

Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

ПОМЫТКИН Сергей Павлович

ЭНДОХРОННАЯ ТЕОРИЯ НЕУПРУГОСТИ
ДЛЯ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ И ПОВОРОТОВ

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2013

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном
технологическом университете растительных полимеров

Научный консультант – доктор физико-математических наук, профессор
КАДАШЕВИЧ Юлий Исаакович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
ТРУСОВ Петр Валентинович
(Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, заведующий кафедрой)

доктор физико-математических наук, профессор
ГРЕКОВ Михаил Александрович
(Санкт-Петербургский государственный
университет, профессор)

доктор физико-математических наук, профессор
БОНДАРЬ Валентин Степанович
(Московский государственный машиностроительный
университет «МАМИ», заведующий кафедрой)

Ведущая организация – Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет

Защита состоится ” 26 ” сентября 2013 года в 14.00 часов на заседании
диссертационного совета Д. 212.232.30 по защите докторских и кандидатских
диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по
адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28,
математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Горького
Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034,
Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан « _____ » _____ 2013г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор

Кустова Е.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы и цель работы. Общая проблема описания и прогнозирования поведения материалов при больших неупругих деформациях в последнее время приобретает большое научное и прикладное значение. Это вызвано как сиюминутными потребностями современной инженерно-технологической практики по расчетам интенсивного формоизменения материалов, так и эволюционным развитием фундаментальных представлений механики деформируемого твердого тела.

Процессы, протекающие в материалах при больших деформациях, широко применяются в технологиях прокатки, штамповки, гидроэкструзионного выдавливания, формования, в инициации фазовых превращений и изменении структуры материала методами интенсивного пластического деформирования, в задачах геомеханики.

Несмотря на весьма значительное число работ в нашей стране и за рубежом по конечным деформациям, разработка теорий больших неупругих деформаций и определяющих соотношений на их основе, по-прежнему, представляет и прикладную значимость для инженеров-практиков и принципиальный теоретический интерес исследователей в рамках процесса естественного развития механики сплошных сред.

Феноменологическое моделирование больших неупругих деформаций традиционно осуществляется в рамках теорий течения и упругопластических процессов и намного реже с применением эндохронных подходов, несмотря на определенные преимущества эндохронного метода. И, если классическую эндохронную теорию Валаниса неоднократно пытались обобщить на область конечных деформаций, то тензорно-параметрические варианты неупругости эндохронного типа в геометрически нелинейных постановках ранее не предлагались, и их отсутствие в некоторой степени обедняло процесс пополнения знаний о конечных деформациях в целом.

Поэтому формулировка эндохронной теории неупругости тензорно-параметрического типа для больших деформаций, учитывающей, в том числе, и временные явления, оказывается одной из фундаментальных проблем современной механики деформируемого твердого тела. Тем самым тему диссертационной работы можно считать актуальной.

Научная новизна. Развивая представления о взаимосвязи уравнений теории течения с теориями без поверхности текучести, четко изложена схема перехода от уравнений теории пластического течения с изотропно-кинематическим упрочнением к определяющим соотношениям теорий-спутников, не опирающихся на понятие поверхности текучести. Предложена конкретизация тензорно-параметрических уравнений Кадашевича-Михайлова в дифференциальной форме на случай малых неупругих деформаций, включая и учет временных явлений, проявляющихся при деформировании материалов. Новые определяющие соотношения теории неупругости эндохронного типа

обобщают ряд классических теорий течения и некоторые варианты эндохронной теории Валаниса.

В научный оборот введены два новых семейства определяющих соотношений тензорно-параметрического типа, справедливые для неклассических интервалов изменения параметров эндохронности, а их предельные варианты отличаются от традиционных. Предложены новые эндохронные уравнения для объемных составляющих тензоров, входящих в уравнения теории. Для всех соотношений представлен метод определения констант и функций материала, включая и уравнения с учетом времени.

В рамках классических представлений о кинематике сплошной среды выбран метод обобщения определяющих соотношений теории неупругости эндохронного типа на область больших деформаций и поворотов. Используемая схема исключения поворотов устраняет проблему выбора типа объективной производной для пространственных тензоров. При материальном дифференцировании приведенных тензоров с исключенным поворотом автоматически генерируется коротационная производная Грина-Нахди. Впервые четко отмечается, что в процессе обобщения необходимо вводится новая мера деформации, не входящая в классическое семейство деформаций Хилла. Эта мера деформации энергетически сопряжена по мощности с тензорами напряжений Коши и Кирхгофа, порождается коротационной производной Грина-Нахди и определяется решением дифференциального уравнения при естественных начальных условиях.

В рамках подхода сформулированы новые геометрически нелинейные тензорно-параметрические определяющие соотношения теории неупругости без поверхности текучести. Предложенные уравнения распространены на случаи, учитывающие временные явления, протекающие в неупруго деформируемых материалах.

Систематический анализ структуры собственного ортогонального тензора поворота и способов его вычисления позволил предложить оригинальный метод его построения.

Достоверность результатов. Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечена корректным использованием общепринятых фундаментальных представлений механики деформируемого твердого тела, строгого математического аппарата и хорошо апробированных численных методов. Обнаруженные в работе теоретические закономерности соответствуют имеющимся физико-механическим представлениям о развитии деформаций и напряжений на простых и сложных траекториях нагружения и деформирования, не противоречат данным, полученным другими авторами. Результаты диссертации в предельных случаях совпадают с результатами классических теорий неупругости, а при количественных расчетах хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Практическая значимость работы. Предложенные в работе варианты моделей неупругости, соответствующие им определяющие соотношения и

методики их интегрирования могут быть основой при создании алгоритмов и прикладных программ в практике расчетов напряженно-деформированного состояния деталей машин и элементов конструкций.

Сформулированные геометрически нелинейные эндохронные уравнения могут быть наиболее полезны в случаях, когда упругие деформации малы, а неупругие – большие, когда в опытах практически невозможно разделить деформацию на упругую и неупругую составляющие.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались:

на The 1-st International Symposium of Ukrainian Mechanical Engineers in Lviv (1993, Lviv, Ukraine),

на International Conference «Asymptotic in Mechanics» (1994, Saint-Petersburg),

на The 3-rd International Conference on Mathematical Modeling and Computer Simulation of Material Technologies (2004, Ariel, Israel),

на The 458-th EUROMECH Colloquium «Advanced Methods in Validation and Identification of Nonlinear Constitutive Equations in Solid Mechanics» (2004, Moscow),

на The 2-nd International Symposium «Physics and Mechanics of Large Plastic Strains» (2007, Saint-Petersburg),

на 1-й, 4-й, 5-й, 6-й и 7-й международных конференциях «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения» (Санкт-Петербург, 1995г., 2001г., 2003г., 2005г., 2008г.),

на «Новожиловских чтениях» (1997г., Санкт-Петербург),

на 2-ом международном семинаре «Современные проблемы прочности» имени В.А.Лихачева. (1998г., Старая Русса),

на 35-ом (1999г., Псков), 36-ом (2000г., Витебск), 38-ом (2001г., Санкт-Петербург), 44-ом (2005г., Вологда), 45-ом (2006г., Белгород) семинарах «Актуальные проблемы прочности»,

на 47-й (2008г., Нижний Новгород), 49-й (2010г., Киев), 50-ой (2010г., Витебск) международной конференции «Актуальные проблемы прочности»,

на 19-ой конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов» (2001г., Санкт-Петербург),

на 3-й научно-технической конференции «Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии» (2002г., Тула),

на VIII (2001г., Пермь) и IX (2006г., Нижний Новгород) Всероссийских съездах по теоретической и прикладной механике,

на 6-ом международном симпозиуме «Современные проблемы пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела» (2006г., Тверь),

на 5-ой и 6-ой международных конференциях по механике «Поляховские чтения» (Санкт-Петербург, 2009г., 2012г.),

на научно-технической конференции «Прикладные аспекты механики сплошной среды в кораблестроении», посвященной 100-летию со дня рождения академика В.В.Новожилова (2010г., Санкт-Петербург),

на международном научном симпозиуме по проблемам механики деформируемых тел, посвященном 100-летию со дня рождения А.А.Ильюшина (2011г., Москва).

В полном объеме результаты диссертации докладывались на объединенном семинаре Санкт-Петербургского государственного университета и Петербургского государственного университета путей сообщения «Компьютерные методы в механике сплошной среды» (2009г., руководители – профессор Е.Ф.Жигалко и доцент А.Л.Смирнов); на семинаре академика РАН Н.Ф.Морозова в Институте проблем машиноведения РАН (2009г.); на объединенном семинаре академика РАН И.Г.Горячевой, члена-корреспондента РАН Е.В.Ломакина и профессора В.В.Александрова механико-математического факультета Московского государственного университета (2009г.); на семинаре кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (2013г., руководитель – академик РАН Н.Ф.Морозов).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 67 печатных работах, включая 25 статей в изданиях, рекомендованных перечнем ВАК. Список 50 основных публикаций приведен в автореферате.

Среди научных работ, выполненных в соавторстве, автору принадлежат:

в [4] и [7] вариант закона уплотнения, расчет трехосного сжатия материала, участие в обсуждении результатов исследования и написании статей;

в [14] решение задачи изохорического растяжения и выявление областей неустойчивости решения в зависимости от компонент тензора градиента деформации;

в [15] вариант уравнений эндохронной теории, учитывающий временные эффекты и условия зарождения управляемых осцилляций напряжений при активном деформировании;

в [16] и [18] постановка задачи, определение условий возникновения и развития немонотонностей неупругого поведения материала и все расчеты;

в [25] решение задач простого и двойного сдвига по обобщенной мере деформации Трусделла-Нолла;

в статьях [27] и [30] уравнения эндохронной теории неупругости, определение констант и функций материалов, использовавшихся при решении краевых задач;

в [35] вычисление меры деформации при жестком двойном сдвиге;

в [44] условия, при которых возникает прогнозируемое периодическое развитие деформаций при мягком активном нагружении, выполнение расчета и участие в обсуждении результатов.

в статье [48] метод построения ортогонального тензора поворота по схеме кососимметрического тензора и вычисление ортогональных тензоров поворота для задач жесткого двойного и тройного сдвига.

В работах [5], [9], [10], [12], [13], [19], [32], [33], [49] автор является основным исполнителем, а соавтор осуществлял научное консультирование в обсуждении результатов.

В остальных работах, опубликованных в соавторстве, автору принадлежат постановка задачи, итоговые рабочие уравнения, разработка методик и алгоритмов вычислений, написание и отладка программ расчетов, выполнение численных экспериментов и графическое представление полученных данных, участие в обсуждении результатов исследования, в формулировках основных положений и выводов исследований, определяющих новизну и научное значение полученных результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка цитируемой литературы и трех приложений к главам. Работа изложена на 327 страницах, включая 122 рисунка, 1 таблицу и библиографический список из 368 источников.

Поддержка. Исследования автора на разных этапах работы частично и в полном объеме поддерживались при выполнении следующих НИР: гранты РФФИ № 94-01-01506 «Эндохронная теория вязкопластичности», № 95-01-00992 «Решение краевых задач и учет конечных деформаций в рамках эндохронной теории неупругости», № 97-01-01169 «Теория неупругости, учитывающая уплотнение материала», № 99-01-00667 «Эндохронная теория пластичности уплотняемых твердых тел», № 03-01-00770 «Обобщенная эндохронная теория пластичности, учитывающая большие (конечные) деформации», № 05-01-00169 «Эндохронная теория вязкопластичности, учитывающая большие (конечные) деформации», № 08-01-00036 «Терморазрушение в рамках эндохронной теории неупругости при учете конечных деформаций», № 10-01-00705 «Исследование эффектов второго порядка в рамках эндохронной теории неупругости для больших деформаций»; грант Министерства образования Российской Федерации Е-02-4.0-158 «Теория ползучести, учитывающая физическую и геометрическую нелинейность поведения материала».

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** кратко излагаются основные этапы в развитии теорий больших неупругих деформаций. Отмечаются успехи учеников и последователей А.А.Ильюшина, результаты пермских и киевских исследователей, подходы тульской школы механики, работы ученых Новосибирска и Дальнего Востока, статьи зарубежных авторов. Констатируется, что при значительном числе работ в области конечных деформаций ряд принципиальных теоретических и экспериментальных проблем, по-прежнему, остается нерешенным. Напоминается о преимуществах эндохронного подхода перед теориями течения и теорией упругопластических процессов при их экстраполяции на область больших деформаций и поворотов. Обосновывается актуальность темы диссертации, и ставятся цели

исследования. Указывается ряд ограничений, в рамках которых проводилось исследование (изотропность материала, изотермичность процессов и т.п.). Перечисляются результаты исследования, выносимые на защиту. Вводятся некоторые обозначения, применяемые в тексте диссертации.

В первой главе рассматриваются эндохронные варианты теории неупругости для малых деформаций. Представлен краткий исторический обзор этапов развития эндохронных теорий, отмечены достоинства и недостатки подхода, описаны существующие возможности теории, включая и варианты, учитывающие временные эффекты.

Указано, что в основу дальнейших модельных построений автора положен дифференциальный тензорно-параметрический подход, предложенный Кадашевичем. Приведены связи и методика перехода от теорий пластического течения с изотропно-кинематическим упрочнением к тензорно-параметрическим эндохронным моделям неупругости без поверхности текучести. Выбран конкретный вариант теории неупругости тензорно-параметрического типа без поверхности текучести в виде

$$\frac{\sigma}{2G} + \frac{\alpha\tau}{2G} \frac{d\sigma}{|dr|} = \tau \frac{dr}{|dr|} + \frac{r}{g + \alpha}, \quad K \cdot \varepsilon_0 = \sigma_0, \quad (1)$$

или

$$\varepsilon + \alpha\tau \frac{d\varepsilon}{|dr|} = \tau \frac{dr}{|dr|} + \frac{1+g}{g + \alpha} \cdot r, \quad (2)$$

$$r = \varepsilon - (1 - \alpha) \frac{\sigma}{2G}, \quad (2)$$

$$\tau = \tau(r), \quad g = g(r), \quad |dr| = \sqrt{dr:dr}. \quad (3)$$

Здесь ε , σ и r – девиатор тензора деформаций, действующих напряжений и параметрического тензора, соответственно, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}$, $\sigma_0 = \sigma_{ii}$, G – модуль сдвига, K – объемный модуль. Неотрицательный безразмерный параметр τ – аналог «деформационного» предела текучести – того значения деформации на экспериментальной одноосной кривой деформирования, которое соответствует началу пластического течения материала, а безразмерная величина g характеризует упрочнение (разупрочнение) материала в процессе неупругого нагружения или деформирования. Малый параметр $0 < \alpha \leq 1$, входящий в определение параметрического тензора r , – параметр эндохронности.

Решение уравнений (1) при активном одноосном нагружении имеет вид

$$\sigma = \frac{2G g \tau}{g + \alpha} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{r}{\alpha \tau}\right) \right) + \frac{2G}{g + \alpha} r. \quad (4)$$

Коэффициенты в определяющих соотношениях (1) таковы, что решение (4) выходит на асимптоту

$$\sigma = \frac{2G}{1+g} \varepsilon + \frac{2G g \tau}{1+g}, \quad (5)$$

единую для любого значения параметра эндохронности α .

Деформации в (1) не разделяются на упругие и неупругие составляющие. Член уравнения (1), содержащий множителем параметр эндохронности, лишает теорию понятия поверхности текучести. Соотношения (1) единообразно работают при активном и нейтральном нагружении, а также при разгрузке, и привлекать дополнительные условия, как это требуется при разгрузке материала в теории течения, нет необходимости. Константы G и K , также как и функции материала $\tau = \tau(r)$ и $g = g(r)$ определяются экспериментально.

Представлены предельные случаи определяющих соотношений (1) – (3). Показано, что уравнения (1) – (3) обобщают ряд вариантов классической эндохронной теории Валаниса и тензорно-линейных теорий пластического течения.

Наряду с (1), (2) предложено два новых класса тензорно-параметрических определяющих соотношений эндохронного типа, работающие в иных интервалах изменения параметров эндохронности и имеющие нетрадиционные относительно исходных предельные случаи. Например,

$$\frac{\sigma}{2G} + \frac{\mu\tau}{2G} \frac{d\sigma}{|dr|} = \tau \frac{dr}{|dr|} + \frac{1}{(1+g)\mu-g} \cdot r, \quad (1')$$

$$\varepsilon + \mu\tau \frac{d\varepsilon}{|dr|} = \tau \frac{dr}{|dr|} + \frac{1+g}{(1+g)\mu-g} \cdot r,$$

$$r = \frac{\sigma}{2G} - (1-\mu)\varepsilon, \quad \mu > \frac{g}{1+g}. \quad (2')$$

Особенность уравнений (1'), (2') в том, что при значениях параметра эндохронности $\mu \rightarrow 1$ параметрический тензор r приближается к тензору упругих деформаций, а в уравнениях (1), (2) при $\alpha = 0$ тензор r вырождается в тензор пластических деформаций.

Более того, ввиду положительности напряжений и деформаций при одноосном активном нагружении, соотношения (1'), (2') преобразуются в

$$\frac{\sigma}{2G} - \frac{\mu\tau}{2G} \frac{d\sigma}{|dr|} = -\tau \frac{dr}{|dr|} - \frac{1}{(1+g)\mu-g} \cdot r, \quad (1'')$$

$$\varepsilon - \mu\tau \frac{d\varepsilon}{|dr|} = -\tau \frac{dr}{|dr|} - \frac{1+g}{(1+g)\mu-g} \cdot r,$$

$$r = \frac{\sigma}{2G} - (1-\mu)\varepsilon, \quad \mu < \frac{g}{1+g}. \quad (2'')$$

Решение уравнений (1') при одноосном нагружении

$$\sigma = \frac{2Gg\tau(\mu-1)}{(1+g)\mu-g} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{r}{\mu\tau}\right) \right) + \frac{2G}{(1+g)\mu-g} r$$

также выходит на асимптоту (5).

Для учета временных эффектов, проявляющихся при неупругом деформировании материалов, выбран основной вариант определяющих

соотношений без поверхности текучести (1) – (3), в котором

$$\tau = \tau(r, \dot{r}), \quad g = g(r, \dot{r}), \quad \alpha = \alpha(r, \dot{r}), \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{dr}{dt} : \frac{dr}{dt}}. \quad (6)$$

Рассмотрены вопросы, связанные с объемными компонентами тензоров напряжений и деформаций. Предложены эндохронные уравнения, учитывающие уплотнение (разрыхление) материала в виде

$$\sigma_0 + \eta \frac{d\sigma_0}{|dr|} = \frac{1}{\beta} \cdot \sigma_0 \cdot \frac{dr_0}{|dr|}, \quad r_0 = \varepsilon_0 - \frac{k_1}{K} \sigma_0. \quad (7)$$

Здесь η – параметр эндохронности, k_1 и β – константа и функция материала. На основе уравнений (1) – (3), (7) решены задачи о мягком простом сдвиге и трехосном пропорциональном сжатии ($\sigma_1 < 0, \sigma_2 = \sigma_3 = m \cdot \sigma_1$). Получены, в частности, экспериментально наблюдаемые зависимости среднего удлинения ε_0 от осевой деформации ε_1 (рис.1).

Здесь же предложены два новых типа уравнений эндохронной теории неупругости, учитывающие взаимное влияние сдвиговых и объемных составляющих тензоров напряжений и деформаций.

Указывается набор базовых экспериментов и методы нахождения констант и функций материала, входящих в определяющие соотношения теорий (1) – (3) и (1), (2), (6). Рассмотрим экспериментальную

одноосную кривую $\sigma \sim \varepsilon$ деформирования дюралюминия, взятую из работы И.М.Коровина (МТТ. 1964. №3). Для соотношений (4) при $r \rightarrow 0$ следует, что

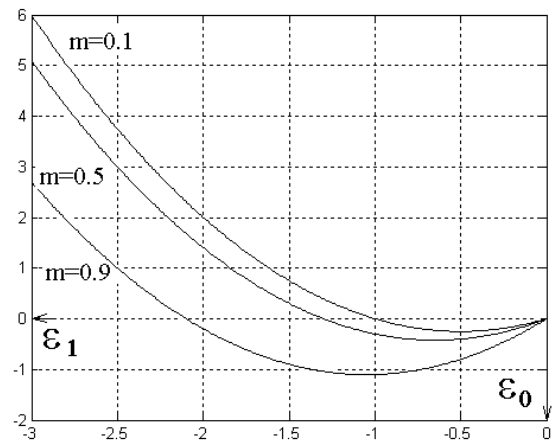


Рис.1.

одноосную кривую $\sigma \sim \varepsilon$ деформирования дюралюминия, взятую из работы И.М.Коровина (МТТ. 1964. №3). Для соотношений (4) при $r \rightarrow 0$ следует, что $d\sigma/d\varepsilon = 2G$, и тангенс угла наклона участка упругости Ψ на кривой $\sigma \sim \varepsilon$ (рис.2.) дает значение параметра $2G$. Тогда точка A , отсекаемая асимптотой (5) на оси напряжений, равна величине $(2G g \tau)/(1 + g)$, а тангенс угла наклона асимптоты $tg \gamma$ равен $(2G)/(1 + g)$, откуда

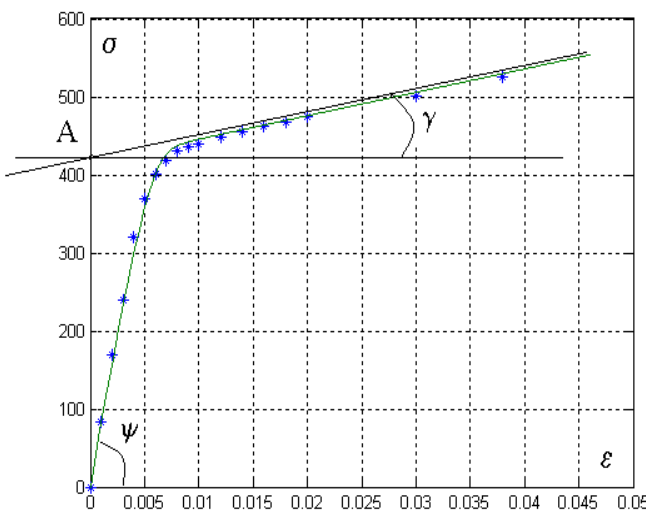


Рис.2.

получаются экспериментальные значения параметров τ и g . Для нахождения параметра эндо-

хронности α на переходном этапе от упругого участка графика к установившемуся течению с упрочнением выбирается любая экспериментальная точка $(\varepsilon_*, \sigma_*)$ и вычисляется значение искомого параметра

$$\alpha = \frac{\frac{\sigma_*}{2G} - \varepsilon_*}{\tau \cdot \ln \left[1 - \frac{\sigma_* (1 + g) - 2G \varepsilon_*}{2G g \tau} \right] + \frac{\sigma_*}{2G}}. \quad (8)$$

Получилось, что $2G = 80000$ МПа, $g = 25$, $\tau = 0.0054$, $\alpha = 0.183$.

Для определения зависимостей (6) рассмотрим, например, одноосные кривые $\sigma \sim \varepsilon$ для образцов из нержавеющей стали 304 (AISI), полученные Е.Кремплом (J. Mech. Phys. Sol. 1979. N5-6) при скоростях деформирования $\dot{\varepsilon} = 10^{-8}$, $\dot{\varepsilon} = 10^{-5}$ и $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}$ (рис.3).

Вычисляя по (4), (5) и (8) для разных скоростей деформирования параметры $2G$, g , τ и α , составим табл.1. Аппроксимируя

зависимости τ и α от $\dot{\varepsilon}$ функциями вида

$$\tau = \tau_0 + k_0 \cdot \lg(\dot{\varepsilon} / \dot{\varepsilon}_0) \quad \text{и}$$

$$\alpha = \alpha_0 + m_0 \cdot \lg(\dot{\varepsilon} / \dot{\varepsilon}_0)$$

получим при $\dot{\varepsilon}_0 = 10^{-8}$

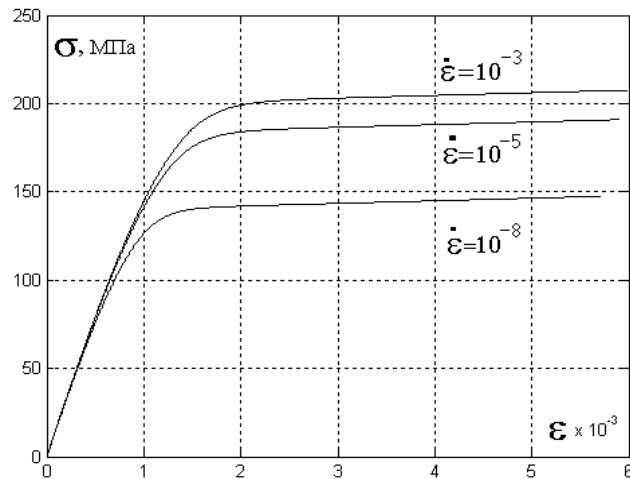


Рис.3.

следующие значения $\tau_0 = 8,2 \times 10^{-4}$, $k_0 = 7 \times 10^{-5}$ и $\alpha_0 = 0,11$, $m_0 = 0,01$.

$\dot{\varepsilon}^{\bullet}$, сек ⁻¹	$2G$, ГПа	g	τ , $\times 10^{-4}$	α
10^{-8}	167	110	8,2	0,11
10^{-5}	167	110	10,3	0,14
10^{-3}	167	110	11,7	0,16

Табл.1. Значения параметров теории для стали AISI 304 (по Кремплу).

Во **второй** главе описана модель деформирования сплошной среды и представлена кинематика больших деформаций. Предполагается, что в каждый момент времени t тело V занимает в трехмерном евклидовом пространстве R^3 некоторую замкнутую область $K(t)$, а каждая материальная частица M в этот момент занимает определенную точку области $K(t)$. Область среды, занимаемая телом V в начальный момент времени $t = 0$, называется начальной

(исходной) конфигурацией K_0 , а области $K(t_0)$ и $K(t)$ в отсчетный t_0 и текущий t моменты времени – отсчетной (базовой) и текущей (актуальной) конфигурациями, соответственно. При движении среды конфигурация непрерывно меняется. Тогда в отсчетный момент времени t_0 положение материальной частицы M определяется единственным образом радиус-вектором $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$, относительно заданной в R^3 лабораторной системе координат, а в текущий момент времени t – радиус-вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Тогда деформирование тела определяется законом движения

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t). \quad (9)$$

Предполагается, что отображение (9) отсчетной конфигурации в актуальную взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо, тогда существует обратное отображение $\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t)$, причем якобиан преобразования $J = \det |\partial x_i / \partial X_j|$ положителен и конечен. По традиции вводится несимметричный тензор – градиент деформации

$$F = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}. \quad (10)$$

По теореме о полярном разложении градиент деформации F единственным образом представляется в виде произведения собственного ортогонального тензора поворота R : $R^T = R^{-1}$, $\det R = 1$ и положительно определенного симметричного тензора U или V : $U^T = U$ и $V^T = V$.

$$F = R \cdot U = V \cdot R. \quad (11)$$

Ортогональный тензор R характеризует жесткие повороты, сопровождающие деформацию частицы среды, а правый U и левый V тензоры удлинения полностью характеризуют процесс чистой деформации, причем U независимо от задания R , а V – только при заданном R , так как

$$V = R \cdot U \cdot R^T \quad \text{и} \quad U = R^T \cdot V \cdot R, \quad (12)$$

Соотношение (10) означает, что тензор V можно получить из тензора U операцией поворота, а U – из V операцией исключения поворота.

В каждой материальной точке отображение (9) через градиент деформации (10) и полярное разложение (11) определяет две ортонормированные триады: тройку единичных векторов \vec{N}_k , совпадающую с главными направлениями правого тензора удлинения U и называемую лагранжевой триадой, и орты \vec{n}_k – направленные вдоль главных направлений левого тензора удлинения V и называемые эйлеровой триадой. Все векторы и тензоры, связанные с базисом \vec{N}_k (как функции переменной X), называются материальными (лагранжевыми), а те же объекты, определенные компонентами в базисе \vec{n}_k (как функции переменной x) – пространственными (эйлеровыми).

Последовательно определяются несимметричный тензор градиента

скорости $L = \dot{F} \cdot F^{-1}$, его симметричная $D = \frac{1}{2}(L + L^T)$ и антисимметричная $W = \frac{1}{2}(L - L^T)$ составляющие, называемые тензором скорости деформаций и тензором вихря, соответственно. То есть $L = D + W$. Тензор D характеризует скорость деформирования материальной частицы, а тензор W – скорость вращения материальных волокон.

Традиционно для больших деформаций используются различные меры деформаций. Материальные меры деформации соосны лагранжевым триадам

$$E = f(U) = f(\lambda_k) \cdot \vec{N}_k \otimes \vec{N}_k, \quad (12)$$

пространственные – эйлеровым

$$e = f(V) = f(\lambda_k) \cdot n_k \otimes n_k. \quad (13)$$

Здесь $f(\lambda)$ – произвольно заданная функция вещественных собственных чисел λ_k тензора U или V такая, что $f(\lambda) \in C^1$, $f'(\lambda) > 0$, $0 < \lambda_k < \infty$.

Требования, предъявляемые к мерам деформации естественны: при отсутствии деформирования деформации нет; деформации должны быть положительны и увеличиваться при монотонном увеличении нагрузки; деформации должны сводиться к линейной мере при линейаризации (12), (13).

Эти требования удовлетворяются, например, если $f(\lambda) : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}$ – гладкая монотонно возрастающая функция, такая, что $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$ и $f'(\lambda) > 0$.

Такой наиболее общий подкласс деформаций, удовлетворяющий этим требованиям, часто называют семейством мер Хилла и записывают в виде

$$E_{(n)} = \frac{U^{2n} - I}{2n} = \frac{\lambda_k^{2n} - 1}{2n} \cdot \vec{N}_k \otimes \vec{N}_k, \quad (14)$$

$$e_{(n)} = \frac{V^{2n} - I}{2n} = \frac{\lambda_k^{2n} - 1}{2n} \cdot n_k \otimes n_k. \quad (15)$$

где $2n \in Z$, I – единичный тензор. На практике обычно считается достаточным, чтобы $2n \in [-2; 2]$. Широко распространенные логарифмические меры Генки получаются из (14) и (15) как предел при $n \rightarrow 0$

$$E_{(0)} = \ln U = \ln \lambda_k \cdot \vec{N}_k \otimes \vec{N}_k, \quad (16)$$

$$e_{(0)} = \ln V = \ln \lambda_k \cdot n_k \otimes n_k. \quad (17)$$

При этом

$$E_{(n)} = R^T \cdot e_{(n)} \cdot R \quad \text{и} \quad e_{(n)} = R \cdot E_{(n)} \cdot R^T. \quad (18)$$

Материальные меры скоростей деформации получаются прямым дифференцированием материальных мер деформации при $X = const$

$$\dot{E}_{(n)} = \frac{\partial E_{(n)}}{\partial t}. \quad (19)$$

Пространственные меры скоростей деформации прямым материальным дифференцированием получить нельзя (результатом будет необъективный тензор). Для устранения необъективности вводятся различные объективные производные, которые при наложении жесткого движения преобразуются как индифферентные тензоры. В работе упоминается о типах таких традиционных объективных производных и различных видах их обобщения для мер деформаций и напряжений. Указываются наиболее часто используемые энергетически сопряженные по мощности пары тензоров напряжений и деформаций. Обсуждается проблема выбора меры деформаций, напряжений и их объективной производной. Отмечаются удачные, связанные с пространственной логарифмической мерой деформации Генки.

Из бесконечного числа объективных производных выделяется коротационная (индифферентная) производная Грина-Нахди

$$\overset{\circ}{A} = \overline{\overset{\bullet}{R^T A R}} R^T = \overset{\bullet}{A} + A \Omega - \Omega A, \quad (20)$$

где $\Omega = \overset{\bullet}{R} \cdot R^{-1}$ – тензор спина, характеризующий скорость вращения эйлеровой триады относительно лагранжевой, A – любой пространственный тензор.

На ее основе вводится новая пространственная мера деформации ε , определяемая дифференциальным соотношением $\overset{\circ}{\varepsilon} = D$

В *приложении ко второй главе* приведен вывод ряда используемых в работе формул, а также доказательства инвариантности (индифферентности) некоторых тензоров.

В *третьей главе* отмечен ряд используемых исследователями способов экстраполяции уравнений теории неупругости на область больших деформаций и поворотов и представлены геометрически нелинейные варианты определяющих соотношений эндохронной теории неупругости (1) – (3) и (1) – (3), (6).

Пусть, например, σ и ε – индифферентные пространственные тензор истинных напряжений Коши и тензор деформаций. Вводятся приведенные деформации и напряжения, исключая операцию поворота пространственной системы отсчета относительно материальной в актуальной конфигурации с тензором поворота R из полярного разложения (11).

$$E = R^T \varepsilon R, \quad T = R^T \sigma R. \quad (21)$$

Тензоры E и T – инвариантны, их можно материально дифференцировать

$$\overset{\bullet}{E} = \overline{\overset{\bullet}{R^T \varepsilon R}}, \quad \overset{\bullet}{T} = \overline{\overset{\bullet}{R^T \sigma R}}. \quad (22)$$

и использовать в лагранжевом представлении геометрически нелинейных определяющих соотношений эндохронного типа

$$\begin{aligned}
|r| \frac{\dot{T}}{2G} + \frac{\alpha\tau}{2G} \dot{T} &= \tau \dot{N} + \frac{1}{g+\alpha} |r| \dot{N}, & \varepsilon_0 &= \frac{\sigma_0}{K}, & (23) \\
r = \varepsilon - \frac{(1-\alpha)}{2G} \sigma, & \quad \dot{r} = \varepsilon - \frac{(1-\alpha)}{2G} \dot{\sigma}, & \quad |r| &= \sqrt{\dot{r}:\dot{r}}, \\
N = E - \frac{(1-\alpha)}{2G} T, & \quad \dot{N} = \dot{E} - \frac{(1-\alpha)}{2G} \dot{T}.
\end{aligned}$$

При преобразованиях, исключая операцию поворота, скалярные величины g , α , τ , G , K и инварианты $|r|$, ε_0 , σ_0 , входящие в (1) – (3), (6), не изменяются.

В пространственном же представлении определяющих соотношений в терминах σ и ε , получается, что

$$\varepsilon = R E R^T, \quad \sigma = R T R^T, \quad (24)$$

а их материальные производные \dot{E} и \dot{T} переходят в коротационные производные Грина-Нахди для тензоров ε и σ , соответственно

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon} &= R \cdot \overline{(R^T \dot{\varepsilon} R)} \cdot R^T = \dot{\varepsilon} + \varepsilon \Omega - \Omega \varepsilon, \\
\overset{\circ}{\sigma} &= \dot{\sigma} + \sigma \Omega - \Omega \sigma, & \Omega &= \dot{R} R^T.
\end{aligned} \quad (25)$$

Чтобы тензоры ε и σ были энергетически сопряжены по мощности, нужно, чтобы выполнялось соотношение $\overset{\circ}{\varepsilon} = D$. Этот же факт получается и из геометрических определений (21), (22). Тогда, учитывая, что $d = R^T D R$ и $d = \dot{E}$, где d – тензор скорости деформаций в конфигурации с исключенным поворотом (то есть материальная мера скорости чистой деформации) получается, что

$$\overset{\circ}{\varepsilon} = D \quad (26)$$

или в интегральной форме

$$\varepsilon = R \int_0^t (R^T D R) dt R^T. \quad (27)$$

Соотношения (26) и (27) в дифференциальной и интегральной записи порождают пространственную меру деформации ε , не входящую в класс мер деформаций Хилла.

Определяющие уравнения (23) в пространственном представлении запишутся в форме

$$|r| \frac{\dot{\sigma}}{2G} + \frac{\alpha\tau}{2G} \overset{\circ}{\sigma} = \tau \overset{\circ}{r} + \frac{r}{g+\alpha} |r| \dot{\sigma}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{K}, \quad (28)$$

$$r = \varepsilon - \frac{(1-\alpha)}{2G} \sigma, \quad \overset{\bullet}{r} = \overset{\bullet}{\varepsilon} - \frac{(1-\alpha)}{2G} \overset{\bullet}{\sigma}, \quad |\overset{\bullet}{r}| = \sqrt{\overset{\bullet}{r} : \overset{\bullet}{r}},$$

$$\overset{\circ}{r} = \overset{\circ}{\varepsilon} - \frac{(1-\alpha)}{2G} \overset{\circ}{\sigma}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon} = D,$$

$$\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A} + A\Omega - \Omega A, \quad \Omega = \overset{\bullet}{R} R^T.$$

Если $\tau = \tau(r)$, $g = g(r)$, $dr = \sqrt{dr : dr}$, то соотношения (28) моделируют процессы пластичности, а при $\tau = \tau(r, \overset{\bullet}{r})$, $g = g(r, \overset{\bullet}{r})$, $\alpha = \alpha(r, \overset{\bullet}{r})$, $G = G(r, \overset{\bullet}{r})$ – учитывают и временные явления, протекающие в процессе неупругого деформирования материалов.

Введенные таким образом приведенные напряжения и деформации (21) исключают влияние предыстории процесса, а точнее – предысторию поворотов, удовлетворяя тем самым принципу объективности.

В главе приводится и обсуждается ряд предельных вариантов теории, вытекающих из соотношений (28).

В *приложении к третьей главе* освещен ряд вопросов, относящихся к методам построения ортогонального тензора поворота. Приводится схема вычисления ортогонального тензора поворота с использованием кососимметрического тензора K . Так как тензор

$$e^K = I + \frac{\sin \omega}{\omega} K + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} K^2 \quad (29)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ – модуль полного вектора поворота $\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, удовлетворяет определению и свойствам собственного ортогонального тензора поворота Q : $Q^T = Q^{-1}$ и $\det Q = 1$, то $e^K = Q$ и

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K^2 = \begin{pmatrix} -\omega_3^2 - \omega_2^2 & \omega_1 \omega_2 & \omega_1 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_2 & -\omega_1^2 - \omega_3^2 & \omega_2 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_3 & \omega_2 \omega_3 & -\omega_2^2 - \omega_1^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда, исходя из структуры заданного или предполагаемого тензора градиента деформаций F , выбирается число ненулевых компонент вектора поворота $\bar{\omega}$, то есть кососимметрический тензор K . Число компонент $\bar{\omega}$ в общем случае определяет число независимых параметров тензора поворота Q . (Параметров может быть 1, 2 или 3). По соотношениям (29) строится тензор Q , в зависимости от установленных параметров. Для конкретизации связей параметров тензора поворота с историей нагружения (деформирования) используется условие симметрии вычисленного по Q , например, правого тензора удлинения $U = Q^T F$ или обратного ему $U^{-1} = F^{-1} Q$. Эти в общем случае три независимых уравнения, вытекающие из шести условий симметрии,

и позволяют определить неизвестные параметры тензора поворота.

В четвертой главе приведены результаты моделирования неупругого поведения материала в условиях пластичности. Рассмотрены жесткие и мягкие схемы нагружения на простых и сложных траекториях.

Жестким нагружением при наличии геометрической нелинейности предлагается считать задание чисто геометрической характеристики процесса – тензора скоростей деформации D . Вычисленные на его основе по геометрическим уравнениям (26) или (27) деформации дают искомую меру деформаций ε , а определяющие соотношения теории (28) – возникающие в процессе нагружения напряжения. Пусть, например, в такой постановке

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Тогда, предполагая «минимальный» набор компонент тензора градиента деформации

$$F = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

который может породить тензор скорости деформации типа (30) и, пользуясь определениями для L и D , можно получить дифференциальные соотношения, связывающие компоненты F и D

$$D_{11} = \frac{\dot{k}_{11}}{k_{11}}, \quad D_{12} = \frac{k_{11}\dot{k}_{12} - \dot{k}_{11}k_{12}}{2k_{11}k_{22}}, \quad D_{22} = \frac{\dot{k}_{22}}{k_{22}}, \quad D_{33} = \frac{\dot{k}_{33}}{k_{33}}. \quad (32)$$

Решая дифференциальные уравнения (32) с заданными компонентами D_{ij} , например, при естественных начальных условиях $k_{ij}(0) = 1$ вычисляются компоненты градиента деформации (31). Найденный тензор F позволяет найти тензор поворота R . Для (31) тензор R имеет один свободный параметр

$$R = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

При конкретизации связи параметра β с историей нагружения используется условие симметрии вычисленного по (31) и (33), например, тензора удлинения $U = R^T F$, а затем определяется и тензор спина $\Omega = R^\bullet R^T$. Например, для R в форме (33) получается, что

$$\dot{\Omega} = \dot{\beta} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

где $tg\beta = \frac{k_{12}}{k_{11} + k_{22}}$ и определяется через (32) историей задания тензора D .

Предполагая, что девиаторы тензоров напряжений и деформаций имеют вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

подставляя их в девиаторные определяющие соотношения (28), можно, например, при $2G = 1$ и $\alpha = 1$, обозначив предварительно через

$$k = \frac{1}{g+1}, \quad m = \frac{|\dot{\varepsilon}|}{\tau}, \quad |\dot{\varepsilon}| = \sqrt{\dot{\varepsilon}_{11}^2 + \dot{\varepsilon}_{22}^2 + \dot{\varepsilon}_{33}^2 + 2\dot{\varepsilon}_{12}^2 + 2\dot{\varepsilon}_{13}^2 + 2\dot{\varepsilon}_{23}^2},$$

получить модельные уравнения в форме

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{k}_{11} = k_{11} \dot{D}_{11} \\ \dot{k}_{22} = k_{22} \dot{D}_{22} \\ \dot{k}_{33} = k_{33} \dot{D}_{33} \\ \dot{k}_{12} = 2k_{22} \dot{D}_{12} + k_{12} \dot{D}_{11} \\ \dot{\beta} = \frac{2\dot{D}_{12} k_{22} (k_{11} + k_{22}) + k_{22} k_{12} (\dot{D}_{11} - \dot{D}_{22})}{k_{12}^2 + (k_{11} + k_{22})^2}, \end{array} \right. \quad (36a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_{11} = 2\dot{\varepsilon}_{12} \dot{\beta} + \dot{D}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} = -2\dot{\varepsilon}_{12} \dot{\beta} + \dot{D}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} = \dot{D}_{33} \\ \dot{\varepsilon}_{12} = -(\dot{\varepsilon}_{11} - \dot{\varepsilon}_{22}) \dot{\beta} + \dot{D}_{12} \\ \dot{\varepsilon}_{13} = \dot{\varepsilon}_{23} \dot{\beta} \\ \dot{\varepsilon}_{23} = -\dot{\varepsilon}_{13} \dot{\beta}, \end{array} \right. \quad (36b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}_{11} = 2\sigma_{12}\dot{\beta} + D_{11} - m\sigma_{11} + km\varepsilon_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} = -2\sigma_{12}\dot{\beta} + D_{22} - m\sigma_{22} + km\varepsilon_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} = D_{33} - m\sigma_{33} + km\varepsilon_{33} \\ \dot{\sigma}_{12} = -(\sigma_{11} - \sigma_{22})\dot{\beta} + D_{12} - m\sigma_{12} + km\varepsilon_{12} \\ \dot{\sigma}_{13} = \sigma_{23}\dot{\beta} - m\sigma_{13} + km\varepsilon_{13} \\ \dot{\sigma}_{23} = -\sigma_{13}\dot{\beta} - m\sigma_{23} + km\varepsilon_{23}. \end{array} \right. \quad (36B)$$

Решением системы (36) при различных заданиях D моделируется пластическое поведение материала по жесткой схеме нагружения. Функции $g = g(|\varepsilon|)$ и $\tau = \tau(|\varepsilon|)$ выбираются из экспериментальных наблюдений для конкретного класса материалов. В простейшем случае это константы.

В описанной постановке по жесткой схеме нагружения качественно исследовано развитие деформаций и напряжений при активном (без разгрузок) простом сдвиге, одноосном растяжении, сжатии, внутреннем давлении, пропорциональном нагружении и общем плоском нагружении. Показано, что поведение компонент (35) на изученных путях деформирования не противоречит основным физическим представлениям о развитии напряжений и деформаций. На рис.4 и рис.5 приведены качественные графики изменения деформаций и напряжений от параметра нагружения t при простом сдвиге.

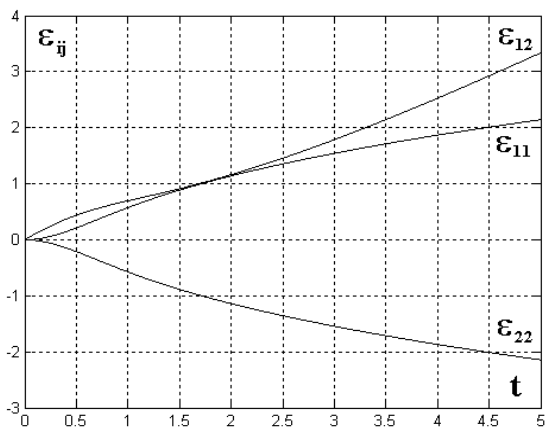


Рис.4.

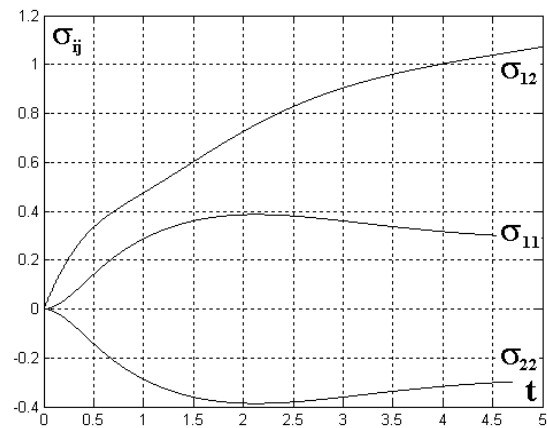


Рис.5.

На рис.6 представлены кривые напряжений, вычисленные при разных значениях параметра эндохронности. Для всех типов жестких «простых» нагружений отмечается монотонное развитие компонент деформаций и напряжений без осцилляций, имеющих место при использовании некоторых других типов объективных производных.

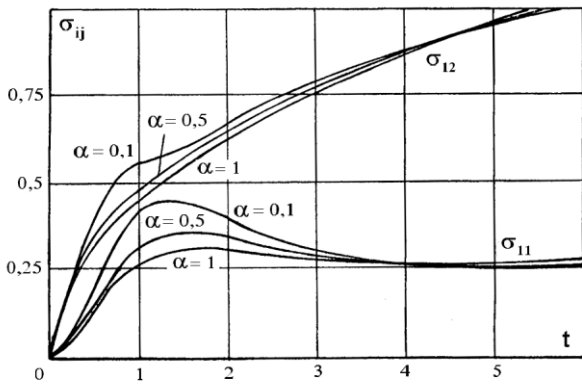


Рис.6.

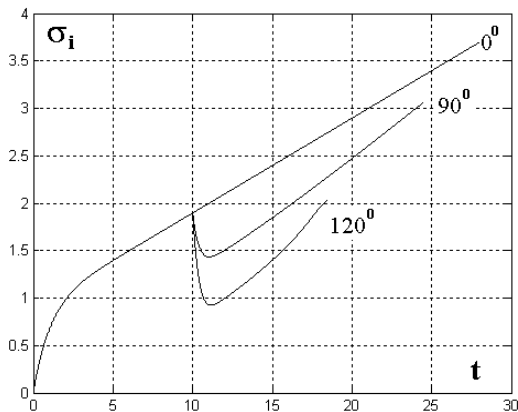


Рис.7.

На двухзвенных жестких траекториях деформирования фиксируются экспериментально наблюдаемые «нырок» интенсивности напряжений (рис.7) и изменение угла сближения θ по длине второго звена траектории $\Delta\varepsilon$ для углов излома 90° (рис.8а) и 120° (рис.8б), где $\vec{\sigma}$ и $\vec{\varepsilon}^\bullet$ – векторы напряжений и скоростей деформаций в пространстве Илью-

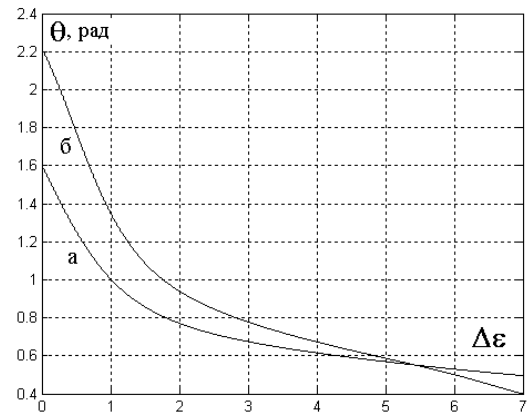


Рис.8.

шина, $\theta = \arccos \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\varepsilon}^\bullet}{|\vec{\sigma}| |\vec{\varepsilon}^\bullet|}$, при длине первого звена деформирования $\varepsilon_i = 9.95$.

Изучение неупругого поведения материалов при циклическом деформировании – одно из основных исследований для теории и практики.

При решении задачи простого симметричного циклического сдвига задавались компоненты тензора скоростей деформации $D_{11} = 0$, $D_{22} = D_{33} = 0$ и $D_{12} = \pm 1$, а нагружение проводилось с амплитудой по деформации $\varepsilon_{12} = \pm 0.7$. Напряжения вычислялись по уравнениям (36) при значениях параметров материала $\tau = 1$ и $g = 9$. Графики на рис.9 иллюст-

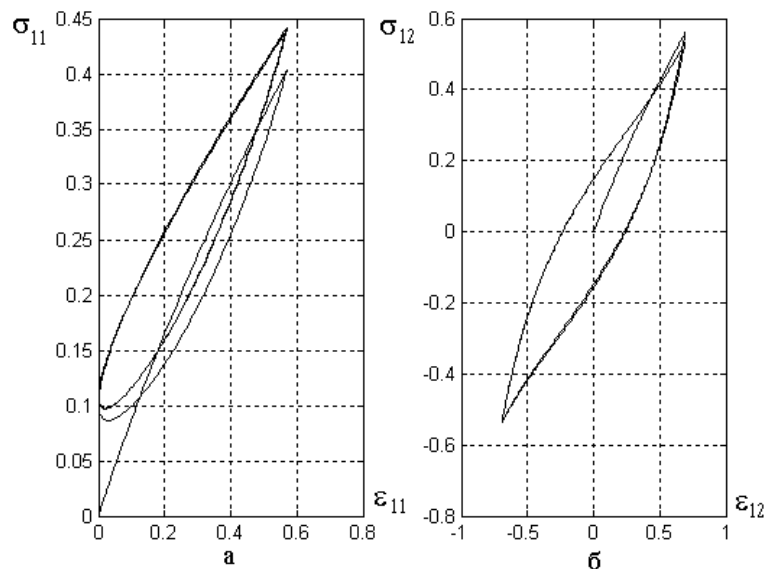


Рис.9.

рируют поведение напряжений σ_{11} и σ_{12} от деформаций ε_{11} и ε_{12} . Наблюдается быстрая стабилизация петель гистерезиса для обоих напряжений, причем, если деформация ε_{12} и напряжение σ_{12} , как и ожидалось, меняют знаки при смене знака нагружения, то ε_{11} и σ_{11} сохраняют положительное значение на всем интервале нагружения. Четко фиксируется эффект Баушингера. Отмечается, что при значениях $D_{12} = \pm 2, \pm 5, \pm 10$ результаты, представленные на рис.9, идентичны, а все дальнейшее поведение материала определяется наперед заданной амплитудой деформации $\varepsilon_{12} = \pm 0.7$.

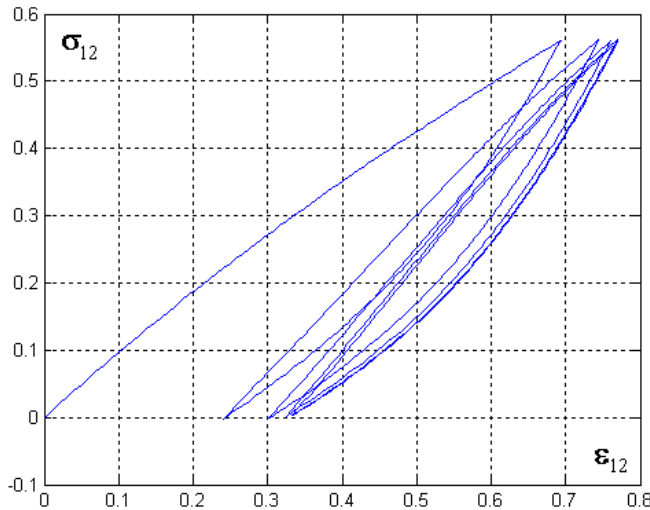


Рис.10.

Отнулевое циклическое жесткое деформирование по схеме простого сдвига с заданием $D_{12} = \pm 1$ и контролем по сдвиговому напряжению $0 \leq \sigma_{12} \leq \sigma_0 = const$ гипотетического материала с параметрами $g = 1, \alpha = 1, 2G = 1, \tau = 1$ продемонстрировало быструю стабилизацию петли гистерезиса в зависимости от числа циклов, отсутствие псевдоползучести, сохранение в процессе нагружения знака осевой деформации ε_{11} и осевого напряжения σ_{11} , а также уменьшение амплитуды осевого напряжения от параметра нагружения t , что обычно и фиксируется в опытах (рис.10).

Проведенное дополнительно качественное моделирование циклического жесткого нагружения на непропорциональных путях деформирования по круговым траекториям подтвердило потенциальные возможности предложенных геометрически нелинейных определяющих соотношений.

В работе вычислены деформации для жесткого двойного сдвига ($D_{12} \neq 0, D_{13} \neq 0$) и жесткого тройного сдвига ($D_{12} \neq 0, D_{13} \neq 0, D_{23} \neq 0$). Эти типы нагружения отличаются от предыдущих тем, что для них ортогональный тензор поворота оказывается двухпараметрическим, что создало определенные технические трудности, которые были преодолены.

Плоским мягким является нагружение, когда задается симметричный тензор скоростей напряжений в виде

$$\dot{\sigma} = \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{11} & \dot{\sigma}_{12} & 0 \\ \dot{\sigma}_{12} & \dot{\sigma}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\sigma}_{33} \end{pmatrix} \quad (37)$$

Предполагается, что он вызывает появление деформации и ее скорости

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \dot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} & \dot{\varepsilon}_{12} & 0 \\ \dot{\varepsilon}_{21} & \dot{\varepsilon}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_{33} \end{pmatrix} \quad (38)$$

Предполагая далее, что меру деформации (38) по формуле (26) определяет тензор скорости деформации D вида (30), который может порождаться, например, градиентом деформации F в форме (31), строятся дифференциальные уравнения для компонент тензора F , ортогональный тензор поворота вида (33), тензор вихря в форме (34) с конкретными связями для параметра β и выписывается неявная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно ε_{ij} , σ_{ij} и k_{ij} , аналогичная (36) с естественными начальными условиями $\varepsilon_{ij}(0) = 0$, $\sigma_{ij}(0) = 0$, $k_{ij}(0) = 1$.

Качественные расчеты простого сдвига, растяжения, сжатия, внутреннего давления и пропорционального нагружения по схеме мягкого типа установили не противоречащее опытам поведение деформаций. В частности, при мягком нагружении сдвигом помимо компоненты ε_{12} появляется и развивается осевая деформация ε_{11} , что неоднократно фиксировалось экспериментаторами на материалах с различными модами неупругого деформирования.

В пятой главе представлены результаты качественного численного моделирования неупругого поведения материалов с учетом временных эффектов в рамках уравнений (1), (2), (6).

Были проведены расчеты на вязкопластический жесткий и мягкий сдвиг, растяжение, сжатие, внутреннее давление, ползучесть материала при различных схемах предварительного и последующего нагружения, релаксацию напряжений, циклирование при разных амплитудах деформации.

Формулируется специальный предельный случай определяющих соотношений (28), (6) при $\alpha = 1$. Тогда, полагая дополнительно $2G = 1$, обозначая $k = 1/(g + 1)$ и принимая, например, линейной зависимость

параметра τ от интенсивности параметрического тензора r в виде $\tau = k_0 \cdot |\dot{r}|$, можно записать

$$k_0 \overset{\circ}{\sigma} + \overset{\circ}{\sigma} = k_0 \overset{\circ}{\varepsilon} + k \varepsilon, \quad \overset{\circ}{\varepsilon} = D. \quad (39)$$

Очевидно, что для области малых деформаций, когда $\overset{\circ}{\sigma} = \overset{\bullet}{\sigma}$ и $\overset{\circ}{\varepsilon} = \overset{\bullet}{\varepsilon}$, например, для $k_0 = 1$ эти соотношения принимают классический вид

$$\overset{\bullet}{\sigma} + \overset{\bullet}{\sigma} = \overset{\bullet}{\varepsilon} + k \varepsilon.$$

Здесь при реализации процесса традиционной ползучести из $\sigma = const = \sigma_0$ следует $\overset{\bullet}{\sigma} = 0$ и при $\varepsilon(0) = 0$ вытекает

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{k} \cdot (1 - \exp(-kt)).$$

А в условиях классической релаксации, когда $\varepsilon = const = \varepsilon_0$ и $\overset{\bullet}{\varepsilon} = 0$ при начальных условиях $\sigma(0) = \sigma_0$ получается, что

$$\sigma(t) = (\sigma_0 - k\varepsilon_0) \cdot \exp(-t) + k \varepsilon_0.$$

При $t \rightarrow \infty$ величину $\sigma = k\varepsilon_0$ можно трактовать как остаточное (после релаксации) напряжение.

В рамках определяющих соотношений (39) решен ряд задач ползучести в следующей постановке. Осуществляется «быстрое» жесткое нагружение материала, например, кручением ($D_{11} = 0$, $D_{22} = 0$, $D_{12} = const$) до значения напряжения $\sigma_{12} = \sigma_{12}^0$. Обращается внимание на то, что в этом случае возникают и сдвиговая ε_{12} и осевые ε_{11} , ε_{22} компоненты деформации ($\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22}$), появляются три компоненты тензора напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} (здесь также $\sigma_{11} = -\sigma_{22}$), а само нагружение при достаточно больших значениях D_{12} почти упругое. Затем компоненты тензора напряжений фиксируются ($\sigma_{11} = \sigma_{11}^0 = const$, $\sigma_{22} = \sigma_{22}^0 = const$, $\sigma_{12} = \sigma_{12}^0 = const$) и наблюдается про-

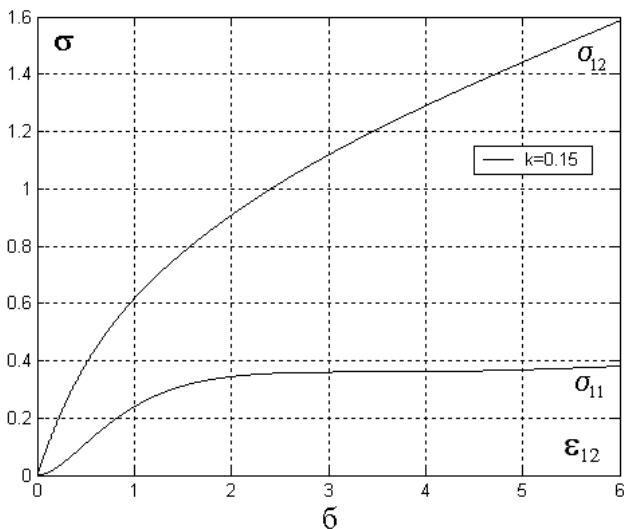


Рис.11.

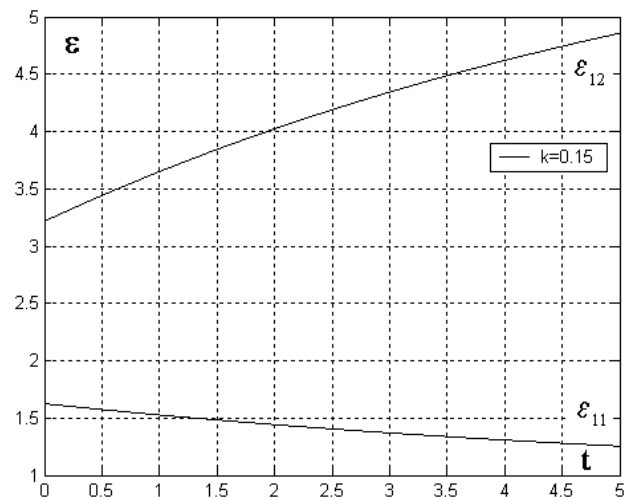


Рис.12.

цесс ползучести $\varepsilon_{ij}(t)$. На рис.11 и рис.12 представлены графики активного нагружения до инициации ползучести и развитие деформаций во времени для упрочняющегося материала.

В аналогичной постановке были решены задачи ползучести со ступенчатыми изменениями величины напряжений, при которых развивается процесс ползучести. В этой ситуации после первого этапа ползучести материал снова «быстро» активно догружается ($D_{12} > 0$) или разгружается ($D_{12} < 0$) до нового значения изменяемой компоненты напряжения, фиксируются новые начальные условия, и наблюдается новый этап процесса ползучести.

В задачах релаксации сначала проводится активное нагружение материала, например, кручением до некоторых значений деформаций $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0$, деформации фиксируются $\varepsilon_{ij}^0 = const$, и отслеживают процесс изменения напряжений. На рис.13 приведены графики изменения напряжений σ_{11} и σ_{12} от времени при $\varepsilon_{12}^0 = 0.87$, $\varepsilon_{11}^0 = -\varepsilon_{22}^0 = 0.4$ и для $k = 0,5$.

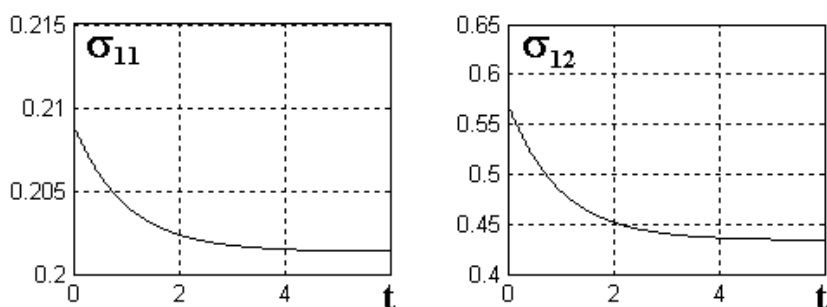


Рис.13.

Было проведено исследование циклических нагружений вязкопластичных материалов, неупругие свойства которых непостоянны в процессе деформирования. Выполняя вначале жесткое монотонное нагружение $D_{11} = 0$, $D_{22} = 0$, $D_{12} = 1$ до фиксированного значения ε_{12} , затем производится циклически деформирование $D_{12} = \pm 1$, осуществляя реверс нагрузки при различных амплитудах деформации $|\varepsilon_{12}| \leq 0.5$, $|\varepsilon_{12}| \leq 2.0$. Эти амплитуды сдвиговых деформаций соответствуют участку роста осевого напряжения на кривой монотонного деформирования и зоне снижения σ_{11} . По-прежнему, петли гистерезиса при циклическом деформировании вязкопластичного материала быстро стабилизируются – достаточно 5-7 циклов. На рис.14 и рис.15 приведены кривые установившихся петель гистерезиса при указанных амплитудах деформирования. Аналогичные графики были получены Р.Асаро (Acta Metallurg. 1975. N10.) в опытах на сплаве нимоник. Необычные кривые, конечно же, требуют более детальной экспериментальной проверки для более широкого класса материалов.

Установлена также чувствительность поведения материала к величине скорости деформирования D_{12} , что характерно для вязкопластичности.

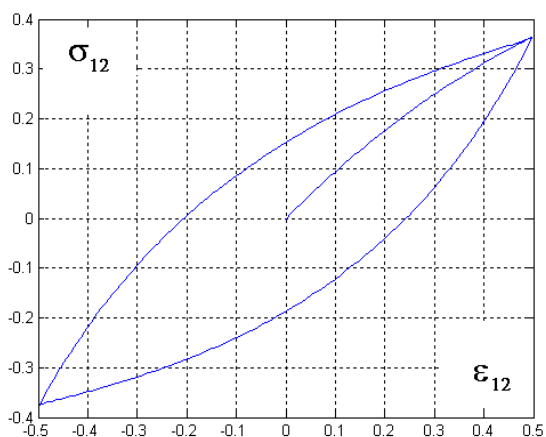


Рис.14

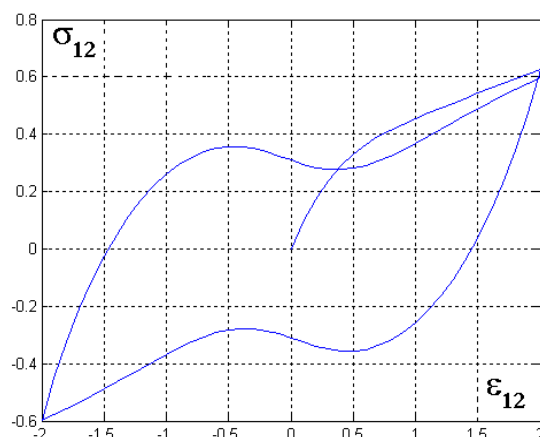


Рис.15.

Разупрочняющиеся материалы, полные диаграммы деформирования которых имеют ниспадающие ветви, экспериментально известны достаточно давно. В работе показано, что в рамках геометрически нелинейных определяющих соотношений эндохронного типа, учитывающих временные явления, с единых феноменологических позиций можно описать ряд закономерностей, характерных для поведения таких материалов.

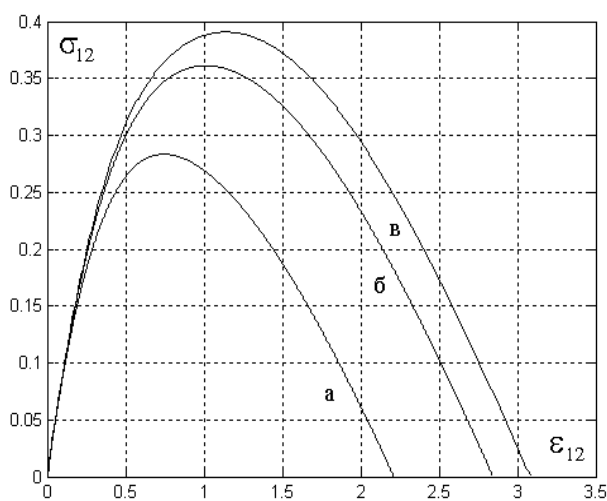


Рис.16.

На рис.16 отмечается экспериментально наблюдаемая зависимость кривых $\sigma_{12} \sim \epsilon_{12}$ от скорости деформации D_{12} при простом жестком сдвиге $D_{12} = 1$ (а), $D_{12} = 2$ (б), $D_{12} = 10$ (в). Более интересны результаты решения задач с частичными разгрузками на восходящей (точка А) и нисходящей (точка В) ветвях кривой деформирования и последующим нагружением.

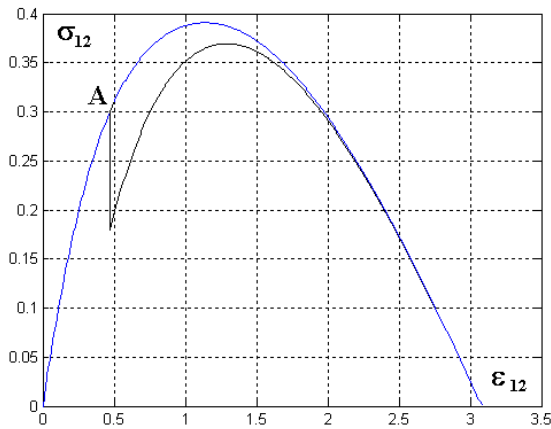


Рис.17.

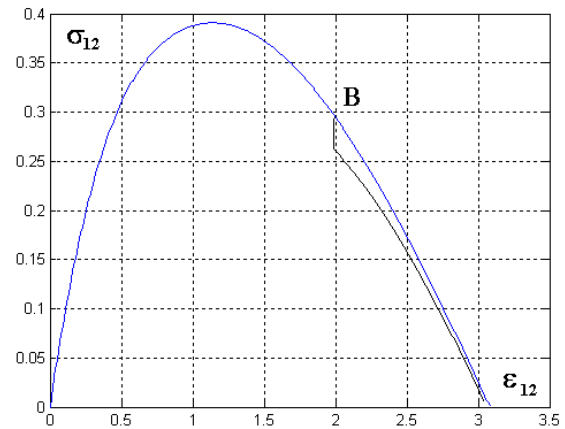


Рис.18.

На рис.17 и рис.18 и представлены качественные результаты расчетов частичной релаксации напряжений в точках А и В и дальнейшего деформирования: теоретические графики на рис.17 полностью соответствуют поведению экспериментальных кривых для хрупких горных пород, а на рис.18 кривая последующего нагружения в расчетах не достигает линии активного нагружения, как это происходит в опыте, но весьма близка к нему.

Дополнительно в работе исследованы некоторые схемы знакопеременного нагружения разупрочняющегося материала. Отмечается необходимость широкой и систематической экспериментальной поддержки приведенных теоретических демонстраций.

В *приложении к пятой главе* формулируются и обсуждаются условия возникновения немонотонного поведения напряжений и деформаций при монотонном активном деформировании и нагружении по типу «эффектов» Портевена-ЛаШателье (рис.8, коэффициент упрочнения $k = 0$) и Савара-Массона (рис.9, $k > 0$).

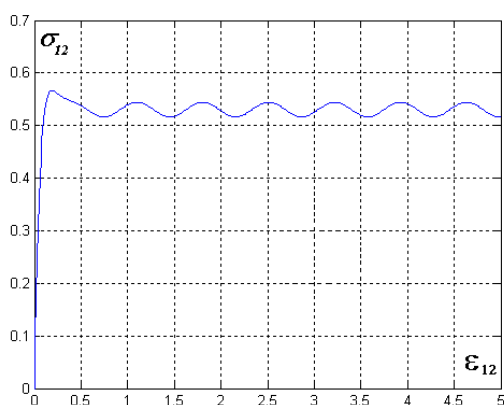


Рис.19.

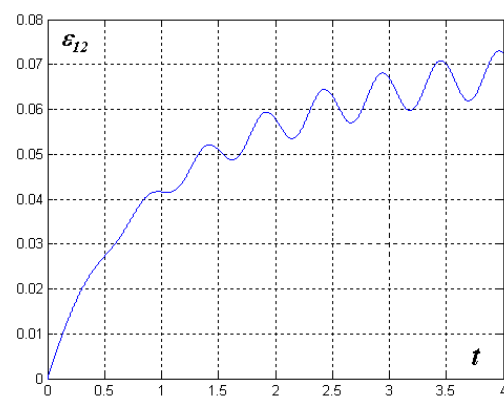


Рис.20.

В **заключении** формулируются основные результаты и выводы по работе.

Список литературы, цитируемой по тексту диссертации, содержит 368 наименований, размещенных в алфавитном порядке.

По результатам исследования **на защиту выносятся:**

1. Новые тензорно-параметрические определяющие соотношения теории неупругости эндохронного типа для малых деформаций.
2. Новый закон эндохронного типа, учитывающий уплотнение (разрыхление) материала.
3. Тензорно-параметрические уравнения теории неупругости без поверхности текучести, учитывающие временные эффекты.
4. Мера деформации, не входящая в класс мер деформаций Хилла и энергетически сопряженная с тензорами напряжений Коши и Кирхгофа.
5. Формулировка определяющих соотношений неупругости эндохронного типа в области больших деформаций и поворотов.
6. Постановка и решение задач жесткого и мягкого нагружения материалов в рамках представленной эндохронной теории неупругости для больших деформаций, включая временные эффекты.
7. Схема построения собственного ортогонального тензора поворота с использованием кососимметрических тензоров.

Список основных работ по теме диссертации

Статьи в изданиях, рекомендованных перечнем ВАК:

1. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Об эффекте непропорциональности при сложном циклическом нагружении // Прикладные проблемы прочности пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов. М.: Изд-во КМК, 1995. Вып.52. С.171-175.
2. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. О взаимосвязи теории пластичности, учитывающей микронапряжения, с эндохронной теорией пластичности // Известия РАН. Механика твердого тела. 1997. N4. С.99-105.
3. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Анализ сложного нагружения при конечных деформациях по эндохронной теории неупругости // Прикладные проблемы прочности и пластичности. М.:Изд-во КМК, 1998. Вып.59. С.72-76.
4. Иванченко С.Н., Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Квазистатистическая теория пластичности, учитывающая уплотнение материала // Известия РАН. Механика твердого тела. 2000. N5. С.21-26.
5. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Решение задач мягкого и жесткого нагружения при учете больших деформаций в эндохронных вариантах теории пластичности // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Нижний Новгород. 2000. Вып.62. С.30-35.
6. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Роль меры деформации при построении эндохронных вариантов теории пластичности, учитывающей конечные деформации // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2001. N12. С.91-93.
7. Кадашевич И.Ю., Кадашевич Ю.И., Пейсахов А.М., Помыткин С.П. Теория пластического течения с перекрестными связями, учитывающая дилатансию и вид напряженного состояния // Вестник Самарского государственного

- технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2002. Вып.16. С.73-74
8. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Новый взгляд на построение эндохронной теории пластичности при учете конечных деформаций // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2003. N3. С.96-103.
9. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Описание эффектов второго порядка при учете конечных деформаций // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2003. Вып.19. С.163-164.
10. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Эндохронная теория ползучести, учитывающая конечные деформации // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2004. Вып.26. С.83-85.
11. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. О расширении возможностей эндохронной теории неупругости, учитывающей конечные деформации // Проблемы прочности и пластичности. Нижний Новгород. 2004. Вып.66. С.31-34.
12. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Учет конечных деформаций в эндохронной теории вязкопластичности // Вестник гражданских инженеров. 2005. N1. С.28-32.
13. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Циклические нагружения при простом сдвиге в рамках эндохронной теории пластичности, учитывающей конечные деформации // Вестник гражданских инженеров. 2005. N2. С.15-17.
14. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П., Пейсахов А.М. Влияние формы задания градиента деформаций на решение задач эндохронной теории неупругости при конечных деформациях // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2006. Вып.42. С.82-85.
15. Кадашевич Ю.И., Пейсахов А.М., Помыткин С.П. Описание эффекта Портевена-ЛеШателье в рамках эндохронной теории неупругости при конечных деформациях // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2006. Вып.43. С.183-184.
16. Иванов Б.Ф., Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Некоторые вопросы неупругого деформирования материалов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2007. N1 (14). С.39-44.
17. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Поведение нестабильных материалов при циклическом сдвиге // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2007. N1 (14). С.158-161.
18. Иванов Б.Ф., Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. О неустойчивости неупругого деформирования материалов // Проблемы прочности и пластичности. Нижний Новгород. 2007. Вып.69. С.7-12.
19. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Описание процессов ползучести и релаксации материалов в рамках эндохронной теории неупругости для больших деформаций // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2009. N1(18). С.61-65.

20. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Неустойчивости пластического течения в эндохронной теории неупругости для больших деформаций // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н.Крылова. СПб. 2010. Вып.53 (337). С.51-57.
21. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Описание эффектов второго порядка в рамках эндохронной теории неупругости для больших деформаций // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. №6. С.123-136.
22. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Изохорическое нагружение в рамках эндохронной теории неупругости для больших деформаций // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2010. Т.15. Вып.3. С.1056-1057.
23. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Формулировка критерия прочности материалов для эндохронной теории неупругости, учитывающей микроразрушения при больших деформациях // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2010. №1 (20). С.53-59.
24. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Исследование одноосного и двуосного нагружения разупрочняющихся материалов по эндохронной теории неупругости // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2012. №1 (26). С.110-115.
25. Иванов Б.Ф., Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. О мере деформации, учитывающей влияние градиента деформации // Приволжский научный журнал. 2012. №2. С.21-27.

Другие основные публикации:

26. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Уточнение эндохронной теории пластичности при циклическом непропорциональном нагружении // Исследования по механике строительных конструкций и материалов. СПб: Изд-во С.-Петербур. инженер.-строит. ин-та, 1993. С.72-76.
27. Кадашевич И.Ю., Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Решение краевых задач по эндохронной теории пластичности при циклическом нагружении // Исследования по механике строительных конструкций и материалов СПб: Изд-во С.-Петербур. гос. архитектур.-строит. ун-та, 1995. С.100-103.
28. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Уточнение эндохронной теории пластичности, учитывающей угол вида неупругой деформации при циклически непропорциональном нагружении // Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства. СПб: Редак.-издат. отд. С.-Петербур. гос. технолог. ун-та растит. полимеров, 1995. С.158-161.
29. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Новые принципы составления определяющих уравнений эндохронной теории пластичности при конечных деформациях // Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства. СПб: Редакц.-издат. отдел С.-Петербур. гос. технолог. ун-та раст. полимеров, 1996. С.124-127.
30. Brigadnov I.A., Kadashevich I.Yu., Kadashevich Yu.I, Pomytkin S.P. Asymptotic models and computational methods for boundary value problems of plasticity //

Asymptotic in Mechanics: Proceedings of the Second International Conference. October 13-16, 1996, Saint-Petersburg / Ed. by A.H. Nayfeh and K.V. Rozhdestvensky. Saint Petersburg. 1997. P.43-50.

31. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Исследование механических свойств материалов при учете уплотнения // Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства. СПб: Редак.-издат. отд. С.-Петерб. гос. технолог. ун-та растит. полимеров, 1999. С.108-110.

32. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Постановка задач мягкого и жесткого нагружения для основных вариантов эндохронной теории пластичности при конечных деформациях // Физика процессов деформации и разрушения и прогнозирование механического поведения материалов: тр. XXXVI междунар. семинара «Актуальные проблемы прочности», (Витебск, 26-29 сентября 2000г.). В 2-х частях. Витебск. 2000. Ч.1. С.217-219.

33. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Особенности постановок задач сложного нагружения для основных вариантов эндохронной теории пластичности при конечных деформаций // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела: сборник трудов научной школы академика В.В.Новожилова. Вып.3. СПб. 2000. С.112-115.

34. Кадашевич И.Ю., Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Анализ эндохронных вариантов теории пластичности для конечных деформаций // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела: тр. науч. школы акад. В.В.Новожилова. СПб: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 2001. Вып.4. С.32-41.

35. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П., Юдовин М.Э. Вычисление меры деформации при двойном сдвиге // Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии: сб. материалов III междунар. науч.-техн. конф. (Тула, 25-27 июня 2002г.). Тула: Изд-во Тульс. гос. ун-та, 2002. С.35-36 .

36. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Теория пластического течения и эндохронная теория неупругости, учитывающие уплотнение материала // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. Серия «Механика». 2002. Вып.1(4). С.35-38.

37. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Новый принцип формулирования меры деформации // Проблемы механики деформируемого твердого тела. СПб: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 2002. С.154-158.

38. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. О выборе меры деформации при анализе конечных деформаций // Исследования по механике строительных конструкций и материалов. СПб: Изд-во С.-Петерб. гос. архитектур.-строит. ун-та, 2002. С. 25-28.

39. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Вычисление ортогонального тензора поворота в задачах теории пластичности для конечных деформаций // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. Серия «Механика». 2004. Вып.1(6). С.73-80.

40. Kadashevich Yu., Pomytkin S. Endochronic theory of plasticity at finite deformations // The Third International Conference on Mathematical Modeling and Computer Simulation of Material Technologies: Texts of Reports. September 06-10, 2004. College of Judea and Samaria, Ariel, Israel. Session 3. P.105-112.

41. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. К вопросу об альтернативных мерах деформации // Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства. СПб: Редакц.-издат. отдел С.-Петербур. гос. технолог. ун-та раст. полимеров, 2004. С.139-141.
42. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Неупругое поведение циклически нестабильных материалов при больших деформациях // Современные проблемы пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела: тр. VI междунар. науч. симп., (Тверь, 1-3 марта 2006г.). Тверь. 2006. С.93-99.
43. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Описание отнулевого циклического нагружения по эндохронной теории неупругости для конечных деформаций // Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства. СПб: Редакц.-издат. отдел С.-Петербур. гос. технолог. ун-та раст. полимеров, 2006. С.84-87.
44. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П., Юдовин М.Э. Описание эффекта Савара-Массона в рамках эндохронной теории неупругости для конечных деформаций // Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства. СПб: Редак.-издат. отд. С.-Петербур. гос. технолог. ун-та растит. полимеров, 2006. С.88-90.
45. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Эндохронная теория вязкопластичности для больших деформаций // Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства. СПб: Редак.-издат. отд. С.-Петербур. гос. технолог. ун-та растит. полимеров, 2008. С.59-67.
46. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Описание трехосного простого нагружения в рамках эндохронной теории неупругости, учитывающей дилатацию материалов // Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства. СПб: Редакц.-издат. отдел С.-Петербур. гос. технолог. ун-та раст. полимеров, 2009. С.68-73.
47. Помыткин С.П. Новая трактовка одного варианта эндохронной теории неупругости, учитывающей большие деформации // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2008-2009г.г. / Под ред. А.Л.Смирнова и Е.Ф.Жигалко. СПб: Изд-во С.-Петербур. гос. ун-та, 2009. С.126-130.
48. Иванов Б.Ф., Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. О построении ортогонального тензора поворота для эндохронной теории неупругости, учитывающей большие деформации // Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства СПб: Редакц.-издат. отдел С.-Петербур. гос. технолог. ун-та раст. полимеров, 2010. С.53-61.
49. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Решение задач жесткого плоского нагружения в рамках эндохронной теории неупругости для больших деформаций и поворотов // Вестник Пермского государственного технического университета. Механика. 2011. N3. С.71-83.
50. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Этапы развития эндохронной теории неупругости // Упругость и неупругость. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2011. С.151-154.