм (4.3), для ошибки предсказания получаем

$$\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}^* = A(I - \alpha\Gamma\Delta_n\Delta_n^T)(\hat{\theta}_n - \theta_n^*) - \alpha\Gamma\Delta_n(E\{\varphi_n\}^T(\hat{\theta}_n - \theta_n^*) - v_n) - w_{n+1}.$$

Обозначим через $D_n := \|\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}^*\|^2$. При выполнении допущений **(LR.A')** и **(LR.Bii')**, в силу симметричности распределения $P(\cdot)$ и независимости случайных векторов Δ_n и w_{n+1} , последовательно усредняя

условно сначала по отношению к σ -алгебре \mathcal{F}_n , а потом относительно $\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}$, можно заключить, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{D_n|\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\} &= (1 - 2\alpha\lambda_{\min}(\mathbf{B}\Gamma) + \alpha^2\|\Gamma\|^2M_4^4)\|\mathbf{A}\|^2D_{n-1} + \\ &+ \alpha^2(\mathbb{E}\{\varphi_n\}^\top(\hat{\theta}_n - \theta_n^*) - v_n)^2\|\Gamma\|^2\text{Tr}[\mathbf{B}] + r\sigma_w^2. \end{aligned}$$

Далее, взяв безусловное математическое ожидание от обеих частей последней формулы, для среднего значения ошибки предсказания получаем при любом $\rho > 0$ оценку

$$\mathbb{E}\{D_n\} \leq a(\alpha, \rho)\mathbb{E}\{D_{n-1}\} + \alpha^2b(1 + M_\varphi\rho)\|\Gamma\|^2\sigma_v^2 + r\sigma_w^2,$$

где

$$(4.4) \quad a(\alpha, \rho) = (1 - 2\alpha\lambda_{\min}(\mathbf{B}\Gamma) + \alpha^2\|\Gamma\|^2M_4^4)\|\mathbf{A}\|^2 + \alpha^2(M_\varphi + \frac{1}{\rho})M_\varphi b,$$

$$(4.5) \quad b = \|\Gamma\|^2\text{Tr}[\mathbf{B}].$$

Из последнего неравенства непосредственно следует заключение теоремы.

Т е о р е м а 4.1 Пусть $\alpha > 0$, Γ — положительно определенная матрица и $\hat{\theta}_0$ — произвольный неслучайный вектор из \mathbb{R}^r .

Если выполнены предположения **(LR.A')** и **(LR.Bii)**,

тогда для ошибок предсказания оценок $\{\hat{\theta}_n\}$, генерируемых по алгоритму (4.3), для любого $\rho > 0$ и достаточно малого α такого, что $a(\alpha, \rho) < 1$, выполняются неравенства

$$\mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}^*\|^2\} \leq \frac{r\sigma_w^2 + \alpha^2b(1 + \rho)\sigma_v^2}{1 - a(\alpha, \rho)} + a(\alpha, \rho)^n\mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_0 - \theta_0^*\|^2\},$$

где величины $a(\alpha, \rho)$ и b определяются формулами (4.4), (4.5).

Замечание 4.1. Пусть $\Gamma = \mathbf{B}^{-1}$, $\|\mathbf{A}\|^{-2} = 1 + \mathcal{O}(\alpha^3)$, $\mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_0 - \theta_0^*\|^2\} = 0$. Обозначим через

$$c = \frac{r\sigma_w^2}{2}, \quad d(\rho) = \frac{M_4^4 + (M_\varphi + 1/\rho)M_\varphi\text{Tr}[\mathbf{B}]}{2\lambda_{\min}^2(\mathbf{B})}.$$

В этом случае для достаточно малых α из заключения теоремы 4.1 следует, что

$$\mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}^*\|^2\} \leq D(\alpha, \rho) + \mathcal{O}(\alpha^2),$$

где

$$D(\alpha, \rho) = c\left(\frac{1}{\alpha} + d(\rho) + \left(d(\rho)^2 + \frac{(1 + M_\varphi\rho)b\sigma_v^2}{2c}\right)\alpha\right).$$

Последнее выражение характеризует взаимное влияние возможности фильтрации и чувствительности к помехам.

Оптимизируя по α выражение для $D(\alpha, \rho)$, находим

$$\alpha^* = \left(d(\rho^*)^2 + \frac{(1 + M_\varphi \rho^*) b \sigma_v^2}{2c} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

где ρ^* — точка минимума функции

$$(4.6) \quad \bar{D}(\rho) = c \left(d(\rho) + 2\sqrt{d(\rho)^2 + (1 + M_\varphi \rho) b \sigma_v^2 / (2c)} \right).$$

Если $M_\varphi = 0$, то функция $D(\alpha, \rho)$ не зависит от ρ . В такой ситуации получаем, что

$$\alpha^* = \frac{2\sigma_w \lambda_{\min}^2(\mathbf{B})}{\sqrt{M_4^8 \sigma_w^2 + 4\lambda_{\min}^2(\mathbf{B}) \text{Tr}[\mathbf{B}] \sigma_v^2 / r}}$$

и

$$\bar{D}^* = \frac{r\sigma_w}{4\lambda_{\min}^2(\mathbf{B})} \left(M_4^4 \sigma_w + 2\sqrt{M_4^8 \sigma_w^2 + 4\lambda_{\min}^2(\mathbf{B}) \text{Tr}[\mathbf{B}] C_v^2 / r} \right).$$

Пусть $r = 1$, $\{\varphi_n\}$ — скалярный бернуллевский (равный $\pm\varphi$ с одинаковой вероятностью) независимый процесс и $\sigma_w^2 \ll \sigma_v^2$, тогда

$$\alpha^* \text{АГ} \approx \frac{\sigma_w}{|\varphi| \sigma_v}.$$

Интересно заметить, что это значение приблизительно совпадает с предельной величиной калмановского коэффициента усиления для фильтра Калмана–Бьюси в примере из п. 1.4.2, если помехи наблюдения $\{v_n\}$ независимые и равны $\pm\sigma_v$ с равной вероятностью. Ранее в первой главе, отмечалось, что в похожей ситуации при постоянных φ_n оптимальный фильтр Винера–Колмогорова задаётся подобным образом.

4.2 Отслеживание дрейфа параметров модели линейной регрессии

Предположим, как и ранее, что последовательности наблюдений $\{y_n\}$ и входных сигналов $\{\varphi_n\}$ связаны уравнением (4.1) типа линейной регрессии

$$y_n = \varphi_n^T \theta_n^* + v_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

в котором θ_n^* — векторы истинных или фиктивных параметров, представляющие собой реализацию, зависящего от времени процесса, $\{v_n\}$ — помехи (возмущения).

Для отслеживания изменений параметров $\{\theta_n^*\}$ — *наилучшей линейной классификации* наблюдений $\{y_n\}$, базирующейся на r -мерных входных сигналах $\{\varphi_n\}$, — рассмотрим широко известный алгоритм стохастической аппроксимации с постоянным шагом

$$(4.7) \quad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha \varphi_n (\varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \quad \hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^r,$$

где $n = 1, 2, \dots$, $\alpha > 0$ — размер шага. Этот алгоритм является градиентным по отношению к квадратичному функционалу от ошибки оценивания. По-этому его иногда также называют методом наименьших квадратов в задаче отслеживания дрейфа параметров [110]. Из-за своей простоты, робастности и удобства в применении он известен как один из основных адаптивных алгоритмов во многих областях, включая системы идентификации, адаптивную обработку сигналов и адаптивное управление.

Во многих ситуациях желательно знать ответ на следующие вопросы.

- Алгоритм (4.7) устойчив в среднеквадратичном смысле?
- Дают ли оценки (4.7) хорошее качество отслеживания параметров?
- Как можно вычислить и минимизировать ошибки отслеживания параметров?

4.2.1 Необходимые и достаточные условия стабилизации МНК

Для данной последовательности $\{\varphi_n\}$ соотношения (4.7) являются линейным нестационарным разностным уравнением. Свойства этого уравнения существенно определяются однородным уравнением

$$x_n = (\mathbf{I} - \alpha \varphi_n \varphi_n^T) x_{n-1}$$

с фундаментальной матрицей

$$\Psi_\alpha(n, k) = \prod_{j=k}^n (\mathbf{I} - \alpha \varphi_j \varphi_j^T).$$

Выражение для ошибки отслеживания параметров при этом имеет вид

$$\sum_{k=1}^n \Psi_\alpha(n, k) \xi_k,$$

где $\{\xi_k\}$ определяется помехами наблюдения, вариацией параметров и т.п. Основной ключ к анализу ошибок заключается в экспоненциальной устойчивости $\Psi_\alpha(n, k)$, которую можно доказать при очень общих предположениях о входах $\{\varphi_n\}$ таких, как

(LM.1) ограничения на зависимости среди φ_n : φ_n формируются может быть не стационарно (способ зависит от времени), но равномерно устойчиво, являясь фильтром некоторого источника возмущений $\{\varepsilon_i\}$, которые удовлетворяют условиям *перемешивания* с дополнительным условием на скорость затухания зависимости;

(LM.2) ограничения на "хвостовые" части распределений φ_n :

$$E\{\exp(\gamma\|\varepsilon_n\|^2)|\varphi_i, i \leq n\} < C, n = 1, 2, \dots,$$

для некоторых $\gamma > 0$ и C . Здесь ε_n — тот самый источник, который формирует φ_n .

Оба эти ограничения вполне умеренные и им удовлетворяют, например, гауссовы зависимые величины.

Для последовательности $\{\varphi_n\}$, удовлетворяющей этим двум ограничениям, *необходимым и достаточным* условием того, что $\forall p \geq 1 \exists \alpha^* > 0, M > 0$ и $\gamma \in (0, 1) : \forall \alpha \in (0, \alpha^*], 0 < k \leq n \leq t$

$$(4.8) \quad \left(E\{\|\Psi_\alpha(n, k)\|^p\}\right)^{1/p} \leq M(1 - \alpha\gamma)^{n-k},$$

является выполнение условия *постоянного возбуждения* (или условие полного ранга) для φ_n : \exists целое $N > 0$ и постоянная $\delta > 0$:

$$(4.9) \quad \sum_{k=n}^{n+N} E\{\varphi_k \varphi_k^T\} \geq \delta I, n = 1, 2, \dots$$

Точная формулировка и доказательство этого утверждения приводится в [110] (теорема 2).

Случайная последовательность $\{\varepsilon_n\}$ называется *ϕ -перемешивающейся*, если существует невозрастающая функция $\phi(\cdot)$, называемая *скоростью перемешивания*, $\phi(k) \in [0, 1]$ для любого $k \geq 0$, $\phi(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, такая, что

$$\sup_{A \in \mathcal{F}_{-\infty}^j, B \in \mathcal{F}_{j+k}^\infty} |P(B|A) - P(B)| \leq \phi(k)$$

для любых $k \geq 0$ и $j \in (-\infty, \infty)$. Здесь обозначено \mathcal{F}_i^j , $-\infty \leq i \leq j \leq \infty$, — σ -алгебра, порождаемая случайными величинами $\{\varepsilon_k, i \leq k \leq j\}$. Введение понятия ϕ -перемешивания является стандартным в литературе по теории оценивания для описания слабо зависимых случайных процессов.

Предположим, что последовательность входов $\{\varphi_n\}$ представима в виде

$$(4.10) \quad \varphi_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A(n, j)\varepsilon_{n-j} + \xi_n, \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sup_k \|A(n, j)\| < \infty,$$

где $\{\xi_n\}$ — r -мерный ограниченный детерминированный процесс, $\{\varepsilon_n\}$ — l -мерный процесс, удовлетворяющий условию ϕ -перемешивания, $A(n, j) \in \mathbb{R}^{r \times l}$ — детерминированные весовые матрицы. Если при любом $n \geq 1$ и произвольных целых числах $0 < j_1 < j_2 < \dots < j_n$ выполнено условие

$$(4.11) \quad \mathbb{E}\left\{\exp\left(\gamma \sum_{i=1}^n \|\varepsilon_{i_j}\|^2\right)\right\} \leq M \exp(Kn)$$

с некоторыми положительными постоянными γ, M и K , тогда последовательность входов $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет условиям **(LM.1)** и **(LM.2)**, а значит, для неё справедливо сформулированное выше необходимое и достаточное условие экспоненциальной стабилизации оценок.

Если в качестве весовых коэффициентов взять $A(n, 0) = I$, $A(n, j) = 0$, $n = 1, 2, \dots$, $j \neq 0$ и $\xi_n = 0$, то входные сигналы $\{\varphi_n\}$ совпадают с $\{\varepsilon_n\}$, что означает применимость результата об условиях экспоненциальной устойчивости к ϕ -перемешивающимся ограниченным входным сигналам.

4.2.2 Анализ свойств оценок при различных типах помех

Ошибка отслеживания параметров зависит от процесса их изменения $\{w_n\}$, определяемого

$$w_n = \theta_n^* - \theta_{n-1}^*.$$

Очевидно, качество отслеживания процесса изменения параметров в существенной степени зависит от совокупных свойств $\{\varphi_n, w_n, v_n\}$. Обозначим $\eta_n = \hat{\theta}_n - \theta_n^*$. Последовательность $\{\eta_n\}$ удовлетворяет уравнению

$$\eta_n = (I - \alpha \varphi_n \varphi_n^T) \eta_{n-1} + \alpha \varphi_n v_n + w_n.$$

Если для последовательности входов $\{\varphi_n\}$ выполнены условия экспоненциальной устойчивости однородной части этого уравнения, то надо рассмотреть поведение соответствующих неоднородных частей. Далее разберем четыре различных типа возмущений параметров и помех $\{w_n, v_n\}$.

1. *"Наихудший" случай.* Рассмотрим ситуацию, когда изменение параметров и помехи предполагаются только ограниченными в среднем, т.е. существует некоторое $p > 2$ такое, что

$$\sigma_v = \sup_n (\mathbb{E}\{\|v_n\|^p\})^{1/p} < \infty$$

и

$$\sigma_w = \sup_n (\mathbb{E}\{\|w_n\|^p\})^{1/p} < \infty.$$

Заметим, что этим условиям, в частности, удовлетворяют *неизвестные, но ограниченные* детерминированные последовательности помех и изменений параметров.

Если для последовательности входов выполнено условие постоянного возбуждения (4.9) и удовлетворяются условиям **(LM.1)** и **(LM.2)**, то из (4.8), используя неравенство Гёльдера (см. пункт П.1.2 на стр. 224), несложно получить, что для любого $n \geq 1$ и всех малых $\alpha > 0$ выполняется

$$\mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta_n^*\|^2\} = \mathcal{O}\left(\sigma_v^2 + \frac{\sigma_w^2}{\alpha^2}\right) + \mathcal{O}((1 - \alpha\beta)^n)$$

с некоторой постоянной $\beta \in (0, 1)$. В [107] в таком же "наихудшем" случае такого же рода оценки получены и для МНК с забывающим множителем, и для фильтра Калмана–Бьюси.

Полученное выражение, вообще говоря, не очень хорошее, хотя на первый взгляд в наилучшем случае надеяться на лучший результат было нельзя. Но ранее в ситуации с $\sigma_w = 0$ были предложены и обоснованы алгоритмы, дающие порядок ошибки оценивания $\mathcal{O}(\alpha\sigma_v^2)$, а не $\mathcal{O}(\sigma_v^2)$, как в последнем неравенстве. Ниже будут сформулированы условия, при которых для помех, задаваемых неизвестной, но ограниченной детерминированной функцией, можно и в этой задаче получить лучшие оценки.

2. *Корреляция входов с помехами и изменение параметров со средним ноль.* Определим для $p \geq 1$ множество последовательностей

$$\mathcal{M}_p = \left\{ \{u_n\} : \sup_k \mathbb{E}\left\{ \left\| \sum_{i=k+1}^{k+n} u_i \right\|^p \right\}^{1/p} \leq c_p^{(u)} \sqrt{n}, \forall n \geq 1 \right\},$$

где $c_p^{(u)}$ — некоторые постоянные, зависящие только от p и распределения $\{u_n\}$. Известно, что все случайные процессы, генерируемые мартингальными разностями или ϕ -перемешивающимися со средним ноль последовательностями, преобразованными через линейный фильтр бесконечного порядка, могут быть включены в \mathcal{M}_p , при этом постоянные $c_p^{(u)}$ определяются через $\sup_n (\mathbb{E}\{\|u_n\|^p\})^{1/p}$.

Более того, множество последовательностей \mathcal{M}_p инвариантно относительно линейных преобразований. Это означает, что если $\{\varphi_n\}$ и $\{\varepsilon_n\}$ связаны устойчивым фильтром

$$\varphi_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varepsilon_{n-j}, \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sup_k \|A_j\| < \infty,$$

в котором $A_j \in \mathbb{R}^{r \times l}$ — детерминированные весовые матрицы, то выполнение условия $\{\varepsilon_n\} \in \mathcal{M}_p$ влечет за собой $\{\varphi_n\} \in \mathcal{M}_p$. В этом легко убедиться из следующих неравенств:

$$\left(\mathbb{E}\left\{ \left\| \sum_{k=n+1}^{n+N} \varphi_k \right\|^p \right\} \right)^{1/p} = \left(\mathbb{E}\left\{ \left\| \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \sum_{k=n+1}^{n+N} \varepsilon_{k-j} \right\|^p \right\} \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|A_j\| \cdot \left(\mathbb{E} \left\{ \left\| \sum_{k=n+1}^{n+N} \varepsilon_{k-j} \right\|^p \right\} \right)^{1/p}.$$

Таким образом, случайные процессы, генерируемые мартингальными разностями или ϕ -перемешивающимися с нулевым средним последовательностями, преобразованными через линейный фильтр бесконечного порядка, все могут быть включены в \mathcal{M}_p .

Следующая теорема дает достаточно общий критерий исследования качества оценок, получаемых по алгоритму (4.7).

Т е о р е м а 4.2 ([110], теорема 4). Пусть для последовательности входов $\{\varphi_n\}$ выполнены условия **(LM.1)**, **(LM.2)** и постоянного возбуждения **(4.9)**.

Если при некотором $p > 2$ корреляции входов с помехами $\{\varphi_n v_n\} \in \mathcal{M}_p$ и процесс изменения параметров $\{w_n\} \in \mathcal{M}_p$,

тогда для оценок, генерируемых алгоритмом (4.7), $\forall n \geq 1$ и малого $\alpha > 0$ выполняется

$$\mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta_n^*\|^2\} = \mathcal{O}\left(\alpha(c_p^{(\varphi v)})^2 + \frac{(c_p^{(w)})^2}{\alpha}\right) + \mathcal{O}((1 - \alpha\beta)^n),$$

где $\beta \in (0, 1)$ — некоторая постоянная, а $c_p^{(\varphi v)}$ и $c_p^{(w)}$ — константы из определения \mathcal{M}_p , которые зависят от распределений $\{\varphi_n v_n\}$ и $\{w_n\}$ соответственно.

Заметим, что верхняя граница в последней формуле значительно лучше, чем грубая граница в наихудшем случае при малых α , и приблизительно показывает возможности компромисса между чувствительностью к помехам и способностью отслеживания изменений параметров.

Последнее выражение можно прямо применить к анализу некоторых стандартных проблем фильтрации. Например, пусть $\{y_n\}$ и $\{\varphi_n\}$ — два стационарных процесса и допустим, что наша цель состоит в отслеживании поведения решения МНК

$$\theta^* = (\mathbb{E}\{\varphi_n \varphi_n^T\})^{-1} \mathbb{E}\{\varphi_n y_n\},$$

рекуррентно минимизирующего функционал

$$\mathbb{E}\{(y_n - \varphi_n^T \theta)^2\},$$

основываясь на наблюдениях в реальном времени $\{y_i, \varphi_i, i \leq n\}$.

Определим последовательность $\{v_n\}$ как

$$y_n = \varphi_n^T \theta^* + v_n.$$

Очевидно, что $\mathbb{E}\{\varphi_n v_n\} = 0$. Более того, во многих стандартных ситуациях можно установить, что $\{\varphi_n v_n\} \in \mathcal{M}_p$ для некоторого $p > 2$. Таким

образом, для ошибки оценивания параметра линейной регрессии можно получить формулу

$$E\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2\} = \mathcal{O}(\alpha) + \mathcal{O}((1 - \alpha\beta)^n),$$

правая часть в которой стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ и $\alpha \rightarrow 0$.

3. *Помехи "неизвестные, но ограниченные"*. Предположим, что $\{\varphi_n\}$ — случайная последовательность с нулевым средним: $E\{\varphi_n\} = 0$. Алгоритм (4.7) при этом попадает в классификацию рандомизированных алгоритмов и можно надеяться, что поведение доставляемых им оценок в рассматриваемом случае будет лучше, чем в первом.

Пусть помехи определяются неизвестной, но ограниченной детерминированной функцией и

$$C_v = \sup_n |v_n| < \infty.$$

Если для последовательности входов $\{\varphi_n\}$ выполнено предположение (**LR.A'**), то $\{\varphi_n\} \in \mathcal{M}_4$. Покажем, что в этой ситуации и $\{\varphi_n v_n \in \mathcal{M}_4\}$. При некоторых $k, n \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \left(E\left\{ \left\| \sum_{i=k}^{n+k-1} \varphi_i v_i \right\|^4 \right\} \right)^{\frac{1}{4}} &\leq \left(\sum_{i=k}^{n+k-1} \sum_{\substack{j=k \\ j \neq i}}^{n+k-1} E\{\|\varphi_i\|^2 \|\varphi_j\|^2 C_v^4\} \right)^{\frac{1}{4}} + \\ &+ \left(\sum_{i=k}^{n+k-1} E\{\|\varphi_i\|^4 C_v^4\} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(n(n-1)\sigma_\varphi^2 n + M_4^4 \right)^{\frac{1}{4}} C_v \leq M_4 C_v \sqrt{n}, \end{aligned}$$

т.е. $\{\varphi_n v_n\} \in \mathcal{M}_4$ с константой $M_4 C_v$. Этот факт позволяет сформулировать утверждение о более хороших, чем в "наихудшем" случае, свойствах оценок алгоритма отслеживания параметров (4.7) при "плохих" помехах в наблюдении.

Т е о р е м а 4.3 *Если выполнены условия:*

$E\{\varphi_n\} = 0$, (**LR.A'**), (**LR.Bii'**) и

$\{w_n\} \in \mathcal{M}_p$ с постоянной $c_p^{(w)}$ при некотором $p: 2 < p \leq 4$,

тогда для оценок, генерируемых алгоритмом (4.7), $\forall n \geq 1$ и малого $\alpha > 0$ выполняется

$$E\{\|\hat{\theta}_n - \theta_n^*\|^2\} = \mathcal{O}\left(\alpha M_4^2 C_v^2 + \frac{(c_p^{(w)})^2}{\alpha}\right) + \mathcal{O}((1 - \alpha\beta)^n),$$

где $\beta \in (0, 1)$ — некоторая постоянная.

Последняя формула показывает возможности компромисса между чувствительностью к помехам и способностью отслеживания изменений

параметров. Оптимизируя по α , получаем для оптимального размера шага формулу

$$\alpha^* = \frac{c_p^{(w)}}{M_4 C_v}.$$

4. *Белозумные процессы.* Пусть регрессионный процесс φ_n генерируется зависящим от времени причинным фильтром

$$\varphi_n = \sum_{j=0}^{\infty} A(n, j) \varepsilon_{n-j} + \xi_n, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \sup_k \|A(n, j)\| < \infty,$$

в котором $\{\xi_n\}$ — ограниченная детерминированная последовательность, $\{\varepsilon_n, w_n, v_{n-1}\}$ — ϕ -перемешивающийся процесс со скоростью перемешивания $\phi(\cdot)$ и процесс $\{w_n, v_{n-1}\}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{v_n | \mathcal{F}_n\} &= 0, \quad \mathbb{E}\{w_{n+1} | \mathcal{F}_n\} = \mathbb{E}\{w_{n+1} v_n | \mathcal{F}_n\} = 0, \\ \mathbb{E}\{v_n^2 | \mathcal{F}_n\} &= \sigma_v^2(n), \quad \mathbb{E}\{w_n w_n^T | \mathcal{F}_n\} = Q_w(n), \\ \sup_n \mathbb{E}\{|v_n|^p | \mathcal{F}_n\} &\leq M, \quad \sigma_w = \sup_n (\mathbb{E}\{\|w_n\|^p\})^{1/p} < \infty, \end{aligned}$$

в которых $p > 2$ и $M > 0$ — некоторые постоянные, а \mathcal{F}_n — обозначение для σ -алгебры, порождаемой случайными величинами $\{\varepsilon_i, w_i, v_{i-1}, i \leq n\}$.

При выполнении условий **(LM.1)**, **(LM.2)**, постоянного возбуждения (4.9) и перечисленных выше для любого $n \geq 1$ и всех малых $\alpha > 0$ можно получить (см. [110], теорема 5)

$$\mathbb{E}\{(\hat{\theta}_n - \theta_n^*)(\hat{\theta}_n - \theta_n^*)^T\} = S_{n-1} + \mathcal{O}(\sigma(\alpha)(\alpha + \frac{\sigma_w^2}{\alpha} + \mathcal{O}((1 - \alpha\beta)^n))),$$

где функция $\sigma(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$ и матрицы S_n рекуррентно определяются как

$$S_n = (I - \alpha B_{n-1}) S_{n-1} (I - \alpha B_{n-1})^T + \alpha^2 \sigma_v^2(n-1) B_{n-1} + Q_w(n).$$

Здесь обозначено $B_n = \mathbb{E}\{\varphi_n \varphi_n^T\}$.

Заметим, что в стационарном случае (в широком смысле): $B_n \equiv B$, $\sigma_v(n) \equiv \sigma_v$, $Q_w(n) \equiv Q_w$, последовательность матриц S_n сходится к матрице S , определяемой уравнением Ляпунова

$$BS + SB = \alpha \sigma_v^2 B + \frac{Q_w}{\alpha}.$$

В этом случае след матрицы S , который представляет доминирующую часть ошибки отслеживания параметров $\mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta_n^*\|^2\}$ при малых α и больших n , может быть выражен как

$$\text{Tr}[S] = \frac{1}{2} \left(\alpha \sigma_v^2 r + \frac{\text{Tr}[B^{-1} Q_w]}{\alpha} \right).$$

Минимизируя $\text{Tr}[S]$ по отношению к α , можно получить следующую формулу для оптимального размера шага α :

$$\alpha^* = \frac{\sqrt{\text{Tr}[B^{-1}Q_w]}}{\sigma_v \sqrt{r}}.$$

4.3 Экспериментальные результаты

4.3.1 Фильтрация (предсказание) сигнала

Рассмотрим пример применения рандомизированного алгоритма фильтрации (4.3) к решению задачи о предсказании значения скалярного сигнала $\{\theta_n^*\}$, порождающегося устойчивым линейным фильтром

$$\theta_{n+1}^* = 0.9999\theta_n^* + w_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \theta_1^* = 0,$$

где $\{w_n\}$ представляет собой реализацию независимых равномерно распределенных на интервале $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ случайных величин

$$E\{w_n\} = 0, \quad E\{w_n^2\} = \frac{2}{81}.$$

Наблюдению в каждый момент времени доступны величины

$$y_n = \varphi_n \theta_n^* + v_n,$$

представляющие собой смесь преобразованного сигнала $\{\theta_n^*\}$ и *неизвестной, но ограниченной* детерминированной помехи $\{v_n\}$: $|v_n| \leq 2$.

При компьютерном моделировании в качестве последовательности коэффициентов преобразования полезного сигнала в канале наблюдения $\{\varphi_n\}$ были выбраны случайные величины, порождаемые равномерным распределением на интервале $[0.5, 1.5]$. Процесс $\{\theta_n^*\}$ наблюдался на интервале времени от 1 до 200. Качество предсказания определялось средней величиной невязки

$$\tilde{D}(\{\hat{\theta}_n\}) = \frac{1}{199} \sum_{n=1}^{199} \|\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}^*\|^2.$$

Оптимизация по ρ функции $\bar{D}(\rho)$ из (4.6) дает значение $\rho^* = 0.269$. Подставив это значение в формулу для α^* , получаем, что в данном случае для алгоритма (4.3) оптимальное значение шага $\alpha^* = 11.3808$, $\Gamma = 1/48$ и ошибка прогнозирования не превосходит $D(\alpha^*, \rho^*) = 1.3699 < C_v^2 = 4$.

Рис. 4 и 5 в типичных случаях показывают сравнительное поведение оценок предсказания, формируемых по трем алгоритмам: рандомизированному

$$(4.12) \quad \hat{\theta}_{n+1} = 0.9999(\hat{\theta}_n - 0.2371(\varphi_n - 1.0)(\varphi_n \hat{\theta}_n - y_n)),$$

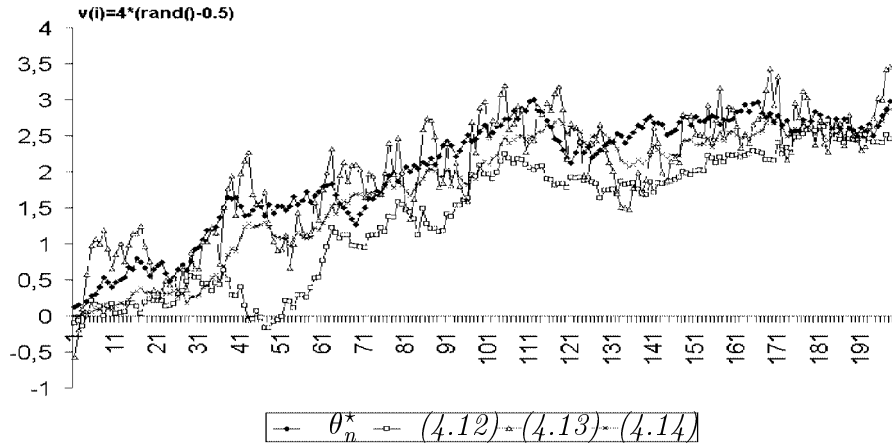


Рис. 4. Фильтрация при белом шумных помехах

упрощенному фильтру Калмана-Бьюси

$$(4.13) \quad \hat{\theta}_{n+1} = 0.9999(\hat{\theta}_n - 0.2371\varphi_n(\varphi_n\hat{\theta}_n - y_n))$$

и фильтру Калмана-Бьюси

$$(4.14) \quad \hat{\theta}_{n+1} = 0.9999\hat{\theta}_n - k_n\varphi_n(\varphi_n\hat{\theta}_n - y_n),$$

$$k_n = \frac{0.9999\gamma_{n-1}}{\frac{16}{3} + \gamma_{n-1}\varphi_n^2}, \quad \gamma_n = \gamma_{n-1}0.9999^2 - \frac{\varphi_n^2\gamma_{n-1}^2}{\frac{16}{3} + \gamma_{n-1}\varphi_n^2} + \frac{2}{81}, \quad \gamma_0 = 0.$$

Известно, что фильтр Калмана-Бьюси (4.14) дает оптимальные оценки в случае гауссовых независимых помех в наблюдении, метод (4.13) достаточно эффективен при центрированных независимых помехах. Поэтому при центрированных случайных помехах поведение оценок, генерируемых по алгоритмам (4.13), (4.14) достаточно хорошее, несмотря на высокий уровень помех наблюдения (см. рис. 4). В ситуациях с постоянной неизвестной помехой или при нулевой в среднем, но недостаточно "разнообразной", средние значения ошибок алгоритмов (4.13) и (4.14) соизмеримы с квадратом уровня помехи (см. рис. 5). В то же время средний уровень ошибок оценок, доставляемых рандомизированным алгоритмом, во всех ситуациях примерно одинаковый и в несколько раз лучше уровня помехи. В таблице 1 сведены итоговые результаты средних значений

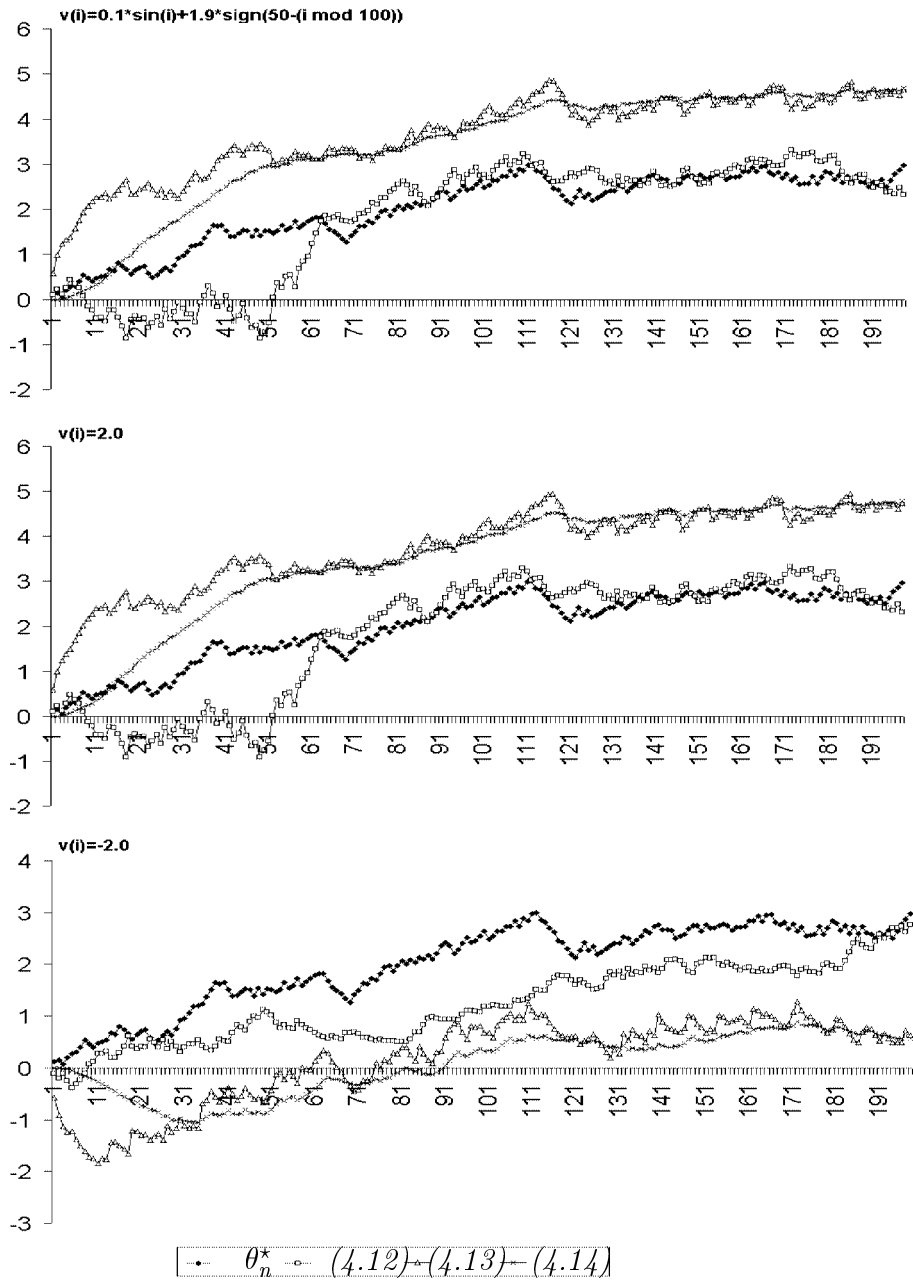


Рис. 5. Фильтрация при нерегулярных помехах

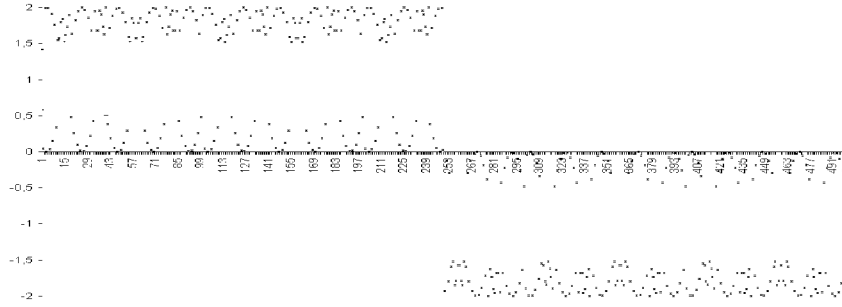


Рис. 6. Помехи при временном включении полезного сигнала

ошибок типичных компьютерных экспериментов.

Таблица 1.

	$\tilde{D}((4.12))$	$\tilde{D}((4.13))$	$\tilde{D}((4.14))$
$v_n = 4.0 * (rand() - 0.5)$	0.5309	0.1803	0.1256
$v_n = 0.1 * sin(n) +$ $+ 1.9 * sign(50 - n \bmod 100)$	0.5700	2.8254	2.2640
$v_n = 2.0$	0.5954	3.1387	2.5335
$v_n = -2.0$	0.7826	3.4989	3.9582

4.3.2 Оценивание изменяющихся параметров сигнала

Рассмотрим пример моделирования на ЭВМ двух алгоритмов стохастической аппроксимации с фиксированным шагом: обыкновенного

$$(4.15) \quad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - 0.1\varphi_n(\varphi_n\hat{\theta}_{n-1} - y_n)$$

и рандомизированного

$$(4.16) \quad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - 0.1(\varphi_n - M_\varphi)((\varphi_n - M_\varphi)\hat{\theta}_{n-1} - y_n)$$

в применении к задаче об отслеживании изменяющихся параметров линейной регрессии по наблюдениям

$$y_n = \varphi_n \theta_n^* + v_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Полезный сигнал $\{\varphi_n\}$ и помехи наблюдения $\{v_n\}$ удовлетворяют тем же условиям, что и в предыдущем пункте. Измерения производятся

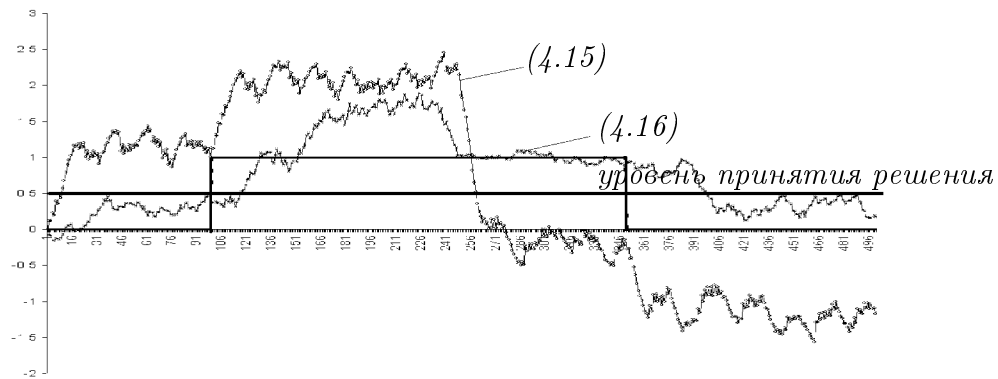


Рис. 7. Оценки при временном включении полезного сигнала

на интервале $n = 1, 2, \dots, 500$. Полезный сигнал включается в канал наблюдения временно, с момента $n = 100$ до $n = 350$, хотя его значения доступны экспериментатору на всем промежутке времени наблюдения. В выбранном примере моделирования характер поведения помех нерегулярный, см. рис. 6. Первую половину времени наблюдения среднее значение помехи больше единицы, на второй половине — меньше минус единицы.

Задача состоит в построении правила, по которому в каждый момент времени можно было бы ответить на вопрос поступает ли в канал наблюдения полезный сигнал или регистрируются только помехи. На рис. 7 приведены графики поведения последовательностей оценок, генерируемых по обоим алгоритмам. При выборе в качестве решающего правила операции сравнения текущего значения оценки с пороговым значением $\delta = 1/2$ рандомизированный алгоритм в отличие от обыкновенного довольно-таки точно отслеживает изменение параметров полезного сигнала, давая только 13% неправильных ответов. Более того, оценки обыкновенного алгоритма в середине интервала времени наблюдения ошибочно (вслед за изменением среднего значения помехи) резко меняют характер поведения.

Глава 5

Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации при произвольных помехах

Многомерная стохастическая оптимизация играет важную роль в анализе и управлении многими техническими системами. Практически во всех прикладных задачах оптимизации используется какой-нибудь математический алгоритм, который последовательно отыскивает нужное решение, так как аналитическое решение задачи редко доступно. Для решения трудных многомерных задач оптимизации и разрабатывались рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации с возмущением на входе. Эти алгоритмы в последнее время активно используются в таких областях, как статистическая оценка параметров, управление с обратной связью, основанная на моделировании оптимизация, обработка сигналов и изображений, планирование экспериментов. Их существенная особенность состоит в том, что для аппроксимации градиента функции потерь, лежащей в основе многих алгоритмов, требуется только одно или два измерения функции независимо от размерности задачи оптимизации. Эта особенность обеспечивает относительную легкость представления алгоритмов и позволяет добиться существенного уменьшения затрат на решение, особенно в задачах оптимизации по большому количеству переменных. Кроме того, в случае зашумленных измерений функции потерь для этих алгоритмов удастся доказать состоятельность доставляемых оценок при очень незначительных ограничениях на помехи.

Основная особенность рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации состоит в том, что неизвестная минимизируемая функция на каждом шаге измеряется не в точке, соответствующей предыдущей оценке, а в её слегка возбужденной позиции. Ниже будет рассмотрена более общая, чем обычно, постановка задачи минимизации функционала типа среднего риска в условиях измерений значений подынтеграль-

ной функции стоимости с почти произвольными помехами. Для решения задачи предлагается использовать один из нескольких рандомизированных алгоритмов, для каждого из которых последовательность доставляемых им оценок сходится к истинному значению неизвестных параметров с вероятностью единица и в среднеквадратичном смысле.

5.1 Формулировки и обоснования рандомизированных алгоритмов СА

Как уже отмечалось во введении и первой главе, развитие методов стохастической аппроксимации (СА) началось в 50-е годы XX века с алгоритма Роббинса–Монро (РМ) [147] и процедуры Кифера–Вольфовица (КВ) [118]. Для примера рассмотрим задачу о нахождении стационарной точки θ^* некоторой функции $f(\cdot)$ (точки локального минимума или максимума) при условии, что для каждого значения $\theta \in \mathbb{R}$ — входа алгоритма (управляемой переменной) — наблюдается случайная величина $Y(\theta)$, являющаяся зашумленным значением функции $f(\cdot)$ в точке θ

$$Y(\theta) = f(\theta) + V.$$

Дж.Кифер и Дж.Вольфовиц для решения этой задачи при некоторых дополнительных ограничениях обосновали сходимость к точке θ^* рекуррентной последовательности, определяемой по правилу (алгоритму)

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \frac{Y(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n) - Y(\hat{\theta}_{n-1} - \beta_n)}{2\beta_n},$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — некоторые заданные убывающие числовые последовательности с определенными свойствами.

Основное условие–ограничение на свойства помех наблюдения, которое обычно предполагается выполненным, — это условная центрированность помех наблюдения. Его можно сформулировать таким образом. Для *статистики* (функции, выборочные значения которой точно наблюдаются или вычисляются)

$$z(\theta, \beta) = \frac{Y(\theta + \beta) - Y(\theta - \beta)}{2\beta}$$

при малом β условное математическое ожидание близко к значению производной функции

$$E\{z(\theta, \beta)|\theta\} \approx f'(\theta).$$

Поведение последовательности оценок, доставляемых алгоритмом стохастической аппроксимации, зависит от выбора наблюдаемых функций–

статистик $z(\theta, \beta)$. В ряде практических приложений нет достаточной информации относительно статистических свойств ошибок измерения, или они могут просто задаваться неизвестной экспериментатору детерминированной функцией. При этом возникают существенные трудности в обосновании применимости обычной процедуры Кифера–Вольфовица, и часто её оценки не сходятся к нужной точке. Но это не означает, что, решая такие проблемы, надо вообще отказаться от использования достаточно простых в представлении алгоритмов стохастической аппроксимации. Выше при решении задач с произвольными помехами уже предлагалось использовать "другие" наблюдения. Если удачно заменить статистику $z(\theta, \beta)$ на другую, которая "в среднем" лучше аппроксимирует производную функции $f(\cdot)$, то можно надеяться на получение лучшего поведения последовательности оценок. Предположим, что функция регрессии дважды непрерывно дифференцируема, и задана наблюдаемая реализация некоторой бернуллиевской последовательности независимых случайных величин $\{\Delta_n\}$, равных с одинаковой вероятностью плюс/минус единице, некоррелированных с ошибками наблюдения на шаге n . Тогда процедуру Кифера–Вольфовица можно модифицировать, используя рандомизированную статистику

$$\tilde{z}(\theta, \beta, \Delta) = z(\theta, \beta\Delta).$$

Разложив функцию $f(\theta)$ по формуле Тейлора и воспользовавшись некоррелированностью Δ_n и помех наблюдения, для этой новой статистики имеем

$$E\{\tilde{z}(\theta, \beta, \Delta)|\theta\} = f'(\theta) + E\left\{\frac{1}{\Delta}V\right\} + \mathcal{O}(\beta) = f'(\theta) + \mathcal{O}(\beta).$$

Если значения числовой последовательности $\{\beta_n\}$ в алгоритме стремятся к нулю, то в пределе эта статистика "в среднем" совпадает со значением производной функции $f(\cdot)$. Такими же свойствами обладает и более простая статистика

$$\bar{z}(\theta, \beta, \Delta) = \frac{\Delta}{\beta}Y(\theta + \beta\Delta),$$

использующая только одно наблюдение на каждой итерации (шаге). Добавление в алгоритм и канал наблюдения нового случайного процесса $\{\Delta_n\}$, называемого *пробным одновременным возмущением*, приводит к обогащению последовательности наблюдений. Пробное возмущение по своей сути является возбуждающим воздействием, так как главная цель его использования заключается в стремлении добиться невырожденности получаемых наблюдений.

В многомерном случае, когда $\theta \in \mathbb{R}^r$, для построения последовательности оценок обычная процедура Кифера–Вольфовица, основанная

на конечно–разностных аппроксимациях вектора–градиента функции, использует $2r$ наблюдений на каждой итерации (по два наблюдения для аппроксимации каждой компоненты r -мерного вектора–градиента). Рандомизированные статистики $\tilde{z}(\theta, \beta, \Delta)$ и $\bar{z}(\theta, \beta, \Delta)$ допускают более простой с вычислительной точки зрения способ обобщения на многомерный случай, использующий всего два или одно измерение функции на каждой итерации. Пусть $\{\Delta_n\}$ — бернуллиевский r -мерный случайный процесс. Тогда

$$\tilde{z}(\theta, \beta, \Delta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta^{(1)}} \\ \frac{1}{\Delta^{(2)}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\Delta^{(r)}} \end{pmatrix} \frac{Y(\theta + \beta\Delta) - Y(\theta - \beta\Delta)}{2\beta},$$

а вид формулы для $\bar{z}(\theta, \beta, \Delta)$ такой же, как и в скалярном случае. Использовать статистику $\tilde{z}(\theta, \beta, \Delta)$ было предложено Дж.Спалом в [160, 161]. В его основной работе [161], в частности, показано, что для больших n вероятностное распределение соответствующим образом отмасштабированных ошибок оценивания является приблизительно нормальным. Полученная формула для асимптотической дисперсии ошибки вместе с подобной характеристикой обыкновенной процедуры Кифера–Вольфовица была им использована для сравнения рандомизированного и обыкновенного алгоритмов. Дж.Спал установил, что при прочих равных условиях новый алгоритм имеет ту же скорость сходимости, что и обычная процедура Кифера–Вольфовица, несмотря на то, что в многомерном случае использует существенно меньше наблюдений (в r раз меньше при $n \rightarrow \infty$). В скалярном случае статистика $\bar{z}(\theta, \beta, \Delta)$ впервые была предложена автором диссертации в работе [16], где она использовалась для построения последовательности оценок, состоятельных при почти произвольных помехах в наблюдении.

Вопрос о скорости сходимости оценок алгоритмов стохастической аппроксимации был, наверное, основным, стимулирующим модификации первоначальных алгоритмов. Свойства оценок обычной процедуры Кифера–Вольфовица и некоторых её обобщений детально изучены в [6, 25, 26, 32, 41, 42, 45, 50, 55, 59, 62, 74, 121, 122, 149] и во многих других работах. Скорость сходимости зависит от гладкости функции $f(\cdot)$. Если она дважды дифференцируема, то среднеквадратичная ошибка обыкновенного алгоритма КВ убывает как $\mathcal{O}(n^{-\frac{1}{2}})$, если трижды дифференцируема — как $\mathcal{O}(n^{-\frac{2}{3}})$ [6]. В.Фабиан [89] модифицировал процедуру Кифера–Вольфовица, предложив использовать кроме аппроксимации первой производной конечно–разностные аппроксимации производных высших порядков с определенными весами. Если функция $f(\cdot)$ имеет ℓ непрерывных производных, тогда алгоритм Фабиана обеспечивает среднеквадратичную скорость сходимости порядка $\mathcal{O}(n^{-\frac{\ell-1}{\ell}})$ для нечетных ℓ . С вы-

числительной точки зрения алгоритм Фабиана очень усложнен, число наблюдений на одной итерации быстро увеличивается с ростом гладкости и размерности, кроме этого, на каждом шаге приходится обращаться некоторую матрицу. При использовании рандомизированных алгоритмов СА в задачах с достаточно гладкими исследуемыми функциями $f(\cdot)$ добиться увеличения асимптотической среднеквадратичной скорости сходимости удаётся без увеличения количества измерений функции на каждой итерации. В том случае, когда некоторый обобщенный показатель гладкости функции $f(\cdot)$ равен γ ($\gamma = \ell$, если все частные производные функции порядка до $\ell - 1$ включительно удовлетворяют условию Липшица) Б.Т.Поляком и А.Б.Цыбаковым в [51] было предложено использовать статистику вида

$$\tilde{z}_\gamma(\theta, \beta, \Delta) = \mathcal{K}(\Delta) \frac{Y(\theta + \beta\Delta) - Y(\theta - \beta\Delta)}{2\beta}$$

и

$$\bar{z}_\gamma(\theta, \beta, \Delta) = \frac{1}{\beta} \mathcal{K}(\Delta) Y(\theta + \beta\Delta),$$

где $\mathcal{K}(\cdot)$ — некоторая вектор-функция с конечным носителем (дифференцирующее ядро), определяемая с помощью ортогональных многочленов степени меньшей ℓ . Два соответствующих рандомизированных алгоритма дают среднеквадратичную скорость сходимости последовательности оценок, равную $\mathcal{O}(n^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}})$. В той же работе было показано, что для широкого класса алгоритмов эта скорость сходимости оптимальна в некотором асимптотически минимаксном смысле, т. е. не может быть улучшена ни для какого-либо другого алгоритма, ни для любого другого допустимого правила выбора точек измерения. Для нечетных ℓ этот же факт ранее был установлен Х.-Ф.Ченом [79].

Сходимость рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации в многомерном случае при "почти" произвольных помехах обоснована в [18, 19, 80, 141]. В [51] и позже в [164] показано, что алгоритм с одним измерением в асимптотическом смысле ведет себя хуже, чем алгоритм с двумя измерениями. Как будет показано ниже, это не совсем так, если при сравнении алгоритмов рассматривать количество итераций, умноженное на количество измерений. Кроме того, во многих практических применениях, в частности, при оптимизации работы систем реального времени, лежащие в основе математической модели динамические процессы могут изменяться слишком быстро, не позволяя успеть получить два последовательных измерения. В некоторых задачах просто невозможно для одного шага алгоритма сделать два измерения таких, чтобы помехи наблюдения в обеих точках $\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n$ и $\hat{\theta}_{n-1} - \beta_n \Delta_n$ были независимы с Δ_n . (Это одно из основных условий применимости алгоритма!). Избежать последнего недостатка позволяет предложенный

в [80] алгоритм с двумя последовательными наблюдениями в точках $\hat{\theta}_{n-1}$ и $\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n$.

В [98] обоснование сходимости рандомизированного алгоритма СА с одним наблюдением при почти произвольных помехах было распространено на случай дополнительных мультипликативных помех и ослабляющейся зависимости между пробным сигналом и помехами наблюдения.

В работах [99] и [152] на основе анализа асимптотических свойств последовательности получаемых оценок рассматривался вопрос о выборе наилучшего распределения для вектора пробного одновременного возмущения Δ_n . В [152] показано, что оптимальное распределение для компонент вектора Δ_n — это симметричное распределение Бернулли. Эффективность использования этого простого распределения также подтверждается во многих примерах на практике и при конечной выборке наблюдений. Иногда в практических задачах желательно выбрать некоторое другое распределение. Например, в [133] в применении для устройства управления роботом используется симметричное, состоящее из двух частей равномерное распределение, то есть равномерное распределение с удаленной некоторой окрестностью нуля, что необходимо для сохранения ограниченности обратных моментов в алгоритме, предложенном Дж.Спалом [161].

Детерминированный анализ сходимости рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации можно найти в работах [80] и [172]. Скорость сходимости алгоритмов исследуется в [92].

В списке литературы есть работы, содержащие некоторые обобщения основных алгоритмов. Например, подходящий алгоритм для использования в решении задачи об управлении с обратной связью в том случае, когда функционал качества меняется со временем, приводится в [162, 163, 169]. В [162] также рассматривается идея сглаживания градиента, которая помогает снизить влияние помех и расширяет условия сходимости. Альтернативная возможность для понижения влияния помех, состоящая в усреднении нескольких аппроксимаций градиента на каждой итерации (за счёт дополнительных измерений функции), рассматривалась в [161]. Возможности использования рандомизированных алгоритмов СА при решении проблемы глобальной минимизации обсуждались в [81, 135] для случая, когда у исследуемой функции имеются несколько локальных минимумов. Задачи с ограничениями в виде равенств и неравенств рассматривались в [91, 150] при использовании проекционного подхода.

Ускоренные формы рандомизированных алгоритмов СА предлагаются в [99, 165, 170], где с целью увеличения скорости сходимости используются оценки производных второго порядка. В алгоритме из [165, 170] на каждой итерации требуются четыре измерения для того, чтобы оценить вектор-градиент функции и обратную матрицу вторых производных, и иногда одно дополнительное измерение для проверки качества поведения

алгоритма.

5.1.1 Постановка задачи и основные предположения

Пусть $F(w, \theta) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^1$ — дифференцируемая по второму аргументу функция, x_1, x_2, \dots — выбираемая экспериментатором последовательность точек измерения (план наблюдения), в которых в каждый момент времени $n = 1, 2, \dots$ доступно наблюдению с аддитивными помехами v_n значение функции $F(w_n, \cdot)$

$$y_n = F(w_n, x_n) + v_n,$$

где $\{w_n\}$ — неконтролируемая последовательность случайных величин ($w_n \in \mathbb{R}^p$), имеющих одинаковое, вообще говоря, неизвестное распределение $P_w(\cdot)$ с конечным носителем. *Требуется* по наблюдениям y_1, y_2, \dots построить последовательность оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ неизвестного вектора θ^* , минимизирующего функцию

$$f(\theta) = \int_{\mathbb{R}^p} F(w, \theta) P_w(dw)$$

типа функционала среднего риска, определенного в п. 1.2.4 на стр. 52.

Обычно рассматривается задача минимизации функции $f(\cdot)$ при более простой модели наблюдений

$$y_n = f(x_n) + v_n,$$

которая легко укладывается в общую схему. Сделанное обобщение в постановке задачи диктуется стремлением учесть случай мультипликативных помех в наблюдениях

$$y_n = w_n f(x_n) + v_n,$$

который входит в общую схему с функцией $F(w, x) = w f(x)$, и желанием обобщить модель наблюдений (2.1) из п. 2.1.

Перечислим основные предположения, которые в дальнейшем в той или иной степени будут делаться при точных формулировках результатов.

(SA.1) Функция $f(\cdot)$ — сильновыпуклая, т.е. имеет единственный минимум в \mathbb{R}^r в некоторой точке $\theta^* = \theta^*(f(\cdot))$ и

$$(x - \theta^*, \nabla f(x)) \geq \mu \|x - \theta^*\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^r$$

с некоторой постоянной $\mu > 0$.

(SA.2) Условие Липшица на градиент функции $f(\cdot)$

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(\theta)\| \leq A\|x - \theta\|, \forall x, \theta \in \mathbb{R}^r$$

с некоторой постоянной $A > \mu$.

(SA.3) Функция $f(\cdot) \in C^\ell$ (ℓ -раз непрерывно дифференцируема) и все её частные производные до порядка ℓ включительно удовлетворяют на \mathbb{R}^r условию Гёльдера порядка ρ , $0 < \rho \leq 1$:

$$|f(x) - \sum_{|\bar{l}| \leq \ell} \frac{1}{\bar{l}!} \mathcal{D}^{\bar{l}} f(\theta)(x - \theta)^{\bar{l}}| \leq M\|x - \theta\|^\gamma,$$

где M — некоторая постоянная, $\gamma = \ell + \rho \geq 2$,
 $\bar{l} = (l^{(1)}, \dots, l^{(r)})^T \in \mathbb{N}^r$ — мультииндекс,

$$|\bar{l}| = l^{(1)} + \dots + l^{(r)}, \bar{l}! = l^{(1)}! \dots l^{(r)}!, l^{(i)} \geq 0, i = 1, \dots, r,$$

$$x \in \mathbb{R}^r, x^{\bar{l}} = (x^{(1)})^{l^{(1)}} \dots (x^{(r)})^{l^{(r)}}, \mathcal{D}^{\bar{l}} = \partial^{|\bar{l}|} / (\partial x^{(1)})^{l^{(1)}} \dots (\partial x^{(r)})^{l^{(r)}}.$$

При $\gamma = 2$ полагаем $M = A/2$.

5.1.2 Пробное возмущение и основные алгоритмы

Пусть пробное одновременное возмущение Δ_n , $n = 1, 2, \dots$ — наблюдаемая последовательность независимых случайных векторов из \mathbb{R}^r с функциями распределения $P_n(\cdot)$, $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — последовательности положительных чисел, стремящиеся к нулю, $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^r$ — фиксированный начальный вектор. Для построения последовательностей точек измерения $\{x_n\}$ и оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ предлагаются три алгоритма. Первый из них использует на каждой итерации одно наблюдение:

$$(5.1) \quad \begin{cases} x_n = \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n, y_n = F(w_n, x_n) + v_n, \\ \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n) y_n, \end{cases}$$

а второй и третий — рандомизированные версии процедуры Кифера–Вольфовица — по два наблюдения:

$$(5.2) \quad \begin{cases} x_{2n} = \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n, x_{2n-1} = \hat{\theta}_{n-1} - \beta_n \Delta_n, \\ \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{2\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n)(y_{2n} - y_{2n-1}), \end{cases}$$

$$(5.3) \quad \begin{cases} x_{2n} = \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n, x_{2n-1} = \hat{\theta}_{n-1}, \\ \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n)(y_{2n} - y_{2n-1}). \end{cases}$$

Во всех трех алгоритмах используются некоторые вектор-функции (ядра) $\mathcal{K}_n(\cdot) : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$, с компактным носителем, удовлетворяющие вместе с функциями распределения пробного возмущения $P_n(\cdot)$ условиям

$$\int \mathcal{K}_n(x) P_n(dx) = 0, \quad \int \mathcal{K}_n(x) x^T P_n(dx) = I,$$

(5.4)

$$\sup_n \int \|\mathcal{K}_n(x)\|^2 P_n(dx) < \infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

Алгоритм (5.2) впервые был предложен в книге Г.Кушнера и Д.Кларка [121] для случая равномерного распределения и функции $\mathcal{K}_n(\Delta_n) = \Delta_n$. В работе [16] с той же простой функцией ядра, но для более общего класса пробных возмущений, был впервые предложен алгоритм (5.1) построения последовательности оценок, состоятельных при почти произвольных помехах в наблюдении. В [51] были рассмотрены оба алгоритма (5.1) и (5.2) с вектор-функцией $\mathcal{K}_n(\cdot)$ достаточно общего вида в ситуации равномерно распределенного пробного возмущения и при предположении о независимости и центрированности помех наблюдения. В [98] исследовались свойства алгоритма (5.1) при общих предположениях о структуре пробного возмущения и вектор-функции $\mathcal{K}_n(\cdot)$. Дж.Спал в [160, 161] рассматривал алгоритм (5.2) для случая распределения пробного возмущения с конечными обратными моментами и вектор-функцией $\mathcal{K}_n(\cdot)$, задаваемой по правилу

$$\mathcal{K}_n(\Delta_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_n^{(1)}} \\ \frac{1}{\Delta_n^{(2)}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\Delta_n^{(r)}} \end{pmatrix}.$$

С теми же вектор-функцией $\mathcal{K}_n(\cdot)$ и ограничениями на вид распределения пробного одновременного возмущения Х.-Ф.Ченом и др. в [80] было предложено рассматривать алгоритм (5.3).

5.1.3 Сходимость с вероятностью единица и в среднеквадратичном смысле

Вместо алгоритма (5.1) будем рассматривать близкий к нему алгоритм с проектированием

$$(5.5) \quad \begin{cases} x_n = \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n, & y_n = F(w_n, x_n) + v_n, \\ \hat{\theta}_n = \mathcal{P}_{\Theta_n}(\hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n) y_n), \end{cases}$$

для которого удобнее провести доказательство состоятельности последовательности формируемых оценок. В этом алгоритме \mathcal{P}_{Θ_n} , $n = 1, 2, \dots$ — операторы проектирования на некоторые выпуклые замкнутые ограниченные подмножества $\Theta_n \subset \mathbb{R}^r$, которые содержат, начиная с некоторого $n \geq 1$, точку θ^* . Если заранее известно ограниченное замкнутое выпуклое множество Θ : $\theta^* \in \Theta$, то можно считать $\Theta_n = \Theta$. В противном случае, множества $\{\Theta_n\}$ могут расширяться до бесконечности. Иногда специфика конкретной задачи позволяет построить убывающую последовательность множеств $\{\Theta_n\}$.

Обозначим $\mathbb{W} = \text{supp}(P_w(\cdot)) \subset \mathbb{R}^p$ — носитель распределения $P_w(\cdot)$; \mathcal{F}_{n-1} — σ -алгебру вероятностных событий, порождаемую случайными величинами $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{n-1}$, формируемыми по алгоритму (5.2) (или (5.3), или (5.5)); при использовании алгоритмов (5.2) или (5.3)

$$\bar{v}_n = v_{2n} - v_{2n-1}, \quad \bar{w}_n = \begin{pmatrix} w_{2n} \\ w_{2n-1} \end{pmatrix}, \quad d_n = 1,$$

а при построении оценок по алгоритму (5.5)

$$\bar{v}_n = v_n, \quad \bar{w}_n = w_n, \quad d_n = \text{diam}(\Theta_n),$$

где $\text{diam}(\cdot)$ — евклидовыи диаметр множества.

Т е о р е м а 5.1 Пусть выполнены условия:

(SA.1) для функции $f(\theta) = E\{F(w, \theta)\}$;

(SA.2) для функций $F(w, \cdot)$, $\forall w \in \mathbb{W}$;

$\forall \theta \in \mathbb{R}^r$ функции $F(\cdot, \theta)$ и $\nabla_{\theta} F(\cdot, \theta)$ равномерно на \mathbb{W} ограничены;

(5.4) для функций $\mathcal{K}_n(\cdot)$ и $P_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots$;

$\forall n \geq 1$ $E\{\bar{v}_n^2\} \leq \sigma_n^2$, случайные величины $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ и векторы $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{n-1}$ не зависят от \bar{w}_n, Δ_n , а случайный вектор \bar{w}_n не зависит от Δ_n .

Если $\sum_n \alpha_n = \infty$ и $\alpha_n \rightarrow 0$, $\beta_n \rightarrow 0$, $\alpha_n^2 \beta_n^{-2} (1 + d_n^2 + \sigma_n^2) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$,

тогда $E\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. последовательность оценок $\{\hat{\theta}_n\}$, доставляемых алгоритмом (5.2) (или (5.3), или (5.5)), сходится к θ^* в среднеквадратичном смысле.

Если, более того, $\sum_n \alpha_n \beta_n^2 < \infty$ и с вероятностью единица

$$\sum_n \alpha_n^2 \beta_n^{-2} (1 + E\{\bar{v}_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}\}) < \infty,$$

тогда $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta^*$ при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью единица.

Доказательство теоремы 5.1 приведено в разделе 5.4.

Замечание 5.1. Для функции $F(w, x) = wf(x)$ условия теоремы 5.1 выполняются, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (SA.1,2).

Замечание 5.2. Задача об оценке параметров линейной регрессии с моделью наблюдений (2.1) соответствует минимизации функционала среднего риска

$$F(w, x) = \frac{1}{2}(x - \theta^* - w)^T(x - \theta^* - w).$$

Алгоритм (2.2) с $\Gamma = B^{-1}$ в точности совпадает с (5.2). При выполнении условия **(LR.A')** для входов модели линейной регрессии утверждения теоремы 2.1 о сильной состоятельности оценок алгоритма (2.2) и их сходимости в среднеквадратичном смысле являются следствием теоремы 5.1.

Замечание 5.3. В теореме 5.1 помехи наблюдения v_n можно условно назвать почти произвольными, так как они могут быть неслучайными (детерминированными), но неизвестными и ограниченными, или представлять из себя реализацию некоторого стохастического процесса с произвольной структурой зависимостей. В частности, для доказательства утверждений теоремы 5.1 нет необходимости предполагать что-либо о зависимости между \bar{v}_n и \mathcal{F}_{n-1} .

Замечание 5.4. Утверждения теоремы 5.1 становятся неверными, если помехи \bar{v}_n имеют определенную структуру зависимости от точки наблюдения $\bar{v}_n = \bar{v}_n(x_n)$. Если такая зависимость имеет место, например, в связи с ошибками округления, то при попытках решения такого типа задач, наверное, целесообразно помеху наблюдения разбить на две части: $\bar{v}_n(x_n) = \tilde{v}_n + \xi(x_n)$, первая из которых, может быть, удовлетворяет условиям теоремы 5.1, а если вторая является результатом ошибок округления, то, как правило, она обладает хорошими статистическими свойствами и, может быть, её наличие не мешает сходимости алгоритмов.

Замечание 5.5. Условие независимости помех наблюдения от пробного возмущения может быть ослаблено. Достаточно потребовать стремление к нулю с вероятностью единица при $n \rightarrow \infty$ условной взаимной корреляции между \bar{v}_n и $\mathcal{K}_n(\Delta_n)$ со скоростью не меньшей, чем $\alpha_n \beta_n^{-1}$:

$$\|\mathbb{E}\{\bar{v}_n \mathcal{K}_n(\Delta_n) | \mathcal{F}_{n-1}\}\| = \mathcal{O}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right).$$

Замечание 5.6. Несмотря на кажущуюся близость алгоритмов (5.2) и (5.3), в случае произвольных помех в наблюдениях использование второго из них в системах реального времени более оправданно. Для алгоритма (5.2) выполнение условия о независимости помехи наблюдения v_{2n} от пробного возмущения Δ_n слишком ограничительно, так как в предыдущий момент времени $2n - 1$ вектор Δ_n уже использовался в системе. При работе с алгоритмом (5.3) помеха v_{2n} и вектор пробного возмущения Δ_n появляются в системе одновременно, что позволяет надеяться на их независимость.

Замечание 5.7. Для ещё большего обобщения условий сходимости алгоритмов (5.2), (5.3) и (5.5) можно рассматривать случайные, измеримые относительно σ -алгебры \mathcal{F}_n последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Практическая потребность в такого рода обобщении появляется, например, в тех случаях, когда параллельно с вычислением оценок по алгоритму стохастической аппроксимации дополнительные условия задачи позволяют говорить о качестве оценок. Если оценки еще "плохие", то целесообразно замедлить сходимость к нулю последовательности $\{\alpha_n\}$, а может быть на какое-то время и увеличить её значения.

5.1.4 Дифференцирующие ядра и распределения пробного возмущения

Рассмотрим более конкретную структуру функций распределения пробного возмущения и некоторый специальный вид вектор-функций $\mathcal{K}_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих условиям (5.4), при использовании которых алгоритмы (5.2), (5.3) и (5.5) достигают как в [51] асимптотически оптимальной среднеквадратичной скорости сходимости $\mathcal{O}(n^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}})$ в том случае, когда исследуемая функция удовлетворяет условию гладкости (SA.3).

Пусть независимые случайные величины $\{\Delta_n\}$ распределены одинаково при $n = 1, 2, \dots$, все компоненты вектора Δ_n не зависят друг от друга и имеют одинаковую скалярную функцию распределения $P_\Delta(\cdot)$ с конечным носителем, а вектор-функции $\mathcal{K}_n(\cdot)$ не зависят от n :

$$\mathcal{K}_n(x) = \mathcal{K}(x) = (\mathcal{K}^{(1)}(x), \dots, \mathcal{K}^{(r)}(x))^T, \quad x \in \mathbb{R}^r, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и их компоненты $\mathcal{K}^{(i)}(\cdot)$, $i = 1, \dots, r$ вычисляются по формулам

$$(5.6) \quad \mathcal{K}^{(i)}(x) = K_0(x^{(i)}) \prod_{j \neq i} K_1(x^{(j)}), \quad i, j = 1, \dots, r, \quad x \in \mathbb{R}^r,$$

где $K_0(\cdot)$ и $K_1(\cdot)$ — некоторые скалярные ограниченные функции (ядра), удовлетворяющие условиям

$$(5.7) \quad \int u K_0(u) P_\Delta(du) = 1, \quad \int u^k K_0(u) P_\Delta(du) = 0, \quad k = 0, 2, \dots, \ell,$$

$$\int K_1(u) P_\Delta(du) = 1, \quad \int u^k K_1(u) P_\Delta(du) = 0, \quad k = 1, \dots, \ell - 1.$$

В частности, в одномерном случае ($r = 1$) для задания $\mathcal{K}(x)$ достаточно одной функции $K_0(x)$.

Несложно убедиться, что при обеспечении условий (5.7) для функции $\mathcal{K}(\cdot)$ и распределения пробного возмущения

$$P_n(x) = P(x) = \prod_{i=1}^r P_{\Delta}(x^{(i)})$$

выполнены условия (5.4).

Укажем один из возможных способов построения ядер $K_0(\cdot)$ и $K_1(\cdot)$, удовлетворяющих условиям (5.7). Пусть $\{p_m(\cdot)\}_{m=0}^{\ell}$ — некоторая система многочленов, заданных на носителе распределения $P_{\Delta}(\cdot)$, ортогональных относительно порождаемой им меры. Возьмем

$$K_0(u) = \sum_{m=0}^{\ell} a_m p_m(u), \quad a_m = p'_m(0) / \int p_m^2(u) P_{\Delta}(du),$$

$$K_1(u) = \sum_{m=0}^{\ell-1} b_m p_m(u), \quad b_m = p_m(0) / \int p_m^2(u) P_{\Delta}(du).$$

Проверим, что таким образом определенные функции $K_0(\cdot)$ и $K_1(\cdot)$ удовлетворяют условиям (5.7). В самом деле, функцию u^k можно представить в виде

$$u^k = \sum_{j=0}^k c_j p_j(u),$$

где c_j — числовые коэффициенты. Следовательно, для построенного по ортогональным многочленам ядра $K_0(\cdot)$

$$\int u^k K_0(u) P_{\Delta}(du) = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{j=0}^k \int a_m c_j p_m(u) p_j(u) P_{\Delta}(du) = \sum_{j=0}^k c_j p'_j(0) = \delta_{k,1},$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Последнее равенство получается, если продифференцировать формулу разложения для u^k и затем положить $u = 0$. Более просто доказывается тот факт, что ядро $K_1(\cdot)$ удовлетворяет условиям (5.7).

В работах В.Я.Катковника [28] и Б.Т.Поляка с А.Б.Цыбаковым [51] для построения ядер $K_0(\cdot)$ и $K_1(\cdot)$ на интервале $[-1/2, 1/2]$ было предложено использовать ортогональные многочлены Лежандра $p_m(\cdot)$, $m = 0, 1, \dots, \ell$. При этом в [51] в качестве вероятностного распределения компонент пробного возмущения было выбрано равномерное на интервале $[-1/2, 1/2]$. В этом случае для начальных значений $\ell = 1, 2$ (т. е. $2 \leq \gamma \leq 3$) имеем

$$K_0(u) = 12u, \quad K_1(u) = 1, \quad |u| \leq 1/2,$$

для следующих значений $\ell = 3, 4$ (т. е. $3 < \gamma \leq 5$)

$$K_0(u) = 5u(15 - 84u^2), \quad K_1(u) = 9/4 - 15u^2, \quad |u| \leq 1/2,$$

далее, для $\ell = 5, 6$ (т. е. $5 < \gamma \leq 7$)

$$K_0(u) = 5u(15.1875 - 87.5u^2 + 2079u^4),$$

$$K_1(u) = 3.515625 - 65.625u^2 + 236.25u^4, \quad |u| \leq 1/2.$$

Напомним, что по определению $K_0(u) = 0$ и $K_1(u) = 0$ при $|u| > 1/2$.

Рассмотрение более общего, чем равномерное из [51], типа вероятностных распределений пробного возмущения обуславливается тем, что часто на практике постановка задачи сама по себе задает определенный тип распределения пробного возмущения P_Δ , которое удобнее моделировать. Иногда можно использовать распределения только из некоторого узкого фиксированного класса. Возможность выбора среди различных систем ортогональных многочленов позволяет получить лучшее или худшее качество оценивания при одинаковом асимптотическом порядке скорости сходимости.

5.1.5 Скорость сходимости

Следующая теорема дает достаточные условия для того, чтобы асимптотическая скорость сходимости алгоритмов (5.2), (5.3) и (5.5) была оптимальной.

Т е о р е м а 5.2 Пусть в алгоритме (5.2) (или (5.3), или (5.5)) вектор-функции $K_n(\cdot)$ определяются по формулам (5.6) и

$$\alpha_n = \alpha n^{-1}, \quad \beta_n = \beta n^{-\frac{1}{2\gamma}}, \quad \beta > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если выполнены условия:

(SA.1,3) при $\gamma \geq 2$, $\alpha > \frac{\gamma-1}{2\mu\gamma}$ для функции $f(\theta) = E\{F(w, \theta)\}$;

(SA.2) для функций $F(w, \cdot) \forall w \in \mathbb{W}$;

$\forall \theta \in \mathbb{R}^r$ функции $F(\cdot, \theta)$ и $\nabla_\theta F(\cdot, \theta)$ равномерно на \mathbb{W} ограничены;

(5.7) для функций $K_0(\cdot), K_1(\cdot)$ и $P_\Delta(\cdot)$;

$d_n n^{-1+\frac{1}{2\gamma}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

$\forall n \geq 1$ случайные векторы \bar{w}_n, Δ_n не зависят от $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{n-1}$, и случайный вектор Δ_n не зависит от \bar{w}_n ;

$E\{(v_{2n} - v_{2n-1})^2/2\} \leq \sigma_2^2, (E\{v_n^2\} \leq \sigma_1^2)$;

тогда для среднеквадратичной скорости сходимости последовательности оценок $\{\hat{\theta}_n\}$, сгенерированных алгоритмом (5.2) (или (5.3), или (5.5)), асимптотически при $n \rightarrow \infty$ выполняется

$$E\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2\} = \mathcal{O}(n^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}).$$

Доказательство теоремы 5.2 также приведено в последнем разделе этой главы.

Замечание 5.8. Как и в теореме 5.1, условие независимости помех наблюдения и пробного возмущения можно ослабить, потребовав только стремление к нулю условной взаимной корреляции $\bar{v}_n \mathcal{K}(\Delta_n)$:

$$\|\mathbb{E}\{\bar{v}_n \mathcal{K}(\Delta_n) | \mathcal{F}_{n-1}\}\| = \mathcal{O}(n^{-1+\frac{1}{2\gamma}}).$$

Замечание 5.9. При доказательстве теоремы 5.2 будут установлены оптимальные значения параметров

$$\alpha^* = \frac{1}{\mu}, \quad \beta^* = \left(\frac{\sqrt{2(\nu_i + \sigma_i^2/i)} \int \|\mathcal{K}(x)\|^2 \mathbb{P}(dx)}{M \int \|x\|^\gamma \|\mathcal{K}(x)\| \mathbb{P}(dx) \sqrt{\gamma(\gamma-1)}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

и количественные оценки асимптотической скорости сходимости алгоритмов (5.5) и (5.2):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2\} &\leq n^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} \kappa_i \left(\int \|\mathcal{K}(x)\|^2 \mathbb{P}(dx) \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(\int \|x\|^\gamma \|\mathcal{K}(x)\| \mathbb{P}(dx) \right)^{\frac{2}{\gamma}} + \\ &\quad + o(n^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}), \\ \kappa_i &= \gamma^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} (\gamma-1)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \mu^{-2} (\nu_i + \sigma_i^2/i)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} M^{\frac{2}{\gamma}}, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где

$$\nu_1 = \sup_{w \in \mathbb{W}} \left(F(w, \theta^*) + \frac{1}{2} (\nabla_\theta F(w, \theta^*))^2 \right)^2,$$

соответствует алгоритму (5.5), а для (5.2) $\nu_2 =$

$$= \sup_{w_1, w_2 \in \mathbb{W}} \frac{\left(2|F(w_1, \theta^*) - F(w_2, \theta^*)| + (\nabla_\theta F(w_1, \theta^*))^2 + (\nabla_\theta F(w_2, \theta^*))^2 \right)^2}{8}.$$

Если $F(w, x) = f(x)$, то, как видно из сравнения κ_1 и κ_2 , асимптотическая скорость сходимости по итерациям последовательности оценок, формируемой по алгоритму (5.2), использующему два наблюдения, всегда лучше, чем для алгоритма (5.5). Если произвести сравнение по принципу, учитывающему количество измерений (в алгоритме (5.2) на одну итерацию делается в два раза больше измерений), то преимущество алгоритма (5.2) перестает быть бесспорным. Сравнивая значения κ_1 и $2\kappa_2$, несложно убедиться в том, что при

$$2^{\frac{1}{\gamma-1}} \sigma_2^2 - \sigma_1^2 > \nu_1 - 2^{\frac{1}{\gamma-1}} \nu_2$$

асимптотическая скорость сходимости, учитывающая количество измерений, для алгоритма (5.5) лучше, чем для (5.2).

Рассмотрим скалярный случай $r = 1$ при $F(w, x) = f(x)$ с пробным одновременным возмущением $\{\Delta_n\}$, формируемым независимыми, одинаково равномерно распределенными случайными величинами из отрезка $[-1/2, 1/2]$. Пусть помехи наблюдения $\{v_n\}$ независимые, центрированные и $E\{v_n^2\} \leq \sigma_v^2$. При $\gamma = 2$ и $\mathcal{K}(x) = 12x$, $|x| \leq 1/2$ в силу полученных оценок скорости сходимости для алгоритма (5.5), как и в [51], имеем

$$E\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2\} \leq \sqrt{f(\theta^*)^2 + \sigma_v^2} \frac{9A}{4\sqrt{10}\mu^2} n^{-1/2} + o(n^{-1/2}),$$

и для (5.2)

$$E\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2\} \leq \frac{9A\sigma_v}{4\sqrt{5}\mu^2} n^{-1/2} + o(n^{-1/2}).$$

В этом случае при $f(\theta^*)^2 < \sigma_v^2$ предпочтительнее пользоваться алгоритмом (5.5).

5.2 Оптимальные порядки точности алгоритмов стохастической оптимизации

Опишем более формально класс допустимых планов наблюдения x_1, x_2, \dots . Пусть Δ — случайная величина со значениями в измеримом пространстве (Ω, \mathcal{X}) . Обозначим Π_n — множество всех наборов вида $\pi_n = \{X_1(\cdot), \dots, X_n(\cdot), P_\Delta(\cdot)\}$, где $X_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$, $X_i : \mathbb{R}^{(i-1)(r+1)} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$, $i = 2, \dots, n$ — измеримые функции, $P_\Delta(\cdot)$ — произвольная вероятностная мера на \mathcal{X} . Допустимые стратегии выбора (планы наблюдения) x_1, x_2, \dots, x_n определяются соотношениями

$$(5.8) \quad x_1 = X_1(\Delta), \quad x_{i+1} = X_{i+1}(x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_i, \Delta), \quad i = 1, \dots, n$$

при $\{X_1(\cdot), \dots, X_n(\cdot), P_\Delta(\cdot)\} \in \Pi_n$.

Произвольной оценкой T_n точки минимума θ^* будем называть любую борелевскую функцию $T_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$.

5.2.1 Минимаксный порядок скорости сходимости рандомизированных алгоритмов СА

Для упрощения, будем рассматривать случай только аддитивных помех в наблюдении $f(\cdot) = F(w, \cdot)$.

Пусть $E_{f(\cdot), \pi_n}\{\cdot\}$ — знак математического ожидания по совместному распределению $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, где $y_i = f(x_i) + v_i$ и x_1, x_2, \dots, x_n

удовлетворяют (3.8) при $\{X_1(\cdot), \dots, X_n(\cdot), P_\Delta(\cdot)\} = \pi_n \in \Pi_n$. Обозначим $\Sigma(\gamma, M, \mu, A)$ — класс (множество) всех функций, удовлетворяющих условиям **(SA.1)**–**(SA.3)**, и $\Sigma^0(\gamma, M, \mu, A, B)$ — класс функций из множества $\Sigma(\gamma, M, \mu, A)$, у которых значение $\|f(\theta^*(f(\cdot)))\|$ равномерно ограничено константой B .

При выполнении условий теоремы 5.2, как видно из анализа её доказательства, для последовательности оценок $\{\hat{\theta}_n\}$, формируемых по алгоритму (5.5), выполняется

$$\sup_n \sup_{f(\cdot) \in \Sigma^0(\gamma, M, \mu, A, B)} E_{f(\cdot), \pi_n} \{ \|\hat{\theta}_n - \theta^*(f(\cdot))\|^2 \} n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} < \infty,$$

а для алгоритма (5.2) —

$$\sup_n \sup_{f(\cdot) \in \Sigma(\gamma, M, \mu, A)} E_{f(\cdot), \pi_n} \{ \|\hat{\theta}_n - \theta^*(f(\cdot))\|^2 \} n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} < \infty.$$

Из этих соотношений, в частности, следует, что алгоритм (5.2), по сравнению с (5.5), оптимально эффективен для более широкого класса функций.

В следующем пункте будет сформулировано утверждение о том, что для соответствующих классов функций $f(\cdot)$ не существует асимптотически более эффективных в минимаксном смысле алгоритмов, т.е.

$$\inf_n \inf_{T_n, \pi_n} \sup_{f(\cdot) \in \Sigma_\gamma} E_{f(\cdot), \pi_n} \{ \|T_n - \theta^*(f(\cdot))\|^2 \} n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} > 0,$$

где Σ_γ равно $\Sigma^0(\gamma, M, \mu, A, B)$ или $\Sigma(\gamma, M, \mu, A)$ и \inf_{T_n, π_n} — нижняя грань по всем оценкам T_n и всем $\pi_n \in \Pi_n$.

5.2.2 Нижняя граница для асимптотической скорости сходимости

Пусть $\chi(t)$ — монотонная неубывающая функция, определенная на $[0, \infty)$: $\chi(t) \not\equiv 0$, $\chi(0) = 0$, и $\rho > 0$ — некоторое число: $\chi(\rho/2) > 0$.

Будем считать, что помехи наблюдения — случайные величины с одинаковыми функциями распределения $G(\cdot)$. В [51] доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 5.3 ([51], теорема 3). *Если*

$$\int \ln(dG(u)/dG(u+t))dG(u) \leq I_0 t^2, \quad |t| \leq t_0,$$

при некоторых $0 < I_0 < \infty$, $0 < t_0 \leq \infty$,

тогда для любых $n \geq 1$, $\gamma \geq 2$

$$\inf_{T_n, \pi_n} \sup_{f(\cdot) \in \Sigma_\gamma} E_{f(\cdot), \pi_n} \{ \chi(\hat{C} \rho n^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \|T_n - \theta^*(f(\cdot))\|) \} \geq \chi(\rho/2) \bar{\nu}_2(1/2),$$

где \hat{C} — конечная постоянная, зависящая только от $\gamma, M, \mu, A, B, \Theta, I_0, t_0$, а $\bar{\nu}_2(1/2)$ — решение уравнения $t \ln(t) + (1-t) \ln(1-t) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}$, принадлежащее интервалу $(0, 1/2)$.

При выполнении условий теоремы 5.3 несложно убедиться в справедливости оценки снизу для всех $n \geq 1$, $\gamma \geq 2$

$$\inf_{T_n, \pi_n} \sup_{f(\cdot) \in \Sigma_\gamma} E_{f(\cdot), \pi_n} \{ \|T_n - \theta^*(f(\cdot))\|^2 \} n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} > \frac{\bar{\nu}_2(1/2)}{4\hat{C}^2},$$

при Σ_γ , равном $\Sigma^0(\gamma, M, \mu, A, B)$ или $\Sigma(\gamma, M, \mu, A)$.

Приведем пример вычисления постоянной \hat{C} . Пусть $r = 1, \gamma = 2$ и $G(\cdot)$ — гауссовское распределение с нулевым средним и дисперсией σ_v^2 . Тогда, как показано в [51], в последнем неравенстве можно взять

$$\hat{C} = 4 \sqrt{5\mu \frac{1 + \frac{16\mu}{9(A-\mu)}}{2\sqrt{2 \ln 2\sigma_v}}}.$$

В частности, при квадратичной функции потерь $\chi(\cdot)$ получаем

$$\inf_{T_n, \pi_n} \sup_{f(\cdot) \in \Sigma_2} E_{f(\cdot), \pi_n} \{ \|T_n - \theta^*(f(\cdot))\|^2 \} n^{\frac{1}{2}} > \frac{\bar{\nu}_2(1/2) \sqrt{\ln 2/2\sigma_v}}{80\mu(1 + \frac{16\mu}{9(A-\mu)})}.$$

5.3 Экспериментальные результаты

5.3.1 Сравнительное моделирование оценок ККВ и SPSA алгоритмов

Все алгоритмы оценивания, рассматриваемые в этой главе, можно записать в виде

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \hat{g}_n(\hat{\theta}_{n-1}),$$

где $\hat{g}_n(\theta)$ — оценка функции $g(\theta) = \nabla f(\theta)$ (градиента), вычисляющаяся по предыдущим наблюдениям зашумленных значений функции $f(\cdot)$. В классическом алгоритме Кифера–Вольфовица (ККВ) оценка градиента строится как конечно-разностная аппроксимация. Для аппроксимации каждой компоненты вектора–градиента берется два измерения

$$\hat{g}_n^{(i)}(\hat{\theta}_{n-1}) = \frac{Y(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n e_i) - Y(\hat{\theta}_{n-1} - \beta_n e_i)}{2\beta_n}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

где e_i — вектор, составленный из нулей и одной единицы на месте i -ой компоненты. Для сравнительной характеристики поведения процедуры ККВ и какого-либо из рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации можно рассмотреть случай "хороших" помех в наблюдении, так как при "плохих" оценки ККВ не сходятся к точке θ^* минимума функции $f(\cdot)$. Среди рандомизированных алгоритмов более всего похож на ККВ алгоритм типа (5.2), проанализированный Дж.Спалом в [161], аппроксимация градиента в котором вычисляется по формуле

$$\hat{g}_n^{(i)}(\hat{\theta}_{n-1}) = \frac{Y(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n) - Y(\hat{\theta}_{n-1} - \beta_n \Delta_n)}{2\beta_n \Delta_n^{(i)}}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

где $\Delta_n \in \mathbb{R}^r$ — пробное возмущение. Для определенности, этот алгоритм будем называть рандомизированным алгоритмом типа Кифера–Вольфовица (SPSA). Заметим, что число измерений значений функции $Y(\cdot)$, необходимое для выполнения каждой итерации ККВ, растет с увеличением размерности задачи r . Принимая во внимание тот факт, что в алгоритме SPSA необходимы только два измерения вне зависимости от r , можно надеяться, что он позволяет при больших r существенно экономить затраты на оптимизацию по сравнению с ККВ. Но эта надежда обоснована только в тех случаях, когда можно показать, что число итераций, необходимых для эффективной сходимости к θ^* , не увеличивается при таком сокращении количества измерений на каждом шаге. Это было показано Дж.Спалом в [161] для двух похожих алгоритмов ККВ и SPSA. Рисунок 8 иллюстрирует этот факт в приложении к одной практической задаче о регулировании чистоты воды и примесей метана в процессе обработки сточных вод, более детально рассмотренной в [163]. Графики показывают сравнительные результаты процессов моделирования при настройке параметров нейронной сети, использующейся для решения этой проблемы. По вертикальной оси отложены нормированные значения функции потерь $f(\cdot)$ (отклонения от некоторого заданного значения соотношения чистоты воды и примесей газа метана), а по горизонтальной оси — количество итераций. Размерность пространства оцениваемых параметров в задаче была равна 412, соответствуя количеству подстраиваемых весовых коэффициентов в нейронной сети. Основным вывод из анализа графиков для последовательностей оценок ККВ и SPSA заключается в том, что оба алгоритма после первых нескольких итераций выходят на одинаковый уровень точности за равное количество итераций. Но для каждой итерации в алгоритме SPSA использовалось только 2 эксперимента, тогда как для алгоритма ККВ необходимо было провести 824 дорогостоящих эксперимента! Эта разница, очевидно, ведет к очень заманчивой экономии вычислительных ресурсов в имитационном эксперименте или времени и денег при настройке реальной установки для обработки отходов. Крутой начальный наклон графика для ККВ

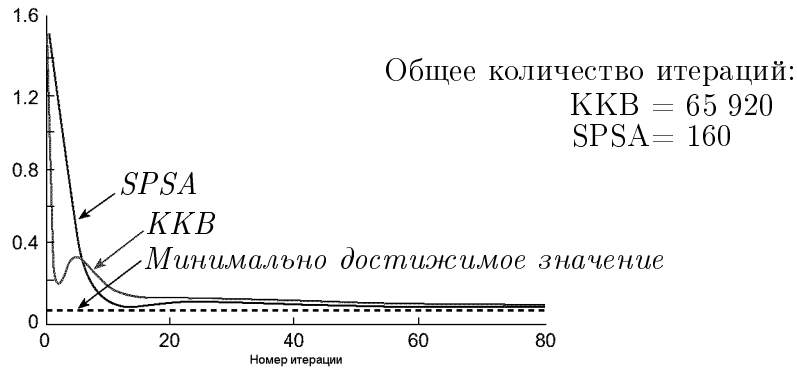


Рис. 8. Сравнение работы алгоритмов KKB и SPSA при настройке регулятора в системе обработки сточных вод

на рис. 8 не должен вводить в заблуждение, для первых двух итераций по алгоритму KKB надо сделать 1648 измерений против 160 для всех итераций по SPSA.

Другой показательный пример сравнительного с SPSA моделирования работы различных алгоритмов можно найти в [87]. Сравнению между собой разных рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации посвящена работа [84].

5.3.2 Пошаговое выполнение алгоритма

Следующее резюме на примере алгоритма (5.3) с одинаково распределенным пробным возмущением Δ_n и с вектор-функцией $K_n(\Delta_n) = \Delta_n$ показывает, как последовательно по итерациям формировать оценки. Пусть функция распределения $P_n(\cdot)$ равномерно сосредоточена в вершинах r -мерного куба $[-1, 1]^r$, компоненты вектора пробного возмущения взаимно независимы и равны ± 1 с одинаковой вероятностью (распределение Бернулли).

Шаг 1: Инициализация и выбор коэффициентов. Установите счётчик алгоритма $n = 1$. Выберите начальное приближение $\hat{\theta}_0$ и значения для неотрицательных коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ и ν . В алгоритме используются последовательности $\alpha_n = \alpha/(\gamma + n)^\mu$ и $\beta_n = \beta/n^\nu$. Выбор последовательностей α_n и β_n играет критическую роль в работе алгоритма. В замечании 5.9 к теореме 5.2 или в [167] обосновываются некоторые соображения по выбору этих коэффициентов более эффективным для практики способом. В ситуации, когда компоненты вектора θ существенно отличаются по величине, желательно использовать матричное масштабирование α_n , если предварительно доступна информация об их относительных величинах.

Шаг 2: Генерация вектора пробного возмущения. Сгенерируйте r -мерный случайный вектор возмущения Δ_n , в котором все r компонент

независимо смоделированы по вероятностному распределению Бернулли ± 1 с вероятностью $1/2$ для каждого результата.

Шаг 3: Измерение значений функции. Получите два измерения функции $f(\cdot)$ в точках $\hat{\theta}_{n-1}$ и возмущенной относительно текущей оценки $\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n$: $Y(\hat{\theta}_{n-1})$ и $Y(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n)$, с β_n и Δ_n сформированными на шагах 1 и 2 соответственно.

Шаг 4: Аппроксимация градиента. Сгенерируйте компоненты вектора аппроксимации градиента по правилу

$$\hat{g}_n^{(i)}(\hat{\theta}_{n-1}) = \Delta_n^{(i)} \frac{Y(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n) - Y(\hat{\theta}_{n-1})}{\beta_n}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

где $\Delta_n^{(i)}$ — i -я компонента вектора Δ_n . Заметим, что второй множитель в формулах для вычисления всех r компонент одинаковый, в отличие от правила аппроксимации градиента по ККВ.

Шаг 5: Обновление оценки $\hat{\theta}$. Используйте стандартную форму алгоритма стохастической аппроксимации

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \hat{g}_n(\hat{\theta}_{n-1}),$$

для перехода от $\hat{\theta}_{n-1}$ к новому значению $\hat{\theta}_n$.

Иногда желательно наложить ограничения. Если полученное основное значение оценки кажется нежелательным, тогда либо выполняют отдельный блок модификации, либо берут следующую оценку. Один из такого рода простых случаев — когда известны заранее значения максимума и минимума какой-либо из компонент вектора θ .

Шаг 6: Итерация или завершение. Возвратитесь к шагу 2 с заменой n на $n + 1$. Закончите работу по алгоритму, если на нескольких последовательных итерациях оценки изменялись несущественно или после выполнения максимально допустимого количества итераций. (Более формальное правило завершения обсуждается в [140], стр. 297–300).

5.3.3 Программа на языке MATLAB

Приведем образец программы на языке MATLAB, реализующей NN итераций алгоритма. Инициализация алгоритма в программе не показана, так как это может быть сделано по-разному в зависимости от конкретной задачи. В программе вызывается внешняя функция $valueY(\cdot)$. Компоненты вектора пробного возмущения $\Delta_n^{(i)}$ генерируются согласно распределению Бернулли ± 1 .

FOR $n = 1 : NN$

$$an = alpha / (gamma + k)^{mu};$$

```

bn = beta/k^nu;
delta = 2*round(rand(r, 1)) - 1;
thetaplus = theta + bn*delta;
yminus = valueY(theta);
yplus = valueY(thetaplus);
ghat = delta*(yplus - yminus)/(2*bn);
theta = theta - an*ghat;
END;
theta;

```

Если максимально и минимально возможные значения θ известны, тогда опишем их как $thetamax$ и $thetamin$ и добавим к программе две строки, учитывающие эти ограничения:

```

theta = min(theta, thetamax);
theta = max(theta, thetamin);

```

5.4 Доказательства теорем 5.1 и 5.2

Доказательство теоремы 5.1. Рассмотрим сначала алгоритм (5.5). Для достаточно больших n , при которых $\theta^* = \theta^*(f(\cdot)) \in \Theta_n$, используя свойства проекции, нетрудно получить

$$\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 \leq \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^* - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n) y_n\|^2.$$

Применив к последнему неравенству операцию условного математического ожидания относительно σ -алгебры \mathcal{F}_{n-1} , имеем

$$\begin{aligned}
(5.9) \quad & \mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} \leq \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 - \\
& - 2\frac{\alpha_n}{\beta_n} \langle \hat{\theta}_{n-1} - \theta^*, \mathbb{E}\{\mathcal{K}_n(\Delta_n) y_n | \mathcal{F}_{n-1}\} \rangle + \\
& + \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} \mathbb{E}\{y_n^2 \|\mathcal{K}_n(\Delta_n)\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}\}.
\end{aligned}$$

В силу теоремы о среднем значении, из условия **(SA.2)** для функции $F(\cdot, \cdot)$ следует

$$|F(w, x) - F(w, \theta^*)| \leq \frac{1}{2} \nabla_{\theta} F(w, \theta^*)^2 + (A + \frac{1}{2}) \|x - \theta^*\|^2, \quad x \in \mathbb{R}^r.$$

Отсюда, в силу равномерной ограниченности функции $F(\cdot, \theta)$, обозначив

$$\nu_1 = \sup_{w \in \mathbb{W}} (|F(w, \theta^*)| + \frac{1}{2} \nabla_{\theta} F(w, \theta^*)^2),$$

получаем

$$F(w, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n x)^2 \leq (\nu_1 + (2A + 1)(\|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 + \|\beta_n x\|^2))^2$$

равномерно по $w \in \mathbb{W}$. В силу условия (5.4), имеем

$$\mathbb{E}\{v_n^2 \|\mathcal{K}_n(\Delta_n)\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} \leq \sup_x \mathcal{K}_n(x)^2 \xi_n^2.$$

Для последнего слагаемого в правой части (5.9) из двух последних неравенств, учитывая ограниченность вектор-функций $\mathcal{K}_n(\cdot)$ и компактность их носителя, последовательно выводим

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\|y_n\|^2 \|\mathcal{K}_n(\Delta_n)\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} &\leq 2\mathbb{E}\{v_n^2 \|\mathcal{K}_n(\Delta_n)\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} + \\ &+ 2 \int \int F(w, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n x)^2 \|\mathcal{K}_n(x)\|^2 P_n(dx) P_w(dw) \leq \\ &\leq C_1 + C_2((d_n^2 + 1)\|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 + \beta_n^2) + C_3 \xi_n^2. \end{aligned}$$

Здесь и ниже обозначены через C_i , $i = 1, 2, \dots$ некоторые положительные константы.

Далее рассмотрим

$$\begin{aligned} &\beta_n^{-1} \mathbb{E}\{y_n \mathcal{K}_n(\Delta_n) | \mathcal{F}_{n-1}\} = \\ (5.10) \quad &= \beta_n^{-1} \int \int F(w, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n x) \mathcal{K}_n(x) P_n(dx) P_w(dw) + \\ &+ \beta_n^{-1} \mathbb{E}\{v_n \mathcal{K}_n(\Delta_n) | \mathcal{F}_{n-1}\}. \end{aligned}$$

Для второго слагаемого в (5.10), в силу независимости v_n с Δ_n и условия (5.4), имеем

$$\mathbb{E}\{v_n \mathcal{K}_n(\Delta_n) | \mathcal{F}_{n-1}\} = \mathbb{E}\{v_n | \mathcal{F}_{n-1}\} \int \mathcal{K}_n(x) P_n(dx) = 0.$$

В силу равномерной ограниченности функции $\nabla_\theta F(\cdot, \theta)$

$$\int_{\mathbb{R}^p} \nabla_\theta F(w, x) P_w(dw) = \nabla f(x).$$

Используя последнее соотношение и условие (5.4), преобразуем первое слагаемое в (5.10) к виду

$$\begin{aligned} & \beta_n^{-1} \int \int F(w, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n x) \mathcal{K}_n(x) P_n(dx) P_w(dw) = \nabla f(\hat{\theta}_{n-1}) + \int \left(\beta_n^{-1} \times \right. \\ & \times \int F(w, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n x) \mathcal{K}_n(x) P_n(dx) - \nabla_\theta F(w, \hat{\theta}_{n-1}) \Big) P_w(dw) = \nabla f(\hat{\theta}_{n-1}) + \\ & + \int \int \mathcal{K}_n(x) x^\top \int_0^1 (\nabla_\theta F(w, \hat{\theta}_{n-1} + t\beta_n x) - \nabla_\theta F(w, \hat{\theta}_{n-1})) dt P_n(dx) P_w(dw). \end{aligned}$$

Для абсолютной величины второго слагаемого в последнем равенстве, в силу выполнения условий **(SA.2)** для любой из функций $F(w, \cdot)$ и (5.4) для $\mathcal{K}_n(\cdot)$, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int \int \mathcal{K}_n(x) x^\top \int_0^1 (\nabla_\theta F(w, \hat{\theta}_{n-1} + t\beta_n x) - \nabla_\theta F(w, \hat{\theta}_{n-1})) dt P_n(dx) P_w(dw) \right| \leq \\ & \leq \int \int \|\mathcal{K}_n(x)\| \|x\| A \|\beta_n x\| P_n(dx) P_w(dw) \leq C_4 \beta_n. \end{aligned}$$

Следовательно, для второго слагаемого в правой части неравенства (5.9) получаем

$$\begin{aligned} & -2 \frac{\alpha_n}{\beta_n} \langle \hat{\theta}_{n-1} - \theta^*, E\{\mathcal{K}_n(\Delta_n) y_n | \mathcal{F}_{n-1}\} \rangle \leq -2\alpha_n \langle \hat{\theta}_{n-1} - \theta^*, \nabla f(\hat{\theta}_{n-1}) \rangle + \\ & + 2C_4 \alpha_n \beta_n \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|. \end{aligned}$$

Подставив в (5.9) полученные выше соотношения для второго и третьего слагаемых в правой части, можно заключить, что

$$\begin{aligned} & E\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} \leq \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 - 2\alpha_n \langle \hat{\theta}_{n-1} - \theta^*, \nabla f(\hat{\theta}_{n-1}) \rangle + \\ & + 2C_4 \alpha_n \beta_n \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\| + \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} \left(C_1 + C_2((d_n^2 + 1)\|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 + \beta_n^2) + C_3 \xi_n^2 \right). \end{aligned}$$

Используя выполнение условия **(SA.1)** для функции $f(\cdot)$ и справедливое при любом $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\| \leq \frac{\varepsilon^{-1} \beta_n + \varepsilon \beta_n^{-1} \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2}{2},$$

ВЫВОДИМ

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} &\leq \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 \left(1 - (2\mu - \varepsilon C_4)\alpha_n + C_2\alpha_n^2\beta_n^{-2}(d_n^2 + 1)\right) + \\ &+ \varepsilon^{-1}C_4\alpha_n\beta_n^2 + \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} \left(C_1 + C_2\beta_n^2 + C_3\xi_n^2\right). \end{aligned}$$

Выберем ε настолько малым, чтобы $\varepsilon C_4 < 2\mu$ и пусть n достаточно велико. Используя условия теоремы 5.1 для числовых последовательностей, преобразуем последнее неравенство к виду

$$\mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} \leq \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2(1 - C_5\alpha_n) + C_6(\alpha_n\beta_n^2 + \alpha_n^2\beta_n^{-2}(1 + \xi_n^2)).$$

Отсюда видно, в силу условий теоремы 5.1 ($\sum_n \alpha_n = \infty$ и с вероятностью единица $\sum_n \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}(1 + \xi_n^2) < \infty$), что выполнены все условия леммы Роббинса–Сигмунда (см. лемма П.1 на стр. 227), необходимые для сходимости с вероятностью единица $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta^*$ при $n \rightarrow \infty$. Для доказательства в соответствующих условиях теоремы 5.1 сходимости в среднеквадратичном смысле возьмем безусловное математическое ожидание от обеих частей последнего неравенства:

$$\mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2\} \leq \mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2\}(1 - C_5\alpha_n) + C_6(\alpha_n\beta_n^2 + \alpha_n^2\beta_n^{-2}(1 + \sigma_n^2)).$$

Сходимость к точке θ^* последовательности оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ в среднеквадратичном смысле следует из леммы П.7 на стр. 229.

Для алгоритмов (5.2) и (5.3) доказательства несколько отличаются. По аналогии с предыдущим, получается неравенство, похожее на (5.9):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} &\leq \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 - \\ &- 2\frac{\alpha_n}{\beta_n} \langle \hat{\theta}_{n-1} - \theta^*, \mathbb{E}\{\mathcal{K}_n(\Delta_n) \frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{2} | \mathcal{F}_{n-1}\} \rangle + \\ &+ \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} \mathbb{E}\left\{ \frac{(y_{2n} - y_{2n-1})^2}{4} \|\mathcal{K}_n(\Delta_n)\|^2 | \mathcal{F}_{n-1} \right\}. \end{aligned}$$

Преобразуем последнее слагаемое в правой части:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left\{ \frac{(y_{2n} - y_{2n-1})^2}{4} \|\mathcal{K}_n(\Delta_n)\|^2 | \mathcal{F}_{n-1} \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\sup_x \mathcal{K}_n(x)^2 \mathbb{E}\{v_{2n-1}^2 + v_{2n}^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} + \int \int \int \left(F(w_1, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n x) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - F(w_2, \hat{\theta}_{n-1} - \beta_n x) \right)^2 \|\mathcal{K}_n(x)\|^2 P_n(dx) P_w(dw_1) P_w(dw_2) \right) \leq \\ &\leq C_7\beta_n^2(\|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 + \beta_n^2) + C_8\xi_n^2 = C_7\beta_n^2\|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 + C_8\xi_n^2 + o(\beta_n^2), \end{aligned}$$

использовав ограниченность вектор-функций $\mathcal{K}_n(\cdot)$, компактность их носителя и неравенство

$$\begin{aligned} |F(w_1, \theta + x) - F(w_2, \theta - x)| &\leq |F(w_1, \theta + x) - F(w_1, \theta^*)| + \\ &+ |F(w_2, \theta - x) - F(w_2, \theta^*)| + |F(w_1, \theta^*) - F(w_2, \theta^*)|. \end{aligned}$$

Так же, по аналогии с доказательством для алгоритма (5.5), можно показать, что при выполнении условий теоремы 5.1 справедлива оценка

$$\left| \beta_n^{-1} \mathbb{E} \left\{ \mathcal{K}_n(\Delta_n) \frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{2} \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right\} - \nabla f(\hat{\theta}_{n-1}) \right| \leq C_9 \beta_n.$$

С учетом полученных оценок в виде неравенств, как и ранее, для условного среднего ошибки алгоритма выполняется неравенство

$$\mathbb{E} \{ \|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 | \mathcal{F}_{n-1} \} \leq \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 (1 - C_{10} \alpha_n) + C_{11} (\alpha_n \beta_n^2 + \alpha_n^2 \beta_n^{-2} (1 + \xi_n^2)).$$

Как видно, и в этом случае выполнены все условия леммы Роббинса–Сигмунда (см. лемма П.1 на стр. 227), необходимые для сходимости с вероятностью единица $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta_*$ при $n \rightarrow \infty$. Дальнейшее доказательство сходимости в среднеквадратичном смысле полностью повторяет соответствующую часть доказательства для алгоритма (5.5).

Доказательство теоремы 5.1 закончено.

Доказательство теоремы 5.2. Схема доказательства во многом повторяет доказательство теоремы 5.1. Рассмотрим сначала алгоритм (5.5). Для достаточно больших n , при которых $\theta^* \in \Theta_n$, используя свойства проекции, нетрудно получить

$$\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 \leq \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^* - \frac{\alpha}{n\beta_n} \mathcal{K}(\Delta_n) y_n\|^2.$$

Применив к последнему неравенству операцию условного математического ожидания относительно σ -алгебры \mathcal{F}_{n-1} , имеем

$$\begin{aligned} (5.11) \quad \mathbb{E} \{ \|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 | \mathcal{F}_{n-1} \} &\leq \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 - \\ &- 2 \frac{\alpha}{n\beta_n} \langle \hat{\theta}_{n-1} - \theta^*, \mathbb{E} \{ \mathcal{K}(\Delta_n) y_n | \mathcal{F}_{n-1} \} \rangle + \\ &+ \frac{\alpha^2}{n^2 \beta_n^2} \mathbb{E} \{ y_n^2 \|\mathcal{K}(\Delta_n)\|^2 | \mathcal{F}_{n-1} \}. \end{aligned}$$

Как и при доказательстве теоремы 5.1 можно получить, что

$$\begin{aligned} F(w, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n x)^2 &\leq \nu_1 + 2(2A + 1) \sqrt{\nu_1} (\|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 + \|\beta_n x\|^2) + \\ &+ 2(2A + 1)^2 (\|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^4 + \|\beta_n x\|^4) \end{aligned}$$

равномерно по $w \in \mathbb{W}$. В силу условия (5.4), имеем

$$\mathbb{E}\{v_n^2 \|\mathcal{K}(\Delta_n)\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} \leq \sup_x \mathcal{K}_n(x)^2 \xi_n^2.$$

Рассмотрим третье слагаемое в правой части (5.11). Из двух последних неравенств, учитывая ограниченность вектор-функции $\mathcal{K}(\cdot)$ и компактность её носителя, получаем

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\{\|y_n\|^2 \|\mathcal{K}(\Delta_n)\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} \leq 2\mathbb{E}\{v_n^2 \|\mathcal{K}(\Delta_n)\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} + \\ (5.12) \quad & + 2 \int \int F(z, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n x)^2 \|\mathcal{K}(x)\|^2 \mathbb{P}(dx) \mathbb{P}_w(dz) \leq \\ & \leq C_1 + \xi_n^2 \hat{K} + C_2((d_n^2 + 1) \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 + \beta_n^2), \end{aligned}$$

где $\hat{K} = \int \|\mathcal{K}(x)\|^2 \mathbb{P}(dx)$, $C_1 = \nu_1 \hat{K}$, $C_2 > 0$.

Далее исследуем

$$\begin{aligned} & \beta_n^{-1} \mathbb{E}\{y_n \mathcal{K}(\Delta_n) | \mathcal{F}_{n-1}\} = \\ (5.13) \quad & = \beta_n^{-1} \int \int F(w, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n x) \mathcal{K}(x) \mathbb{P}(dx) \mathbb{P}_w(dw) + \\ & + \beta_n^{-1} \mathbb{E}\{v_n \mathcal{K}(\Delta_n) | \mathcal{F}_{n-1}\}. \end{aligned}$$

Для второго слагаемого в (5.13), в силу независимости Δ_n с v_n и условия (5.4), имеем

$$\mathbb{E}\{v_n \mathcal{K}(\Delta_n) | \mathcal{F}_{n-1}\} = \mathbb{E}\{v_n | \mathcal{F}_{n-1}\} \int \mathcal{K}(x) \mathbb{P}(dx) = 0.$$

Заметим, что, в силу (5.6) и (5.7),

$$\beta_n^{-1} \int \left(\sum_{|\bar{l}| \leq \ell} \frac{1}{\bar{l}!} \mathcal{D}^{\bar{l}} f(\hat{\theta}_{n-1}) \beta_n^{|\bar{l}|} x^{\bar{l}} \right) \mathcal{K}(x) \mathbb{P}(dx) = \nabla f(\hat{\theta}_{n-1}).$$

Используя определение функции $f(\cdot)$ и условие (5.4), преобразуем первое слагаемое в (5.13) к виду

$$\begin{aligned} & \beta_n^{-1} \int \left(\int F(w, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n x) \mathbb{P}_w(dw) \right) \mathcal{K}(x) \mathbb{P}(dx) = \nabla f(\hat{\theta}_{n-1}) + \\ & + \beta_n^{-1} \int (f(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n x) - \sum_{|\bar{l}| \leq \ell} \frac{1}{\bar{l}!} \mathcal{D}^{\bar{l}} f(\hat{\theta}_{n-1}) \beta_n^{|\bar{l}|} x^{\bar{l}}) \mathcal{K}(x) \mathbb{P}(dx). \end{aligned}$$

В силу **(SA.1)**, справедливо неравенство

$$(5.14) \quad \left| \beta_n^{-1} \int (f(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n x) - \sum_{|l| \leq \ell} \frac{1}{l!} \mathcal{D}^l f(\hat{\theta}_{n-1}) \beta_n^{|l|} x^l) \mathcal{K}(x) \mathbb{P}(dx) \right| \leq \\ \leq \beta_n^{-1} L \int |x \beta_n|^\gamma |\mathcal{K}(x)| \mathbb{P}(dx) \leq C_3 \beta_n^{\gamma-1}.$$

Подставим в (5.11) полученные выше соотношения для второго и третьего слагаемых в правой части:

$$\mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}\} \leq \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 - 2\alpha n^{-1} \langle \hat{\theta}_{n-1} - \theta^*, \nabla f(\hat{\theta}_{n-1}) \rangle + \\ + 2C_3 \alpha n^{-1} \beta_n^{\gamma-1} \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\| + \frac{\alpha^2}{n^2 \beta_n^2} \left(C_2 (d_n^2 + 1) \|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2 + ((\nu_1 + \xi_n^2) \hat{K} + C_2 \beta_n^2) \right).$$

Используя выполнение условия **(SA.2)** для функции $f(\cdot)$ и справедливое при любом $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\| \leq \frac{\varepsilon \beta_n^{\gamma-1} + \varepsilon^{-1} \beta_n^{1-\gamma} \|\theta_{n-1} - \theta^*\|^2}{2},$$

взяв безусловное математическое ожидание, выводим

$$\mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2\} \leq \mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2\} (1 - \bar{\nu} \alpha n^{-1} + C_2 \alpha^2 n^{-2} \beta_n^{-2} d_n^2) + \\ + \varepsilon C_3 \alpha n^{-1} \beta_n^{2(\gamma-1)} + \frac{\alpha^2}{n^2 \beta_n^2} ((\nu_1 + \sigma_1^2) \hat{K} + C_2 \beta_n^2), \quad \bar{\nu} = 2\mu - C_3 \varepsilon^{-1}.$$

Выберем $\varepsilon = C_3 h^{-1} \mu^{-1} / 2$, где $0 < h < 1$. Тогда $\psi = 2\mu(1 - h) > 0$. Учитывая условие теоремы для $\{d_n\}$, получаем

$$\mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2\} \leq \mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_{n-1} - \theta^*\|^2\} (1 - \psi \alpha n^{-1} + o(n^{-1})) + C_4 n^{\frac{1}{\gamma}-2} + o(n^{\frac{1}{\gamma}-2}),$$

где $C_4 = \alpha C_3^2 \beta_n^{2(\gamma-1)} h^{-1} \mu^{-1} / 2 + (\nu_1 + \sigma_1^2) \hat{K} \alpha^2 \beta_n^{-2}$. По лемме П.6 на стр. 229, если $\psi \alpha > (\gamma - 1) / \gamma$, то

$$(5.15) \quad n^{1-\frac{1}{\gamma}} \mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2\} \leq C_4 (\psi \alpha - \frac{\gamma-1}{\gamma})^{-1} + o(1) = C_5 + o(1),$$

где $o(1)$ не зависит от $f(\cdot) \in \Sigma_0$. Остается заметить, что, в силу произвольности $h \in (0, 1)$, выполнение неравенства $\psi \alpha > (\gamma - 1) / \gamma$ эквивалентно условию $2\mu \alpha > (\gamma - 1) / \gamma$.

Для алгоритмов (5.2) и (5.3) доказательство можно провести по той же схеме, оно отличается только некоторыми техническими деталями.

При выполнении условий теоремы 5.2 нетрудно получить равномерную по $w \in \mathbb{W}$ оценку

$$\frac{1}{2}(F(w_1, \theta + x) - F(w_2, \theta - x))^2 \leq \nu_2 + 2(2A + 1)^2(\|x\|^2 + \|\theta - \theta^*\|^2)^2,$$

где $\nu_2 =$

$$= \sup_{w_1, w_2 \in \mathbb{W}} \frac{\left(2|F(w_1, \theta^*) - F(w_2, \theta^*)| + (\nabla_{\theta} F(w_1, \theta^*))^2 + (\nabla_{\theta} F(w_2, \theta^*))^2\right)^2}{8}.$$

С её помощью можно вывести неравенство, аналогичное (5.12) из предыдущей части доказательства. При этом получающееся для случая алгоритма (5.2) первое слагаемое в правой части аналога (5.12) (константа C_1) равно $\nu_2 \hat{K}$, а следующее слагаемое в (5.12) $\xi_n^2 \hat{K}$ надо заменить на $\frac{\xi_n^2}{2} \hat{K}$. Вместо соотношения (5.14) при доказательстве надо использовать оценку

$$\left| \beta_n^{-1} \int \left(\frac{f(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n x) - f(\hat{\theta}_{n-1} - \beta_n x)}{2} - \sum_{|l| \leq \ell} \frac{1}{l!} \mathcal{D}^l f(\hat{\theta}_{n-1}) \beta_n^l x^l \right) \times \right. \\ \left. \times \mathcal{K}(x) \mathbb{P}(dx) \right| \leq C_3 \beta_n^{\gamma-1}.$$

В итоге доказательства аналогично получается асимптотическая оценка среднеквадратичной скорости сходимости

$$n^{(\gamma-1)/\gamma} \mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta^*\|^2\} \leq C_6(\psi\alpha - (\gamma-1)/\gamma)^{-1} + o(1) = C_7 + o(1),$$

где $C_6 = \alpha C_3^2 \beta^2 (\gamma-1) h^{-1} \mu^{-1} / 2 + (\nu_2 + \sigma_2^2 / 2) \hat{K} \alpha^2 \beta^{-2}$.

Интересно отметить связь между последней константой C_6 и соответствующей ей C_4 из (5.15)

$$C_4 = C_6 + (\nu_1 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2 / 2 - \nu_2) \hat{K} \alpha^2 \beta^{-2}.$$

Как видно, если $F(w, x) = f(x)$, то асимптотическая скорость сходимости по итерациям алгоритма, использующего два наблюдения, всегда лучше, чем алгоритма (5.5). В общем случае необходимо сравнивать величины $\nu_1 + \sigma_1^2$ и $\nu_2 + \sigma_2^2 / 2$.

Докажем замечание 5.9 к теореме 5.2. Правая часть в (5.15) представляет собой функцию от α , β и h . Оптимизируя по этим параметрам, получаем

$$\alpha^* = \frac{1}{\mu}, \quad \beta^* = \left(\frac{\sqrt{2(\nu_1 + \sigma_1^2) \int \|\mathcal{K}(x)\|^2 \mathbb{P}(dx)}}{M \int \|x\|^\gamma \|\mathcal{K}(x)\| \mathbb{P}(dx) \sqrt{\gamma(\gamma-1)}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad h^* = \frac{1}{\gamma},$$

$$C_5^* = \kappa_1 \left(\int \|\mathcal{K}(x)\|^2 P(dx) \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(\int \|x\|^\gamma \|\mathcal{K}(x)\| P(dx) \right)^{\frac{2}{\gamma}},$$

$$\kappa_1 = \gamma^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} (\gamma-1)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \mu^{-2} (\nu_1 + \sigma_1^2)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} M^{\frac{2}{\gamma}}.$$

Аналогично, оптимизируя по α , β и h верхнюю границу асимптотической скорости сходимости для оценок алгоритма (5.2), находим

$$\alpha^* = \frac{1}{\mu}, \quad \beta^* = \left(\frac{\sqrt{2(\nu_2 + \sigma_2^2/2)} \int \|\mathcal{K}(x)\|^2 P(dx)}{M \int \|x\|^\gamma \|\mathcal{K}(x)\| P(dx) \sqrt{\gamma(\gamma-1)}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad h^* = \frac{1}{\gamma},$$

$$C_7^* = \kappa_2 \left(\int \|\mathcal{K}(x)\|^2 P(dx) \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(\int \|x\|^\gamma \|\mathcal{K}(x)\| P(dx) \right)^{\frac{2}{\gamma}},$$

$$\kappa_2 = \gamma^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} (\gamma-1)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \mu^{-2} (\nu_2 + \sigma_2^2/2)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} M^{\frac{2}{\gamma}}.$$

Если рассмотреть отношение $2C_7^*/C_5^*$, то имеем

$$2C_7^*/C_5^* = 2 \left(\frac{\nu_2 + \sigma_2^2/2}{\nu_1 + \sigma_1^2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Следовательно, при

$$2^{\frac{1}{\gamma-1}} \sigma_2^2 - \sigma_1^2 > \nu_1 - 2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \nu_2$$

асимптотическая скорость сходимости, учитывающая количество измерений, для алгоритма (5.5) лучше, чем для (5.2).

Доказательство теоремы 5.2 и замечания 5.9 к ней закончено.

Глава 6

Применения рандомизированных алгоритмов

Большинство примеров среди тех, которые будут рассмотрены в этой главе, можно в обобщающей форме сформулировать в виде задачи об *оценивании параметров сигнала*.

Пусть наблюдаемый сигнал $\{y_n\}$ имеет структуру

$$y_n = s_n(w_n, \theta_n^*) + v_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

в которой полезный сигнал $\{s_n\}$ изменяется со временем, и его значения зависят от набора θ_n^* существенных (информационных) параметров и набора w_n несущественных параметров; как и ранее, $\{v_n\}$ — помехи наблюдения. *Требуется* оценить набор информационных параметров θ_n^* .

В некоторых случаях параметрам сигнала w_n, θ_n^* обоснованно можно приписать некоторые статистические свойства и тогда, сделав те или иные предположения о помехах $\{v_n\}$, применить соответствующие алгоритмы оценивания. В других вариантах набор параметров w_n, θ_n^* может быть неслучайным. Например, в задаче о выделении скрытых периодичностей полезный сигнал представляет собой тригонометрический многочлен с неизвестными частотами.

Для решения каждой конкретной задачи можно предложить несколько разнообразных алгоритмов оценивания. Поэтому полезно иметь некоторый способ сравнения их между собой. В частности, можно рассматривать постановку задачи о получении наилучших (оптимальных) оценок. Для этого должен быть задан какой-нибудь критерий качества. Обычно критерий качества оценок состоит в минимизации (или максимизации) некоторого функционала, называемого *функционалом качества* или *функцией потерь*. Наиболее типичный вид функционала качества при конечном времени наблюдения и постоянном векторе существенных

параметров $\theta^* = \theta_n^*$, имеет вид

$$f_N(\theta) = \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^N \|y_k - s_k(w_k, \theta)\|^2 \mid \theta^*\right\}$$

или

$$f_{\gamma, N}(\theta) = \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^N \gamma^{N-k} \|y_k - s_k(w_k, \theta)\|^2 \mid \theta^*\right\},$$

где N — время наблюдения сигнала, $\gamma \in (0, 1)$ — *забывающий* множитель, $\mathbb{E}\{\cdot \mid \theta^*\}$ означает операцию усреднения по ансамблю возможных реализаций величин $\{y_k\}$, $\{s_k\}$, отвечающих фиксированному значению параметра θ^* , который, вообще говоря, неизвестен. Операция усреднения обычно используется при статистическом подходе к постановке задачи. Если вместо усреднения рассматривается операция максимизации, то говорят о минимаксной постановке задачи. При этом обычно для всех неопределенностей предполагаются заданными ограниченные множества их возможных значений, а операция максимизации берется по всевозможным значениям. Исследуя качество оценок рандомизированных алгоритмов, в этой главе будем рассматривать функционалы качества в статистической постановке.

При бесконечном интервале времени наблюдений рассматривают либо предельные функционалы качества

$$f_\infty(\theta) = \mathbb{E}\left\{\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \|y_k - s_k(w_k, \theta)\|^2 \mid \theta^*\right\},$$

$$f_{\gamma, \infty}(\theta) = \mathbb{E}\left\{\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \gamma^{N-k} \|y_k - s_k(w_k, \theta)\|^2 \mid \theta^*\right\},$$

$$\bar{f}(\theta) = \mathbb{E}\left\{\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \|y_N - s_N(w_N, \theta)\|^2 \mid \theta^*\right\},$$

либо дисконтирующий, если необходимо минимизировать и *переходные процессы* (получить хорошее качество оценок на конечных интервалах времени)

$$f_\gamma(\theta) = \mathbb{E}\left\{\frac{1}{(1-\gamma)} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k \|y_k - s_k(w_k, \theta)\|^2 \mid \theta^*\right\}.$$

Как для конечного времени наблюдений, так и для бесконечного иногда рассматриваются и другие функционалы качества.

6.1 Способ обнаружения некоторых химических элементов в мишени

В середине 80-х годов автор столкнулся с задачей о разработке методики построения алгоритмов обнаружения *делящихся* материалов в мишени, облучаемой серией пучков элементарных частиц.

Одной из характеристик, указывающей на присутствие в мишени какого-либо делящегося материала (уран, плутоний и т.п.), является возникновение запаздывающего во времени потока нейтронов после облучения мишени релятивистским пучком электронов. На этом основана одна из основных методик инспекции подозрительных объектов "противника", при этом по изменению во времени интенсивности запаздывающего излучения можно сделать вывод о типе делящегося вещества. Если у противника есть возможность противодействия, то при этой методике легко определить момент начала инспекции (засечь электронный пучок) и, имея некоторый запас во времени возникновения запаздывающего излучения, добавить к потоку запаздывающих нейтронов заглушающий поток, ликвидирующий возможность инспекции.

Основная идея рассматриваемого ниже способа, использующего пробные возмущения, заключается в задании серии облучающих электронных пучков, последовательность интенсивностей каждого из которых определяется некоторым случайным процессом с хорошо известными статистическими свойствами. Этот алгоритм позволяет фиксировать наличие и характеристики запаздывающего излучения нейтронов, даже несмотря на высокий уровень генерируемых противником помех.

При облучении мишени, состоящей из вещества некоторого типа, достаточно мощным по интенсивности релятивистским электронным пучком ответная реакция вещества мишени, заключающаяся в излучении потока элементарных частиц (например, нейтронов), состоит из двух частей: потока *мгновенных* частиц, наличие которого характерно для любого химического состава вещества, и потока *запаздывающих* частиц, указывающего на присутствие химического элемента определенного типа (уран, плутоний и т.д.). Предположим, что исследователь посылает в направлении мишени последовательность релятивистских электронных пучков. Электронная пушка начинает излучение каждого из них в некоторые моменты времени t_1, t_2, \dots . Мощность пушки будем считать постоянной и равной W . Экспериментатор может выбирать длительность импульсов излучения в определенных пределах, либо имеет возможность точного измерения фактического времени излучения. Будем считать, что длительности излучения электронных пучков $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ представляют собой реализацию некоторой последовательности независимых, одинаково распределенных ограниченных случайных величин со средним значением M_φ и конечным четвертым моментом. Число электронов в

n -м пучке равняется

$$N_n^{\bar{e}} = W\varphi_n.$$

Последовательность $\Delta_n = \varphi_n - M_\varphi$ фактических отклонений от среднего значения величин мощности посылаемых к мишени релятивистских электронных пучков будем называть пробным возмущением. Детектор (регистратор нейтронов) включается в моменты времени $t_n + \delta T_d$, $n = 1, 2, \dots$, где δT_d — время задержки, определяемое расстояниями от мишени до инжектора (электронной пушки) и до детектора, а также средней мощностью электронного пучка. Оно должно быть достаточно большим, чтобы прошел поток мгновенных частиц. Время работы детектора δT_m одинаково для любой серии и определяется предполагаемыми свойствами вещества мишени. Обычно для уменьшения влияния потока мгновенных нейтронов и уменьшения взаимного влияния между последовательными испытаниями предполагается, что $t_n + \delta T_d + \delta T_m \ll t_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. Ответный сигнал, фиксируемый детектором,

$$N_n^{\bar{n}} = N_n^d + N_n^{ext}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

определяется количеством зарегистрированных запаздывающих частиц (нейтронов) N_n^d , излучаемых мишенью в ответ на электронный пучок мощности $N_n^{\bar{e}}$, и регистрируемыми внешними частицами N_n^{ext} (помехами в наблюдении), количество которых определяется мощностью фонового космического излучения (солнечный ветер и т. п.) и возможным противодействием противника, мешающего исследованию.

Заметим, что в такой постановке задачи мы не можем предварительно что-либо существенное утверждать о статистических свойствах помех в наблюдении N_n^{ext} (среднее значение, свойства распределения) и, соответственно, нельзя воспользоваться методами оценивания, опирающимися на них. Но кажется вполне обоснованной возможность сделать предположение о независимости количества внешних частиц от пробного возмущения.

Количество регистрируемых детектором запаздывающих частиц (нейтронов) прямо пропорционально мощности соответствующего электронного пучка:

$$N_n^d = \tau_n N_n^{\bar{e}} = \tau_n W\varphi_n$$

(см. [30, 71]). Величины τ_n , ($0 \leq \tau_n \leq \tau_{max}$) определяются эффективностью регистрации частиц, которая зависит от типа используемого детектора, величины телесного угла с вершиной в точке попадания электронного пучка в мишень и опирающегося на полезную площадь детектора (эти величины можно считать постоянными при серии испытаний или достаточно точно рассчитываемыми), угла между направлением распространения электронного пучка и нормалью к поверхности мишени в точке попадания (эту характеристику точно учесть сложнее) и некоторой

статистической величиной, определяемой химическим составом вещества мишени. Последняя характеристика принципиально не может быть заранее точно рассчитана, но её вероятностное распределение для различных веществ хорошо изучено. Можно считать, что она, как случайная величина, не зависит от пробного возмущения. (Только в случае отсутствия в материале мишени делящегося вещества $\tau_n = 0$.) Обозначив через $y_n = N_n^d$, $\theta_n^* = \tau_n W$ и $v_n = N_n^{ext}$, получаем соотношения для последовательности наблюдений

$$y_n = \varphi_n \theta_n^* + v_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Задача об обнаружении делящегося вещества в мишени свелась к построению последовательности оценок среднего значения параметра линейной регрессии. Во второй главе было показано, что при сделанных выше предположениях для её решения можно обоснованно воспользоваться или алгоритмом стохастической аппроксимации (2.2), или (2.6), или рандомизированным методом наименьших квадратов (2.7). Если последовательность оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ сходится к нулю, то можно достоверно утверждать, что запаздывающего излучения из мишени нет и, следовательно, в составе химического вещества мишени отсутствуют уран, плутоний и т.п.. Если оценки сходятся к некоторому числу $\theta^* > 0$, то запаздывающее излучение присутствует, и число θ^* некоторым образом связано с его мощностью. При дополнительных расчетах (см. [30, 71]) можно дать ответ и о конкретном типе вещества в зависимости от величины θ^* .

6.2 Практические приложения рандомизированных алгоритмов СА

Эффективность рандомизированного алгоритма стохастической аппроксимации типа процедуры Кифера–Вольфовица (SPSA), неоднократно упоминаемая в пятой главе, имеет большое значение для практического использования в задачах многомерной оптимизации. Многие проблемы, решение которых прежде другими способами достигалось с большими трудозатратами в обработке данных, могут быть разрешимы более простым способом. Достаточно полный обзор реальных практических применений SPSA приводится в [168]. Описание применения алгоритма SPSA при исследовании взаимодействия человека и машины для сложной физической модели можно найти в [139]. Приложение алгоритма SPSA в управлении воздушным движением описано в [119] для решения задачи оптимизации, основанном на моделировании. В [115] описано применение при управлении тяжелым ионным пучком, в [144, 145] — при проверке качества в промышленности, в [87] — при решении задачи обращения

сигнала. В [131] алгоритм SPSA используется для распознавания образов, в [93] — для классификации сигналов ЭКГ при обследовании сердца, в [136] — для моделирования процессов исследования сердца, в [128] — для построения методики помощи в принятии решений, основанной на моделировании, в [70] — для оценивания параметров статистической модели, в [151] — для решения задачи о размещении и конфигурации датчиков, в [138] — для управления химической реакцией, в [163] — для настройки параметров в системе регулирования чистоты воды и примесей метана при процессе обработки сточных вод, в [137] — для определения эффективной макроэкономической политики.

В этом разделе приведены три показательных примера приложений SPSA алгоритма, иллюстрирующие некоторые работы, проведенные в "Лаборатории прикладной физики" (ЛПФ) университета им. Дж. Хопкинса (США), описанные в [168].

6.2.1 Синхронизация сигналов светофоров для управления движением на сети дорог

Наболевшая проблема при управлении движением состоит в оптимизации потока транспортных средств через данную сеть дорог. Улучшение синхронизации сигналов светофоров в местах пересечения дорог является наиболее рентабельным средством достижения этой цели. Однако, из-за большого количества сложных аспектов в функционировании дорожной сети, связанных с необходимостью рассмотрения поведения разных людей, взаимодействия потока транспортных средств в пределах сети, влияния атмосферных явлений, возможностью аварий на дорогах, длительными (например, сезонными) изменениями и т.д., оптимальное решение задачи синхронизации сигналов светофоров достаточно трудоёмкое дело, особенно в случае большого количества пересечений дорог. Многие из этих трудностей возникают из-за потребности формировать чрезвычайно сложные модели динамики трафика, являющиеся основой для формирования стратегии управления. Стратегия в этом контексте представляет собой свод правил, обеспечивающих оперативную синхронизацию сигналов светофоров в ответ на поминутные изменения дорожной обстановки. Предложенный в ЛПФ подход к решению этой задачи устраняет потребность в таких сложных моделях и существенно отличается от других, ранее существовавших. Центральное место в этом решении занимает алгоритм SPSA, обеспечиваемый созданием небольшого одновременного случайного изменения всех параметров стратегии синхронизации сигналов светофоров в сети и использованием собранной при этом информации о состоянии трафика в системе для модификации стратегии синхронизации. Время, необходимое при применении SPSA для полной оптимальной настройки стратегии управления сигналами

светофоров, в результате сократилось с нескольких лет или десятилетий (что, очевидно, непрактично!) до нескольких месяцев (весьма разумное время). Этот подход к решению задачи описан подробно в [82, 86, 166], где приведены примеры реального моделирования процессов оптимизации трафика в дорожной сети с 9 перекрестками в пределах центрального делового района Манхэттена в Нью-Йорке и с 12 перекрестками в округе Монтгомери, штат Мэриленд.

6.2.2 Оптимальный выбор целей для систем оружия

Следующий пример иллюстрирует использование моделирования в процессах оптимизации. Пусть задан некоторый набор снарядов, которые собираются выпустить в направлении мишени. Задача состоит в таком оптимальном выборе набора контрольных точек прицеливания, чтобы при максимизации повреждения мишени минимизировать, так называемое, сопутствующее разрушение (повреждения объектов, не связанных непосредственно с военными целями, например, школ и больниц). Реальные траектории снарядов и их разрушающие способности являются реализациями некоторых случайных величин, может быть зависимых, с изученными статистическими свойствами, что должно учитываться при разработке стратегии определения контрольных точек.

Для построения сценария с большой серией снарядов, которые нацеливаются независимо, функцию суммарного повреждения, значение которой должно быть оценено при нахождении наилучшей стратегии выбора контрольных целевых точек, скорее всего, аналитически вычислить невозможно, и для получения её возможных значений требуется проводить серию моделирований по Монте-Карло (см., например, [24]). В частности, чтобы оценить эффективность данного набора контрольных точек, необходимо выполнить одно или несколько моделирований (учитывая наличие случайного разнообразия в результате использования одной серии снарядов, соответствующих одному моделированию). Обычно используемые методы для решения такого типа задач оптимизации с помощью моделирования опираются на интенсивные вычисления, предельно допустимые по временным затратам, так как необходимо оценить значения функции повреждения (ущерба) для большого количества различных наборов контрольных точек. SPSA метод обеспечивает эффективное решение этой многомерной задачи, которая для мишени на плоскости имеет размерность $r = 2 \times$ [количество снарядов]. SPSA алгоритм работает, изменяя на каждом шаге все координаты контрольных точек одновременно и выполняя моделирование для вычисления оценки градиента. Такая процедура повторяется последовательно. Этот метод существенно отличается от обычных методов, в которых при вычислении оценки градиента, изменив только одну из координат одной из контрольных

точек, выполняют моделирование, повторяя этот процесс при изменении каждой координаты каждой из целевых точек. Одновременно изменяя целевые точки, удается сократить в r раз необходимое для получения решения поставленной задачи количество моделирований, сокращая время на разработку стратегии с нескольких дней до минут и часов. Более подробное описание этого подхода к определению контрольных точек имеется в [112, 114].

6.2.3 Поиск скрытых объектов с помощью ЭЛО

Электропроводный локатор объектов (ЭЛО) основан на подходе к определению размещения скрытых объектов с помощью пропускания электрического тока через землю в области, предполагаемого их нахождения. Измерения электрических потенциалов производятся вблизи поверхности. Разыскиваемый объект имеет электрическую проводимость, отличную от проводимости окружающей его почвы, так как в интересующих исследователей случаях он включает в себя металл или пластмассу. Такого типа объекты разыскиваются при разминировании или детектировании других скрытых предметов. Разработанная в ЛПФ технология ограничивается поиском объектов, расположенных на глубине от 5 до 500 см на площади от 10 до 30 кв.м. Основной принцип работы ЭЛО, состоящий в определении разницы в проводимости между скрытым объектом и окружающей почвой, базируется на конструировании конечно-элементной модели подземного слоя. Это определяет условия задачи оптимизации, связанные с неопределенностью относительно природы подземного слоя и наличием многих потенциальных примесей (камней, стержней, древесных корней и т. п.), которые влияют на проводимость и приводят к высокой размерности конечно-элементной модели. Свойственные задаче неопределенности делают непригодными методы, основанные на использовании значений градиента. Высокая размерность задачи приводит к очень трудоёмким по количеству операций методам покоординатной аппроксимации (аппроксимация градиента по одной переменной за один такт времени). SPSA алгоритм был предложен для использования с целью обеспечения относительно простого и быстрого решения задачи. Например, анализ результатов поверхностных данных одного из полевых опытов позволил достичь эффективной сходимости алгоритма за относительно небольшое время: 4 минуты при расчетах на 180 МГц персональном компьютере с процессором Pentium, при этом вычисления по обычному конечно-элементному методу заняли бы приблизительно от 6 до 7 часов на том же самом компьютере. Значительное количество практических испытаний показывает ещё большую относительную экономию времени. Описание ЭЛО и некоторых из полевых опытов даются в [85].

6.3 Обучающиеся системы

В этом разделе будет рассмотрено несколько модельных примеров применения рандомизированных алгоритмов в системах с обучением (настройкой параметров).

Практические примеры использования рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации для обучения нейронных сетей можно найти в [69, 77, 130, 131, 134]. В [116, 133, 162, 163] использовались методы SPSA для настройки параметров нейронных сетей при решении задач адаптивного управления динамическими системами.

6.3.1 Аппроксимация функции с помощью линейной комбинации известных функций

Задача об аппроксимации некоторой функции по её значениям (в некоторых точках) имеет широкую область применения. В достаточно общем виде её можно сформулировать так. Предположим, что в точках w_1, w_2, \dots, w_N известны значения функции $h(w)$, определенной на некотором множестве \mathbb{W} , $w_i \in \mathbb{W}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Пусть задан набор функций $a_1(\cdot), a_2(\cdot), \dots, a_r(\cdot)$, определенных на том же множестве \mathbb{W} . Требуется аппроксимировать $f(\cdot)$ с помощью линейной комбинации функций $\{a_i(\cdot)\}$, т.е. подобрать набор параметров (коэффициентов)

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta^{(1)} \\ \theta^{(2)} \\ \vdots \\ \theta^{(r)} \end{pmatrix},$$

при котором функция

$$u(w, \theta) = \sum_{i=1}^r a_i(w)\theta^{(i)},$$

в соответствии с некоторым функционалом качества, наилучшим образом представляет $h(w)$. Предположим, что задан некоторый критерий качества аппроксимации и уже найден определяемый этим критерием набор параметров θ^* . Обозначим

$$\varphi_n = \begin{pmatrix} a_1(w_n) \\ a_2(w_n) \\ \vdots \\ a_r(w_n) \end{pmatrix}.$$

Значения функции $h(\cdot)$ в заданных точках w_1, w_2, \dots, w_N можно представить в виде

$$h(w_n) = \varphi_n^T \theta^* + v_n, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Последовательность величин $\{v_n\}$ можно трактовать как ошибку измерения полезного сигнала

$$s(w_n, \theta^*) = \varphi_n^T \theta^*, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

При функционале качества

$$f_N(\theta) = \sum_{k=1}^N \|h(w_k) - s(w_k, \theta)\|^2,$$

получаем *оценки метода наименьших квадратов*.

Оптимальные оценки, как и в п. 1.3.2, могут быть найдены с помощью рекуррентных процедур, увеличивающих точность аппроксимации по мере поступления информации о значениях функции в новых точках. Вектор–градиент функции $f_N(\theta)$ несложно вычислить:

$$\nabla f_N(\theta) = -2 \sum_{k=1}^N (h(w_k) - s(w_k, \theta)) \varphi_n$$

и можно получить рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_n &= \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma_n \varphi_n (h(w_n) - s(w_n, \hat{\theta}_{n-1})), \\ \Gamma_n &= \Gamma_{n-1} - \Gamma_{n-1} \varphi_n (\mathbf{I} + \varphi_n^T \Gamma_{n-1} \varphi_n)^{-1} \varphi_n^T \Gamma_{n-1}. \end{aligned}$$

В обобщающей ситуации, имеющей большее практическое значение, можно предположить, что заданные функции $\{a_i(\cdot)\}$ сами зависят от наборов из p параметров $a_i(w) = a_i(\theta^{(i,\cdot)}, w)$, $i = 1, 2, \dots, r$, которые также надо оптимизировать вместе с ранее введённым вектором $(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(r)})^T$. В такой постановке задачи для обозначения общего набора параметров удобно ввести матрицу

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta^{(1)}, & \theta^{(1,1)} & , \dots, & \theta^{(1,p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta^{(r)}, & \theta^{(r,1)} & , \dots, & \theta^{(r,p)} \end{pmatrix}.$$

6.3.2 Модель обучаемой системы. Нейронные сети

Конкретизация задачи из предыдущего раздела приводит к различным вариантам задачи обучения. Пусть имеется некоторая система, организованная следующим образом: при предъявлении ей входного сигнала (стимула) w она вырабатывает, в зависимости от значения матрицы параметров θ , значения функций $\{a_i(\theta, w)\}$ и вычисляет их сумму $u(w, \theta)$ с соответствующими весовыми коэффициентами. Так определяются множества (образы)

$$\mathbb{W}_1(\theta) = \{w : u(w, \theta) > 0\}, \quad \mathbb{W}_2(\theta) = \{w : u(w, \theta) \leq 0\}$$

и рассматриваемая система в состоянии классифицировать любой входной сигнал w , относя его либо к множеству $\mathbb{W}_1(\theta)$, либо к $\mathbb{W}_2(\theta)$. Эта классификация может изменяться, если варьировать параметры θ . Система, дополненная способом изменения параметров, может подгонять свою классификацию к некоторой требуемой и, тем самым, демонстрировать свойство обучаемости или адаптации. Такая подгонка требует определенной дополнительной информации о классификации. Обычно эта информация поступает с обучающей последовательностью w_1, w_2, \dots, w_N , состоящей из классифицированных требуемым образом входных сигналов. Уточнение характера этой информации приводит к различным постановкам задачи обучения. Сам процесс подбора параметров с помощью обучающей последовательности носит название *процесса обучения*. По окончании процесса обучения весовые коэффициенты фиксируются, и соответствующие множества $\mathbb{W}_1(\theta)$, $\mathbb{W}_2(\theta)$ принимаются в качестве требуемого разбиения. Они могут не совпадать с реальным требуемым разбиением. Это отличие, выраженное каким-либо способом, будет определять качество работы *обученной системы*. На самом деле, для любых непересекающихся ограниченных множеств, разделенных положительным расстоянием, существует конечный набор *пороговых функций*, отображающий их в линейно-разделимые множества. Этот фундаментальный факт лежит в основании методов моделирования с использованием нейронных сетей [111, 174].

Описанная схема обучаемой системы может быть реализована с помощью так называемых перцептронов — сложных сетей из пороговых элементов (формальных нейронов), предназначенных для моделирования процессов в сложных системах, в частности, в живых организмах. Роль функций $\{a_i(\theta, w)\}$ здесь играют реакции выходных нейронов сети на входной стимул w (по аналогии с работой зрительной системы входные стимулы иногда называют изображениями). Величины $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(r)}$ играют роль коэффициентов усиления сигналов выходных нейронов сети. Эти усиленные сигналы поступают в эффекторный нейрон, где они суммируются и сравниваются с порогом (в рассматриваемом примере с нулём). В результате такого сравнения принимается решение о принадлежности входного стимула к одному из двух классов. Поступающая в процессе обучения дополнительная информация о требуемой классификации интерпретируется как указания *учителя* о классификации обучающей последовательности. Описанный подход иногда называют *обучением с учителем*. Возможна постановка задачи обучения, где указания учителя отсутствуют, тогда говорят о *задаче самообучения*. Естественным образом задача обучения может быть обобщена на случай большего количества классов.

Пусть размерность входных сигналов равна p , т. е. при введенных в предыдущем пункте обозначениях совпадает с количеством параметров

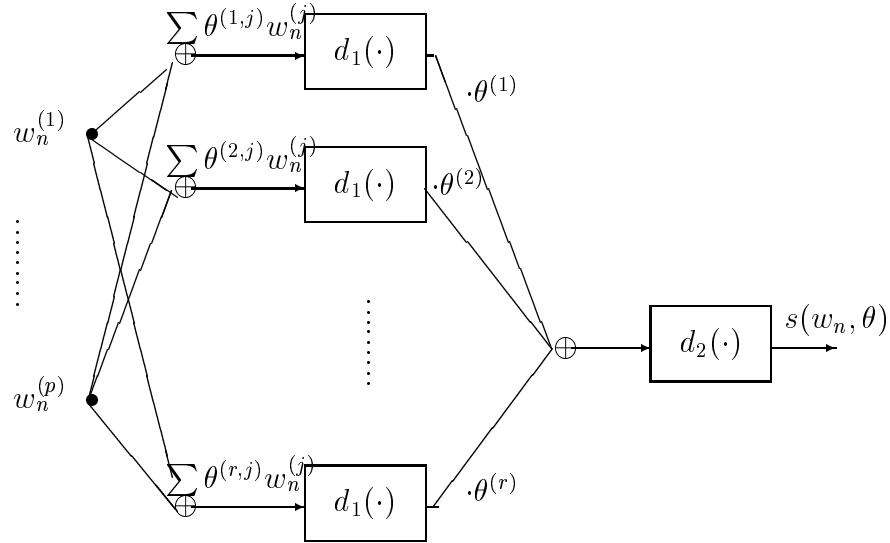


Рис. 9. Схема двухуровневой нейронной сети.

каждой из функций $\{a_i(\theta, w)\}$. Обозначим $w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(p)}$ — соответствующие компоненты входного сигнала w . Рассмотрим задачу о построении оценок параметров (весовых коэффициентов) двухуровневой нейронной сети, использующей два типа формальных нейронов $d_1(\cdot)$ и $d_2(\cdot)$ (*пороговых функций*). Нейроны первого типа используются для задания набора функций $\{a_i(\theta, \cdot)\}$ по правилу

$$a_i(\theta, w) = d_1\left(\sum_{j=1}^p \theta^{(i,j)} w^{(j)}\right), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

второй тип соответствует эффлекторному нейрону второго уровня. Пороговые функции представляют собой вещественные антисимметричные неубывающие непрерывно-дифференцируемые функции вещественного аргумента, принимающие положительные значения для положительных значений аргументов. Например, в качестве пороговой можно использовать функцию $\text{arctg}(\cdot)$. На рисунке 9 показано, как схематично можно представить структуру такой нейронной сети. Цель обучения этой нейронной сети состоит в том, чтобы минимизировать ошибку между желаемым и действительным выходом. Будем считать, что в период обучения задана последовательность пар (вход, желаемый выход) $\{(w_n, y_n)\}$, $n = 1, 2, \dots$ и доступна соответствующая последовательность действительных выходов $\{s(w_n, \theta)\}$ с возможностью выбирать очередную оценку θ . Если реально задана конечная последовательность, то можно либо её многократно повторять, либо выбирать из неё элементы случайным образом. Предположим, что пары вход-выход — взаимно независимые

случайные величины, и их распределения не зависят от n — номера итерации. Задача состоит в минимизации среднеквадратичной ошибки

$$f_\infty(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N F(w_k, y_k, \theta), \quad F(w_k, y_k, \theta) = \|y_k - s(w_k, \theta)\|^2.$$

Для построения последовательности оценок параметров нейронной сети можно воспользоваться градиентным алгоритмом

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \nabla_\theta F(w_n, y_n, \hat{\theta}_{n-1}) = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n (y_n - s(w_n, \hat{\theta}_{n-1})) \nabla_\theta s(w_n, \hat{\theta}_{n-1}),$$

$n = 1, 2, \dots$ с некоторой последовательностью положительных чисел $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \rightarrow 0$. Компоненты градиента $\nabla_\theta s(w, \theta)$ вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial s(w, \theta)}{\partial \theta^{(l)}} = d'_2 \left(\sum_{i=1}^r \theta^{(i)} d_1 \left(\sum_{j=1}^p \theta^{(i,j)} w^{(j)} \right) \right) d_1 \left(\sum_{j=1}^p \theta^{(l,j)} w^{(j)} \right),$$

$$\frac{\partial s(w, \theta)}{\partial \theta^{(l,m)}} = d'_2 \left(\sum_{i=1}^r \theta^{(i)} d_1 \left(\sum_{j=1}^p \theta^{(i,j)} w^{(j)} \right) \right) \theta^{(l)} d'_1 \left(\sum_{j=1}^p \theta^{(l,j)} w^{(j)} \right) w^{(m)},$$

$l = 1, 2, \dots, r$, $m = 1, 2, \dots, p$. Но при формулировке задачи предполагалась возможность использовать только значения действительных выходов нейронной сети $\{s(w, \theta)\}$. Поэтому в последнем алгоритме надо частные производные заменить на конечные разности. При этом существенно увеличивается необходимое количество измерений на каждой итерации. На самом деле при решении поставленной задачи важно постараться минимизировать количество различных наблюдений, так как за каждым таким наблюдением на практике стоят временные и материальные затраты. В практических задачах размерность набора оцениваемых параметров часто бывает очень высокой, что приводит к трудностям в использовании многих стандартных последовательных градиентных алгоритмов, из-за необходимости на каждой итерации достаточно точно вычислять значения всех частных производных. Избежать этого можно воспользовавшись рандомизированным алгоритмом типа (5.2).

Пусть пробное возмущение $\{\Delta_n\}$ является последовательностью матриц (размерности $r \times (p+1)$), состоящих из наблюдаемых взаимно независимых бернуллиевских случайных величин, равных ± 1 с одинаковой вероятностью. Алгоритм построения последовательности оценок

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \Delta_n (y_n - s(w_n, \hat{\theta}_{n-1})) \frac{s(w_n, \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n) - s(w_n, \hat{\theta}_{n-1} - \beta_n \Delta_n)}{2\beta_n}$$

с некоторыми числовыми последовательностями $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ при достаточно общих условиях позволяет найти локальный минимум функционала качества. Однако, при более тщательном описании обучающей

процедуры можно получить лучшие результаты, хотя время, необходимое для обучения, может быть очень большим, если требуется оценивать большое количество параметров. Иногда итерации *захватываются* некоторым локальным минимумом. Чтобы этого избежать, надо процесс обучения повторить несколько раз с разными начальными условиями.

Рассмотренный пример, конечно же, допускает обобщения. На втором уровне часто рассматривается также несколько нейронов, нейроны первого уровня могут соединяться между собой. Другим обобщением может быть включение обратной связи от выхода к нейронам первого уровня или использование большего количества уровней.

6.3.3 Задача самообучения

Процедуры построения оценок в задачах обучения опираются на использование при обучении указаний учителя. Возможна похожая постановка задачи обучения, в которой необходимости в таких указаниях нет, а сам процесс обучения сводится к определению последовательности оценок, минимизирующей функционал специального вида.

Автоматическая классификация входных сигналов. С содержательной точки зрения, смысл автоматической классификации состоит в построении правила, сопоставляющего каждой точке w множества \mathbb{W} некоторый образ (класс). Подразумевается, что сопоставленные одному и тому же образу точки обладают некоторым общим свойством, которое и порождает этот образ. Например, таким свойством может быть близость расположения точек к некоторому "центру", и тогда понятие образа (класса) связано с обычным представлением о компактном расположении точек, принадлежащих тому или иному образу (классу).

Правило классификации может быть однозначным (детерминированным), при котором каждой точке w множества \mathbb{W} сопоставляется вполне определенный образ, либо недетерминированным, когда каждой точке w множества \mathbb{W} сопоставляются значения некоторого набора функций, определяющих степень достоверности принадлежности точки w к каждому из возможных образов. Для упрощения будем предполагать, что количество образов (классов) конечно и равно l . В обоих случаях для формальной записи правила классификации целесообразно ввести набор функций $\mu(\cdot) = \{\mu_1(\cdot), \dots, \mu_l(\cdot)\}$ — степеней достоверности, обладающих свойствами

$$0 \leq \mu_k(w) \leq 1, \quad k = 1, \dots, l, \quad \sum_{k=1}^l \mu_k(w) = 1.$$

Всякий способ классификации связан с *потерями*, которые обычно характеризуются с помощью *штрафных функций (стоимости)* $Q_k(w, \theta)$,

$k = 1, \dots, l$, $\theta = (\tau_1, \dots, \tau_l)$. Векторы τ_k , $k = 1, \dots, l$ удобно интерпретировать как *центры классов*. В типичных случаях, когда \mathbb{W} — вещественное векторное пространство, значения штрафных функций $Q_k(w, \theta)$ возрастают при удалении w от центра соответствующего образа (класса).

Предположим, что на множестве \mathbb{W} задано некоторое распределение вероятностей $P(\cdot)$. Одна из возможных постановок задачи автоматической классификации состоит в определении наборов $\mu(\cdot)$ и θ из некоторого множества Θ , минимизирующих средние потери классификации, равные

$$\int_{\mathbb{W}} \sum_{k=1}^l Q_k(w, \theta) \mu_k(w) P(dw).$$

Для фиксированного набора θ при варьировании функций $\mu_k(w)$ значения суммы, стоящей под знаком интеграла, заполняют всю выпуклую оболочку точек $Q_k(w, \theta)$, $k = 1, 2, \dots, l$. Следовательно, минимизация средних потерь классификации достигается на наборе функций $\mu^*(\cdot)$, в котором $\mu_k(w) = 0$, $k \neq j(w, \theta)$, $\mu_{j(w, \theta)}(w) = 1$, а целочисленная функция $j(\cdot, \theta)$ определяется как номер, соответствующий штрафной функции с минимальным значением

$$j(w, \theta) = \arg \min_k Q_k(w, \theta).$$

Разобьём множество \mathbb{W} на l классов (образов) $\mathbb{W}_1(\theta), \dots, \mathbb{W}_l(\theta)$ по правилу

$$\mathbb{W}_k(\theta) = \{w \in \mathbb{W} : Q_k(w, \theta) < Q_j(w, \theta), j = 1, 2, \dots, k-1,$$

$$Q_k(w, \theta) \leq Q_j(w, \theta), j = k+1, \dots, l\}, k = 1, 2, \dots, l.$$

Обозначим $\mathbf{1}_{\mathbb{W}_k(\theta)}(w)$, $k = 1, 2, \dots, l$ — характеристические функции соответствующих множеств. Учитывая последние замечания и введенные обозначения, можно определить функционал качества классификации

$$f(\theta) = \int_{\mathbb{W}} \sum_{k=1}^l \mathbf{1}_{\mathbb{W}_k(\theta)}(w) Q_k(w, \theta) P(dw),$$

рассматривая его как функцию набора θ центров классов. Этот функционал, имеющий более общий вид по сравнению с введенным в п. 1.2.4, часто называют *функционалом среднего риска* в задаче самообучения. Разбиение множества

$$\mathbb{W} = \cup_{k=1}^l \mathbb{W}_k(\theta)$$

называется *байесовским* (оптимальным среди $\theta \in \Theta$), если параметр разбиения θ выбран из условия минимизации функционала среднего риска.

В рассмотренном варианте оптимальная классификация соответствует *чистым стратегиям*. Если изменить постановку задачи и рассматривать минимизацию функции

$$\int_{\mathbb{W}} \sum_{k=1}^l Q_k(w, \theta) |\mu_k(w)|^p \mathbb{P}(dw), \quad p \neq 1,$$

то оптимальная классификация может иметь вид *смешанной стратегии*, т.е. не быть однозначной.

Поясним геометрический смысл формально описанной выше задачи автоматической классификации. Пусть \mathbb{W} — вещественное векторное пространство, и штрафные функции имеют похожий друг на друга вид

$$Q_k(w, \theta) = \|w - \tau_k\|^2, \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

Рассмотрим разбиение множества \mathbb{W} на l классов (образов) $\mathbb{W}_1(\theta), \dots, \mathbb{W}_l(\theta)$ по правилу: к множеству $\mathbb{W}_k(\theta)$ относятся все точки w , которые находятся к центру τ_k ближе, чем к любому другому. Для однозначности, можно считать, что в случае равенства расстояний до нескольких центров, точка w относится к классу, соответствующему центру с меньшим номером. Интеграл

$$\int_{\mathbb{W}_k(\theta)} \|w - \tau_k\|^2 \mathbb{P}(dw)$$

определяет рассеивание точек w в множестве $\mathbb{W}_k(\theta)$. Определенный выше функционал среднего риска имеет вид

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^l \int_{\mathbb{W}_k(\theta)} \|w - \tau_k\|^2 \mathbb{P}(dw).$$

Таким образом, в рассмотренном случае задача автоматической классификации состоит в определении набора центров $\{\tau_k, k = 1, \dots, l\}$, при которых суммарное рассеивание минимально. Искомый набор центров должен удовлетворять уравнению $\nabla f(\theta) = 0$. Нетрудно убедиться, что в последнем примере множества $\mathbb{W}_k(\theta)$ имеют вид многогранников, а минимизирующий функционал среднего риска набор центров $\{\tau_k^*, k = 1, \dots, l\}$ совпадает с *центрами тяжести* этих множеств

$$\tau_k^* = \frac{\int_{\mathbb{W}_k(\theta)} w \mathbb{P}(dw)}{\int_{\mathbb{W}_k(\theta)} \mathbb{P}(dw)}, \quad k = 1, \dots, l.$$

Приведенные соображения отвечают интуитивному представлению о разбиении множества \mathbb{W} на l непересекающихся классов.

Задача самообучения тесно связана с задачей автоматической классификации и является обобщением последней на случай неизвестного

распределения, определяющего статистику показа классифицируемых сигналов. Пусть распределение вероятностей $P(\cdot)$ неизвестно, но предполагается известной обучающая последовательность w_1, w_2, \dots , им порожденная. Требуется предложить алгоритм построения последовательности оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ набора θ^* , минимизирующего функционал среднего риска. Часто решение задачи самообучения осложняется тем, что на практике функции $Q_k(w, \theta)$, $k = 1, \dots, l$ не всегда заданы аналитически, а, как правило, доступны измерению при выборе некоторых x_n либо их значения в точках $Q_k(w_n, x_n)$, $n = 1, 2, \dots$, либо значения векторов-градиентов $\nabla_{\theta} Q_k(w_n, x_n)$. Если эти измерения фактически делаются с некоторой случайной ошибкой $\zeta_n^{(k)}$ с хорошими статистическими свойствами, то, учитывая общность поставленной задачи, от этого усложнения легко избавиться, расширив вектор w дополнительными компонентами $\zeta^{(k)}$, $k = 1, \dots, l$ и рассматривая новую функцию распределения, которая и ранее предполагалась неизвестной. Все приведённые ранее задачи так или иначе могут быть сформулированы в виде задачи самообучения.

Если ошибки измерения не обладают полезными статистическими свойствами, то упрощать задачу нельзя. Надо рассматривать модель наблюдений с помехами

$$Y_n^{(k)} = Q_k(w_n, x_n) + v_n^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, k = 1, \dots, l,$$

(или $Y_n^{(k)} = \nabla_{\theta} Q_k(w_n, x_n) + v_n$), где x_n — выбранная на n -ом шаге точка измерения.

При невозможности прямого измерения градиента пусть $\hat{g}_k(w, \theta)$, $k = 1, \dots, l$ — некоторые оценки градиентов функций $\nabla_{\theta} Q_k(w, \theta)$. При использовании только зашумленных измерений значений функции $Q(\cdot, \cdot)$ эти оценки можно, например, сформировать, как в рандомизированном алгоритме стохастической аппроксимации (5.1), с помощью пробного одновременного возмущения Δ_n . Для минимизации определенного выше функционала среднего риска в задаче самообучения можно воспользоваться рекуррентным алгоритмом:

$$x_n = \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n,$$

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \sum_{k=1}^l \mathbf{1}_{\mathbb{W}_k(x_n)}(w_n) Y_n^{(k)}.$$

6.3.4 Применение при исследовании ритмической структуры стихов

В силу достаточной степени развития и обоснованности методов оптимизации, их использование при решении ряда задач, возникающих при

реконструктивном моделировании стихосложения, может позволить более глубоко проникнуть в тайны создания и восприятия стихотворной речи. В этой области знаний принято с большой осторожностью говорить о возможности точного математического описания тех или иных аспектов творческой деятельности и механизмов их восприятия, тем более о *дифференцировании* какой-то минимизируемой функции, точный вид которой мало кто отважится написать. Но в последнее время сам факт наличия каких-то качественных зависимостей признается многими учёными. При лингвистических исследованиях стихотворный текст занимает важное место как особого рода речь. При этом подвергаются анализу не общеязыковые черты этой речи, а такие специфические, как метрика, ритмика, рифма и строфика. Четкая формальная выраженность этих явлений создает благоприятные условия для их изучения с помощью математических методов.

Изучение ритмической структуры дает богатый материал для понимания ритмического текста. Тем не менее, его сущностная сторона по-прежнему остается скрытой от исследователя. Причина состоит в том, что этот текст являет собой процесс внутренней переработки ритмической структуры. Основные компоненты этого процесса — метр и ритм — имеют сугубо внутреннее существование. Предложенная М.А.Красноперовой [34] концепция реконструктивного моделирования стихосложения представляет собой гипотетическое описание глубинных процессов и механизмов, действующих при создании и восприятии стихотворного текста в сфере его ритмики. Эта концепция опирается, прежде всего, на достижения русского стиховедения, накопленные на протяжении его более чем двухсотпятидесятилетней истории, хотя развиваемые ранее теории и подходы к изучению ритмики стиха были ориентированы, главным образом, на описание принципов организации ритмического текста. В основу модели положена гипотеза, согласно которой *при создании и восприятии стихотворного текста его ритмическая структура отделяется от звукового наполнения и поступает в ведение находящегося в мозгу специализированного механизма*. Модель является упрощенным гипотетическим описанием этого механизма и его функций. Она имеет семиотический характер и не претендует на нейрофизиологическое описание. Модель построена в применении к русскому стиху классического размера.

Основными элементами модели являются механизм рецепции и механизм генерации. К настоящему времени теоретические основы механизма рецепции достаточно полно разработаны и подтверждаются практическими исследованиями отдельных фрагментов стихотворных произведений. Применение модели к исходным материалам большого размера наталкивается на существенные трудности многомерной оптимизации в условиях отсутствия точной математической формулировки задачи,

и, следовательно, отсутствию возможности использовать классические методы оптимизации. На вход механизма рецепции поступают ритмические строки, количественное представление которых определяется большим набором подстраиваемых параметров (начальное, конечное, максимальное значение уровня произношения каждого слога ритмической строки, длины их *участков подъема и спуска*). Для этих параметров трудно предложить детерминированный способ задания. Точному описанию поддается только набор некоторых ограничений, которому должен удовлетворять набор параметров ритмической строки. При плохом выборе параметров ритмической строки модель механизма рецепции может оказаться неустойчивой (в математическом смысле) и соответственно ценность получаемых с её помощью характеристик внутреннего ритма стиха становится невысокой.

Для оптимизации выбора наиболее подходящего представления ритмической строки, поступающего на вход механизма рецепции модели М.А.Красноперовой, целесообразно воспользоваться одним из рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации. Целью оптимизации является достижение наиболее устойчивого поведения количественных характеристик, получаемой внутренней структуры ритмического текста. В силу большой размерности набора параметров ритмической строки (несколько десятков) использование последовательного алгоритма оценивания с пробным возмущением, одновременным по всем координатам искомого вектора параметров, позволяет на каждой итерации существенно сократить количество неудачных попыток моделирования процесса реализации ритмической строки. Теоретическое обоснование метода позволяет говорить о его эффективности и при неточном задании оптимизируемой функции.

Механизм рецепции в модели М.А.Красноперовой состоит из динамической памяти и способа реализации ритмических строк. Динамическая память состоит из двух слоев — верхнего и нижнего. Каждый слой представляет собой последовательность разрядов. Каждый разряд может находиться в той или иной степени возбуждения, которая называется его значением. Способ реализации ритмических строк обеспечивает определенные изменения значений разрядов обоих слоев динамической памяти в процессе восприятия очередной ритмической строки.

При переходе к описанию математической модели механизма рецепции необходимо предположить, что существует определенный механизм представления ритмических строк в виде наборов числовых значений, упорядоченных слева направо в соответствии с текстом строки. Количественное представление последовательности слогов очередной ритмической строки зависит от многих факторов, и обычно не может быть произведено однозначно. Более или менее строгому математическому описанию поддаются качественные соотношения между параметрами раз-

личных слогов в пределах одной ритмической строки. При формальном математическом описании способа реализации ритмических строк параметры алгоритма также не могут быть заранее точно заданы, так как для обеспечения принципиальной возможности формальной реализации приходится выбирать упрощенную математическую модель, не способную реагировать на живые нюансы языка.

Будем считать, что каждый из слоев динамической памяти имеет по l разрядов. Обозначим M_1 и M_2 — наборы чисел, соответствующие верхнему и нижнему слоям динамической памяти,

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1^{(1)}, & M_1^{(2)}, & \dots, & M_1^{(l)} \\ M_2^{(1)}, & M_2^{(2)}, & \dots, & M_2^{(l)} \end{pmatrix},$$

где $M_i^{(j)}$ — значение j -го разряда i -го слоя. До начала работы механизма рецензии значения всех разрядов обоих слоев динамической памяти равны нулю. Опишем процесс изменения значений разрядов динамической памяти при реализации очередной ритмической строки. Способ реализации будет определяться выбором некоторых параметров h , d и z , использующихся в описываемом несколько позже процессе *взаимодействия верхнего и нижнего слоев* динамической памяти. Предположим, что к моменту начала реализации строки в динамической памяти остался след от реализации предшествующих строк. Пусть очередная ритмическая строка задана также в виде l -мерной строки

$$S = (S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(l)}),$$

с неотрицательными компонентами: $S^{(j)} \geq 0$. Способ реализации строки S в динамической памяти заключается в последовательной слева направо реализации каждого из её разрядов. При реализации j -го разряда ($1 \leq j \leq l$) первоначально сравниваются значения соответствующих разрядов реализуемой строки $S^{(j)}$ и верхнего (первого) слоя динамической памяти $M_1^{(j)}$. В результате сравнения возможны две ситуации:

$$S^{(j)} \geq M_1^{(j)}$$

и

$$S^{(j)} < M_1^{(j)}.$$

В первом случае в j -й разряд верхнего слоя динамической памяти заносится новое значение $S^{(j)}$:

$$M_1^{(j)} := S^{(j)},$$

а во всех остальных разрядах происходит один такт взаимодействия верхнего и нижнего слоев динамической памяти. Это взаимодействие

заключается в постепенном выравнивании значений соответствующих разрядов верхнего и нижнего слоя:

для всех $k \neq j$, $1 \leq k \leq l$,
если $M_1^{(k)} < M_2^{(k)}$, то

$$M_1^{(k)} := M_1^{(k)} + h, \quad M_2^{(k)} := M_2^{(k)} - h,$$

если $M_1^{(k)} > M_2^{(k)}$, то

$$M_1^{(k)} := M_1^{(k)} - h, \quad M_2^{(k)} := M_2^{(k)} + h,$$

если $M_1^{(k)} = M_2^{(k)} > z > 0$, то

$$M_1^{(k)} := M_1^{(k)} - d, \quad M_2^{(k)} := M_2^{(k)},$$

если $M_1^{(k)} < z$, $M_2^{(k)} < z$, то

$$M_1^{(k)} := 0, \quad M_2^{(k)} := 0.$$

При втором варианте результата сравнения $S^{(j)}$ и $M_1^{(j)}$ реализация j -го разряда ритмической строки происходит по более сложному алгоритму, так как процесс реализации сталкивается с *сопротивлением* накопленной ранее основы ритмической структуры предшествующего текста. Сначала ищется в верхнем слое динамической памяти нулевой разряд, ближайший справа к j -му разряду. Пусть, для определенности, его номер равен m . Потом последовательно справа налево сдвигаются на один разряд вправо все разряды верхнего слоя динамической памяти вплоть до j -го:

$$M_1^{(k)} := M_1^{(k-1)}, \quad k = m, m-1, \dots, j+1,$$

освобождая j -е место для реализации $S^{(j)}$. Далее

$$M_1^{(j)} := S^{(j)}.$$

После этого в разрядах с номерами $1 \leq k \leq j$ и $j \leq k \leq l$ происходит один такт взаимодействия верхнего и нижнего слоев динамической памяти. На самом деле процесс взаимодействия в том виде, как он описан в книге [34], более сложный. При столкновении процесса реализации с сопротивлением больших значений разрядов верхнего слоя динамической памяти иногда необходима корректировка значений разрядов ритмической строки S , так как её количественное представление неоднозначно. Эта корректировка производилась в [34] при предварительном рассмотрении реализации очередного слога в строке.

Процесс предварительного подбора оптимального вида очередной ритмической строки можно формализовать так. Предположим, что очередная ритмическая строка S задана с точностью до некоторого набора из r параметров

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta^{(1)} \\ \theta^{(2)} \\ \vdots \\ \theta^{(r)} \end{pmatrix},$$

принадлежащих заданному ограниченному и замкнутому множеству $\Theta \subset \mathbb{R}^r$. Параметрами ритмической строки могут являться интервал перед участком подъема первого слога (пауза), относительная характеристика его начального значения, относительная длина реализации каждого из слогов, относительная разность между максимальным и минимальным значениями в пределах одного слога, относительное значение в конце реализации слога, относительное отношение длин участков подъема и спусков при представлении каждого из слогов строки и т.п..

Предположим, что оптимальный вид ритмической строки соответствует тому значению параметров θ^* , при котором менее всего изменятся значения всех разрядов динамической памяти после реализации строки целиком. Обозначим $M_i(\theta)$, $i = 1, 2$ значения верхнего и нижнего слоев динамической памяти после реализации ритмической строки $S(\theta)$ с набором параметров θ . Для характеристики качества выбора строки $S(\theta)$ при заданной некоторой строке \bar{S} можно ввести функцию потерь

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^l \left((S^{(k)}(\theta) - \bar{S}^{(k)})^2 + \sum_{i=1,2} (M_i^{(k)}(\theta) - M_i^{(k)})^2 \right),$$

принимая, как и ранее, что наборы чисел M_i , $i = 1, 2$ соответствуют значениям верхнего и нижнего слоев динамической памяти до начала процесса реализации строки $S(\theta)$.

Для нахождения оптимального набора параметров θ^* можно просто постараться перебрать все возможные значения из заданного множества Θ , как это делалось в [34] при предварительном подборе значения для определенного слова или даже слога строки. Но при исследовании крупных фрагментов стихотворных текстов этот способ практически не применим из-за большой размерности вектора настраиваемых параметров. Воспользоваться при оптимизации классическими математическими методами также не представляется возможным, так как зависимость значений функции потерь от параметра θ не задана аналитически. В такой ситуации вместо полного перебора возможных значений параметров целесообразно воспользоваться одним из рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации, что позволит при минимальном количестве измерений функции $f(\cdot)$ (попыток предварительной реализации

ритмических строк) сгенерировать последовательность оценок $\{\hat{\theta}_n\}$, сходящуюся во многих практических случаях к оптимальному значению θ^* .

6.4 Оптимизация систем реального времени

Описание некоторых практических применений рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации в системах массового обслуживания можно найти, например, в [91, 113].

6.4.1 Отслеживание дрейфа экстремума нестационарного функционала

Пусть $Q_n(\omega, \theta)$ — случайная функция дискретного времени ($n = 1, 2, \dots$) и случайного векторного параметра θ . Обозначим через $f_n(\theta)$ функционал среднего риска:

$$f_n(\theta) = E\{Q_n(\omega, \theta)|\theta\},$$

где $E\{\cdot|\theta\}$ — условное среднее. Точку минимума функционала $f_n(\theta)$ обозначим

$$\theta_n^* = \arg \min_{\theta} f_n(\theta).$$

Требуется по наблюдениям (может быть с дополнительными помехами) за случайными величинами $Q_n(\omega, \theta)$ либо $\nabla_{\theta} Q_n(\omega, \theta)$, $n = 1, 2, \dots$ построить последовательность оценок $\{\hat{\theta}_n\}$, отслеживающих изменения параметра θ_n^* , для которой

$$\|\hat{\theta}_n - \theta_n^*\| \rightarrow \min$$

в каком-нибудь смысле.

Описанная задача отслеживания дрейфа экстремума возникает при оптимизации работы систем реального времени, в частности, в задаче адаптивного управления, если параметры объекта и (или) показатель качества управления изменяются во времени. Такого же типа проблемы встречаются в теории коммуникаций при оптимизации работы адаптивного эквалайзера, при загрузке изменяющихся со временем каналов, при адаптивном подавлении шумов или при оптимизации работы систем обнаружения сигналов, когда генерируемые сигналы или помехи, или характеристики каналов меняются со временем. Успешное решение задачи связано с предположениями о характере дрейфа и стохастических свойствах функции $Q_n(\omega, \theta)$ либо её градиента. Часто принимается, что изменение экстремальной точки во времени происходит по степенному закону (полиномиальный дрейф), т.е. θ_n^* определяется некоторым соотношением

$$\theta_n^* = \sum_{k=0}^l a_k n^k$$

с неизвестными, подлежащими оцениванию коэффициентами. Возможны и другие законы описания дрейфа экстремума, определенные с точностью до конечного набора неизвестных параметров.

Обычно предполагают, что помехи наблюдения представляют собой реализацию некоторой центрированной случайной величины. Поэтому в литературе (см., например, [122]) при рассмотрении такого типа задач без потери общности считают, что величины $Q_n(\omega, \theta)$ (или $\nabla_\theta Q_n(\omega, \theta)$) известны точно. В случае произвольных помех v_n можно рассматривать модель наблюдений в виде

$$y_n = Q_n(\omega, \theta) + v_n,$$

так как, например, в случае неизвестных ограниченных детерминированных помех

$$f_n(\theta) \neq E\{Q_n(\omega, \theta) + v_n | \theta\}.$$

Среди множества алгоритмов, используемых для отслеживания параметров θ_n^* , стараются выбрать, с одной стороны, наиболее соответствующий сделанным допущениям о характере изменения параметров, а с другой стороны, такой, чтобы он был применимым с вычислительной точки зрения. Часто используются алгоритмы стохастической аппроксимации с фиксированным шагом, рекуррентный или линеаризованный метод наименьших квадратов с *забывающими множителями* или адаптивный вариант фильтра Калмана–Бьюси.

Далее будут рассмотрены примеры оптимизации работы маршрутизатора в вычислительной сети, распределяющего по двум каналам поступающие в систему запросы, и сервера, обслуживающего очередь заданий.

6.4.2 Оптимизация работы маршрутизатора

Предположим, что в систему маршрутизации случайным образом поступают запросы в дискретные моменты времени переключения. В каждый момент приходит не более одного запроса и вероятность того, что поступившие в момент времени t данные не зависят от t равна $\mu > 0$. Для каждого из поступивших запросов существуют два варианта маршрутов, при этом i -ый маршрут содержит l_i линий и может одновременно обрабатывать l_i запросов.

Будем считать, что длительности обработки запросов и интервалы между запросами являются взаимно независимыми случайными величинами. Выберем случайное правило маршрутизации, изменяемое некоторой процедурой стохастической аппроксимации. Если запрос приходит в момент времени t , тогда он отправляется по маршруту 1 с вероятностью $\hat{\theta}_{t-1}$, $0 < \hat{\theta}_{t-1} < 1$ и по маршруту 2 с вероятностью $1 - \hat{\theta}_{t-1}$. Обозначим Q_t — значение штрафной функции (стоимости) в момент времени t , соответствующее выбранному направлению. Если одна из линий выбранного

маршрута свободна, то принимаем $Q_t = 0$ и текущий запрос начинает обрабатываться на свободной линии. Если все линии выбранного маршрута заняты в этот момент времени, тогда запрос переадресовывается в другой маршрут. Если альтернативный маршрут также полностью занят, то запрос системой игнорируется и $Q_t = 0$, если свободен, то он начинает обрабатываться на одной из линий этого маршрута и $Q_t = 1$. Цель оптимизации выбора правила маршрутизации состоит в минимизации средней функции потерь

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T Q_k.$$

Обозначим θ_t^* — отношение в момент времени t числа свободных линий на первом маршруте к общему числу свободных линий на первом и втором. Если в момент времени t все линии заняты, то считаем $\theta_t^* = \theta_{t-1}^*$. Пусть $\eta_t = (\eta_t^{(1)}, \eta_t^{(2)})^T$ вектор, значения координат которого соответствуют загруженности каждого из маршрутов в момент времени t . Изменяющийся параметр θ_t^* является корнем функции

$$f_t(\theta) = \theta \eta_t^{(2)} - (1 - \theta) \eta_t^{(1)}.$$

Если бы удалось построить правило, по которому реальное изменение параметра θ_t^* предсказывалось бы точно, т.е. можно было бы выбрать $\hat{\theta}_{t-1} = \theta_t^*$, то описанный алгоритм принятия решения обладал бы определенными оптимальными свойствами.

Для пересчета параметра правила маршрутизации разумно воспользоваться алгоритмом:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_0 &= l_1 / (l_1 + l_2), \\ \hat{\theta}_t &= \mathcal{P}_{[A,B]}(\hat{\theta}_{t-1} - \alpha(\hat{\theta}_{t-1} \eta_t^{(2)} - (1 - \hat{\theta}_{t-1}) \eta_t^{(1)})), \end{aligned}$$

в котором $0 < A < B < 1$ — некоторые уровни усечения (срезки) и $\mathcal{P}_{[A,B]}$ — оператор усечения. Можно рассматривать и уменьшающуюся последовательность шагов в алгоритме, но на практике естественно пожелание отслеживать статистические изменения. Для эффективного использования этого алгоритма нужно выбрать подходящее значение α . По смыслу, мы имеем две задачи оценивания одновременно. Первая — отслеживание θ_t^* , вторая — оценивание оптимального размера шага для алгоритма отслеживания α^* .

Выберем некоторое натуральное число N , задающее длину отрезка времени, на котором коэффициент α не будет изменяться. Обозначим α_n значение коэффициента α в алгоритме отслеживания $\{\theta_t^*\}$, используемое на интервале $t \in [(n-1)N, Nn-1]$ и пусть

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=(n-1)N+1}^{Nn} Q_k$$

— среднее значение функции потерь на интервале $[(n-1)N+1, Nn)$, w — случайная величина, включающая в себя всю информацию о поступивших на интервале $[(n-1)N+1, Nn)$ заказах (время поступления, номер маршрута и линии, время обработки). При достаточно большом N можно считать, что y_n является измерением некоторой функции $F(w, \alpha_n)$ с аддитивной помехой, зависящей от предыстории процесса. Размер шага алгоритма целесообразно выбирать из некоторого отрезка $[\alpha_-, \alpha_+]$, $0 < \alpha_- < \alpha_+$ в соответствии с некоторой рекуррентной процедурой, минимизирующей

$$E\{F(w, \alpha)\},$$

что в определенном смысле соответствует исходной постановке задачи. Можно воспользоваться рандомизированным алгоритмом стохастической аппроксимации с постоянным шагом, использующим на каждой итерации только одно зашумлённое измерение неизвестной функции:

$$\hat{\alpha}_n = \mathcal{P}_{[\alpha_-, \alpha_+]}(\tilde{\alpha}_{n-1} + \beta \Delta_n),$$

$$\tilde{\alpha}_n = \tilde{\alpha}_{n-1} - h \Delta_n y_n,$$

где $h > 0, \beta > 0$ — достаточно малые параметры алгоритма, Δ_n — независимое пробное возмущение, равное ± 1 с одинаковой вероятностью. Такой способ выбора шага алгоритма называют *адаптивным алгоритмом выбора размера шага*. При этом алгоритм отслеживания $\{\theta_n^*\}$ имеет вид

$$\hat{\theta}_t = \mathcal{P}_{[A, B]}(\hat{\theta}_{t-1} - \hat{\alpha}_{[t/N]}(\hat{\theta}_{t-1} \eta_t^{(2)} - (1 - \hat{\theta}_{t-1}) \eta_t^{(1)})).$$

В этом алгоритме размер шага хоть и меняется со временем, но не стремится к нулю. Выбор верхнего уровня α_+ очень важен для хорошего поведения алгоритма. Оптимальное значение размера шага алгоритма отслеживания параметров часто бывает очень близко от точки, при которой алгоритм оценивания параметров становится нестабильным. В этом случае можно получить неправильное поведение оценок $\{\hat{\theta}_t\}$ и даже $\{\hat{\alpha}_n\}$. Для лучшего качества оценок алгоритма отслеживания и хорошего переходного процесса часто стараются найти наибольшее значение α , выбор которого не противоречил бы получению хорошей асимптотической дисперсии ошибки $\hat{\theta}_{n-1} - \theta_n^*$. Но когда α получается близко к точке нестабильности, траектории $\{\theta_n\}$ имеют тенденцию к проявлению широких отклонений. По этой причине не следует выбирать α_+ слишком большим на первое время. Если размер шага $\hat{\alpha}_n$ приближается к верхней границе α_+ , а поведение алгоритма отслеживания остается хорошим, то тогда можно увеличить α_+ .

6.4.3 Оптимизация работы сервера

Рассмотрим задачу эффективного обслуживания очереди заданий одним сервером. Пусть процесс поступления заданий от клиентов является

обновляющимся в теоретико-вероятностном смысле. Вероятностное распределение времени обслуживания зависит от вещественного параметра θ , который требуется выбрать с целью минимизировать среднее время ожидания клиентами $L(\theta)$ вместе с некоторой стоимостью $q(\theta)$ использования параметра θ

$$f(\theta) = L(\theta) + q(\theta) \equiv \lim_N \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\{x_i(\theta)\} + q(\theta),$$

где $x_i(\theta)$ — время, затраченное на выполнение задания, которое, например, было закончено i -м по счету. Цель состоит в минимизации $f(\theta)$ по θ из некоторого конечного интервала $[A, B]$.

Вообще говоря, $L(\theta)$ очень трудно вычислить. Можно, наблюдая за очередью длительное время (фиксируя время поступления заказа, время отправки ответа и время обслуживания для каждого клиента), использовать полученные данные для оценки производной функционала качества для текущего значения θ , получающегося в результате пересчета по некоторому градиентному алгоритму. Здесь термин *оценка производной* понимается в широком смысле, так как она может получаться, вообще говоря, смещённой. Основная трудность, общая для многих систем реального времени, заключается в том, что оптимизация должна быть получена на основании наблюдений только на конкретной траектории реализации случайной величины.

Опишем один из возможных способов оптимизации работы сервера, основанный на использовании для построения очередной оценки регулируемого параметра рандомизированного алгоритма стохастической аппроксимации типа (5.1), использующего на каждой итерации одно зашумленное измерение функции потерь, в котором, например, оценки изменяются после последовательного окончания обслуживания каждой группы из N заказов. Другими возможными способами выбора времени изменения оценок могут быть: окончание N -го последовательного периода занятости, конец первого периода занятости после отправки заказчику результатов обработки N запросов, случайная смесь всех этих методов и т. п.. Все разумные правила выбора времени изменения параметров приводят к одинаковым предельным свойствам. В алгоритме стохастической аппроксимации будем использовать *номер группы заказов* вместо реального времени. В физической системе $\hat{\theta}_0$ используется до момента отправки N -го запроса, далее $\hat{\theta}_1$ — $2N$ -го запроса и т.д.. Шаг алгоритма целесообразно выбрать постоянным и достаточно малым. Обозначим $\xi_i, i < \infty$ — продолжительность времени, затраченного на обработку i -го законченного заказа. Для фиксированного $\hat{\theta}_{n-1}$ определим оценку $\hat{\theta}_n$, формирующую правило работы сервера на n -м интервале, который содержит отправки выполненных заказов с номерами $(n-1)N +$

$1, \dots, nN$, по правилу:

$$\hat{\theta}_n = \mathcal{P}_{[A,B]}(\tilde{\theta}_{n-1} + \beta \Delta_n),$$
$$\tilde{\theta}_n = \tilde{\theta}_{n-1} - \alpha \frac{\Delta_n}{N} \left(\sum_{i=(n-1)N+1}^{Nn} \xi_i + q(\theta_n) \right).$$

где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ — достаточно малые параметры алгоритма, Δ_n — независимое пробное возмущение, равное ± 1 с одинаковой вероятностью.

6.5 Оптимизация расчетов цен опционов

С момента возникновения в обществе товарно-денежных отношений, появления банков, кредитов, а позже фондовых бирж, акций, фьючерсов и опционов, в силу своей специфики, они существенно влияли на развитие новых исследовательских направлений в математике.

6.5.1 Рынки, акции, фьючерсы, опционы

В последние несколько десятилетий в связи с колоссальным ростом возможностей телекоммуникаций количество участников (агентов) в товарно-денежных операциях существенно выросло. Если на заре становления товарно-денежных отношений во многих операциях (сделках) участвовало в основном два или несколько агентов, то сейчас, например, при торговле через биржу в одной по сути сделке может участвовать достаточно много продавцов и покупателей. При большом разнообразии агентов на *рынке*, у каждого из которых свои цели и возможности, процесс *спроса и предложений* носит отчетливо выраженный стохастический характер. Для того, чтобы к какой-нибудь торговой или инвестиционной операции привлечь большее количество участников, были придуманы *акции*, для их купли-продажи были открыты фондовые биржи. Но почти сразу общество столкнулось с серьезной проблемой. Так как по своей природе акции не связаны непосредственно с материальными ценностями, а их обращение происходит в удобной и легкой форме, то в развитом капиталистическом обществе процесс их ценообразования подвержен спекулятивным тенденциям. Владельцы крупных пакетов акций за счет *игры* на бирже могут существенно влиять на текущую цену. Постепенно на смену *хлебным, нефтяным и т.п. кризисам* в жизнь общества вошли *финансовые кризисы*, негативное влияние которых в развитом обществе гораздо сильнее любого отраслевого кризиса, так как финансы — это "кровенные" артерии человеческого общества. В XX веке история знает несколько примеров очень глубоких финансовых

кризисов, задевших интересы не только отдельных людей, а целых крупных государств. Человечество нашло эффективный способ страховки отдельных людей, коммерческих фирм, общественных фондов, целых государств или сообществ от необоснованных естественными или другими непреодолимыми причинами финансовых кризисов. Появились фьючерсные биржи, на которых стали продавать *производные* ценные бумаги — *фьючерсы и опционы*. Суть идеи — ограничить на определенное время (от одного месяца до нескольких лет) среднюю скорость роста или падения цены акции. В некотором математическом смысле можно говорить о попытке ограничить абсолютную величину производной от функции, задающей цену акции.

Фьючерс — это контракт на покупку или продажу в определенный день в будущем акции или другого товара по заранее заданной цене. Владелец фьючерсного контракта обязан в день окончания фьючерса выполнить свои обязательства по купле-продаже. По своей сути *игра* на рынке фьючерсов близка ко многим азартным играм. Так же, как и на рынке акций, законы ценообразования на фьючерсных рынках не гарантируют спасения от глубоких финансовых кризисов. *Опцион* — это также контракт на покупку или продажу акции или другого товара в определенный день в будущем (или до определенного дня) по заранее оговоренной цене. Но в отличие от владельца фьючерсного контракта владелец опциона может не выполнять свои обязательства по купле-продаже, если это ему невыгодно. На самом деле опционные контракты взаимовыгодны и продавцу и покупателю, а финансовый рынок, на котором опционы занимают существенное место, менее подвержен глубоким финансовым кризисам.

Для примера попробуйте поставить себя на место руководителя работ по строительству длинной железной дороги. Срок строительства два года, деньги заказчик в определенном количестве гарантирует выплачивать ежемесячно. Общая стоимость работ оговорена заранее и не может быть изменена. Пусть основные материальные затраты составляют средства на покупку секций железнодорожного полотна. Возможны два варианта гарантированного безубыточного выполнения работ. Первый — взять кредит в банке на всю предполагаемую сумму работ, закупить сразу весь объем железнодорожного полотна, сложить его на складе и постепенно подвозить к месту монтажа. Недостатками этого варианта являются: необходимость кредита от банка, который могут и не дать, если заказчик не очень надежен; риск форс-мажорных обстоятельств; затраты на дополнительную перевозку, перегрузку и организацию хранения железнодорожных секций. Второй вариант — покупка опционных контрактов на поставку железнодорожных секций в определенное время по определенной цене. Для исполнителя работ выгодно фиксировать цену, даже более высокую, чем текущая, но не платить проценты по

кредиту и не нести дополнительные затраты на транспортировку и хранение. В момент покупки опциона оплачивается определенное вознаграждение продавцу (называемое *ценой опциона*), соответствующее превышению договоренной суммы над прогнозируемым уровнем цены в будущем. Если за время строительства в экономике или отрасли произойдет кризис, и цены упадут, то владелец опциона не обязан покупать ж/д полотно по высокой цене, он может дешево купить его на рынке и получить тем самым дополнительную прибыль. Для продавца железнодорожных секций, если фактическая цена к моменту исполнения обязательств по контракту, выше оговоренной в опционе, то это не является прямым убытком, так как заранее можно было подготовиться к исполнению своих обязательств, получив на это некоторую предоплату. Если цены на акции или товар к моменту погашения обязательств упадут, то полученная заранее предоплата остается у продавца и является его доходом.

Опционы продавца называются *опционы-пут (put)*, а опционы покупателя *опционы-колл (call)*. Опционы, в которых выполнение обязательств происходит в конце оговоренного срока, называются *опционами Европейского типа*, а те, в которых выполнение обязательств может по желанию владельца контракта произойти и до конца оговоренного срока, — *опционами Американского типа*. Бывают опционы и с другими названиями и правилами обращения.

6.5.2 Расчет текущей цены опционов

Приняв гипотезу о стохастическом характере рынка опционов и независимости действий различных агентов на рынке, достаточно тонкие математические рассуждения приводят к формуле Блэка-Шоулса для расчета *справедливой цены опциона* (взаимовыгодной), доказательство и вывод которой можно найти, например, в [66].

Пусть банковский счет $\{b_t\}_{t \geq 0}$ эволюционирует так, что

$$db_t = \delta b_t dt,$$

а цены акций $\{s_t\}_{t \geq 0}$ подчиняются закону геометрического броуновского движения

$$ds_t = s_t(\mu dt + \sigma dw_t),$$

где $\{w_t\}_{t \geq 0}$ — стандартный винеровский процесс (броуновское движение), заданный на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) .

Для этой модели справедливая стоимость стандартного опциона-колл Европейского типа определяется формулой

$$C_T = s_0 \Phi\left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + T(\delta + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{T}}\right) - K e^{-\delta T} \Phi\left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + T(\delta - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{T}}\right),$$

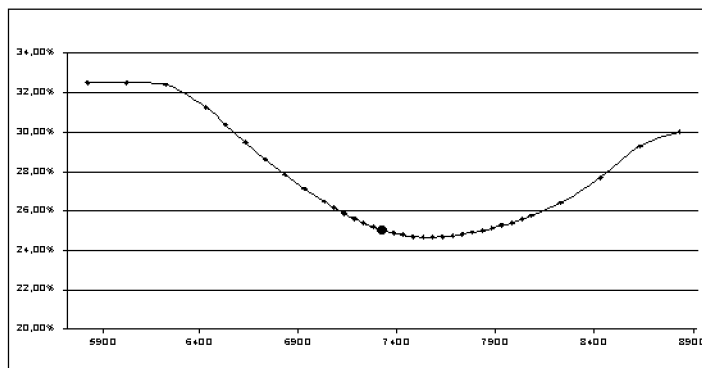


Рис. 10. Кривая волатильности

где

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

T — время до дня погашения опциона, K — зафиксированная в контракте цена (страйк), по которой покупатель в оговоренный день погашения опциона имеет право купить акции или другой товар. В частности, при $s_0 = K$ и $r = 0$

$$C_T = s_0 \left(\Phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) \right)$$

и $C_T \approx s_0 \sigma \sqrt{\frac{T}{2\pi}}$ при $T \rightarrow \infty$.

Параметр σ в формуле Блэка–Шоулса называется *волатильностью* и играет основную роль при расчете цены опциона. При фиксированном времени T до момента погашения опционных контрактов график функции $\sigma(K)$ имеет вид, похожий на улыбку человека (smile) (см. рис. 10). Многолетний анализ формирования цен при торговле на биржах опционами подтверждает такой характер зависимости, причем при изменении текущих цен характер *кривой волатильности* практически не меняется. Изменения вида этой кривой происходят достаточно редко и подчиняются определенным эмпирическим законам. Вид кривой волатильности можно параметризовать несколькими параметрами, основные из которых — значения волатильности в точке s_0 (*at the money*) и в крайних точках, угол наклона в точке *at the money*, параметры сглаживающих кривых. Обычно кривую волатильности составляют из четырех частей: по краям используют два графика показательной функции, в основной части хорошо соответствуют экспериментальным данным две квадратичные или кубические кривые, склеивающиеся в точке *at the money*. Использование кривых волатильности приводит к достаточно простому способу расчета цен опционов и проверки правильности полученных результатов: подбирают кривые, наиболее соответствующие реальной карти-

не на рынке, и с их помощью по формуле Блэка–Шоулса рассчитывают цены опционов. При быстрых изменениях цен акций или товаров кривая волатильности просто параллельно переносится и после этого оперативно пересчитываются цены опционов. Сложность проверки результатов расчетов определяется недостатком информации о текущих ценах. Одновременно по одному виду акций или другого товара продаются опционные контракты на разные сроки (до десяти и даже более). На каждый срок одновременно продаются несколько десятков контрактов с разными гарантированными ценами будущих сделок (страйкам). Так как опционы являются производными бумагами, скорость изменения цен на них может быть на порядок выше, чем для самих акций или товаров, лежащих в основе опционного контракта. Например, на электронной бирже во Франкфурте–на–Майне торгуют, в частности, опционными контрактами на индекс DAX. Характер типичных изменений в течение дня 18 апреля 2000 года реальных цен сделок по страйку 7100 можно проиллюстрировать данными из выборочной таблицы 2.

Таблица 2.

Время	Цена сделки
9 ч. 14 мин.	176
10 ч. 14 мин.	145
11 ч. 07 мин.	110
11 ч. 40 мин.	75
12 ч. 16 мин.	100
12 ч. 24 мин.	115
13 ч. 52 мин.	130
18 ч. 52 мин.	150

В каждый момент ситуация на рынке может существенно измениться, причем об этом можно и не догадаться, наблюдая за одним из продаваемых на бирже контрактов, так как сделок по нему в этот момент может и не быть по каким-либо причинам.

Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации целесообразно в этой задаче применять к оцениванию параметров кривых волатильности. Во-первых, задача — многопараметрическая и, следовательно, актуален вопрос об оптимизации процесса подбора подходящих параметров, а, во-вторых, желательно использовать алгоритмы наименее чувствительные к заданию статистических свойств помех в модели, так как по своей природе помехи могут не быть независимыми и центрированными.

6.6 Квантовые компьютеры и рандомизированные алгоритмы

Как было неоднократно замечено выше, область использования рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации в последнее время постоянно расширяется. Простота в представлении алгоритмов позволяет использовать их не только в специальных вычислительных устройствах, но и, как, например, в работах [131, 134], непосредственно заложить принцип *одновременного возмущения* в конструкцию электронного устройства классического типа, предназначенного для настройки параметров нейронной сети. Эффективность оптимизации при этом обуславливается двумя основными моментами.

- Для вычисления приближенного значения вектора–градиента функции от многих переменных по её значениям требуется всего одно или два измерения значения функции.
- Алгоритмы обладают качествами робастности в очень высокой степени, в том смысле, что состоятельность их оценок доказана при почти произвольных помехах в измерениях функции.

Фундаментальным вопросом обоснования эффективности использования методов на практике является выбор такого способа генерации пробного возмущения, чтобы помехи в канале наблюдения были с ним независимы, кроме того, компоненты вектора пробного возмущения должны быть независимы между собой. При реализации алгоритма на классическом (неквантовом) компьютере, последовательно выполняющем элементарные операции одну за другой, эффективность предлагаемых алгоритмов снижается по сравнению с теоретическими ожиданиями. В самом названии *одновременно возмущаемый* заложено настойчивое требование к практической реализации — быть *параллельной*. Вместе с тем, при большой размерности векторов-аргументов функции (несколько сотен, тысяч) задача организации параллельных вычислений на компьютерах классического типа достаточно сложна.

В этом разделе будет рассмотрена модель "гипотетического" квантового вычислителя, в которой не только естественно генерируется пробное одновременное возмущение, но и основное нетривиальное понятие — *измерение результата квантового вычисления* — реализуется за счет того, что оно само по себе заложено в структуре рандомизированного алгоритма в виде умножения результата вычисления значения исследуемой функции на пробное возмущение. Другими словами, ниже будет приведен пример построения квантового устройства, вычисляющего хорошую оценку вектора–градиента неизвестной функции от многих переменных за *один такт*. Слово "гипотетический" сознательно написано в

кавычках, так как после доклада П.Шора на Берлинском математическом конгрессе в 1998 году [157] многие серьезные исследователи стали писать о квантовых компьютерах как о технике ближайшего будущего, а в августе 2000 года было объявлено о первом практическом успехе: [Reuters] "IBM Says It Develops Most Advanced Quantum Computer" (Ай-Би-Эм разработала квантовый компьютер):

"15 августа представители IBM объявили о том, что в исследовательской лаборатории компании разработан квантовый компьютер, являющийся на данный момент самой успешной моделью из разрабатываемых учеными.

Исследователи протестировали работу компьютера, поставив перед ним задачу о нахождении периода функции. Машина нашла решение за один цикл работы, в то время как обычному компьютеру для решения аналогичной задачи требуется совершить несколько циклов.

Работа квантового компьютера основана на таком квантовом свойстве элементарных частиц, как спин, а также на том, что частицы с разным значением спинов могут коррелировать между собой. При сопоставлении некоторому состоянию элементарной частицы с одним значением спина цифры 1, а с другим значением спина цифры 0 получается полная аналогия с двоичной системой счисления, на которой основана работа современных компьютеров. Уникальность квантовой машины заключается в том, что оба состояния могут находиться в состоянии *суперпозиции*, и поэтому компьютер может одновременно решать большее количество задач. Новая разработка IBM, которая использовала для работы 5 атомов, показала, что некоторые проблемы квантовый компьютер способен решить гораздо быстрее, чем обычные вычислительные машины. В ближайшие 2 года компания будет разрабатывать компьютер, работа которого будет основана на взаимодействии 7–10 атомов."

6.6.1 Квантовые цепи

Опишем, следуя [73, 143, 157], математическую модель квантового компьютера, производящего вычисления по определенной цепи. При этом будем опираться, где это возможно, на обобщение понятий, характерных для модели классического компьютера. В частности, будет обобщено понятие цепи классического вычисления до квантовой модели цепи квантового вычисления. Классический компьютер обрабатывает биты, принимающие значения из множества $\{0, 1\}$. Он оборудован конечным набором схем, которые могут применяться к наборам битов. Квантовый компьютер обрабатывает q -биты (квантовые биты), представляющие собой квантовую систему двух состояний (микроскопическая система, соответствующая описанию, например, возбужденного иона или поляризованного фотона, или спина ядра атома). Характеристики поведения

этой квантовой системы такие, как интерференция, суперпозиция, стохастичность и т.п., можно точно объяснить, только используя правила квантовой механики [56]. Математически q -бит принимает значения из комплексного проекционного (гильбертового) пространства \mathbb{C}^2 . Квантовые состояния инвариантны относительно умножения на скалярное значение. Обозначим базис этого пространства e_0 и e_1 . В литературе по квантовым компьютерам чаще используется *ket(ket)*-обозначение для этого базиса $|0\rangle, |1\rangle$. Будем предполагать, что квантовый компьютер, как и классический, оборудован дискретным набором фундаментальных компонент, называемых квантовыми схемами. Каждая квантовая схема по своей сути является унитарным преобразованием, которое действует на фиксированное число q -битов. Один из фундаментальных принципов квантовой механики состоит в том, что совместное квантовое пространство состояний системы, состоящей из l систем с двумя состояниями, является тензорным произведением их индивидуальных пространств-состояний. Таким образом, квантовое пространство состояний системы из l q -битов является проекционным гильбертовым пространством \mathbb{C}^{2^l} . Набор базисных векторов этого пространства состояний можно параметризовать строками битов длины l

$$e_{b_1 b_2 \dots b_l} = e_{b_1} \otimes e_{b_2} \otimes \dots \otimes e_{b_l},$$

для обозначения того же вектора будем использовать и другую форму записи $|b_1 b_2 \dots b_l\rangle$. Предположим, что на вход квантового компьютера подается классическая информация — строка i длины k , $k \leq l$. В квантовом вычислении первоначально l q -битов установлены в состояние $|i00\dots 0\rangle$. Выполняемая цепь строится из конечного числа квантовых схем, действующих на эти q -биты. В конце вычисления квантовый компьютер переходит в некоторое состояние, являющееся единичным вектором в пространстве \mathbb{C}^{2^l} . Это состояние можно представить в виде

$$W = \sum_s \psi^{(s)} e_s,$$

где суммирование по s идет по всем двоичным строкам длины l , $\psi^{(s)} \in \mathbb{C}$, $\sum_s |\psi^{(s)}|^2 = 1$. Величины $\psi^{(s)}$ называются вероятностными амплитудами, а W называют суперпозицией базисных векторов e_s . В квантовой механике принцип неопределенности Гейзенберга состоит в том, что невозможно точно ответить на вопрос о состоянии квантовой системы. Но существует несколько способов выполнить измерение всех q -битов (или подмножества q -битов). Пространство состояний квантовой системы является гильбертовым, понятие измерение состояния эквивалентно скалярному произведению в этом гильбертовом пространстве с некоторым заданным вектором V :

$$\langle V, W \rangle.$$

В литературе по квантовым вычислениям при измерении используется обычно проекция каждого из q -битов на основание базиса $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Результат этого измерения — итог вычисления.

6.6.2 Квантовая цепь, вычисляющая аппроксимацию вектора-градиента функции

Рассмотрим ту часть рандомизированного алгоритма стохастической аппроксимации (5.3) (или (5.1), или (5.2)), которая используется для вычисления в некоторой точке $x \in \mathbb{R}^r$ приближенного значения вектора-градиента $\hat{g}(x)$ функции $f(\cdot) : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$. Будем считать, что для представления чисел в нашем гипотетическом компьютере используется p двоичных разрядов и $l = p \times r$ (в современных компьютерах, наиболее часто $p = 16, 32, 64$). Пусть в алгоритме $\mathcal{K}_n(x) = x$, $\beta = 2^{-j}$, $0 \leq j < p$ и подаваемое на вход алгоритма пробное одновременное возмущение задается распределением Бернулли. Для любого числа $u \in \mathbb{R}$ обозначим s_u его двоичное представление в виде строки битов $s_u = \overline{b_u^{(1)} \dots b_u^{(p)}}$. Предположим, что у нас в распоряжении есть квантовая цепь, вычисляющая значения функции $f(x)$. Более точно, можно считать, что задано унитарное преобразование $U_f : \mathbb{C}^{2^l} \rightarrow \mathbb{C}^{2^l}$, которое для любого $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(r)})^T \in \mathbb{R}^r$ базисному элементу

$$|s_{x^{(1)}} \dots s_{x^{(r)}}\rangle = |b_{x^{(1)}}^{(1)} \dots b_{x^{(1)}}^{(p)} \dots b_{x^{(r)}}^{(1)} \dots b_{x^{(r)}}^{(p)}\rangle$$

сопоставляет другой базисный элемент

$$|s_{f(x)} 00 \dots 0\rangle = |b_{f(x)}^{(1)} \dots b_{f(x)}^{(p)} 00 \dots 0\rangle = U_f |s_{x^{(1)}} \dots s_{x^{(r)}}\rangle.$$

Пусть наш гипотетический квантовый вычислитель содержит, по крайней мере, четыре l q -битных регистра: \mathcal{I} - входной, преобразующий классические входные данные в квантовые, два рабочих W_1, W_2 , позволяющих манипулировать с квантовыми данными, и выходной Δ , в котором хранится то квантовое значение, проекция на которое дает результат вычисления в классической форме (измерение). Для построения квантовой цепи, реализующей вычисление оценки вектора-градиента функции $f(\cdot)$, потребуется несколько стандартных квантовых (унитарных) преобразований, которые можно применять к данным, хранящимся в регистрах. Считаем, что результат преобразования сохраняется в том же регистре, к которому оно применялось.

Сложение/Вычитание $U_{\pm X}$ Сложение/Вычитание одного вектора с другим, хранящимся в регистре X .

Поворот первых q -битов $U_{R_{1,p+1,\dots,(r-1)p+1}}$ Преобразует состояние q -битов с номерами $1, p+1, \dots, (r-1)p+1$ в $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$.

Сдвиг на j q -битов U_{S_j} Сдвигает вектор состояния на j q -битов, добавляя новые $|0\rangle$.

Для вычисления оценки вектора–градиента функции $f(\cdot)$ в точке x можно воспользоваться следующим алгоритмом.

1. Обнулить состояния всех регистров $\mathcal{I}, W_1, W_2, \Delta$.
2. Подать на вход \mathcal{I} строку битов s_x , преобразовать регистр Δ :

$$\Delta := U_{R_{1,p+1,\dots,(r-1)p+1}} \Delta.$$

3. Вычислить значения функции $f(x)$ и $f(x + 2^{-j}\Delta)$

$$W_1 := U_f U_{+\mathcal{I}} W_1,$$

$$W_2 := U_f U_{+\mathcal{I}} U_{S_j} U_{+\Delta} W_2,$$

4. Вычислить разность $W_2 := U_{-W_1} W_2$.
5. Последовательно $i = 1, 2, \dots, r$ измерить компоненты результата

$$\hat{g}^{(i)}(x) = \langle \Delta, W_2 \rangle, \quad W_2 := U_{S_p} W_2.$$

Выражение для измерения результата вычисления эквивалентно формуле для оценки вектора–градиента функции $f(\cdot)$:

$$\nabla f(x) \approx \Delta \frac{f(x + \beta\Delta) - f(x)}{\beta}.$$

Можно убедиться, что точность оценивания представляет собой величину порядка малости $o(2^{-j})$. Если предварительно известно, что функция $f(\cdot)$ имеет непрерывные частные производные до порядка $\ell > 3$ включительно, то, по аналогии с изложением в пункте 5.1.4, можно на последнем, пятом шаге алгоритма производить измерение не с вектором Δ , играющим роль одновременного возмущающего воздействия, а с некоторым образом преобразованным $U_{\mathcal{K}}\Delta$. Порядок ошибки оценивания при этом, наверное, уменьшится.

Глава 7

Адаптивное управление при произвольных ограниченных помехах

В ряде приложений приходится решать задачу синтеза обратных связей для управления объектом (ОУ) в условиях, когда некоторые из его параметров (коэффициентов уравнения ОУ) неизвестны. Задача состоит в обеспечении задаваемой цели управления. При положительном решении задачи полученную управляющую систему называют *адаптивной* по отношению к этой цели. Адаптивная система характеризуется классом адаптации — множеством возможных значений неизвестного параметра и классом помех, при которых обеспечивается выполнение цели управления.

К настоящему времени в литературе по теории управления сложились два подхода к описанию свойств неопределенностей в уравнении объекта управления: стохастический и минимаксный. При стохастической постановке задачи помехам и неизвестным параметрам приписываются какие-либо статистические свойства и достижение цели управления понимается в статистическом смысле. Результаты, полученные в этой области, хорошо известны, носят достаточно законченный характер и, в целом, составляют стройную математическую теорию. Во многих работах при синтезе адаптивного управления используют идентификационный подход (см., например, [44, 58, 60, 62, 95, 96, 124]). Если при известных значениях параметров мы умеем решать задачу синтеза нужных управлений, то естественной является идея о совмещении алгоритма идентификации динамического объекта с известным законом формирования управлений при использовании в этом законе вместо вектора истинных параметров ОУ текущие оценки их значений, получаемые в процессе идентификации.

При минимаксной постановке задачи предполагается, что неизвестные

параметры уравнения, описывающего объект управления, принадлежат некоторому ограниченному множеству, а последовательность помех ограничена и в остальном произвольна. Цель управления понимается в достижении наилучшего качества управления при наихудшей для выбранного управления реализации последовательности помех. Будем считать, что целью выбора стратегии управления является минимизация абсолютной величины предельного отклонения выхода объекта от заданной траектории.

При априорно заданных параметрах ОУ задача оптимизации в минимаксной постановке оказалось существенно сложнее, чем в статистической. Интерес к решению задачи о построении оптимального линейного стабилизирующего регулятора для линейного дискретного неминимально-фазового (неустойчивого по управлению) объекта с ограниченными нерегулярными помехами появился после известной работы [67], в которой задача была решена для устойчивого по управлению объекта. Полученное решение имело простой и естественный вид. Позже в [68] задача была решена для систем с запаздыванием и в [4] для сильнонеустойчивого по управлению объекта (старший коэффициент при управлении в уравнении объекта по абсолютной величине превосходил сумму модулей остальных коэффициентов). Отличительной особенностью первых решений задачи было совпадение оптимального регулятора с соответствующим регулятором, получаемым при стохастической постановке задачи. В [9, 5] задача была решена в теоретическом плане для произвольного неминимально-фазового скалярного объекта управления. Было доказано существование оптимального регулятора и установлено, что в общем случае его структура отличается от соответствующего аналога в стохастической постановке. Для построения оптимального регулятора был предложен алгоритм, требующий, к сожалению, перебора значительного числа вариантов. В [17, 23] были получены аналитические формулы для вычисления оценки "снизу" минимального значения функционала качества и предложен алгоритм построения субоптимального регулятора. Другие способы решения задачи при более сложных функционалах качества можно найти, например, в [10, 12, 14, 117, 158].

В минимаксной постановке один из первых результатов о возможности синтеза адаптивного субоптимального управления для неминимально-фазового объекта был получен В.Ф.Соколовым [159], при этом не ставился вопрос о точной идентификации ОУ.

Сложность проблемы идентификации при решении задачи минимаксного адаптивного управления обусловлена недостаточной вариативностью входного сигнала. Для "обогащения" входного сигнала и успешной идентификации ОУ можно использовать в качестве управляющих воздействий специальные пробные сигналы в смеси с собственно управлением. При этом помеха может не обладать какими-либо полезными статис-

тическими свойствами и вообще не быть случайной. Если управление оптимизируется по отношению к некоторому критерию, то сочетание его с пробным сигналом может вызвать отклонение выходного процесса ОУ от оптимального. Однако, можно интенсивность пробного сигнала выбирать медленно убывающей до нуля так, что с течением времени выходной процесс будет неотличим от оптимального (если интенсивность пробного сигнала быстро уменьшается во времени, то процесс идентификации может быть не полным). В [11, 13, 18] рандомизированные алгоритмы типа стохастической аппроксимации использовались при решении задач адаптивного оптимального управления и идентификации параметров ОУ за счет включения в канал управления пробных сигналов. В работах [98, 101, 102] исследовались модернизированные алгоритмы, обеспечивающие оптимальную среднеквадратичную скорость сходимости к вектору истинных параметров. При этом, в [101, 102] показана асимптотическая нормальность последовательности оценок, получены формулы для предельной матрицы ковариаций ошибки идентификации. Вообще говоря, при включении в канал управления затухающего пробного возмущения необязательно введение новых параметров оценивания и использование рандомизированного алгоритма типа стохастической аппроксимации. Такой же подход предлагается и в [78, 109], где для построения последовательности состоятельных оценок вектора неизвестных параметров применяется специальный вариант метода наименьших квадратов.

Идентификационный подход при решении задачи о синтезе адаптивного управления не единственно возможный. Более того, известно, что проблема идентификации замкнутых систем управления достаточно сложна, поскольку процессы идентификации и управления в некотором смысле противоречивы: чем выше качество управления, тем, обычно, хуже идет процесс идентификации. Управления, формируемые обратными связями, могут не обладать достаточным разнообразием, что не обеспечивает эффективности процесса идентификации. Иногда лучше вместо неизвестных коэффициентов уравнения ОУ последовательно оценивать параметры, непосредственно задающие обратную связь (см. [29, 123]). С одной стороны, чаще всего именно вид обратной связи более тесно связан с целью управления, а с другой — не всегда легко по известным параметрам ОУ определить обратную связь, даже если это и обосновано теоретически. Далее при синтезе адаптивного управления будет использоваться рандомизированный идентифицирующий алгоритм. Но, при необходимости, можно предложить рандомизированный алгоритм оценивания непосредственных параметров обратной связи, также основанный на добавлении в канал управления затухающего пробного возмущения.

В этой главе иллюстрируются возможности метода идентификации с использованием пробных воздействий в задаче адаптивного минимакс-

ного управления дискретным объектом, который описывается линейным уравнением с аддитивной ограниченной помехой. Помеха может не быть случайной и не обладать полезными статистическими свойствами.

7.1 Стабилизирующий алгоритм "модифицированная полоска" при управлении дискретным линейным объектом

Предположим, как и ранее при решении задачи об идентификации параметров, что объект управления (ОУ) со скалярными входами и выходами описывается в дискретном времени уравнением (3.4) (SISO ARMA модель)

$$a(q^{-1}, \tau_*)y_t = b(q^{-1}, \tau_*)u_t + v_t, \quad t = k, k+1, \dots,$$

в котором y_t — выход ОУ; u_t — вход ОУ (управляющее воздействие); v_t — помеха (возмущающее воздействие): $|v_t| \leq C_v$; q^{-1} — операция сдвига на такт назад: $q^{-1}y_t = y_{t-1}$;

$$a(q^{-1}, \tau_*) = 1 + q^{-1}a_*^{(1)} + \dots + q^{-p}a_*^{(p)},$$

$$b(q^{-1}, \tau_*) = q^{-k}b_*^{(k)} + q^{-k-1}b_*^{(k+1)} + \dots + q^{-p}b_*^{(p)};$$

натуральное число p — порядок уравнения; k — запаздывание в управлении, $1 \leq k \leq p$. Обозначим

$$\tau_* = \begin{pmatrix} a_*^{(1)} \\ a_*^{(2)} \\ \vdots \\ a_*^{(p)} \\ b_*^{(k)} \\ b_*^{(k+1)} \\ \vdots \\ b_*^{(p)} \end{pmatrix}$$

— вектор коэффициентов уравнения.

В начале остановимся подробнее на задаче адаптивной стабилизации, когда целью управления является обеспечение неравенства

$$(7.1) \quad \sup_{t \in \mathbb{N}} |y_t| + |u_t| < \infty.$$

Предположим, что при каждом значении вектора $\tau \in \mathcal{T}$ существует обратная связь вида

$$(7.2) \quad c(q^{-1}, \tau)u_t = d(q^{-1}, \tau)y_t,$$

которая стабилизирует объект управления (3.4) при $\tau_* = \tau$. Будем считать, что коэффициенты многочленов

$$c(\lambda, \tau) = 1 + \lambda c^{(1)}(\tau) + \dots + \lambda^p c^{(p)}(\tau),$$

и

$$d(\lambda, \tau) = d^{(0)}(\tau) + \lambda d^{(1)}(\tau) + \dots + \lambda^p d^{(p)}(\tau)$$

известны и являются непрерывными функциями на множестве \mathcal{T} . Стабилизируемость обратной связи (регулятора) (7.2) равносильна тому, что все корни характеристического многочлена $a(\lambda, \tau)c(\lambda, \tau) - b(\lambda, \tau)d(\lambda, \tau)$ замкнутой системы (3.4), (7.2) (при $\tau_* = \tau$) по абсолютной величине больше единицы.

Для управления объектом (3.4) в условиях, когда вектор τ_* полностью или частично неизвестен, естественно использовать обратную связь с подстраиваемыми коэффициентами

$$(7.3) \quad c(q^{-1}, \tau_t)u_t = d(q^{-1}, \tau_t)y_t,$$

где τ_t — оценка вектора τ_* в момент времени t (предполагается, что $\tau_t \in \mathcal{T}$). Если алгоритм формирования оценок $\tau_t = \tau_t(y_t, y_{t-1}, \dots, u_{t-1}, u_{t-2}, \dots)$ обеспечивает состоятельность оценок:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_t = \tau_*,$$

то управление, задаваемое обратной связью (7.3), становится при $t \rightarrow \infty$ неотличимым от управления, формируемого обратной связью (7.2). Другими словами, если критерий качества управления не зависит от переходных процессов в замкнутой системе управления, то регулятор (7.3) обеспечивает то же качество управления, что и регулятор (7.2), синтезированный для конкретного значения вектора коэффициентов τ_* . Управление, формируемое регулятором (7.3) с настраиваемыми параметрами, называется в этом случае *адаптивным*.

Рассмотрим алгоритм *модифицированная полоска* ([58]), который обеспечивает равномерную ограниченность входных и выходных переменных. В силу условия ограниченности помех, система целевых неравенств

$$|y_t - \varphi_t^T \hat{\tau}| \leq 2C_v + \delta \|\varphi_t\|, \quad \varphi_t = \begin{pmatrix} -y_{t-1} \\ \vdots \\ -y_{t-p} \\ u_{t-k} \\ \vdots \\ u_{t-p} \end{pmatrix}, \quad t = 1, 2, \dots$$

разрешима относительно $\hat{\tau}$ при любом $\delta \geq 0$ (им удовлетворяет, например, вектор $\hat{\tau} = \tau_*$). Эти целевые неравенства порождают алгоритм

$$(7.4) \quad \hat{\tau}_t = \mathcal{P}_{\mathcal{T}} \left(\hat{\tau}_{t-1} + \frac{\eta_t \mathbf{1}_{\{|\eta_t| - 2C_v - \delta \|\varphi_t\| > 0\}}}{\|\varphi_t\|^2} \varphi_t \right),$$

$$\eta_t = y_t - \varphi_t^T \hat{\tau}_{t-1} = \varphi_t^* (\tau_* - \hat{\tau}_t) + v_t,$$

где $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ — проектор на множество \mathcal{T} , сопоставляющий произвольному вектору $\hat{\tau} \in \mathbb{R}^{2p-k+1}$ ближайший к нему вектор из \mathcal{T} , $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ — характеристическая функция, равная нулю или единице.

Алгоритм (7.4) при задании произвольного начального вектора $\hat{\tau}_0$ для любого $\delta > 0$ сходится за конечное число шагов (см. [58], теорема 2.1.8), т.е. существует такой конечный момент времени $t_* = t_*(\hat{\tau}_0, \{v_t\}, \delta)$, что $\hat{\tau}_t = \hat{\tau}_{t_*}$ при $t \geq t_*$. При этом совсем необязательно $\hat{\tau}_{t_*} = \tau_*$, но из вида (7.4) следует, что при $t \geq t_*$ выполнены неравенства

$$|v'_t| \leq 2C_v + \delta \|\varphi_t\|, \quad v'_t = \varphi_{t-1}^T (\hat{\tau}_{t-1} - \tau_*) + v_t.$$

Систему управления (3.4), (7.3) при $t \geq t_*$ можно переписать в виде

$$a(q^{-1}, \hat{\tau}_{t_*})y_t = b(q^{-1}, \hat{\tau}_{t_*})u_t + v'_t, \quad c(q^{-1}, \hat{\tau}_{t_*})u_t = d(q^{-1}, \hat{\tau}_{t_*})y_t.$$

В силу выполнения всех целевых неравенств при больших t , система управления диссипативна при достаточно малом $\delta > 0$, т.е. выполняется цель управления (7.1). Это легко устанавливается прямым методом Ляпунова.

7.2 Алгоритм идентификации

Пусть задан некоторый алгоритм (назовем его *идентифицирующим*) формирования оценок τ_t неизвестного вектора параметров τ_* . При установлении состоятельности оценок, доставляемых идентифицирующим алгоритмом, наибольшую трудность представляет обеспечение ограниченности выходных и управляющих переменных. Например, для использования алгоритма (3.8) необходимо обеспечить выполнение условия **(RI.1)**. На начальных этапах действия алгоритма оценки могут сильно отличаться от оцениваемого параметра, а потому формируемые с их помощью управляющие воздействия могут "раскачивать" систему управления. Это, в свою очередь, затрудняет установление состоятельности оценок.

Опишем возможный вариант того, как в произвольный идентифицирующий алгоритм имплантировать *стабилизирующий* алгоритм "модифицированная полоска" и тем самым обеспечить равномерную ограниченность входных и выходных переменных.

Если идентифицирующий алгоритм дает последовательность оценок τ_t , а алгоритм "модифицированная полоска" — $\hat{\tau}_t$, то при построении очередного управления на базе некоторого идентификационного подхода в момент времени t можно использовать оценку

$$(7.5) \quad \tilde{\tau}_t = \begin{cases} \tau_t, & \text{если } |y_t| + |u_{t-1}| < \bar{R} \text{ и } \tau_t \in \mathcal{T}, \\ \hat{\tau}_t & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Если число $\bar{R} > 0$ выбрано достаточно большим, то такой способ управления обеспечивает цель управления (7.1) — ограниченность выходных и управляющих переменных ОУ (3.4) — для произвольного идентифицирующего алгоритма. При этом, если идентифицирующий алгоритм обеспечивает состоятельность оценок τ_t , то выполнение неравенства $|y_t| + |u_{t-1}| > \bar{R}$ может происходить не более, чем конечное число раз. Когда оценки τ_t окажутся достаточно близкими к оцениваемому параметру τ , регулятор (7.3) с подстраиваемыми коэффициентами при $\tilde{\tau}_t = \tau_t$ будет стабилизировать объект управления (3.4). Вопросы, связанные с выбором величины R и параметра δ в алгоритме "модифицированная полоска" могут быть уточнены. Отметим, что во многих случаях идентифицирующий алгоритм справляется со стабилизацией системы управления и без использования стабилизирующего алгоритма.

Пусть $s > 2p - k$ — некоторое натуральное число, $\{\Delta_n\}$ — пробное возмущение, скалярный временной ряд, составленный из случайных величин, независимых в совокупности и обладающих свойствами

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}\{\Delta_n\} = \mathbb{E}\{\Delta_n^3\} = 0, & \quad |\Delta_n| \leq \frac{C_\Delta}{\sqrt{1 + \ln\{n\}}}, \\ \mathbb{E}\{\Delta_n^2\} = \frac{\sigma_\Delta^2}{1 + \ln\{n\}}, & \quad \mathbb{E}\{\Delta_n^4\} \leq \frac{M_4}{(1 + \ln\{n\})^2}, \end{aligned}$$

где σ_Δ^2 , M_4 , C_Δ — некоторые положительные постоянные.

Условимся управление $\{u_t\}$ формировать по правилу (3.5):

$$u_{sn+i} = \begin{cases} \bar{u}_{sn} + R_n \Delta_n, & \text{при } i = 0, \\ \bar{u}_{sn+i}, & \text{при } i = 1, 2, \dots, s-1, \end{cases}$$

в котором собственно управление $\{\bar{u}_t\}$ определяется с помощью регулятора типа (7.3):

$$(7.7) \quad c(q^{-1}, \tilde{\tau}_t) \bar{u}_t = d(q^{-1}, \tilde{\tau}_t) y_t$$

с настраиваемыми параметрами $\tilde{\tau}_t$ из (7.5) и

$$R_n = C_R \left(1 + \sum_{j=1}^p |y_{sn+k-j}| + \sum_{j=1}^{p-k} |\bar{u}_{sn-j}| \right)$$

с некоторой постоянной $C_R > 0$.

Если помеха $\{v_t\}$ и (или) начальные данные в уравнении (3.4) — случайные, то будем предполагать, что пробное возмущение $\{\Delta_n\}$, вводимое специально в канал управления (см. (3.5)), от них не зависит. Начальными данными в уравнении (3.4) являются величины y_t , $t < k$, и u_t , $t < 0$. Начальные данные в регуляторе (7.7) принимаются нулевыми.

Функции $\mathcal{U}_t(\cdot)$ обратной связи, задаваемые формулой (7.7), удовлетворяют условию **(RI.1)**. Условие **(RI.2)** при сделанных предположениях также выполняется. Если выполнены условия **(RI.3)**–**(RI.4)**, Γ — некоторая положительно–определенная матрица и $2\lambda_{\min}(\Gamma)\sigma_\Delta^2 \geq 1$, тогда в формуле (7.5) надо использовать оценки

$$\tau_t = \bar{\tau}(\hat{\theta}_{n-1}), \quad s(n-1) < t \leq sn, \quad s = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\bar{\tau}(\cdot)$ — функция из (3.7) — и оценки $\{\hat{\theta}_n\}$ формируются рандомизированным алгоритмом (3.8):

$$(7.8) \quad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Gamma \frac{1 + \ln\{n\}}{n} \Delta_n \left(\Delta_n \hat{\theta}_{n-1} - \frac{Y_n - \psi_n(\hat{\theta}_{n-1})}{R_n} \right).$$

Пробный сигнал $R_n \Delta_n$ нивелируется с течением времени, так как за счет использования стабилизирующего алгоритма *Модифицированная полоска* величины R_n равномерно ограничены. Это свойство алгоритма идентификации позволяет синтезировать с его помощью адаптивные системы, выход которых с течением времени становится неотличимым от выхода оптимальной системы, синтезированной при известном параметре ОУ.

7.3 Адаптивная ℓ_1 оптимизация

Пусть при каждом значении вектора $\tau \in \mathcal{T}$ существует обратная связь вида (7.2):

$$c(q^{-1}, \tau)u_t = d(q^{-1}, \tau)y_t,$$

не только стабилизирующая ОУ (3.4) при $\tau_* = \tau$, но и обеспечивающая приемлемое качество управления: например, в классе линейных стабилизирующих регуляторов оптимальность управления по отношению к минимизации предельного отклонения выходной переменной от заранее заданной ограниченной последовательности желаемых выходов $\{\bar{y}_t\}$, т.е.

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y_t - \bar{y}_t| \rightarrow \min,$$

(см. [5, 17, 23, 60, 67, 68]). Если система управления стабилизирована, то величины R_n равномерно ограничены и случайное дополнительное слагаемое в рассмотренной выше стратегии управления (3.5), (7.7) стремится

к нулю при $n \rightarrow \infty$. Этот факт дает возможность синтеза оптимальной ограниченной стратегии управления. Более точно, пусть $\Sigma(\tau_*)$ — набор всевозможных линейных стабилизирующих регуляторов для ОУ (3.4), обеспечивающих условие (7.1) ограниченности выходных и управляющих переменных

$$\sup_{t=1,2,\dots} |y_t| + |u_t| < \infty.$$

Рассмотрим цель управления, заключающуюся в конструировании такой обратной связи, чтобы управляющие $\{u_t\}$ и выходные $\{y_t\}$ переменные были ограниченными и выход ОУ удовлетворял бы неравенству

$$(7.9) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y_t - \bar{y}_t| \leq \mathcal{I}(\tau_*) + \varepsilon,$$

где

$$(7.10) \quad \mathcal{I}(\tau_*) = \inf_{(c(\cdot, \cdot), d(\cdot, \cdot)) \in \Sigma(\tau_*)} \sup_{\substack{|v_t| \leq C_v \\ t=k, k+1, \dots}} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y_t - \bar{y}_t|$$

и $\varepsilon \geq 0$ — некоторый уровень субоптимальности. Эта задача о построении субоптимального управления является адаптивной, так как при формировании u_t не разрешается использовать неизвестные значения коэффициентов τ_* , а можно только опираться на наблюдаемые к моменту времени t величины и оценки вектора τ_* , получаемые на основании наблюдений. Другими словами, управляющие воздействия u_t могут зависеть от неизвестных компонент вектора τ_* только косвенным образом через наблюдения за поведением системы.

Следуя [17, 23], опишем непростой способ построения коэффициентов субоптимального линейного стабилизирующего регулятора для ОУ (3.4) при известном наборе его коэффициентов. К настоящему времени более легких способов для решения задачи в общем случае неизвестно. Часто пользуются способом с конечным итеративным перебором (см. [5]), но и он достаточно сложен.

Будем считать, что многочлены $a(\lambda, \tau)$ и $b(\lambda, \tau)$, составленные из коэффициентов ОУ (3.4) при $\tau_* = \tau$, удовлетворяют условию:

(АС.1) многочлен $b(\lambda, \tau)$ не имеет корней, равных по абсолютной величине единице, и его корни, меньшие единицы по абсолютной величине, не являются одновременно корнями многочлена $a(\lambda, \tau)$.

Пусть для некоторого набора коэффициентов объекта управления (3.4) натуральное число $k > 0$ задает запаздывание в управлении и многочлен $b(\lambda, \tau)$ имеет m ненулевых корней, меньших единицы по абсолютной величине: $\lambda_{(1)}, \dots, \lambda_{(m)}$. С целью упрощения будем считать, что все эти корни различны. Для формулировки алгоритма построения субоптимального линейного стабилизирующего регулятора необходимо произвести несколько вспомогательных построений. Пусть многочлен $\bar{c}(\lambda, \tau)$

степени, меньшей k , определяется из уравнения

$$a(\lambda, \tau)\bar{c}(\lambda, \tau) - \lambda^k \bar{d}(\lambda, \tau) = 1,$$

которое однозначно разрешимо (см. [60, 68]), и

$$\bar{l} = \begin{pmatrix} l^{(1)} \\ \vdots \\ l^{(m)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^m = \{\bar{l} \in \mathbb{R}^m : 0 \leq l^{(1)}, l^{(i-1)} < l^{(i)}, i = 2, \dots, m\}$$

— некоторый вектор из \mathbb{R}_+^m . Определим на \mathbb{R}_+^m числовую функцию

$$D(\bar{l}, \tau) = \det \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^{l^{(1)}} & \lambda_{(1)}^{l^{(2)}} & \dots & \lambda_{(1)}^{l^{(m)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{(m)}^{l^{(1)}} & \lambda_{(m)}^{l^{(2)}} & \dots & \lambda_{(m)}^{l^{(m)}} \end{pmatrix}$$

и набор функций $\tilde{c}^{(i)}(\bar{l}, \tau) =$

$$= \frac{1}{D(\bar{l}, \tau)} \det \begin{pmatrix} \dots & \lambda_{(1)}^{l^{(i-1)}} & \lambda_{(1)}^{-k} \left(\frac{1}{a(\lambda_{(1)}, \tau)} - \bar{c}(\lambda_{(1)}, \tau) \right) & \lambda_{(1)}^{l^{(i+1)}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \lambda_{(m)}^{l^{(i-1)}} & \lambda_{(m)}^{-k} \left(\frac{1}{a(\lambda_{(m)}, \tau)} - \bar{c}(\lambda_{(m)}, \tau) \right) & \lambda_{(m)}^{l^{(i+1)}} & \dots \end{pmatrix},$$

$i = 1, \dots, m$. Здесь и далее: обозначение $\det A$ соответствует операции вычисления определителя матрицы A . Отметим, что в матрице из определения i -ой функции $\tilde{c}^{(i)}(\bar{l}, \tau)$ все столбцы, кроме i -го, совпадают с соответствующими столбцами матрицы из определения функции $D(\bar{l}, \tau)$.

Л е м м а 7.1 Пусть для некоторого набора τ коэффициентов уравнения ОУ (3.4) выполнено условие (АС.1),

тогда оценка "снизу" для минимально возможного значения функционала (7.10) совпадает с минимумом функционала

$$(7.11) \quad \mathcal{I}(\bar{l}, \tau) = C_v \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} |\bar{c}^{(i)}(\tau)| + \sum_{i=1}^m |\tilde{c}^{(i)}(\bar{l}, \tau)| \right)$$

по $\bar{l} \in \mathbb{R}_+^m$.

Доказательство леммы 7.1 приведено в последнем разделе этой главы и опирается на результаты [5, 17, 23]. Функционал (7.11) достигает своего минимального значения в некоторой внутренней точке $\bar{l}_{opt} \in \mathbb{R}_+^m$ или на границе: $l^{(1)} = 0$, так как его значение неограниченно возрастает при $\bar{l} \rightarrow \infty$ и при $l^{(i-1)} \rightarrow l^{(i)}$, $i = 2, \dots, m$. Несложно сформулировать

необходимые условия, которым должна удовлетворять точка \bar{l}_{opt} , минимизирующая в \mathbb{R}_+^m функционал (7.11). Обозначим

$$\mu^{(j)}(\bar{l}, \tau) = \det \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^{l(1)} & \lambda_{(1)}^{l(2)} & \dots & \lambda_{(1)}^{l(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{(j-1)}^{l(1)} & \lambda_{(j-1)}^{l(2)} & \dots & \lambda_{(j-1)}^{l(m)} \\ \text{sign}(\tilde{c}^{(1)}(\bar{l}, \tau)) & \text{sign}(\tilde{c}^{(2)}(\bar{l}, \tau)) & \dots & \text{sign}(\tilde{c}^{(m)}(\bar{l}, \tau)) \\ \lambda_{(j+1)}^{l(1)} & \lambda_{(j+1)}^{l(2)} & \dots & \lambda_{(j+1)}^{l(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{(m)}^{l(1)} & \lambda_{(m)}^{l(2)} & \dots & \lambda_{(m)}^{l(m)} \end{pmatrix},$$

$$j = 1, \dots, m, \quad \text{sign}(c) = \begin{cases} c / |c|, & \text{если } c \neq 0, \\ 0, & \text{если } c = 0. \end{cases}$$

Л е м м а 7.2 При выполнении условий леммы 7.1 справедливо следующее необходимое условие минимума функционала (7.11): точка $\bar{l}_{opt} \in \mathbb{R}_+^m$ должна удовлетворять системе m трансцендентных уравнений

$$(7.12) \quad \begin{cases} l_{opt}^{(1)} \tilde{c}^{(1)}(\bar{l}_{opt}, \tau) \sum_{j=1}^m \mu^{(j)}(\bar{l}_{opt}, \tau) \ln\{\lambda_{(j)}\} \lambda_{(j)}^{l_{opt}^{(1)}} = 0, \\ \tilde{c}^{(2)}(\bar{l}_{opt}, \tau) \sum_{j=1}^m \mu^{(j)}(\bar{l}_{opt}, \tau) \ln\{\lambda_{(j)}\} \lambda_{(j)}^{l_{opt}^{(2)}} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{c}^{(m)}(\bar{l}_{opt}, \tau) \sum_{j=1}^m \mu^{(j)}(\bar{l}_{opt}, \tau) \ln\{\lambda_{(j)}\} \lambda_{(j)}^{l_{opt}^{(m)}} = 0. \end{cases}$$

Доказательство леммы 7.2 приведено в последнем разделе этой главы вместе с доказательством леммы 7.1. Заметим, что функции $\mu^{(j)}(\bar{l}, \tau)$, $j = 1, \dots, m$ можно представить в виде:

$$\mu^{(j)}(\bar{l}, \tau) = \sum_{J_j} s_{J_j} \lambda_{(1)}^{l^{(i_1)}} \dots \lambda_{(j-1)}^{l^{(i_{j-1})}} \lambda_{(j+1)}^{l^{(i_{j+1})}} \dots \lambda_{(m)}^{l^{(i_m)}}, \quad s_{J_j} = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases},$$

где J_j — мультииндекс: $J_j = (i_1, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_m)$, $i_q \in \{1, \dots, m\}$, $i_{q_1} \neq i_{q_2}$ при $q_1 \neq q_2$. При $m = 1$ система уравнений (7.12) имеет тривиальный вид

$$l_{opt}^{(1)} = 0$$

и, соответственно, единственное решение.

Опишем способ построения субоптимального регулятора при известных коэффициентах уравнения объекта управления (3.4). Пусть $\bar{l}_{opt} \in \mathbb{R}_+^m$ — решение системы уравнений (7.12), соответствующее минимальному значению функционала (7.11), и $\bar{l}_\star = \bar{l}_\star(\tau)$ — ближайший к нему вектор из \mathbb{R}_+^m с целочисленными координатами

$$\bar{l}_\star = \begin{pmatrix} l_\star^{(1)} \\ \vdots \\ l_\star^{(m)} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_+^m = \{\bar{l}_\star \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N} : 0 \leq l_\star^{(1)}, 0 < l_\star^{(i-1)} < l_\star^{(i)}, i > 1\}.$$

Л е м м а 7.3 При выполнении условий леммы 7.1 и введенных выше обозначениях регулятор

$$(7.13) \quad c(q^{-1}, \tau)u_t = d(q^{-1}, \tau)(y_t - \bar{y}_t)$$

с многочленами $c(\lambda, \tau)$ и $d(\lambda, \tau)$, определяемыми по формулам

$$c(\lambda, \tau) = \left(\lambda^{-k} \bar{c}(\lambda, \tau) + \tilde{c}^{(1)}(\bar{l}_*, \tau) \lambda^{l_*^{(1)}} + \dots + \tilde{c}^{(m)}(\bar{l}_*, \tau) \lambda^{l_*^{(m)}} \right) \frac{b(\lambda, \tau)}{\prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_{(i)})},$$

$$d(\lambda, \tau) = \frac{a(\lambda, \tau) (\lambda^{-k} \bar{c}(\lambda, \tau) + \tilde{c}^{(1)}(\bar{l}_*, \tau) \lambda^{l_*^{(1)}} + \dots + \tilde{c}^{(m)}(\bar{l}_*, \tau) \lambda^{l_*^{(m)}}) - \lambda^{-k}}{\prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_{(i)})},$$

является субоптимальным стабилизирующим с уровнем субоптимальности

$$\varepsilon = \mathcal{I}(\bar{l}_*, \tau) - \mathcal{I}(\bar{l}_{opt}, \tau).$$

Здесь $\bar{l}_{opt} \in \mathbb{R}_+^m$ — точка минимума функционала (7.11).

Доказательство леммы 7.3 также приведено в конце главы вместе с доказательством лемм 7.1–7.2. При выполнении условий леммы 7.1 можно предложить такой способ выбора целочисленного вектора $\bar{l}_*(\tau)$, чтобы при изменяющихся τ коэффициенты многочленов $c(\lambda, \tau)$ и $d(\lambda, \tau)$ субоптимального регулятора (7.13) являлись непрерывными функциями на множестве \mathcal{T} .

Применим полученные результаты для адаптивного субоптимального управления объектом (3.4) с произвольными ограниченными помехами v_t : $|v_t| \leq C_v$, $t \geq k$.

Т е о р е м а 7.1 Пусть выполнены условия:

(7.6) — для пробного возмущения, (RI.2) — для начальных данных,

(RI.3) — для множества \mathcal{T} ,

(RI.4) — для вектора неизвестных параметров τ_* ,

(AC.1) — для любого $\tau \in \mathcal{T}$, Γ — некоторая положительно определенная матрица и $2\lambda_{\min}(\Gamma)\sigma_\Delta^2 \geq 1$.

Если оценки $\tilde{\tau}_t$ неизвестного вектора параметров ОУ (3.4) искать по алгоритму (7.5) с (7.4) и (3.9), (7.8), основанному на использовании затухающего пробного возбуждения $\{\Delta_n\}$ при формировании последовательности управлений $\{u_t\}$, определяемых формулой (3.5), и регулятором с подстраиваемыми коэффициентами

$$c(q^{-1}, \tilde{\tau}_t)\bar{u}_t = d(q^{-1}, \tilde{\tau}_t)(y_t - \bar{y}_t),$$

многочлены $c(\lambda, \tilde{\tau}_t)$, $d(\lambda, \tilde{\tau}_t)$ которого строятся по формулам леммы 7.3,

тогда, во-первых, при произвольном начальном условии $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}$ последовательность $\{\tilde{\tau}_t\}$ сходится к τ_* в среднеквадратичном смысле

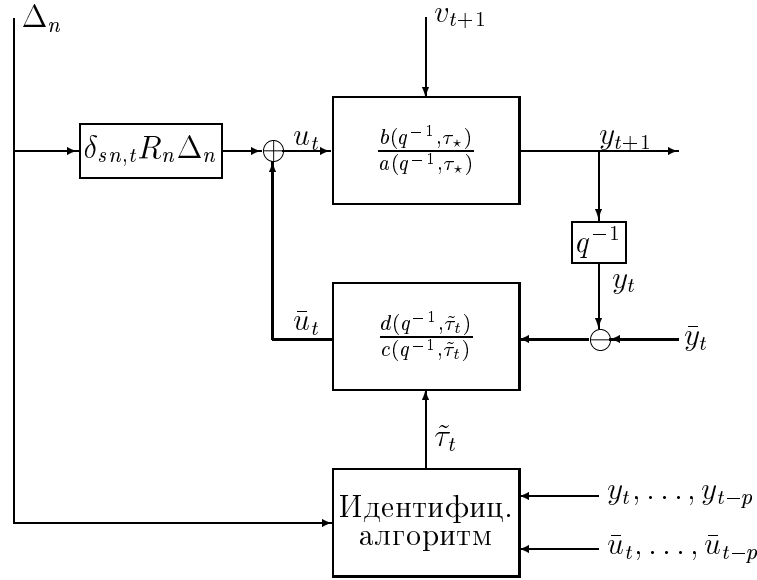


Рис. 11. Блок-схема адаптивной системы управления при $k = 1$.

и с вероятностью единица, и, во-вторых, цель управления (7.1), (7.9) обеспечивается с уровнем субоптимальности

$$\varepsilon = \mathcal{I}(\bar{l}_*(\tau_*), \tau_*) - \mathcal{I}(\bar{l}_{opt}(\tau_*), \tau_*) .$$

Доказательство состоятельности оценок $\{\tilde{\tau}_t\}$ теоремы 7.1 непосредственно следует из теоремы 3.2. При достаточно больших n величина пробного возмущения мала и коэффициенты регулятора из условия теоремы 7.1 незначительно отличаются от коэффициентов предельного регулятора. Кроме того, предельный регулятор, в силу лемм 7.1–7.3, — стабилизирующий и имеет соответствующий уровень субоптимальности. Формальное доказательство выполнения цели управления (7.1), (7.9) носит достаточно стандартный технический характер и останавливаться на нем не будем.

Блок-схема рассмотренной в этом пункте адаптивной системы управления приведена на рис. 11.

7.4 Экспериментальные результаты

7.4.1 Адаптивное оптимальное управление неминимально-фазовым объектом второго порядка

Проиллюстрируем способ синтеза адаптивного оптимального управления на примере линейного дискретного объекта (3.4), динамика которого

описывается разностным уравнением второго порядка

$$y_t + a_\star^{(1)}y_{t-1} + y_{t-2} = b_\star^{(1)}u_{t-1} + b_\star^{(2)}u_{t-2} + v_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

с неизвестными тремя коэффициентами: $a_\star^{(1)} \in [2, 10]$, $b_\star^{(1)} \in [1, 10]$, $b_\star^{(2)} \in [-10, 0]$, и аддитивной ограниченной помехой: $|v_t| \leq 2$, $t = 1, 2, \dots$

Обозначим через

$$\tau_\star = \begin{pmatrix} a_\star^{(1)} \\ 1 \\ b_\star^{(1)} \\ b_\star^{(2)} \end{pmatrix} \in \mathcal{T} = [2, 10] \times \{1\} \times [1, 10] \times [-10, 0] \subset \mathbb{R}^4$$

— вектор коэффициентов уравнения объекта. Трехмерный вектор "новых" параметров θ^\star , $r = 3$, определим так, как предлагалось выше:

$$\theta^\star = \theta(\tau_\star) = \begin{pmatrix} b_\star^{(1)} \\ b_\star^{(2)} - a_\star^{(1)}b_\star^{(1)} \\ ((a_\star^{(1)})^2 - 1)b_\star^{(1)} - a_\star^{(1)}b_\star^{(2)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

При заданных ограничениях на неизвестные параметры ОУ отображение $\theta(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow \Theta = \theta(\mathcal{T}) \subset \mathbb{R}^3$ обратимо. Вектор коэффициентов ОУ τ_\star связан с θ^\star следующим обратным соотношением:

$$\tau_\star = \bar{\tau}(\theta^\star) = \begin{pmatrix} -\frac{\theta_\star^{(1)} + \theta_\star^{(3)}}{\theta_\star^{(2)}} \\ 1 \\ \theta_\star^{(1)}, \\ \theta_\star^{(2)} - \frac{\theta_\star^{(1)}(\theta_\star^{(1)} + \theta_\star^{(3)})}{\theta_\star^{(2)}} \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что цель управления состоит в стабилизации ОУ и минимизации предельного отклонения от нуля абсолютной величины выхода ОУ при "наихудшей" последовательности помех

$$\sup_{\substack{|v_t| \leq 2 \\ t=k, k+1, \dots}} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y_t| \rightarrow \min.$$

Заметим, что при $|b_\star^{(1)}/b_\star^{(2)}| \leq 1$ ОУ является неустойчивым по управлению (неминимально-фазовым) и задача о его стабилизации долгое время считалась нетривиальной.

При полностью известных коэффициентах уравнения ОУ для построения оптимального стабилизирующего регулятора в зависимости от значений $b^{(1)}$ и $b^{(2)}$ надо рассматривать два различных случая.

1. Если $b^{(2)} = 0$ или $|b^{(1)}/b^{(2)}| > 1$, то оптимальный регулятор имеет вид

$$u_t + \frac{b^{(2)}}{b^{(1)}}u_{t-1} = \frac{a^{(1)}}{b^{(1)}}y_t + \frac{1}{b^{(1)}}y_{t-1}.$$

2. Если $|b^{(1)}/b^{(2)}| \leq 1$, то $m = 1$, $k = 1$ и, используя обозначения леммы 7.1,

$$D(x, \tau) = \left(\frac{b^{(1)}}{b^{(2)}}\right)^x, \quad \tilde{c}^{(1)}(x, \tau) = -\frac{b^{(2)}}{b^{(1)}} \left(\frac{1}{1 - a^{(1)}\frac{b^{(1)}}{b^{(2)}} + \left(\frac{b^{(1)}}{b^{(2)}}\right)^2} - 1 \right).$$

Система уравнений (7.12) имеет единственное решение $x_{opt} = 0$ и оно целочисленное. Следовательно, многочлен $c(\lambda, \tau)$ оптимального регулятора имеет вид:

$$c(\lambda, \tau) = 1 + c^{(1)}(\tau)\lambda, \quad c^{(1)}(\tau) = \frac{b^{(2)}b^{(1)} - a^{(1)}(b^{(2)})^2}{(b^{(1)})^2 + (b^{(2)})^2 - a^{(1)}b^{(1)}b^{(2)}}$$

и при

$$d^{(0)}(\tau) = \frac{b^{(2)} + a^{(1)}b^{(1)} - (a^{(1)})^2b^{(2)}}{(b^{(1)})^2 + (b^{(2)})^2 - a^{(1)}b^{(1)}b^{(2)}},$$

$$d^{(1)}(\tau) = \frac{b^{(1)} - a^{(1)}b^{(2)}}{(b^{(1)})^2 + (b^{(2)})^2 - a^{(1)}b^{(1)}b^{(2)}}$$

регулятор

$$u_t + c^{(1)}(\tau)u_{t-1} = d^{(0)}(\tau)y_t + d^{(1)}(\tau)y_{t-1}$$

является оптимальным.

Приведенные выше формулы для вычисления коэффициентов оптимальных регуляторов непосредственно получаются из утверждений леммы 7.3.

Пусть $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — пробное возмущение, скалярный временной ряд, составленный из случайных величин, независимых в совокупности, при каждом n равных с одинаковой вероятностью

$$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \ln\{n\}}}.$$

Условимся управление $\{u_t\}$ формировать по правилу:

$$u_t = \bar{u}_t, \quad t = 1, 2, \dots, 99, \quad u_{70+30n+i} = \bar{u}_{70+30n+i}, \quad i = 1, 2, \dots, 30,$$

$$u_{70+30n} = \bar{u}_{70+30n} + R_n \Delta_n,$$

$$R_n = 20(1 + |y_{30n}| + |y_{30n-1}| + |\bar{u}_{30n-1}|),$$

$n = 1, 2, \dots$, в котором пробный сигнал $R_n \Delta_n$ включается в канал управления только на каждом тридцатом такте, начиная с сотого, а собственно управление $\{\bar{u}_t\}$ определяется с помощью регулятора с подстраиваемыми коэффициентами

$$\bar{u}_t + c^{(1)}(\tilde{\tau}_t)\bar{u}_{t-1} = d^{(0)}(\tilde{\tau}_t)y_t + d^{(1)}(\tilde{\tau}_t)y_{t-1},$$

задаваемыми по приведенным выше формулам для оптимальных регуляторов. Будем предполагать, что начальные данные в уравнении ОУ и уравнении регулятора нулевые. В качестве очередной оценки параметров ОУ $\tilde{\tau}_t$ выбирается либо текущая оценка алгоритма "модифицированная полоска", либо — рандомизированного:

$$\tilde{\tau}_t = \begin{cases} \hat{\tau}_t, & \text{если } t < 1500, \text{ или } |y_t| + |u_{t-1}| > 1000, \text{ или } \tau_t \notin \mathcal{T}, \\ \tau_t & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Для обоих алгоритмов начальные данные одинаковые

$$a_0^{(1)} = \hat{a}_0^{(1)} = 4, b_0^{(1)} = \hat{b}_0^{(1)} = 4, b_0^{(2)} = \hat{b}_0^{(2)} = -4,$$

$$\hat{\theta}_0^{(1)} = 4, \hat{\theta}_0^{(2)} = -20, \hat{\theta}_0^{(3)} = 76.$$

Обозначим через

$$\eta_t = y_t + \hat{a}_{t-1}^{(1)} y_{t-1} + y_{t-2} - \hat{b}_{t-1}^{(1)} u_{t-1} - \hat{b}_{t-1}^{(2)} u_{t-2},$$

$$\mu_t = \sqrt{y_{t-1}^2 + u_{t-1}^2 + u_{t-2}^2}.$$

Оценки алгоритма "модифицированная полоска" не изменяются: $\hat{\tau}_t = \hat{\tau}_{t-1}$, если $|\eta_t| \leq 4 + 0,1\mu_t$, и вычисляются по формуле

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_t^{(1)} \\ 1 \\ \hat{b}_t^{(1)} \\ \hat{b}_t^{(2)} \end{pmatrix} = \mathcal{P}_{\mathcal{T}} \left(\begin{pmatrix} \hat{a}_{t-1}^{(1)} \\ 1 \\ \hat{b}_{t-1}^{(1)} \\ \hat{b}_{t-1}^{(2)} \end{pmatrix} + \frac{\eta_t}{\mu_t^2} \begin{pmatrix} -y_{t-1} \\ 0 \\ u_{t-1} \\ u_{t-2} \end{pmatrix} \right),$$

в противном случае. Здесь оператор $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ — проектор на множество \mathcal{T} — имеет простой вид, так как \mathcal{T} — заданный параллелепипед в \mathbb{R}^4 . Оценки рандомизированного алгоритма вычисляются так

$$\tau_t = \tau_0, t = 1, 2, \dots, 102,$$

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \left(\hat{\theta}_{n-1} - \Delta_n \frac{1 + \ln\{n\}}{R_n} \left(\begin{pmatrix} y_{3n+1} \\ y_{3n+2} \\ y_{3n+3} \end{pmatrix} - \psi_n \right) \right),$$

$$\tau_{73+30n+i} = \bar{\tau}(\hat{\theta}_n), i = 0, 1, \dots, 29, n = 1, 2, \dots,$$

где

$$\psi_n = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_{n-1}^{(1)} \bar{u}_{3n} \\ \hat{\theta}_{n-1}^{(1)} \bar{u}_{3n+1} + \hat{\theta}_{n-1}^{(2)} \bar{u}_{3n} \\ \hat{\theta}_{n-1}^{(1)} \bar{u}_{3n+2} + \hat{\theta}_{n-1}^{(2)} \bar{u}_{3n+1} + \hat{\theta}_{n-1}^{(3)} \bar{u}_{3n} \end{pmatrix} + Q_n \begin{pmatrix} y_{3n} \\ y_{3n-1} \\ \bar{u}_{3n-1} \end{pmatrix},$$

$$Q_n = \begin{pmatrix} -a_{3n}^{(1)} & -1 & b_{3n}^{(2)} \\ (a_{3n}^{(1)})^2 - 1 & a_{3n}^{(1)} & -a_{3n}^{(1)} b_{3n}^{(2)} \\ a_{3n}^{(1)}((a_{3n}^{(1)})^2 - 2) & (a_{3n}^{(1)})^2 - 1 & -((a_{3n}^{(1)})^2 - 1)b_{3n}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Имитационное моделирование на ЭВМ производилось с фактическим набором неизвестных коэффициентов

$$a_{\star}^{(1)} = 3, 7; b_{\star}^{(1)} = 6, 4; b_{\star}^{(2)} = -8, 0 \quad ,$$

который соответствует вектору

$$\theta^{\star} = \theta(\tau_{\star}) = \begin{pmatrix} 6, 40 \\ -31, 68 \\ 110, 82 \end{pmatrix}.$$

Стоит заметить, что без алгоритма подстройки параметров замкнутая система с регулятором, определяемым многочленами $c(\lambda, \tau_0)$ и $d(\lambda, \tau_0)$, неустойчивая (её характеристический многочлен равен $\lambda^3 + 1$). Пример поведения выхода ОУ при управлении без подстройки параметров приведен в таблице 3.

Таблица 3.

t	y_t
1	-2,000
2	-4,733
3	-4,913
4	4,329
5	27,467
6	51,560
...	...
17	-49549,445
...	∞

На рисунке 12 показан типичный характер изменения оценок $\hat{\tau}_t$ и τ_t , доставляемых алгоритмами "модифицированная полоска" и рандомизированным. Масштаб времени на графиках для первых 150 моментов не соблюдается. Пробное возмущение в канал управления первый раз поступает при $t = 100$. До этого момента времени алгоритм полоска, сделав 16 изменений, начиная с

$$\hat{\tau}_{28} = \begin{pmatrix} 3, 320 \\ 1 \\ 5, 579 \\ -6, 840 \end{pmatrix},$$

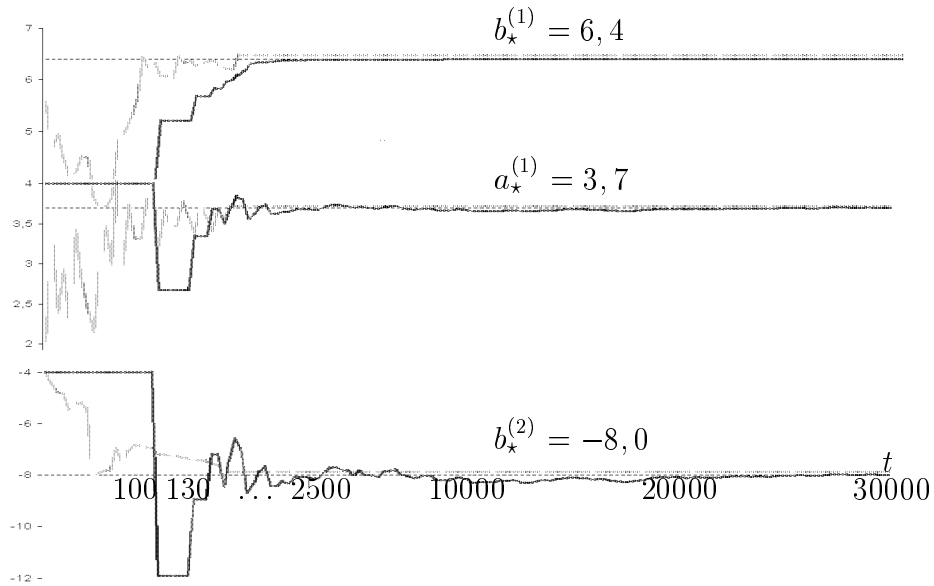


Рис. 12. Траектории оценок неизвестных коэффициентов $\hat{\tau}_t$ и τ_t .

прекратил изменения параметров и обеспечивал стабилизацию замкнутой системы. Включение пробного возмущения, добавляемого в канал управления на каждом тридцатом такте, позволило не только воспользоваться рандомизированным алгоритмом оценивания параметров, но и обеспечило более высокое качество оценивания алгоритмом "модифицированная полоска", который за счет "раскачивания" системы, сделав на интервале $t \in [109, 221]$ еще 11 корректировок, достигает достаточно высокого качества оценивания. Оценки рандомизированного алгоритма после восьмидесяти итераций ($t \approx 2500$) попадают в близкую окрестность вектора θ^* и далее не покидают её.

7.5 Доказательства лемм 7.1–7.3

Введем передаточные функции системы (3.4),(7.13) от помехи v_n к выходу y_n и к управлению u_n :

$$H_y(\lambda) = \frac{c(\lambda)}{a(\lambda, \tau)c(\lambda) - b(\lambda, \tau)d(\lambda)}, \quad H_u(\lambda) = \frac{d(\lambda)}{a(\lambda, \tau)c(\lambda) - b(\lambda, \tau)d(\lambda)}.$$

Нетрудно доказать (см.[43]), что устойчивость системы (3.4),(7.13) равносильна отсутствию общих неустойчивых множителей у многочленов $c(\lambda)$, $d(\lambda)$ и отсутствию полюсов у функций $H_y(\lambda)$ и $H_u(\lambda)$ в единичном круге $D_1 = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$. Аналитические функции, удовлетворяющие последнему свойству, будем называть устойчивыми. Разложим многочлен $b(\lambda)$

на части:

$$b(\lambda, \tau) = \lambda^k b_-(\lambda) b_+(\lambda), \quad b_-(\lambda) = \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_{(i)}).$$

Каждому стабилизирующему регулятору (7.13) с взаимно простыми многочленами $c(\lambda)$ и $d(\lambda)$ однозначно соответствует пара устойчивых дробно-рациональных функций $H_y(\lambda)$ и $H_u(\lambda)$ и множество этих функций, являясь афинным, допускает следующую параметризацию (Ларина, Фомина, Юла, см. [58, 60]):

$$(7.14) \quad H_y(\lambda) = \hat{c}(\lambda) + \lambda^k b_-(\lambda) \psi(\lambda),$$

$$(7.15) \quad H_u(\lambda) = \hat{d}(\lambda) + a(\lambda) \frac{\psi(\lambda)}{b_+(\lambda)},$$

где $\psi(\lambda)$ — произвольная устойчивая дробно-рациональная функция, а $\hat{c}(\lambda)$ и $\hat{d}(\lambda)$ — некоторые решения уравнения

$$(7.16) \quad a(\lambda) \hat{c}(\lambda) - \lambda^k b_-(\lambda) \hat{d}(\lambda) = 1.$$

В частности, уравнение (7.16) однозначно разрешимо при том условии, что степень многочлена $\hat{c}(\lambda)$ меньше $m + k$.

Всякая устойчивая функция $H(\lambda)$ разлагается в степенной ряд, абсолютно сходящийся в $D_1 = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$:

$$H_y(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} H_y^{(i)} \lambda^i, \quad \sum_{i=0}^{\infty} |H_y^{(i)}| < \infty.$$

Передаточная функция $H_y(\lambda)$ обладает также следующим свойством:

$$(7.17) \quad y_t - \bar{y}_t = \sum_{i=0}^{t-k} H^{(i)} v_{t-i}$$

при нулевых начальных данных $u_{-i} = y_{k-i} = 0$, $i < 0$. Для устойчивых систем (3.4), (7.13) функционал

$$(7.18) \quad I(c(\cdot), d(\cdot), \tau) = \sup_{\substack{|v_t| \leq C_v \\ t=k, k+1, \dots}} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y_t - \bar{y}_t|$$

не зависит от начальных данных, поэтому из (7.17) следует, что

$$(7.19) \quad I(c(\cdot), d(\cdot), \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} |H_y^{(i)}| \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{I}(H_y(\cdot)).$$

Задача минимизации функционала (7.18) может быть переформулирована так: на аффинном многообразии (7.14) найти функцию, минимизирующую функционал $\tilde{I}(\cdot)$, определенный в (7.19).

Выберем целое неотрицательное число $q > 0$ настолько большим, чтобы многочлен

$$\beta_q(\lambda) = \prod_{i=1}^m (\lambda^{2^q} - \lambda_{(i)}^{2^q}) = \beta_q^{(0)} + \beta_q^{(1)}\lambda + \dots + \lambda^{m \cdot 2^q}$$

был сильно неустойчивый (см. [4]), т.е. его коэффициенты удовлетворяли бы соотношению

$$(7.20) \quad \sum_{i=0}^{m2^q-1} |\beta_q^{(i)}| \leq 1.$$

В частности, в качестве такого числа q можно взять любое целое число большее, чем

$$\log_2 \left| \frac{\log_2(2^m - 1)}{\log_2(\max\{\lambda_{(1)}, \dots, \lambda_{(m)}\})} \right|.$$

Покажем, что существует минимизирующий функционал (7.18) стабилизирующий регулятор (7.13), передаточная функция $H_y(\lambda)$ которого (см. (7.14)) является многочленом степени меньше $k + m2^q$.

Определим вспомогательный многочлен

$$\chi(\lambda) = \prod_{i=1}^m (\lambda + \lambda_{(i)}) \prod_{i=1}^m (\lambda^2 + \lambda_{(i)}^2) \dots \prod_{i=1}^m (\lambda^{2^{q-1}} + \lambda_{(i)}^{2^{q-1}}).$$

Легко убедиться, что

$$\beta_q(\lambda) = b_-(\lambda)\chi(\lambda).$$

Выберем произвольный регулятор (7.13), передаточная функция $\bar{H}_y(\lambda)$ (7.14) которого имеет степень не меньше $k + m2^q$, т.е. $\bar{H}_y(\lambda)$ либо многочлен степени не меньше $k + m2^q$, либо $\bar{H}_y(\lambda)$ раскладывается в D_1 в бесконечный степенной ряд. Функцию $\bar{H}_y(\lambda)$ можно представить в виде отношения двух многочленов

$$\bar{H}_y(\lambda) = \nu(\lambda)/\mu(\lambda),$$

в котором $\mu(\lambda)$ — устойчивый многочлен. Многочлены $\mu(\lambda)$ и $\beta_q(\lambda)$ не имеют общих корней. Определим многочлены $h(\lambda)$ и $g(\lambda)$ из уравнения

$$\mu(\lambda)h(\lambda) - \lambda^k \beta_q(\lambda)g(\lambda) = \nu(\lambda)$$

и того условия, что степень многочлена $h(\lambda)$ меньше $k + m2^q$. В силу (7.14) любая функция вида

$$H_y(\lambda) = \bar{H}_y(\lambda) + \lambda^k b_-(\lambda)\psi(\lambda)$$

является передаточной для некоторого стабилизирующего регулятора (7.13), если $\psi(\lambda)$ — устойчивая дробно-рациональная функция. Обозначим через

$$\psi(\lambda) = \chi(\lambda)\bar{\psi}(\lambda), \quad \bar{\psi}(\lambda) = \frac{g(\lambda)}{\mu(\lambda)} = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\psi}^{(i)} \lambda^i$$

устойчивые дробно-рациональные функции. Из определения многочлена $h(\lambda)$ получаем

$$h(\lambda) = \frac{\nu(\lambda)}{\mu(\lambda)} + \lambda^k \frac{\beta_q(\lambda)g(\lambda)}{\mu(\lambda)} = \bar{H}_y(\lambda) + \lambda^k b_-(\lambda)\psi(\lambda) = \bar{H}_y(\lambda) + \lambda^k \beta_q(\lambda)\bar{\psi}(\lambda),$$

и, следовательно, многочлен $h(\lambda)$ является передаточной функцией некоторого стабилизирующего регулятора. Рассмотрим последовательность многочленов $\{h_j(\lambda)\}$, определяемых через $h(\lambda)$, $\beta_q(\lambda)$ и коэффициенты разложения в степенной ряд функции $\bar{\psi}(\lambda)$ по правилу:

$$h_0(\lambda) = h(\lambda), \quad h_{j+1}(\lambda) = h_j(\lambda) - \beta_q(\lambda)\bar{\psi}^{(j)}\lambda^{k+j} = h(\lambda) - \lambda^k \beta_q(\lambda) \sum_{i=0}^j \bar{\psi}^{(i)} \lambda^i,$$

$j = 0, 1, 2, \dots$. Эта последовательность многочленов при $j \rightarrow \infty$ сходится к функции $\bar{H}_y(z)$. Из определения последовательности многочленов $\{h_j(\lambda)\}$ и вида функционала $\tilde{I}(\cdot)$, определенного в (7.19), заключаем, что

$$\begin{aligned} \tilde{I}(h_{j+1}(\cdot)) &= \sum_{i=0}^{k+m2^q+j} |h_{j+1}^{(i)}| = |h_j^{(0)}| + \dots + |h_j^{(k+j-1)}| + \\ &+ |p_j^{(k+j)} - \bar{\psi}^{(j)}\beta_q^{(0)}| + \dots + |p_{(j)}^{k+m2^q+j-1} - \bar{\psi}^{(j)}\beta_q^{(m2^q-1)}| + \\ &+ |\bar{\psi}^{(j)}| \geq \sum_{i=0}^{k+m2^q+j-1} |p_j^{(i)}| + \bar{\psi}^{(j)} \left(1 - \sum_{i=0}^{m2^q-1} |\beta_q^{(i)}| \right) \geq \\ &\geq \tilde{I}(h_j(\cdot)) \geq \tilde{I}(h_0(\cdot)) = \tilde{I}(h(\cdot)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\tilde{I}(h(\cdot)) \leq \tilde{I}(\bar{H}_y(\cdot)).$$

С одной стороны, это означает, что для любой передаточной функции степени не меньшей $k + m2^q$ найдется другая степени меньшей $k + m2^q$, для которой значение функционала качества (7.19) не хуже. С другой стороны, среди многочленов ограниченной степени, удовлетворяющих (7.14), существует по крайней мере один, минимизирующий функционал (7.19).

Обозначим $\bar{h}(\lambda)$ — многочлен степени меньшей $k + m2^q$, минимизирующий функционал (7.19). Рассмотрим параметризацию множества передаточных функций (7.14), в которой $\hat{c}(\lambda)$ — многочлен степени меньшей $k + m$, являющийся одним из решений уравнения (7.16). Из предыдущего доказательства следует, что существуют такие числа $\psi^{(0)}, \dots, \psi^{(m2^q - m - 1)}$, что

$$\bar{h}(\lambda) = \hat{c}(\lambda) + \lambda^k b_-(\lambda) \sum_{i=0}^{m2^q - m - 1} \psi^{(i)} \lambda^i.$$

Переформулируем задачу минимизации функционала (7.19). В пространстве $\mathbb{R}^{m(2^q - 1)}$ найти минимум функционала

$$(7.21) \quad \bar{I}(\psi^{(0)}, \dots, \psi^{(m2^q - m - 1)}) = \tilde{I}(\bar{h}(\cdot)).$$

Рассмотрим выпуклое многогранное множество \mathbb{H} , задаваемое системой $m2^r$ неравенств:

$$\text{sign}(\bar{h}^{(i)}) (\hat{c}^{(i)} + b_-^{(0)} \psi^{(i-k)} + b_-^{(1)} \psi^{(i-k-1)} + \dots + b_-^{(m)} \psi^{(i-k-m)}) \geq 0,$$

где $i = k, \dots, k + m2^r - 1$, $b_-^{(i)}$ — коэффициенты многочлена $b_-(\lambda)$, $\psi^{(j)} = 0$, если $j < 0$. Функционал (7.21) линеен на \mathbb{H} , коэффициенты многочлена $\psi(\lambda)$, соответствующего в (7.14) многочлену (передаточной функции) оптимального регулятора $\bar{h}(\lambda)$, принадлежат множеству \mathbb{H} , и, следовательно, функционал (7.21) ограничен снизу на \mathbb{H} . Хорошо известно, что линейный ограниченный снизу функционал на выпуклом многогранном множестве достигает своего минимального значения в одной из его вершин. Вершинам множества \mathbb{H} соответствуют передаточные функции (7.14), являющиеся многочленами с $k + m$ ненулевыми коэффициентами. Отсюда следует, что функционал (7.19) минимизирует некоторый многочлен $\bar{h}(\lambda)$ вида:

$$\bar{h}(\lambda) = \bar{c}(\lambda, \tau) + \lambda^k (\tilde{c}^{(1)} \lambda^{l_1} + \dots + \tilde{c}^{(m)} \lambda^{l_m}) = \bar{c}(\lambda, \tau) + \lambda^k \tilde{c}(\lambda),$$

и соответствующее минимальное значение равно

$$(7.22) \quad \mathcal{I}(\tau) = C_v \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} |\bar{c}^{(i)}| + \sum_{i=1}^m |\tilde{c}^{(i)}| \right).$$

Многочлен $\bar{h}(\lambda)$ вместе с соответствующей передаточной функцией $\bar{H}_u(\lambda)$, в силу формул параметризации (7.14)–(7.15), должен удовлетворять уравнению

$$(7.23) \quad a(\lambda, \tau) \bar{h}(\lambda) - \lambda^k b_-(\lambda) \bar{H}_u(\lambda) = 1.$$

Учитывая тот факт, что $\lambda_{(i)}$ являются корнями многочлена $b_{-}(\lambda)$, для $\tilde{c}^{(1)}, \dots, \tilde{c}^{(m)}$ — неизвестных коэффициентов многочлена $\bar{h}(\lambda)$ — получаем систему из m линейных уравнений

$$a(\lambda_{(i)}, \tau) \bar{h}(\lambda_{(i)}) = 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

которую, принимая во внимание введенные выше обозначения, удобнее переписать так:

$$\tilde{c}(\lambda_{(i)}) = \lambda_{(i)}^{-k} \left(\frac{1}{a(\lambda_{(i)}, \tau)} - \bar{c}(\lambda_{(i)}, \tau) \right), \quad i = 1, \dots, m,$$

или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^{l(1)} & \lambda_{(1)}^{l(2)} & \dots & \lambda_{(1)}^{l(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{(m)}^{l(1)} & \lambda_{(m)}^{l(2)} & \dots & \lambda_{(m)}^{l(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}^{(1)} \\ \tilde{c}^{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{c}^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^{-k} \left(\frac{1}{a(\lambda_{(1)}, \tau)} - \bar{c}(\lambda_{(1)}, \tau) \right) \\ \vdots \\ \lambda_{(m)}^{-k} \left(\frac{1}{a(\lambda_{(m)}, \tau)} - \bar{c}(\lambda_{(m)}, \tau) \right) \end{pmatrix}.$$

Отсюда, сравнивая формулы (7.11) и (7.22), в силу того, что $\mathbb{Z}_+^m \subset \mathbb{R}_+^m$, приходим к заключению леммы 7.1. Формулы леммы 7.3 для вычисления многочленов субоптимального регулятора следуют непосредственно из уравнения (7.23), значение соответствующего уровня субоптимальности ε получается вычитанием из (7.22) формулы (7.11).

Пусть $\bar{l} \in \mathbb{R}_+^m$. Обозначим

$$W(\bar{l}) = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^{l(1)} & \lambda_{(1)}^{l(2)} & \dots & \lambda_{(1)}^{l(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{(m)}^{l(1)} & \lambda_{(m)}^{l(2)} & \dots & \lambda_{(m)}^{l(m)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^{-k} \left(\frac{1}{a(\lambda_{(1)}, \tau)} - \bar{c}(\lambda_{(1)}, \tau) \right) \\ \vdots \\ \lambda_{(m)}^{-k} \left(\frac{1}{a(\lambda_{(m)}, \tau)} - \bar{c}(\lambda_{(m)}, \tau) \right) \end{pmatrix},$$

$$\text{sign}(\tilde{c}(\bar{l}, \tau)) = \begin{pmatrix} \text{sign}(\tilde{c}^{(1)}(\bar{l}, \tau)) \\ \vdots \\ \text{sign}(\tilde{c}^{(m)}(\bar{l}, \tau)) \end{pmatrix}.$$

Значение функционала (7.11) равно

$$\mathcal{I}(\bar{l}, \tau) = C_v \left(\sum_{i=0}^{k-1} |\bar{c}^{(i)}| + \text{sign}(\tilde{c}(\bar{l}, \tau)) W(\bar{l})^{-1} A \right).$$

Необходимым условием минимума функционала (7.11) является либо равенство нулю $l^{(1)}$, либо $\frac{\partial \mathcal{I}(\bar{l}, \tau)}{\partial l^{(1)}} = 0$, а также выполнение $m - 1$ условий:

$$\frac{\partial \mathcal{I}(\bar{l}, \tau)}{\partial l^{(i)}} = 0, \quad i = 2, \dots, m.$$

Продифференцировав по $l^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$ матричное тождество

$$W(\bar{l})^{-1}W(\bar{l}) = I,$$

для частных производных $\frac{\partial W(\bar{l})^{-1}}{\partial l^{(i)}}$ получаем представление

$$\frac{\partial W(\bar{l})^{-1}}{\partial l^{(i)}} = -W(\bar{l})^{-1} \begin{pmatrix} \dots & 0 & \ln\{\lambda_{(1)}\}\lambda_{(1)}^{l^{(i)}} & 0 & \dots \\ \cdot\cdot & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot\cdot \\ \dots & 0 & \ln\{\lambda_{(m)}\}\lambda_{(m)}^{l^{(i)}} & 0 & \dots \end{pmatrix} W(\bar{l})^{-1},$$

учитывая которое, для частных производных от функционала (7.11) можно записать

$$\frac{\partial \mathcal{I}(\bar{l}, \tau)}{\partial l^{(i)}} = -\text{sign}(\tilde{c}(\bar{l}, \tau))W(\bar{l})^{-1} \begin{pmatrix} \ln\{\lambda_{(1)}\}\lambda_{(1)}^{l^{(i)}} \\ \vdots \\ \ln\{\lambda_{(m)}\}\lambda_{(m)}^{l^{(i)}} \end{pmatrix} \tilde{c}^{(i)}(\bar{l}, \tau).$$

Из последней формулы, в силу определения обратной матрицы и введенных ранее обозначений, получаются уравнения системы (7.12), что доказывает утверждение леммы 7.2.

Заключение

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Рандомизированный алгоритм стохастической аппроксимации для оценивания параметров линейной регрессии и условия состоятельности его оценок (п. 2.2, теорема 2.1).

2. Вид предельной ковариационной матрицы ошибок оценивания параметров линейной регрессии по рандомизированному алгоритму стохастической аппроксимации (п. 2.2, теорема 2.2), оптимальный выбор параметров алгоритма.

3. Рандомизированный алгоритм стохастической аппроксимации с усреднениями для оценивания параметров линейной регрессии и условия состоятельности его оценок (п. 2.2, теорема 2.3).

4. Рандомизированный вариант метода наименьших квадратов для оценивания параметров линейной регрессии и условия состоятельности его оценок (п. 2.3, теорема 2.4).

5. Рандомизированный алгоритм идентификации неизвестных параметров линейного дискретного динамического объекта управления, подверженного действию ограниченных возмущений, при включении пробного возмущения через канал управления; способ перепараметризации набора неизвестных параметров; условия состоятельности оценок (п. 3.3, теорема 3.2).

6. Рандомизированный алгоритм для определения прогнозирующей оценки случайного процесса, порождаемого устойчивым линейным фильтром и наблюдаемого на фоне неизвестных, но ограниченных детерминированных помех. Анализ среднеквадратичного отклонения оценок (п. 4.1, теорема 4.1) и формула для оптимального значения размера шага алгоритма.

7. Анализ поведения оценок рандомизированного алгоритма стохастической аппроксимации с постоянным шагом для отслеживания изменений параметров линейной регрессии при неизвестных, но ограниченных детерминированных помехах, формула для оптимального размера шага алгоритма (п. 4.2, теорема 4.3).

8. Общий вид трех типов рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации с одним или двумя измерениями и условия состоятельности их оценок в задаче минимизации функционала среднего риска

(п. 5.1, теорема 5.1).

9. Оптимальные, в смысле асимптотической скорости сходимости, варианты рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации и условия, при которых их оценки в задаче минимизации функционала среднего риска достигают наилучшей асимптотической скорости сходимости (п. 5.1, теорема 5.2).

10. Способ построения субоптимального линейного стабилизирующего регулятора, минимизирующего предельное максимально возможное отклонение выхода линейного дискретного динамического объекта от заданной траектории, при известных его параметрах (п. 7.3, леммы 7.1–7.3).

11. Способ синтеза адаптивной субоптимальной стратегии управления, основанной на использовании пробных сигналов в канале обратной связи, для линейного дискретного динамического объекта, подверженного действию ограниченных возмущений, при априорной неопределенности о параметрах; условия достижения объектом цели управления (п. 7.3, теорема 7.1).

Приложение

П.1 Теория вероятностей

П.1.1 Случайные величины

Пусть (Ω, \mathcal{F}) — некоторое измеримое пространство и $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ — числовая прямая с системой борелевских множеств $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Действительная функция $\xi = \xi(\omega)$, определенная на (Ω, \mathcal{F}) называется \mathcal{F} -измеримой функцией или случайной величиной, если для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — произвольное вероятностное пространство.

Математическим ожиданием $E\{\xi\}$ произвольной случайной величины ξ называется интеграл Лебега от \mathcal{F} -измеримой функции $\xi = \xi(\omega)$ по мере \mathbf{P} , для которого (наряду с $E\{\xi\}$) используются также следующие обозначения: $\int_{\Omega} \xi(\omega) \mathbf{P}(d\omega)$ или $\int_{\Omega} \xi d\mathbf{P}$. Дисперсией случайной величины ξ называется величина $\sigma^2 = E\{(\xi - E\{\xi\})^2\}$, при этом величина $\sigma > 0$ называется стандартным отклонением.

Пусть ζ и η — пара случайных величин. Их ковариацией называется величина

$$\text{cov}\{\zeta, \eta\} = E\{(\zeta - E\{\zeta\})(\eta - E\{\eta\})\}.$$

Если $\text{cov}\{\zeta, \eta\} = 0$, то говорят, что случайные величины ζ и η не коррелированы.

Распределением случайной величины ξ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ называется вероятностная мера $P_{\xi}(\cdot)$ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$:

$$P_{\xi}(B) = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Из определения следует, что

$$E\{\xi\} = \int_{\mathbb{R}} x P_{\xi}(dx).$$

Функция

$$F_{\xi}(x) = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

называется *функцией распределения случайной величины* ξ . Неотрицательная функция $f_\xi(\cdot)$ называется *плотностью функции распределения* случайной величины ξ , если

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(z) dz.$$

Случайная величина ξ называется *гауссовской* (или *нормально распределенной*) с параметрами M и σ^2 ($\xi \sim \mathcal{N}(M, \sigma^2)$), $|M| < \infty$, $\sigma > 0$, если её плотность $f_\xi(\cdot)$ имеет следующий вид:

$$f_\xi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-M)^2}{2\sigma^2}}.$$

Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n называются *независимыми* (*независимыми в совокупности*), если для любых $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n\} = \mathbf{P}\{\xi_1 \in B_1\} \cdots \mathbf{P}\{\xi_n \in B_n\}.$$

Пусть ξ и η — независимые случайные величины с $\mathbf{E}\{|\xi|\} < \infty$ и $\mathbf{E}\{|\eta|\} < \infty$.

Тогда $\mathbf{E}\{|\xi\eta|\} < \infty$ и

$$\mathbf{E}\{\xi\eta\} = \mathbf{E}\{\xi\}\mathbf{E}\{\eta\}.$$

Понятие случайная величина естественным образом обобщается и на векторный случай. Для *случайных векторов* по аналогии можно определить математическое ожидание, дисперсию, матрицы ковариации, распределение и т.п.

Совокупность случайных величин $X = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ называют *случайным процессом с дискретным временем* или *случайной последовательностью*. Для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ последовательность $\{\xi_n(\omega)\}$ называется *реализацией* или *траекторией* процесса, соответствующей исходу ω .

П.1.2 Некоторые замечательные неравенства

Неравенство Чебышёва ([65], стр. 209). Пусть ξ — неотрицательная случайная величина.

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{E}\{\xi\}}{\varepsilon}.$$

Неравенство Иенсена ([65], стр. 209). Пусть $g = g(x)$ — выпуклая книзу борелевская функция и $\mathbf{E}\{\xi\} < \infty$.

Тогда

$$g(E\{\xi\}) \leq E\{g(\xi)\}.$$

Неравенство Гёльдера ([65], стр. 210). Пусть $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Если $E\{|\xi|^p\} < \infty$ и $E\{|\eta|^q\} < \infty$,
то $E\{|\xi\eta|\} < \infty$ и

$$E\{|\xi\eta|\} < (E\{|\xi|^p\})^{1/p}(E\{|\eta|^q\})^{1/q}.$$

П.1.3 Закон больших чисел для независимых случайных величин

Закон больших чисел ([65], стр. 347). Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $E\{\xi_1\} < \infty$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $E\{\xi_1\} = M$.

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \mathbf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - M\right| \geq \epsilon\right\} \rightarrow 0.$$

Теорема Кантелли ([65], стр. 376). Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — последовательность независимых случайных величин с конечным четвертым моментом:

$$E\{|\xi_n - E\{\xi_n\}|^4\} \leq C < \infty, \quad n \geq 1,$$

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью единица

$$\frac{S_n - E\{S_n\}}{n} \rightarrow 0.$$

Усиленный закон больших чисел (Колмогорова) ([65], стр. 377). Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — последовательность независимых случайных величин с конечными вторыми моментами, положительные числа β_n таковы, что

$$\beta_n \rightarrow \infty, \quad \sum \frac{E\{(\xi_n - E\{\xi_n\})^2\}}{\beta_n^2} < \infty,$$

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью единица

$$\frac{S_n - E\{S_n\}}{\beta_n} \rightarrow 0.$$

П.1.4 Стационарные случайные процессы

Последовательность $\{\xi_n\}$ случайных векторов ξ_n называется *стационарным* (в широком смысле) *процессом*, если справедливо представление в виде стохастического интеграла Ито

$$\xi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{i\mu n} d\zeta_\mu + \bar{\xi}, \quad -\infty < n < \infty,$$

где $\{\zeta_\mu\}$ — случайный процесс с некоррелированными центрированными приращениями, т.е. при любых $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \mu_4$ из интервала $[0; 2\pi]$ удовлетворяющий условиям:

$$E\{(\zeta_{\mu_1} - \zeta_{\mu_2})(\zeta_{\mu_3} - \zeta_{\mu_4})^*\} = 0,$$

$$E\{(\zeta_{\mu_1} - \zeta_{\mu_2})(\zeta_{\mu_2} - \zeta_{\mu_1})^*\} = U_{\xi\xi}(\mu_2) - U_{\xi\xi}(\mu_1),$$

с монотонно неубывающей (в смысле квадратичных форм) симметричной матричной функцией $U_{\xi\xi}(\cdot)$, называемой *спектральной (структурной) функцией* процесса $\{\xi_n\}$.

Из определений следует, что

$$E\{\xi_n\} = \bar{\xi}, \quad cov\{\xi_i, \xi_j\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\mu(i-j)} dU_{\xi\xi}(\mu) = B_{\xi\xi}(i-j),$$

т.е. среднее значение и ковариация стационарного процесса не зависят от сдвига по времени. Это свойство процесса $\{\xi_n\}$, как хорошо известно, определяет его стационарность. Спектральная функция может содержать *сингулярную* и *непрерывную* составляющие:

$$U_{\xi\xi}(\mu) = \tilde{U}_{\xi\xi}(\mu) + \bar{U}_{\xi\xi}(\mu).$$

Элементы матрицы $\tilde{U}_{\xi\xi}(\mu)$ являются кусочно-постоянными функциями (функции скачков), элементы матрицы $\bar{U}_{\xi\xi}(\mu)$ — абсолютно непрерывные функции, т.е. при почти всех (по мере Лебега) $\mu \in [0; 2\pi]$ существует производная

$$\bar{S}_{\xi\xi}(\mu) = \frac{d\bar{U}_{\xi\xi}(\mu)}{d\mu}.$$

В соответствии с этим спектральную функцию $U_{\xi\xi}(\mu)$ можно представить в виде

$$U_{\xi\xi}(\mu) = \sum_{\mu_k \leq \mu} \tilde{S}_{\xi\xi}(\mu_k) + \int_0^\mu \bar{S}_{\xi\xi}(\mu) d\mu,$$

где $\tilde{S}_{\xi\xi}(\mu_k) = U_{\xi\xi}(\mu_k+) - U_{\xi\xi}(\mu_k-)$ — скачок функции $U_{\xi\xi}(\mu)$ в точке $\mu = \mu_k$. Из определения функции $U_{\xi\xi}(\mu)$ следует, что матрицы $\tilde{S}_{\xi\xi}(\mu_k)$ и $\bar{S}_{\xi\xi}(\mu)$ — неотрицательны.

Учитывая вид представления спектральной функции, формулу для матрицы ковариации $B_{\xi\xi}(n)$ можно записать так:

$$B_{\xi\xi}(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_k e^{i\mu_k n} \tilde{S}_{\xi\xi}(\mu_k) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\mu n} \bar{S}_{\xi\xi}(\mu) d\mu.$$

Множество точек $\{\mu_k\}$ называется *дискретным (сингулярным) спектром* процесса $\{\xi_n\}$, множество точек $\{\mu : S_{\xi\xi}(\mu) \neq 0\}$, называется *непрерывным спектром* процесса $\{\xi_n\}$. Если дискретный спектр отсутствует, то матрица $\bar{S}_{\xi\xi}(\mu)$ называется *матрицей спектральных плотностей* (или *спектральной плотностью*) процесса $\{\xi_n\}$.

Стационарные процессы $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ называются *стационарно связанными*, если совокупный процесс $(\xi_n^T, \eta_n^T)^T$ — стационарный. Для стационарно связанных центрированных процессов $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$, имеющих спектральные плотности, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} cov\{\xi_i, \xi_j\} &= B_{\xi\xi}(i-j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\mu(i-j)} \bar{S}_{\xi\xi}(\mu) d\mu \\ cov\{\xi_i, \eta_j\} &= B_{\xi\eta}(i-j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\mu(i-j)} \bar{S}_{\xi\eta}(\mu) d\mu, \end{aligned}$$

где $\bar{S}_{\xi\eta}(\mu)$ — совместная спектральная плотность, $B_{\xi\eta}(n)$ — матрица ковариации процессов $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$. Вводя комплексную переменную $\lambda = e^{-i\mu}$, последние формулы удобно переписать в виде:

$$\begin{aligned} B_{\xi\xi}(n) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \lambda^{-n} S_{\xi\xi}(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ B_{\xi\eta}(n) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \lambda^{-n} S_{\xi\eta}(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}, \end{aligned}$$

где \oint — интеграл по единичной окружности, ориентированный так, что $\oint d\lambda/\lambda = 2\pi i$, и

$$S_{\xi\xi}(\lambda) = \bar{S}_{\xi\xi}(\mu), \quad S_{\xi\eta}(\lambda) = \bar{S}_{\xi\eta}(\mu).$$

П.1.5 Последовательности случайных величин, близкие к супермартингалам

Л е м м а П.1 ([50], гл. 2, лемма 10, стр. 54, [148]). Если $\nu_0, \dots, \nu_n, \dots$ — последовательность неотрицательных случайных величин: $\nu_n \geq 0$, $E\{\nu_0\} < \infty$ и

$$E\{\nu_{n+1} | \nu_0, \dots, \nu_n\} \leq (1 - \alpha_n) + \beta_n,$$

$$0 \leq \alpha_n \leq 1, \quad \beta_n \geq 0, \quad \sum \alpha_n = \infty, \quad \sum \beta_n < \infty, \quad \frac{\beta_n}{\alpha_n} \rightarrow 0,$$

тогда с вероятностью единица $\nu_n \rightarrow 0$, $E\{\nu_n\} \rightarrow 0$ и

$$\forall \varepsilon > 0, n > 0 \quad P(\nu_j \leq \varepsilon \forall j \geq n) \geq 1 - \varepsilon^{-1}(E\{\nu_n\} + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i).$$

Л е м м а П.2 ([50], гл. 2, лемма 9) Если $\nu_0, \dots, \nu_n, \dots$ последовательность неотрицательных случайных величин: $\nu_n \geq 0$, $E\{\nu_0\} < \infty$ и

$$E\{\nu_{n+1} | \nu_0, \dots, \nu_n\} \leq (1 + \alpha_n) + \beta_n,$$

$$\alpha_n \geq 0, \beta_n \geq 0, \sum \alpha_n < \infty, \sum E\{\beta_n\} < \infty, \beta_n = \beta_n(\nu_0, \dots, \nu_n),$$

тогда с вероятностью единица $\nu_n \rightarrow \nu$, где $\nu \geq 0$, $E\{\nu\} < \infty$.

П.2 Сведения из разных областей

П.2.1 Свойства сходимости некоторых числовых последовательностей

Л е м м а П.3 ([50], гл. 2, лемма 1). Если последовательность чисел $\{u_n\}$ удовлетворяет неравенству:

$$u_{n+1} \leq \rho u_n + \beta, \quad 0 \leq \rho < 1, \beta > 0,$$

тогда

$$u_n \leq \frac{\beta}{1 - \rho} + \left(u_0 - \frac{\beta}{1 - \rho}\right) \rho^n.$$

Л е м м а П.4 ([50], гл. 2, лемма 2). Если последовательность $\{u_n\}$ неотрицательных чисел удовлетворяет неравенству:

$$u_{n+1} \leq (1 + \alpha_n)u_n + \beta_n, \quad \beta_n \geq 0, \alpha_n \geq 0,$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty, \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n < \infty,$$

тогда

$$u_n \rightarrow u \geq 0.$$

Л е м м а П.5 ([50], гл. 2, лемма 3). Если последовательность чисел $\{u_n\}$ удовлетворяет неравенствам:

$$u_{n+1} \leq \rho_n u_n + \beta_n, \quad 0 \leq \rho_n < 1, \beta_n \geq 0,$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \rho_n) < \infty, \frac{\beta_n}{1 - \rho_n} \rightarrow 0,$$

тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n \leq 0.$$

Л е м м а П.6 ([50], гл. 2, лемма 4(Чжуна)). Если последовательность $\{u_n\}$ неотрицательных чисел удовлетворяет неравенству:

$$u_{n+1} \leq \left(1 - \frac{c}{n}\right)u_n + \frac{d}{n^{p+1}}, \quad d > 0, p > 0, c > p,$$

тогда $u_n \leq \frac{d}{c-p}n^{-p} + o(n^{-p})$ при $c > p$,
 $u_n = \mathcal{O}(n^{-c} \ln\{n\})$ при $c = p$,
 $u_n = \mathcal{O}(n^{-c})$ при $c < p$.

Л е м м а П.7 ([50], гл. 2, лемма 5(Чжуна)). Если последовательность $\{u_n\}$ неотрицательных чисел удовлетворяет неравенству:

$$u_{n+1} \leq \left(1 - \frac{c}{n^q}\right)u_n + \frac{d}{n^p}, \quad 0 < q < 1, q < p,$$

тогда

$$u_n \leq \frac{d}{c}n^{q-p} + o(n^{q-p}).$$

П.2.2 Некоторые матричные соотношения

Матричное тождество. Пусть матрицы $A, D, A + B^TDB$ — невырождены.

Тогда

$$(A + B^TDB)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B^T(D^{-1} + BA^{-1}B^T)^{-1}BA^{-1}.$$

Проверить выполнение этого тождества можно, умножив обе части формулы на $(A + B^TDB)$.

Л е м м а П.8 ([46], лемма 2). Пусть матрица $-B$ — устойчива.

Тогда для любой матрицы A существует $\bar{\alpha} > 0$ такое, что при $0 \leq \alpha < \bar{\alpha}$ матричное уравнение

$$BX + XB^T = D + \alpha AXA^A$$

имеет единственное решение при любой матрице D . При этом матрица X — симметрична, если D — симметрична, и $X \geq 0$, если $D \geq 0$.

В частном случае при $D > 0$ и нулевой матрице A — это классическая лемма Ляпунова (см., например, [42], гл. 6, пункт 3).

Л е м м а П.9 ([46], лемма 3). Пусть имеется последовательность матриц $\{V_n\}$: $V_n \geq 0$, связанных рекуррентным соотношением:

$$V_n \leq V_{n-1} - \alpha_n B V_{n-1} - \alpha_n V_{n-1} B^T + W_{n-1},$$

где матрица $-B$ — устойчива и

$$\alpha_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \|W_{n-1}\| \leq \gamma_n + \beta_n \|V_{n-1}\|, \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \rightarrow 0, \frac{\beta_n}{\alpha_n} \rightarrow 0.$$

Тогда найдется такое $\bar{\alpha} > 0$, что если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < \bar{\alpha}$, то $V_n \rightarrow 0$.
При этом, если $\alpha_n \equiv 0$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n > 0$, то $\|V_n\| < c\rho^n$, $\rho < 1$.

Л е м м а П.10 ([52], лемма 3). Пусть имеется последовательность матриц $\{V_n\}$: $V_n \geq 0$, связанных рекуррентным соотношением:

$$V_n \leq V_{n-1} - \alpha_{n-1} B V_{n-1} - \alpha_{n-1} V_{n-1} B^T + \alpha_{n-1} \gamma_{n-1} S + W_{n-1},$$

где матрица $-B$ — устойчива и

$$\alpha_n \geq 0, \alpha_n \rightarrow 0, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \gamma_n \rightarrow 0, \gamma_n / \gamma_{n+1} = 1 + o(\alpha_n),$$

$$S > 0, \|W_n\| = o(\alpha_n) \gamma_n + o(\alpha_n) / \|V_n\|.$$

Тогда

$$V_n = \gamma_n V + o(\gamma_n)$$

где V — решение уравнения Ляпунова

$$B V + V B^T = S.$$

Л е м м а П.11 ([52], лемма 4). Пусть имеется последовательность матриц $\{V_n\}$: $V_n \geq 0$, связанных рекуррентным соотношением:

$$V_n = (I - \alpha_{n-1} B) V_{n-1} + \alpha_{n-1} \gamma_{n-1} S + W_{n-1},$$

где матрица $-B$ — устойчива и

$$\alpha_n \geq 0, \alpha_n \rightarrow 0, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \gamma_n \rightarrow 0, \gamma_n / \gamma_{n+1} = 1 + o(\alpha_n),$$

$$\|W_n\| = o(\alpha_n) \gamma_n + o(\alpha_n) / \|V_n\|.$$

Тогда

$$V_n = \gamma_n B^{-1} S + o(\gamma_n).$$

Л е м м а П.12 ([52], лемма 5). Пусть имеется последовательность матриц $\{V_n\} : V_n \geq 0$, связанных рекуррентным соотношением:

$$V_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)V_{n-1} + \frac{1}{n^2}S + W_{n-1},$$

где

$$\|W_n\| = o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)/\|V_n\|.$$

Тогда

$$V_n = \frac{1}{n}S + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

П.2.3 Факторизация матричных функций

Общие результаты о спектральной факторизации положительных операторов можно найти в [61] (см. раздел 2.3, стр. 89–93). Здесь ограничимся формулировкой теоремы, касающейся важного частного случая: факторизации дробно–рациональных функций.

Т е о р е м а (теорема 3.П.6 из [58], стр. 182). Пусть $S(\lambda)$ — дробно–рациональная (матричная) функция (д.–р.ф.) с вещественными коэффициентами в матричных элементах, определенная и неотрицательная при всех $|\lambda| = 1$.

Тогда существует устойчивая д.–р.ф. $\Pi(\lambda)$ такая, что справедливо представление

$$S(\lambda) = \Pi(\lambda)\Pi(\lambda^{-1})^T$$

при всех комплексных значениях λ .

При этом, если $\det S(\lambda) \neq 0$ при $|\lambda| = 1$,

то $\Pi(\lambda)^{-1}$ — устойчивая д.–р.ф.

Список обозначений

n, t — дискретное время;

i, j, k, m, p, N — целые числа (обычно неотрицательные);

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \rho, C$ — скалярные величины;

a, b, c, d, e, u — векторные или скалярные величины;

x, φ — векторные переменные;

y, z и Y, Z — наблюдаемые скалярные и векторные переменные;

v, w, ξ — помехи (шумы) в наблюдениях (измерениях);

ζ, η — случайные векторы;

$x^{(j)}$ — j -ая координата вектора x ;

$\{x_n\}$ — последовательность векторов x_n ;

A, B, D, Γ, R, Q, S — матрицы;

I — единичная матрица (единицы на диагонали, остальные — нули);

\cdot^T — операция транспонирования вектора или матрицы;

$\|\cdot\|$ — евклидова норма;

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение векторов;

$B > 0$ — матрица B — положительно определенная: $x^T B x > 0, \forall x$;

$\lambda_{\max}(B)$ и $\lambda_{\min}(B)$ — максимальное и минимальное по абсолютной величине собственное значение матрицы B ;

$\text{Tr}[\cdot]$ — след матрицы (сумма диагональных элементов);

$f(\cdot), F(\cdot, \cdot), L(\cdot, \cdot), Q(\cdot, \cdot), q(\cdot), K(\cdot)$ — вещественные функции;

$g(\cdot), G(\cdot, \cdot), \mathcal{K}(\cdot)$ — векторные функции;
 $\mathcal{U}(\cdot)$ — стратегия управления;
 $f'(\cdot), \nabla f(\cdot)$ — вектор-градиент функции $f(\cdot)$;
 ℓ — показатель гладкости функции;
 $\mathcal{O}(\cdot)$ — функция такого же порядка малости, как и её аргумент;
 $o(\cdot)$ — функция более высокого порядка малости, чем её аргумент;
 \mathbb{R} — множество вещественных чисел,
 \mathbb{N} — множество натуральных чисел,
 \mathbb{Z} — множество целых чисел;
 r — размерность вектора оцениваемых параметров;
 $\hat{\theta}$ — вектор в пространстве оцениваемых параметров (оценка);
 θ^* — оцениваемое (оптимальное) значение;
 Δ — вектор пробного одновременного возмущения;
 τ — вектор в пространстве параметров исследуемой системы;
 Θ, \mathcal{T} — множества в пространстве параметров;
 $\mathcal{P}_{\{\cdot\}}(\cdot)$ — функция (оператор) проектирования в множество;
 Ω — вероятностное пространство;
 ω — элемент вероятностного пространства;
 $P(\cdot)$ — распределение вероятностей;
 $E\{\cdot\}$ — знак математического ожидания;
 $E\{\cdot|\cdot\}$ — знак условного математического ожидания;
 \mathcal{F} — σ -алгебра вероятностных событий;
 M_φ — среднее значение случайной величины φ (или его ограничение);
 σ_v^2 — дисперсия случайной величины v (или её ограничение);
 $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ — характеристическая функция множества (функция Хевисайда),
 равная нулю или единице;
 $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера: $\delta_{i,i} = 1$ и $\delta_{i,j} = 0$, если $i \neq j$;
 q^{-1} — оператор сдвига на такт назад.

Список литературы

- [1] *Агафонов С.А.* Алгоритм стохастической аппроксимации с возмущением на входе в задаче адаптивного управления линейным объектом. Л., 1981. Деп. в ВИНТИ от 15 декабря 1981 г., No. 5682-81, 28 с.
- [2] *Агафонов С.А., Фомин В.Н.* Идентификация объектов управления с использованием пробных сигналов. Л., 1982. Деп. в ВИНТИ от 3 августа 1982 г., No. 4226-82, 22 с.
- [3] *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977, 223 с.
- [4] *Барабанов А.Е.* Оптимальное управление неминимально-фазовым дискретным объектом с произвольными ограниченными помехами // Вестн. Ленинград. ун-та, сер. 1, 1980, вып. 3, с. 119–120.
- [5] *Барабанов А.Е., Граничин О.Н.* Оптимальный регулятор линейного объекта с ограниченной помехой // Автоматика и телемеханика, 1984, No. 5, с. 39–46.
- [6] *Вазан М.* Стохастическая аппроксимация. М.: Мир, 1972.
- [7] *Валкейла Э., Мельников А.В.* Мартингалльные модели стохастической аппроксимации и их сходимости // Теория вероятностей и её применения, 1999, вып. 2, с. 278–311.
- [8] *Гапошкин В.Г., Красулина Т.П.* О законе повторного логарифма для процессов стохастической аппроксимации // Теория вероятностей и её применения, 1974, вып. 4, с. 879–886.
- [9] *Граничин О.Н.* Оптимальное управление линейным объектом с нерегулярными ограниченными помехами // В сб.: Тезисы докладов и сообщений Всесоюзной конференции "Теория адаптивных систем и её применения", Москва–Ленинград, 1983, с. 26.
- [10] *Граничин О.Н.* Оптимальное управление линейным объектом с ограниченными помехами, минимизирующее предельное отклонение

величины управления и выхода объекта от нуля // В сб.: "Труды XIII студ. научн. конф. мат.-мех. ф-та Ленингр. гос. ун-та". Л., 1984. Деп. в ВИНТИ, No. 6320-84, с. 7-13.

- [11] *Граничин О.Н., Фомин В.Н.* Синтез адаптивного управления с использованием пробных сигналов в канале обратной связи. Л., 1984. Деп. в ВИНТИ, No. 1339-84В, 19 с.
- [12] *Граничин О.Н., Фомин В.Н.* Минимаксная оптимизация управления объектом на бесконечном промежутке времени. Л., 1985. Деп. в ВИНТИ, No. 4851-85, 29 с.
- [13] *Граничин О.Н., Фомин В.Н.* Адаптивное управление с использованием пробных сигналов // Автоматика и телемеханика, 1986, No. 2, с. 100-112.
- [14] *Граничин О.Н., Фомин В.Н.* Метод динамического программирования в задаче минимаксного управления // Вестник Ленингр. ун-та, сер. 1, 1986, вып. 1, с. 26-30.
- [15] *Граничин О.Н.* Алгоритм стохастической аппроксимации с возмущением на входе для идентификации статического нестационарного дискретного объекта // Вестник Ленингр. ун-та, сер. 1, 1988, вып. 3, с. 92-93.
- [16] *Граничин О.Н.* Об одной стохастической рекуррентной процедуре при зависимых помехах в наблюдении, использующей на входе пробные возмущения // Вестник Ленингр. ун-та, сер. 1, 1989, вып. 1, с. 19-21.
- [17] *Граничин О.Н.* Построение субоптимального регулятора линейного объекта с ограниченной помехой // Автоматика и телемеханика, 1990, No. 2, с. 59-62.
- [18] *Граничин О.Н.* Процедура стохастической аппроксимации с возмущением на входе // Автоматика и телемеханика, 1992, No. 2, с. 97-104.
- [19] *Граничин О.Н.* Оценивание точки минимума неизвестной функции, наблюдаемой на фоне зависимых помех // Проблемы передачи информации, 1992, No 2, с. 16-20.
- [20] *Граничин О.Н., Волков А.А.* Стохастические свойства динамических систем в механике. Учебное пособие. С.-Пб.: СПбГУ, 1996, 26 с.

- [21] *Граничин О.Н., Кривулин Н.К.* Моделирование нерегулярных явлений в динамических механических системах. Учебно-методическое пособие. С.-Пб.: Изд-во С.-Петербур. университета, 1997, 32 с.
- [22] *Граничин О.Н., Лившиц А.Н., Соловьев В.Ф.* О некоторых принципах создания робота познания // В сб.тр.: "Первой межд. конф. по мехатронике и робототехнике". С.-Петербург, 2000, т. 2, с. 83–86.
- [23] *Граничин О.Н.* Построение дискретного субоптимального регулятора непрерывного объекта с нерегулярной ограниченной помехой // Автоматика и телемеханика, 2001, No. 3, с. 86–94.
- [24] *Ермаков С.М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.:Наука, 1975, 471 с.
- [25] *Ермаков С.М., Жиглявский А.А.* Математическая теория оптимального эксперимента. М.:Наука, 1987, 320 с.
- [26] *Ермольев Ю.М.* О методе обобщенных стохастических градиентов и стохастических квазифейеровских последовательностях // Кибернетика, 1969, No. 2, с. 73–83.
- [27] *Жилинскас А.* Глобальная оптимизация. Вильнюс: Мокслас, 1986, 165с.
- [28] *Катковник В.Я.* Линейные оценки и стохастические задачи оптимизации. М.: Наука, 1976, 487 с.
- [29] *Коган М.М., Неймарк Ю.И.* Адаптивное управление. Горький: Изд-во ГГУ, 1987, 57 с.
- [30] *Колесников Е.К., Курьшев А.П., Мануйлов А.С.* Активный дистанционный рентгеноспектральный анализ поверхностных пород небесных тел // В кн.: "Методы рентгеноспектрального анализа". Новосибирск: Наука, 1986, с. 85–93.
- [31] *Колмогоров А.Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Известия АН СССР, сер. матем., 1941, No. 5, с. 3–14.
- [32] *Коростелев А.П.* Стохастические рекуррентные процедуры: локальные свойства. М.: Наука, 1984, 208 с.
- [33] *Котельников В.А.* Теория потенциальной помехоустойчивости. М.: Госэнергоиздат, 1956, 151 с.
- [34] *Красноперова М.А.* Основы реконструктивного моделирования стихосложения. С.-Пб.: Изд-во С.-Петербур. университета, 2000, 237 с.

- [35] *Красовский А.А., Белоглазов И.Н., Чигин Г.П.* Теория корреляционно–экстремальных навигационных систем. М.: Наука, 1979, 447 с.
- [36] *Красовский А.А.* Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987, 712 с.
- [37] *Кунцевич В.М., Лычак М.М.* Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход. Киев: Наукова думка, 1985, 248 с.
- [38] *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдения в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977, 392 с.
- [39] *Льюнг Л., Сёдерстрём Т.* Идентификация систем: теория для пользователя. М.: Наука, 1991, 431 с.
- [40] *Марков А.А.* Исчисление вероятностей. М.: ГИЗ, 1924.
- [41] *Михалевич В.С., Гупал А.М., Норкин В.И.* Методы невыпуклой оптимизации. М.: Наука, 1987, 279 с.
- [42] *Невельсон М.Б., Хасъминский Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972, 304 с.
- [43] *Острем К., Виттенмарк В.* Системы управления с ЭВМ. М.: Наука, 1987, 480 с.
- [44] *Позняк А.С., Назин А.В.* Адаптивный выбор вариантов. Рекуррентные алгоритмы. М.: Наука, 1986, 288 с.
- [45] *Поляк Б.Т.* Сходимость и скорость сходимости итеративных стохастических алгоритмов. 1. Общий случай // Автоматика и телемеханика, 1976, No 12, с. 83–94.
- [46] *Поляк Б.Т.* Сходимость и скорость сходимости итеративных стохастических алгоритмов. 2. Линейный случай // Автоматика и телемеханика, 1977, No. 4, с. 101–107.
- [47] *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Адаптивные алгоритмы оценивания (сходимость, оптимальность, устойчивость) // Автоматика и телемеханика, 1979, No 3, с. 71–84.
- [48] *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Оптимальные псевдоградиентные алгоритмы адаптации // Автоматика и телемеханика, 1981, No 8, с. 74–84.

- [49] *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастные псевдоградиентные алгоритмы адаптации // Автоматика и телемеханика, 1981, No 10, с. 91–97.
- [50] *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
- [51] *Поляк Б.Т., Цыбаков А.Б.* Оптимальные порядки точности поисковых алгоритмов стохастической аппроксимации // Проблемы передачи информации, 1990, No 2, с. 45–53.
- [52] *Поляк Б.Т.* Новый метод типа стохастической аппроксимации // Автоматика и телемеханика, 1990, No 7, с. 98–108.
- [53] *Растргин Л.А.* Случайный поиск. М.: Знание, 1979, 64 с.
- [54] *Стратонович А.Л.* Применение теории марковских процессов для оптимальной фильтрации сигналов // Радиотехника и электроника, 1960, No. 11, с. 1751–1763.
- [55] *Урьясов С.П.* Адаптивные алгоритмы стохастической оптимизации и теории игр. М.:Наука, 1990, 182 с.
- [56] *Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А.* Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980, 200 с.
- [57] *Фельдбаум А.А.* О проблемах дуального управления // В кн.: "Методы оптимизации автоматических систем". М.: Наука, 1972, с. 89–108.
- [58] *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981, 448 с.
- [59] *Фомин В.Н.* Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука. 1984, 288 с.
- [60] *Фомин В.Н.* Методы управления линейными дискретными объектами. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985, 336 с.
- [61] *Фомин В.Н.* Операторные методы теории линейной фильтрации случайных процессов. С.-Пб.: Изд-во СПбГУ, 1996, 306 с.
- [62] *Цыпкин Я.З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968.
- [63] *Цыпкин Я.З.* Информационная теория идентификации. М.: Наука, 1995.
- [64] *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем: метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988, 319 с.

- [65] *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980, 574 с.
- [66] *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики, том 2, теория. М.: Фазис, 1998, 1017 с.
- [67] *Якубович Е.Д.* Решение одной задачи оптимального управления дискретной линейной системой // Автоматика и телемеханика, 1975, No. 9, с. 73–79.
- [68] *Якубович Е.Д.* Оптимальное управление линейной дискретной системой при наличии неизмеряемого возмущения // Автоматика и телемеханика, 1977, No. 4, с. 49–54.
- [69] *Alspector J., Meir R., Jayakumar A., Lippe D.* A Parallel Gradient Descent Method for Learning in Analog VLSI Neural Networks // In: Hanson S.J., Cowan J.D., Lee C., "Advances in Neural Information Processing Systems 5". San Mateo, CA: Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1993, pp. 834–844.
- [70] *Alessandri A., Parisini T.* Nonlinear Modelling of Complex Large-Scale Plants Using Neural Networks and Stochastic Approximation // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. A, 1997, vol. 27, pp. 750–757.
- [71] APS Study: Science and Technology of Directed Energy Weapons // Rev. Mod. Phys., July 1987, vol. 59, No. 3, Part II.
- [72] *Bai E-W., Yinyu Y., Tempo R.* Bounded Error Parameter Estimation: A Sequential Analytic Center Approach // IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, vol. 44, No. 6, pp. 1107–1117.
- [73] *Bennet C.H., Shor P.W.* Quantum Information Theory // IEEE Transactions on Information Theory, 1988, vol. 44, pp. 2724–2742.
- [74] *Blum J.R.* Multidimensional Stochastic Approximation // Ann. Math. Statist., 1954, vol. 9, pp. 737–744.
- [75] *Bode H.W., Shannon C.E.* A Simplified Derivation of Linear Least Square Smoothing and Prediction Theory // Proc. IRE, 1950, No. 38, pp. 417–425.
- [76] *Busy R.S., Kalman R.E.* New Results In Linear Filtering and Prediction Theory // J.Basic.Eng. ASME, 1961, vol. 83, No. 1, pp. 95–108.
- [77] *Cauwenberghs G.* Analog VLSI Autonomous Systems for Learning and Optimization. Ph.D. thesis, California Institute of Technology, 1994.

- [78] *Chen H.F., Guo L.* Convergence Rate of Least-squares Stochastic Systems // Int. Journal of Control, 1986, vol. 44, No. 5, pp. 1459–1477.
- [79] *Chen H.F.* Lower Rate of Convergence for Locating a Maximum of a Function // Ann. Statist., 1988, vol. 16, pp. 1330–1334.
- [80] *Chen H.F., Duncan T.E., Pasik-Duncan B.* A Kiefer-Wolfowitz Algorithm with Randomized Differences // IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, vol. 44, No. 3, pp. 442–453.
- [81] *Chin D.C.* A More Efficient Global Optimization Algorithm Based on Styblinski and Tang // Neural Networks, 1994, vol. 7, pp. 573–574.
- [82] *Chin D.C., Smith R.H.* A Traffic Simulation for Mid-Manhattan with Model-Free Adaptive Signal Control // In: Proceedings of the Summer Computer Simulation Conference. 1994, pp. 296–301.
- [83] *Chin D.C.* Efficient Identification Procedure for Inversion Processing // In: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. 1996, pp. 3129–3130.
- [84] *Chin D.C.* Comparative Study of Stochastic Algorithms for System Optimization Based on Gradient Approximations // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. B, 1997, vol. 27, pp. 244–249.
- [85] *Chin D.C., Srinivasan R.* Electrical Conductivity Object Locator: Location of Small Objects Buried at Shallow Depths // In: Proceedings of the Unexploded Ordnance (UXO) Conference. 1997, pp. 50–57.
- [86] *Chin D.C., Spall J.C., Smith R.H.* Evaluation and Practical Consideration for the S-TRAC System-Wide Traffic Signal Controller. Transportation Research Board 77-th Annual Meeting, 1998, Preprint 98–1230.
- [87] *Chin D.C.* The Simultaneous Perturbation Method for Processing Magnetospheric Images // Optical Engineering, 1999, vol. 38, pp. 606–611.
- [88] *Dippon J., Renz J.* Weighted Means in Stochastic Approximation of Minima // SIAM Journal of Control and Optimization, 1997, vol. 35, pp. 1811–1827.
- [89] *Fabian V.* Stochastic approximation of minima with improved asymptotic speed // Ann. Math. Statist., 1967, vol. 38, pp. 191–200.
- [90] *Fisher R.A.* The Design of Experiments. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1935.

- [91] *Fu M.C., Hill S.D.* Optimization of Discrete Event Systems via Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation // Transactions of the Institute of Industrial Engineers, 1997, vol. 29, pp. 233–243.
- [92] *Gerencser L.* Convergence Rate of Moments in Stochastic Approximation with Simultaneous Perturbation Gradient Approximation and Resetting // IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, vol. 44, pp. 894–905.
- [93] *Gerencser L., Kozmann G., Vago Z.* SPSA for Non-Smooth Optimization with Application in ECG Analysis // In: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. 1998, Tampa, FL., pp. 3907–3908.
- [94] *Goldenshluger A.V., Polyak B.T.* Estimation of Regression Parameters with an Arbitrary Noise // Mathematical Methods of Statistics, 1993, vol. 2, No. 1, pp. 18–29.
- [95] *Goodwin G.C., Ramandge P.J., Caines P.E.* Discrete Time Stochastic Adaptive Control // SIAM J. Contr. Optimiz., 1981, vol. 19, pp. 829–853.
- [96] *Goodwin G.C., Ninness B., Cockerell P., Salgado M.* Illustration of an Integrated Approach to Adaptive Control // Int. J. Adaptive Control Signal Process, 1990, vol. 4, pp. 149–162.
- [97] *Granichin O.N., Portnov A.* Monochromatic Wave Direction Estimation // In: Proceedings of the 3-rd International Workshop on Model Oriented Data Analysis (MODA-3). St. Petersburg, 1992, pp. 12–13.
- [98] *Granichin O.N.* Stochastic Approximation under Dependent Noises, Detecting Signals and Adaptive Control // In : Proceedings of the 1-st Int. Conf. on "Approximation, Probability and Related Fields", G.Anastassiou and S.T.Rachev eds.. 1994, Plenum, pp. 247–271.
- [99] *Granichin O.N., Portnov A.* Asimptotic–optimality Stochastic Approximation Algorithms with Perturbation on the Input // In: Proceedings of the 2-nd Workshop on Simulation. St. Petersburg, 1996, pp. 322–327.
- [100] *Granichin O.N.* Best Strategy for Robbins-Monro Stochastic Approximation Algorithm // In: Proceedings of the 3-rd St. Petersburg Workshop on Simulation. St. Petersburg, 1998, pp. 428–431.
- [101] *Granichin O.N., Fomin V.N.* Adaptive Control with Test Signals // In: Proceedings of the 6-th St. Petersburg Symposium on Adaptive Systems Theory. St. Petersburg, 1999, vol. 1, pp. 73–78.

- [102] *Granichin O.N., Fomin V.N.* Adaptive Control with Exciting Signals // In: Proceedings of the 4-th Beijing Int. Conf. on System Simulation and Scientific Computing. Beijing, China, 1999, pp. 173–177.
- [103] *Granichin O.N.* Stochastic Approximation with Exciting Perturbation under Dependent Noises // In: Proceedings of the 2-nd Int. Conf. Control of Oscillations and Chaos. St. Petersburg, 2000, vol. 1, pp. 146–149.
- [104] *Granichin O.N.* Unknown Parameters Identification With Excite Test Signals // In: Proceedings of the JSST Int. Conf. on Modeling, Control and Computation in Simulation (JSST'2000). Tokyo, Japan, pp. 248–251.
- [105] *Granichin O.N.* Regression Parameters Estimation Under Arbitrary Noise // In: Proceedings of the 4-th St. Petersburg Workshop on Simulation. St. Petersburg, 2001, pp. 221–226.
- [106] *Györfi L.* Stochastic Approximation from Ergodic Sample for Linear Regression // Z. Wahrscti. Verw. Geb., 1980, vol. 54, pp. 47–55.
- [107] *Guo L.* Stability of Recursive Stochastic Tracking Algorithms // SIAM J.Contr. Optimization, 1994, vol. 32, pp. 1195–1225.
- [108] *Guo L., Ljung L.* Performance Analysis of General Tracking Algorithms // IEEE Transactions on Automatic Control, 1995, vol. 40, No. 8, pp. 1388–1402.
- [109] *Guo L.* Self-Convergence of Weighted Least-Squares with Applications to Stochastic Adaptive Control // IEEE Transactions on Automatic Control, 1996, vol. 41, No. 1, pp. 79–89.
- [110] *Guo L., Ljung L., Wang G-J.* Necessary and Sufficient Conditions for Stability of LMS // IEEE Transactions on Automatic Control, 1997, vol. 42, No. 6, pp. 761–770.
- [111] *Haykin S.*, Neural Networks: A Comprehensive Foundation. New York: Macmillan, 1984.
- [112] *Heydon B.D., Hill S.D., Havermans C.C.* Maximizing Target Damage Through Optimal Aim Point Patterning // In: Proc. AIAA Conf. on Missile Sciences. Monterey, 1998, CA.
- [113] *Hill S.D., Fu M.C.* Transfer Optimization via Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation // In: Proceedings of the Winter Simulation Conference, Alexopoulos C., Kang K., Lilegdon W.R., Goldman D. eds.. 1995, pp. 242–249.

- [114] *Hill S.D., Heydon B.D.* Optimal Aim Point Patterning. Report SSD/PM-97-0448, JHU/APL, Laurel, 1997, MD.
- [115] *Hopkins H.S.* Experimental Measurement of a 4-D Phase Space Map of a Heavy Ion Beam. Ph.D. thesis, Dept. of Nuclear Engineering, University of California (Berkeley), December 1997.
- [116] *Ji X.D., Familoni B.D.* A Diagonal Recurrent Neural Network-Based Hybrid Direct Adaptive SPSA Control System // IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, vol. 44, pp. 1469–1473.
- [117] *Khammash M.* A New Approach to the Solution of the ℓ_1 Control Problem: The Scaled-Q Method // IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, vol. 45, No. 2, pp. 180–187.
- [118] *Kiefer J., Wolfowitz J.* Statistical Estimation on the Maximum of a Regression Function // Ann. Math. Statist., 1952, vol. 23, pp. 462–466.
- [119] *Kleinman N.L., Hill S.D., Ilenda V.A.* SPSA/SIMMOD Optimization of Air Traffic Delay Cost // In: Proceedings of the American Control Conference. 1997, pp. 1121–1125.
- [120] *Krieger A., Masry E.* Convergence Analysis of Adaptive Linear Estimation for Dependent Stationary Processes // IEEE Transactions on Information Theory, 1988, vol. 34, pp. 177–182.
- [121] *Kushner H.J., Clark D.S.* Stochastic Approximation Methods for Constrained and Unconstrained Systems. Berlin–Germany: Springer–Verlag, 1978, 259 p.
- [122] *Kushner H.J., Yin G.G.* Stochastic Approximation Algorithms and Applications. New York: Springer–Verlag, 1997, 415 p.
- [123] *Landau I.D., Karimi A.* A Recursive Algorithm for ARMAX Model Identification in Closed Loop // IEEE Transactions on Automatic Control, 1997, vol. 42, No. 10, pp. 1442–1447.
- [124] *Lai T.L., Wei C.-Z.* Extended Least Squares and Their Applications to Adaptive Control and Prediction in Linear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control, 1986, vol. 31, No. 10, pp. 899–907.
- [125] *Ljung L.* Analysis of Recursive Stochastic Algorithms // IEEE Transactions on Automatic Control, 1977, vol. 22, pp. 551–575.
- [126] *Ljung L.* System Identification Theory for the User. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1986.

- [127] *Ljung L., Guo L.* The Role of Model Validation for Assessing the Size of the Unmodeled Dynamics // IEEE Transactions on Automatic Control, 1997, vol. 42, No. 9, pp. 1230–1239.
- [128] *Luman R.R.* Quantitative Decision Support for Upgrading Complex Systems of Systems. Ph.D. thesis, School of Engineering and Applied Science, 1997, George Washington University.
- [129] *Maeda Y., Kanata Y.* Learning Rules for Reccurent Neural Networks Using Perturbation and their Application to Neuro-control // Transactions of IEE of Japan, 1993, vol. 113–C, pp. 402–408.
- [130] *Maeda Y., Kanata Y.* Extended Adaptive Robbins–Monro Procedure Using Simultaneous Perturbation for a Least-Square Approximation Problem // In: Proceedings of the Asian Control Conference. 1994, pp. 383–386.
- [131] *Maeda Y., Hirano H., Kanata Y.* A Learning Rule of Neural Networks via Simultaneous Perturbation and its Hardware Implementation // Neural Networks, 1995, vol. 8, pp. 251–259.
- [132] *Maeda Y.* Time Difference Simultaneous Perturbation Method // Electronics Letters, 1996, vol. 32, pp. 1016–1018.
- [133] *Maeda Y., De Figueiredo R.J.* Learning Rules for Neuro–Controller via Simultaneous Perturbation // IEEE Transactions on Neural Networks, 1997, vol. 8, pp. 1119–1130.
- [134] *Maeda Y., Nakazawa A., Yakichi K.* Hardware Implementation of a Pulse Density Neural Network Using Simultaneous Perturbation Learning Rule // Analog Intergrated Circuits and Signal Processing, 1999, vol. 18, pp. 153–162.
- [135] *Maryak J.L., Chin D.C.* Stochastic Approximation for Global Random Optimization // In: Proceedings of the American Control Conference. 2000, pp. 3294–3298.
- [136] *Maryak J.L., Smith R.H., Winslow R.L.* Modeling Cardiac Ion Channel Conductivity: Model Fitting Via Simulation // In: Proceedings of the Winter Simulation Conference, Medeiros D.J., Watson E.F. eds.. 1998, pp. 1587–1590.
- [137] *Mostaghimi M.* Monetary Policy Simulation Using SPSA-Based Neural Networks // In: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. 1997, pp. 492–497.

- [138] *Najim K., Rusnak A., Meszaros A., Fikar M.* Constrained Long-Range Predictive Control Based on Artificial Neural Networks // Int. J. of Systems Science, 1997, vol. 28, pp. 1211–1226.
- [139] *Nechyba M.C., Xu Y.* Human–Control Strategy: Abstraction, Verification, and Replication // IEEE Control Systems Magazine, 1997, vol. 17(5), pp. 48–61.
- [140] *Pflug G.Ch.* Optimization of Stochastic Models: The Interface Between Simulation and Optimization. Kluwer, Academic, Boston, 1996.
- [141] *Polyak B.T., Tsybakov A.B.* On Stochastic Approximation with Arbitrary Noise (the KW Case) // In: Topics in Nonparametric Estimation, Khasminskii R.Z. ed., Advances in Soviet Mathematics, Amer. Math. Soc.. Providence, 1992, No. 12, pp. 107–113.
- [142] *Poznyak A.S.* Estimating the parameters of autoregressive processes by the method of least squares // Int. J. Syst. Sci., 1980, vol. 11, pp. 577–588.
- [143] *Preskill J.* Quantum Information and Computation. [Online]. <http://www.theory.caltech.edu/~preskill/ph229>.
- [144] *Rezayat F.* On the Use of an SPSA-based Model-free Controller in Quality Improvement // Automatica, 1995, vol. 31, pp. 913–915.
- [145] *Rezayat F.* Constrained SPSA Controller for Operations Processes // IEEE Transactions on Systems, Man., and Cybernetics. A, 1999, vol. 29, pp. 645–649.
- [146] *Rice J.A.* Mathematical Statistics and Data Analysis. Belmont: Duxbury Press, CA, 1995.
- [147] *Robbins H., Monro S.* A Stochastic Approximation Method // Ann. Math. Statist., 1951, vol. 22, pp. 400–407.
- [148] *Robbins H., Siegmund D.* A Convergence Theorem for Nonnegative Almost Super–martingales and Some Applications // In: Optimizing Methods in Statistics, Rustagi J.S. ed.. New York: Academic Press, 1971, pp. 233–257.
- [149] *Ruppert D.* Stochastic Approximation // In: Handbook in Sequential Analysis, Ghosh B.K., Sen P.K. eds.. New York: Marcel Dekker, 1991, pp. 503–529.
- [150] *Sadegh P.* Constrained Optimization via Stochastic Approximation with a Simultaneous Perturbation Gradient Approximation // Automatica, 1997, vol. 33, pp. 889–892.

- [151] *Sadegh P., Spall J.C.* Optimal Sensor Configuration for Complex Systems // In: Proceedings of the American Control Conference. 1998, pp. 3575–3579.
- [152] *Sadegh P., Spall J.C.* Optimal Random Perturbations for Stochastic Approximation using a Simultaneous Perturbation Gradient Approximation // IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, vol. 43, No. 10, pp. 1480–1484.
- [153] *Saridis G.M., Stein G.* A New Algorithm for Linear System Identification // IEEE Transactions on Automatic Control, 1968, vol. AC–13, No. 4, pp. 592–584.
- [154] *Saridis G.M., Lobbia R.N.* Parameter Identification and Control of Linear Discrete-time System // IEEE Transactions on Automatic Control, 1972, vol. AC–17, No. 1, pp. 52–60.
- [155] *Saridis G.M., Lobbia R.N.* Comment on "Parameter Identification and Control of Linear Discrete-time System" // IEEE Transactions on Automatic Control, 1975, vol. AC–20, No. 3, p. 442.
- [156] *Schweppe F.C.* Uncertain Dynamic Systems. Prentic–Hall, 1973, 563 p.
- [157] *Shor P.W.* Quantum Computing // In: Proceedings of the 9-th Int. Math. Congress. Berlin, 1998, www.math.nine.edu/documenta/xvol-icm/Fields/Fields.html.
- [158] *Sokolov V.F.* Adaptive Suboptimal Control of a Linear System with Bounded Disturbances // Systems Control Letters, 1985, vol. 6, pp. 93–98.
- [159] *Sokolov V.F.* Adaptive ℓ_1 Robust Control for SISO Systems // Systems Control Letters, 2001, vol. 42, pp. 379–393.
- [160] *Spall J.C.* A Stochastic Approximation Technique for Generating Maximum Likelihood Parameter Estimates // In: Proceedings of the American Control Conference. 1987, pp. 1161–1167.
- [161] *Spall J.C.* Multivariate Stochastic Approximation Using a Simultaneous Perturbation Gradient Approximation // IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, vol. 37, pp. 332–341.
- [162] *Spall J.C., Cristion J.A.* Nonlinear Adaptive Control Using Neural Networks: Estimation Based on a Smoothed Form of Simultaneous Perturbation Gradient Approximation // Statistica Sinica, 1994, vol. 4, pp. 1–27.

- [163] *Spall J.C., Cristion J.A.* A Neural Network Controller for Systems with Unmodeled Dynamics with Applications to Wastewater Treatment // IEEE Transactions on Systems, Man., and Cybernetics. B, 1997, vol. 27, pp. 369–375.
- [164] *Spall J.C.* A One–Measurement Form of Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation // Automatica, 1997, vol. 33, pp. 109–112.
- [165] *Spall J.C.* Accelerated Second–Order Stochastic Optimization Using Only Function Measurements // In: Proceedings of the 36-th IEEE Conference on Decision and Control. 1997, pp. 1417–1424.
- [166] *Spall J.C., Chin D.C.* Traffic–Responsive Signal Timing for System–Wide Traffic Control // Transp. Res., Part C, 1997, pp. 153–163.
- [167] *Spall J.C.* Implementation of the Simultaneous Perturbation Algorithm for Stochastic Optimization // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1998, vol. 34, pp. 817–823.
- [168] *Spall J.C.* An Overview of the Simultaneous Perturbation Method for Efficient Optimization // Johns Hopkins APL Technical Digest, 1998, vol. 19, pp. 482–492, <http://techdigest.jhuapl.edu/td/td1904/spall.pdf>.
- [169] *Spall J.C., Cristion J.A.* Model–Free Control of Nonlinear Stochastic Systems with Discrete–Time Measurements // IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, vol. 43, pp. 1198–1210.
- [170] *Spall J.C.* Adaptive Stochastic Approximation by the Simultaneous Perturbation Method // IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, vol. 45, No. 10 , pp. 1839–1853.
- [171] *Vidyasagar M.* Statistical Learning Theory and Randomized Algorithms for Control // IEEE Control Systems , 1998, No 12, pp. 69–85.
- [172] *Wang I.-J., Chong E.* A Deterministic Analysis of Stochastic Approximation with Randomized Directions // IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, vol. 43, pp. 1749–1749.
- [173] *Weiner N.* The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Application. New York: Technology Press and Wiley, 1949.
- [174] *White H.* Artificial Neural Networks. Oxford: Blackwell, UK, 1992.
- [175] *Young P.C.* Recursive Estimation and Time-Series Analysis. An Introduction. Berlin–Heidelberg: Springer, 1984.