

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
171 группа, осень 2011 года

1. Аксиомы вещественных чисел. Следствие аксиомы непрерывности.
2. Следствия аксиом сложения, умножения и дистрибутивности.
3. Следствия аксиом порядка.
4. ! Супремум и инфимум. Определение и теорема существования.
5. Индуктивные множества и натуральные числа. Принцип математической индукции.
6. Свойства натуральных чисел.
7. Принцип Архимеда.
8. Неравенство Бернулли.
9. Определение модуля, корня и степени с рациональным показателем.
10. Определение степени с произвольным показателем и логарифма.
11. ‡ Теорема о вложенных отрезках.
12. ‡ Теорема Бореля–Лебега.
13. ! Предельные точки. Теорема Больцано–Вейерштрасса.
14. ! Два определения предела последовательности. Примеры.
15. Простейшие свойства предела последовательности.
16. Арифметические действия над пределами последовательности.
17. Теорема о предельном переходе в неравенствах. Следствия.
18. Теорема о двух милиционерах.
19. ! Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.
20. ! Монотонные последовательности. Теорема о существовании предела. Пример.
21. ! Бесконечно большие последовательности. Бесконечные пределы. Свойства.
22. Арифметические действия в $\overline{\mathbb{R}}$.
23. ! Определение числа e .
24. Неравенства с числом e и неравенства с логарифмами.
25. ‡ Подпоследовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Аналог для неограниченных последовательностей.
26. ‡ Частичные пределы. Верхний и нижний пределы.
27. Две теоремы об условиях равносильных существованию предела последовательности.
28. Теорема Штольца.
29. Следствия теоремы Штольца.
30. ! Окрестности, проколотые окрестности. Определения предела функции.
31. ‡ Равносильность определения предела по Коши и по Гейне.
32. Теорема об элементарных свойствах предела. Арифметические действия с пределами.
33. ‡ Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах.
34. ‡ Модификация теоремы о равносильности определения предела по Коши и по Гейне. Критерий Коши для предела функции.
35. Монотонные функции. Существование предела монотонной функции. Теорема о пределе композиции функций.
36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.
37. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ и $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$.
38. ! Определения непрерывности функции в точке. Пределы слева и справа. Непрерывности слева и справа. Точки разрыва. Примеры.
39. Арифметические действия с непрерывными функциями. Теорема о стабилизации знака. Теорема о непрерывности композиции.
40. ! Теорема Вейерштрасса.
41. Равномерная непрерывность функции. Примеры непрерывных функций, не являющихся равномерно непрерывными.
42. Теорема Кантора.

43. ! Теорема Больцано–Коши.
44. Лемма о характеристике промежутков. Теорема о непрерывном образе промежутка.
45. Теорема о непрерывности монотонной и обратной функций.
46. Непрерывность элементарных функций.
47. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$.
48. ! O и o символика. Эквивалентные функции. Связь между эквивалентностью и o . Запись замечательных пределов с помощью эквивалентности и o .
49. ! Теорема о единственности многочлена Тейлора. Определение и критерий дифференцируемости функции в точке.
50. Левая и правая производные. Бесконечные производные. Примеры. Непрерывность дифференцируемой функции.
51. Теорема о дифференцируемости композиции.
52. Арифметические действия с дифференцируемыми функциями. Дифференцируемость обратной функции.
53. ! Производные элементарных функций.
54. Теоремы Ферма и Ролля.
55. Теоремы Лагранжа и Коши. Следствие.
56. Правило Лопиталья для неопределенности $\frac{0}{0}$.
57. Правило Лопиталья для неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$. Примеры.
58. Определение производной n -го порядка. Односторонние производные. Включение $C^{n+1}(E) \subset C^n(E)$.
59. Арифметические свойства производных n -го порядка. Формула Тейлора для многочленов.
60. ! Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.
61. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.
62. ! Формулы Тейлора для e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^p$. Бином Ньютона.
63. Теорема об оценке разности между функцией и многочленом Тейлора. Иррациональность числа e .
64. ! Монотонные функции. Условия монотонности функций. Следствия.
65. ! Локальные максимумы и минимумы. Необходимое условие экстремума.
66. ! Достаточные условия экстремума в терминах первой и второй производных.
67. Теорема Дарбу. Следствия.
68. Теорема о дифференцируемости параметрически заданной функции.
69. Выпуклые и вогнутые функции. Лемма о трех хордах. Следствия.
70. Критерии выпуклости в терминах первой и второй производных. Примеры.
71. ! Определение первообразной и неопределенного интеграла. Общий вид первообразной. Примеры функций не имеющих первообразную.
72. Первообразные функций, заданных не на интервале.
73. Таблица интегралов. Линейность интегралов.
74. Теоремы о замене переменной в неопределенном интеграле. Примеры.
75. Формула интегрирования по частям. Примеры.
76. ! Определение и единственность интеграла Римана.
77. Необходимое условие интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции.
78. Достаточное условие интегрируемости.
79. Интегрируемость функции, непрерывной всюду, за исключением конечного множества точек. Интегрируемость монотонной функции.
80. ! Суммы Дарбу. Связь с суммами Римана.
81. Критерии интегрируемости функции (с суммами Дарбу и с колебаниями функции).

Примечания.

Знание вопросов, помеченных знаком !, НЕОБХОДИМО для сдачи экзамена.

Для сдавших коллоквиум первые 10 вопросов исключаются, кроме 4-го вопроса (помеченного !).

Для хорошо сдавших коллоквиум из первых 35 вопросов остаются только вопросы, помеченные ! или ‡.