

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ГАСРАТОВА НАТАЛЬЯ АЛЕКСАНДРОВНА

**РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ
ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ**

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2013

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов механики деформируемого тела факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
ШАМИНА Валентина Алексеевна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
БАУЭР Светлана Михайловна, профессор кафедры гидроупругости (Санкт-Петербургский государственный университет)

доктор технических наук, профессор
ГОСПОДАРИКОВ Александр Петрович, заведующий кафедрой высшей математики (Национальный минерально-сырьевой университет "Горный", Санкт-Петербург)

Ведущая организация: Санкт-Петербургский политехнический университет

Защита состоится «___» _____ 2013 г. в ___ ч. ___ мин. на заседании диссертационного совета Д212.232.30 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Россия, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский проспект, дом 28. ауд.405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. А. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан «___» _____ 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д212.232.30, доктор физ.-мат. наук



Кустова Е.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность аналитических методов решения задач теории упругости в последнее время не снизилась, а только возросла, несмотря на то, что для определения напряженно-деформируемого состояния широко используются специализированные программные пакеты. Связано это с тем, что задачи, возникающие в современной технике, стали сложнее, особенно с появлением новых материалов. Без строгих аналитических оценок проверить правильность их решения, полученного на основе программного обеспечения, весьма сложно.

Новые материалы, в частности композиционные, могут иметь особенности в виде полостей, жестких или упругих включений. Определение напряженно-деформированного состояния в их окрестности имеет большое научное и практическое значение.

Такие задачи решают, как правило, либо в перемещениях с использованием уравнений Ламе, либо при помощи функции Лява. Осесимметричные задачи для упругого пространства, содержащего какие-либо неоднородности, изучались многими исследователями, например, Саусвеллом, Леоном, Эдвардсом, К. В. Соляник-Крассой.

Задача о пространстве со сферической полостью при одноосном растяжении была решена Саусвеллом с применением функции Лява, а К.В. Соляник-Красса решил её при помощи двух гармонических функций.

Отметим, что при решении конкретных задач возникают трудности при подчинении решения краевым условиям ввиду сложности краевых величин. Так, при использовании функции Лява в граничных условиях при заданных перемещениях появляются вторые производные, а в случае заданных напряжений третьи производные функции Лява. При

применении же двух гармонических функций порядок их производных в выражениях для напряжений и перемещений ниже, но краевые задачи для определения этих функций не являются независимыми. В обоих случаях решение строится в виде рядов по полиномам Лежандра.

В диссертации предложен иной подход к решению подобных задач, при котором краевые величины, как статические, так и кинематические, совпадают с неизвестными соответствующей системы уравнений и тем самым упрощается ее решение.

Цель работы – представить постановку осесимметричной задачи линейной теории упругости в напряжениях и продемонстрировать эффективность ее использования на примере построения аналитических решений некоторых пространственных задач.

Методы исследования. При выполнении диссертационной работы использовались различные аналитические методы: алгебраические, методы дифференциальной геометрии, методы математической физики.

Научная новизна. В работе дана новая постановка линейной осесимметричной задачи теории упругости, где основными являются два уравнения равновесия и два уравнения сплошности, записанные в напряжениях. В напряжениях представлены не только статические, но и кинематические краевые величины.

В предложенной формулировке получены решения задач, в которых граница деформируемого тела совпадает со сферой. Новизна решения в том, что неизвестные представлены в виде степенных рядов по косинусу угла между осью вращения и радиусом сферы. Коэффициенты этих рядов, зависящие от радиальной координаты сферических

координат, вычисляются при помощи системы обыкновенных дифференциальных уравнений типа Эйлера. Неизвестные уравнений совпадают с кинематическими и статическими краевыми величинами, что упрощает подчинение решения краевым условиям на сферической поверхности. Кроме того использованная при этом система уравнений и метод ее решения являются базовым для задач с границей, близкой к сфере.

Достоверность основных результатов базируется на строгой физической постановке задач и корректных математических методах, использованных при их решении. Полученные в работе результаты сопоставлены с решениями других авторов или с решениями, полученными другим методом.

Результаты, выносимые на защиту

1. Постановка пространственной осесимметричной задачи линейной теории упругости в напряжениях, которая включает в себя два уравнения равновесия и записанные в напряжениях два уравнения сплошности, статические и кинематические граничные величины.

2. Метод решения задач для тел со сферической границей: использование для неизвестных степенных рядов по косинусу угла между осью вращения и радиусом сферы с коэффициентами, зависящими от радиальной координаты сферических координат. Преобразование уравнений для определения коэффициентов к виду, удобному для интегрирования и подчинения краевым условиям.

3. Определение напряженно-деформированного состояния пространства с эллипсоидальной полостью, близкой к сферической, при помощи метода малого параметра в сочетании с методом, использованным для пространства со сферическим включением.

Научная и практическая ценность. Разработанный подход к решению осесимметричных задач позволил расширить круг аналитических решений в теории упругости. Найденные решения можно использовать также для оценки точности и достоверности результатов, полученных численными методами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на конференциях: Международная конференция "Пятое поляховские чтения"(Санкт-Петербург, 3-6 февраля 2009 г.), XVI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов"(Москва, 14-17 апреля 2009 г.), XLVI Международная конференция "Актуальные проблемы прочности"(Витебск, Беларусь, 15-17 октября 2007 г.), XVII Петербургские чтения по проблемам прочности (Санкт-Петербург, 10 - 12 апреля 2007 г.).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 4 работы, которые содержатся в списке публикаций по теме диссертации на стр.16. В совместных статьях [2], [3] Шаминой В. А принадлежит постановка задачи и концепция метода решения.

Структура и объем работы Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 78 страниц текста, где содержится 11 рисунков. Список литературы включает 59 наименований.

Во введении отражена актуальность исследуемой задачи, а также описано краткое содержание работы по главам.

В первой главе приведены основные соотношения осесимметричной задачи теории упругости в цилиндрических координатах (ρ, φ, z) с ортами $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{k})$. Рассмотрены основные методы решения таких задач. Сделан обзор предшествующих исследований по данной тематике.

Во **второй главе** представлена в напряжениях основная система уравнений осесимметричной задачи, состоящая

из двух уравнений равновесия

$$\begin{aligned}
& r^2 \left(\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial r} \right) + \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \theta} + r^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial \sigma_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{\partial \sigma_3}{\partial \theta} \right) + \\
& \quad + A^2 r^2 F_\rho = 0 \\
& \rho \left[r^2 \left(\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right] + A^2 r^2 \sigma_{\rho z} + \\
& \quad + A^2 r^2 \rho F_z = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

и двух уравнений сплошности

$$\begin{aligned}
& A^2 \varkappa [\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{zz} + \sigma_3] - \sigma_{zz} - 2\sigma_3 - \rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial \sigma_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{\partial \sigma_3}{\partial \theta} \right) = 0 \\
& r \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{zz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{zz}) + 2r \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial \theta} - \\
& \quad - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho \sigma_3}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \rho \sigma_3}{\partial \theta} \right) = 0, \quad \varkappa = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}, \tag{2}
\end{aligned}$$

где

$$A^2 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \right], \quad \sigma_3 = 2\mu \frac{u_\rho}{\rho},$$

F_z , F_ρ -массовые силы. Неизвестные системы $\sigma_{\rho\rho}, \sigma_{zz}, \sigma_{\rho z}$ являются компонентами тензора напряжения в базисе цилиндрических координат, $\sigma_3 = 2\mu \frac{u_\rho}{\rho}$ - величина, пропорциональная радиальному перемещению, имеет размерность напряжения. Их аргументы r, θ - ортогональные координаты с ортами $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, введенные в меридиональной плоскости $\varphi = const$ так, чтобы граница рассматриваемого тела совпадала с координатными поверхностями $r = const$ и $\theta = const$.

В напряжениях представлены кинематические и статические краевые величины.

Если граница тела или неоднородности совпадает с поверхностью $r = r_0 = const$, то статическими краевыми величинами являются компоненты вектора напряжения

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_1 &= \sigma_{1\rho} \mathbf{e}_\rho + \sigma_{1z} \mathbf{k}, \quad \sigma_{1\rho} = \sigma_{\rho\rho} (\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_1) + \sigma_{\rho z} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1) \\ \sigma_{1z} &= \sigma_{\rho z} (\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_1) + \sigma_{zz} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1), \quad \mathbf{e}_1 = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} e_\rho + \frac{\partial z}{\partial r} k \right)\end{aligned}\quad (3)$$

На границе $r = r_0 = const$ в качестве кинематических краевых величин используем не компоненты вектора перемещения $\mathbf{u} = u_\rho \mathbf{e}_\rho + u_z \mathbf{k}$, а связанные с ними выражения σ_3 и $\frac{du_z}{d\theta}$, которые можно представить в напряжениях. Действительно,

$$\sigma_3 = 2\mu \frac{u_\rho}{\rho}, \quad U_z = 2\mu \frac{1}{r} \frac{du_z}{d\theta} = \frac{2}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \sigma_{\rho z} - \frac{\partial \rho}{\partial r} (\sigma_{zz} - \sigma_{\rho\rho}) - \frac{\partial \rho \sigma_3}{\partial r}\quad (4)$$

Итак, кинематическими краевыми величинами в напряжениях являются σ_3 и U_z .

Аналогичные соотношения даны и для случая, если граница тела или неоднородности совпадает с поверхностью $\theta = \theta_0 = const$.

В **третьей главе** рассматривались задачи, в которых упругое тело имело сферическую границу. В этом случае в качестве ортогональных координат (r, θ) естественно брать сферические, связь которых с цилиндрическими координатами (ρ, z) определяются соотношениями:

$$\rho = Rr \sin \theta, \quad z = Rr \cos \theta,$$

где R -масштабный множитель, который совпадает с радиусом сферы, r -безразмерная величина.

Решение системы уравнений (1), (2) представляем в степенных рядах по $\cos \theta$ с коэффициентами, зависящими от r :

$$\sigma_{\rho\rho}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [\sigma_{\rho\rho,n}^I(r) + \sigma_{\rho\rho,n}^{II}(r) \cos \theta] \cos^{2n} \theta,$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [\sigma_{zz,n}^I(r) + \sigma_{zz,n}^{II}(r) \cos \theta] \cos^{2n} \theta, \\
\sigma_3(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [\sigma_{3,n}^I(r) + \sigma_{3,n}^{II}(r) \cos \theta] \cos^{2n} \theta, \\
\sigma_{\rho z}(r, \theta) &= \sin \theta \sum_{n=0}^{\infty} [\sigma_{\rho z}^I(r) \cos \theta + \sigma_{\rho z}^{II}(r)] \cos^{2n} \theta, \\
F_{\rho}(r, \theta) &= \sin \theta \sum_{n=0}^{\infty} [F_{\rho,n}^I(r) + F_{\rho,n}^{II}(r) \cos \theta] \cos^{2n} \theta, \\
F_z(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [F_z^I(r) \cos \theta + F_z^{II}(r)] \cos^{2n} \theta. \tag{5}
\end{aligned}$$

Системы уравнений для определения коэффициентов рядов (5) с индексами "I" и "II" независимы и по структуре идентичны. Идею преобразования этих систем иллюстрируем на примере, когда напряженно-деформированное состояние тел симметрично относительно плоскости $z = 0$ и отличными от нуля оказываются только коэффициенты с индексом "I". Поэтому ниже приводятся соотношения для определения коэффициентов рядов (5) с индексом "I", который будет опущен. Тем более, что именно эти соотношения используются в конкретных задачах.

Итак, вводим новые неизвестные по формулам:

$$\begin{aligned}
R_n(r) &= r^2 (\sigma_{\rho\rho,n} + \sigma_{\rho z,n-1}), \quad S_n(r) = r^2 \sigma_{3,n} \\
Z_n(r) &= r^2 (\sigma_{zz,n} + \sigma_{\rho z,n} - \sigma_{\rho z,n-1}), \quad T_n(r) = r^2 \sigma_{\rho z,n}, \\
U_n(r) &= r^2 \left[2\sigma_{\rho z,n-1} - (\sigma_{zz,n} - \sigma_{\rho\rho,n}) - \left(r \frac{d\sigma_{3,n}}{dr} + \sigma_{3,n} \right) \right] \tag{6}
\end{aligned}$$

В новых неизвестных компоненты напряжений и перемещений принимают вид

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} (R_n(r) - T_{n-1}(r)) \cos^{2n} \theta,$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} (Z_n(r) - T_n(r) + T_{n-1}(r)) \cos^{2n} \theta, \\ \sigma_{\rho z} &= \frac{1}{r^2} \sin \theta \cos \theta \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r) \cos^{2n} \theta, \quad \sigma_3 = \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} S_n(r) \cos^{2n} \theta \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} S_n + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (R_n + Z_n - T_n) \right] \cos^{2n} \theta\end{aligned}$$

$$\frac{2\mu u_\rho(r, \theta)}{R} = \frac{1}{r} \sin \theta \sum_{n=0}^{\infty} S_n \cos^{2n} \theta, \quad \frac{2\mu u_z(r, \theta)}{R} = -\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n}{2n+1} \cos^{2n+1} \theta. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (1),(2), после соответствующих преобразований получаем следующие уравнения для определения функций (6):

$$\begin{aligned}r \frac{dR_n}{dr} - 2(n+1)R_n + 2(n+1)T_n &= -\Psi_{n+1} + 2(n+1)S_{n+1} - Rr^3 F_{\rho,n}^I \\ r \frac{dZ_n}{dr} - 2(n+1)Z_n + 2(n+1)T_n &= 2(n+1)F_{2,n+1} - Rr^3 F_{z,n}^I \\ r \frac{dU_n}{dr} - 2(n+1)U_n + (2n+1)T_n &= (2n+1)\Psi_{n+1} \\ r \frac{dS_n}{dr} - 2(n+1)S_n - T_n &= \Psi_{n+1} - 2(n+1)S_{n+1}, \\ r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_n}{dr} \right) + 4nr \frac{dT_n}{dr} + (4n^2 - 1)T_n &= \Phi_n(r),\end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\Psi_{n+1} = \varkappa (F_{2,n+1} - F_{1,n+1}) + F_{3,n+1}, \quad F_{1,n+1} = R_{n+1} + S_{n+1},$$

$$F_{2,n+1} = T_{n+1} - Z_{n+1}, \quad F_{3,n+1} = F_{1,n+1} - U_{n+1},$$

$$\begin{aligned}\Phi_n(r) &= 3(2n+1)r \frac{dF_{2,n+1}}{dr} - (4n+1)r \frac{dF_{1,n+1}}{dr} + \\ &+ (2n-1) [(4n+3)F_{2,n+1} - (2n+1)F_{1,n+1}] +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon} \left\{ (4n+1)r \frac{dF_{3,n+1}}{dr} + (4n^2-1)F_{3,n+1} + 4n(n+1) \left(F_{2,n+1} - r \frac{dS_{n+1}}{dr} \right) \right\} - \\
& - R \left\{ r \frac{d}{dr} [r^3(F_{\rho,n}^I + F_{z,n}^I)] + (2n-1)r^3(F_{\rho,n}^I + F_{z,n}^I) \right\} - \\
& - \frac{1}{\varepsilon} R \{ 4nr^3 F_{z,n}^I - r \frac{d}{dr} (r^3 F_{\rho,n}^I) - \\
& - (2n-1)r^3 F_{\rho,n}^I + r \frac{d}{dr} [r^3(F_{\rho,n-1}^I - F_{z,n-1}^I)] - 2(n+1)r^3(F_{\rho,n-1}^I - F_{z,n-1}^I) \}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Выражения для статических краевых величин (3), как и уравнения (1), (2), записываем с учетом (5), (7):

$$\begin{aligned}
\sigma_{1\rho} &= \sigma_{\rho\rho} \sin \theta + \sigma_{\rho z} \cos \theta = \frac{\sin \theta}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r) \cos^{2n} \theta \\
\sigma_{1z} &= \sigma_{\rho z} \sin \theta + \sigma_{zz} \cos \theta = \frac{\cos \theta}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(r) \cos^{2n} \theta
\end{aligned} \tag{10}$$

Из (10) следует, что для системы уравнений (8) статические краевые условия формулируются в величинах, пропорциональных R_n и Z_n , а в силу (7) кинематические краевые величины пропорциональны S_n и U_n . Далее, уравнения системы (8) решаются последовательно. На каждом шаге неизвестная функция одна, а правая часть соответствующего уравнения содержит только те определяемые функции, которые найдены на предыдущих шагах.

Эффективность данного подхода была проиллюстрирована на решении ряда классических задач, а именно при определении напряженно-деформируемого состояния упругого пространства, растянутого вдоль оси z и содержащего неоднородность вида:

- полость; - жесткое включение; - упругое включение.

Определялось также напряженно-деформируемое состояние сферического сосуда под действием равномерного внутреннего и внешнего

давления; упругого пространства с эллипсоидальной полостью, близкой к сферической, которая находится под равномерным внутренним давлением.

При решении перечисленных задач оказалось, что в рядах (7), которыми определяются напряжения и перемещения, достаточно удерживать не более трех членов. Соответствующие значения функций $R_n(r)$, $Z_n(r)$, $S_n(r)$, $T_n(r)$, $U_n(r)$ имеют вид конечных рядов по положительным и отрицательным степеням r . Простота подчинения решений краевым условиям обусловлена тем, что на границе неоднородности в силу (7), (10) задаются только значения указанных функций. Так, при одноосном растяжении пространства ("out", модуль сдвига μ_{out}) с упругим включением ("in", модуль сдвига μ_{in}) условия сопряжения на границе включения ($r = 1$) имеют вид ($\alpha = \frac{\mu_{in}}{\mu_{out}}$)

$$\begin{aligned} R_0^{out}(1) - R_0^{in}(1) &= 0, & Z_0^{out}(1) - Z_0^{in}(1) &= -\sigma_0, \\ \alpha S_0^{out}(1) - S_0^{in}(1) &= \alpha \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \sigma_0, & \alpha U_0^{out}(1) - U_0^{in}(1) &= \alpha \left(\frac{1}{2-\alpha} \right) \sigma_0. \\ R_n^{out}(1) - R_n^{in}(1) &= 0 \quad (n \geq 1), & Z_n^{out}(1) - Z_n^{in}(1) &= 0 \quad (n \geq 1), \\ \alpha S_n^{out}(1) - S_n^{in}(1) &= 0 \quad (n \geq 1), & \alpha U_n^{out}(1) - U_n^{in}(1) &= 0 \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Полученные аналитические решения совпадают с решениями Гудьера и согласуются с численными результатами Noda Nao-Aki. На (Рис.1) представлено распределение нормального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ на границе включения. Различие упругих сред определяется одним параметром α , что для численных расчетов удобнее, в отличие от аналогичных выражений Гудьера. Как показано на рис.1, при предельных значениях отношения модулей сдвига α , решение совпадает с решениями аналогичных задач в случае, если неоднородность представляет собой полость или жесткое включение.

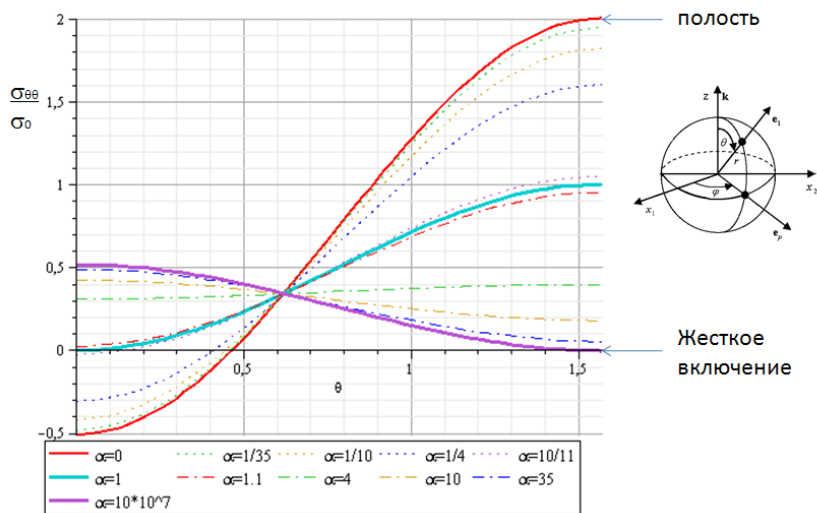


Рис. 1. График напряжения $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$

Решение задач для тел со сферической границей может быть использовано в качестве нулевого приближения при решении задач для тел с границей, близкой к сферической.

В работе такой подход был применен для определения напряженно-деформируемого состояния упругого пространства с эллипсоидальной полостью, близкой к сферической. Поверхность полости находится под действием гидростатического давления. Искомые величины представлены в виде рядов по степеням малого параметра $\varepsilon^2 = \frac{a-b}{a+b}$, где a, b - полуоси эллипса в меридиональном сечении. Соотношения для определения коэффициентов рядов отличаются от представленных для тел со сферическими неоднородностями только правыми частями соответствующих уравнений.

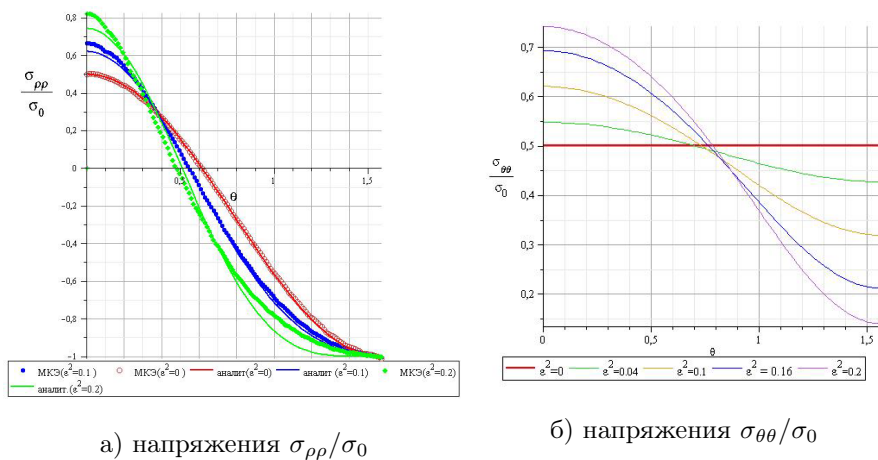


Рис. 2. Напряжения на границе эллипсоидальной полости.

Получено аналитическое решение в первом приближении. С целью определить границы его применимости та же задача, но без предположения о малости ε^2 , решалась методом МКЭ, реализованным при помощи COMSOL Multiphysics.

Из рис. 2 а,б), на которых представлены графики напряжения $\sigma_{\rho\rho}/\sigma_0$ и $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$ в зависимости от координаты θ при различных значениях ε^2 , следует, что аналитическое решение в первом приближении отличается от решения полученного при помощи МКЭ ($\varepsilon^2 \leq 0.2$) не более чем на 11% (при $\varepsilon^2 \leq 0.1$ не более чем 5-6%). Данные соотношения справедливы для всех компонент тензора напряжения, записанного в цилиндрической системе координат. Отметим, что напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ максимально на полюсах полости и при $0 \leq \varepsilon^2 \leq 0.04$ отличается от значения данного напряжения на сфере не более чем на 10%.

В заключении приводятся основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1 Дана новая постановка линейной осесимметричной задачи теории упругости, где в напряжениях представлены основные уравнения, которыми являются два уравнения равновесия и два уравнения сплошности, а также статические и кинематические краевые величины. 2. Рассмотрены задачи о напряженно-деформированном состоянии тел, граница которых совпадает со сферой. Решение было принято в виде степенных рядов по $\cos(\theta)$ с коэффициентами, зависящими от r . Системы уравнений для определения коэффициентов преобразована так, что ее интегрирование практически сводится к вычислению квадратур. Неизвестные уравнений совпадают с краевыми величинами, что существенно упрощает решение конкретных задач. 3. Получены аналитические решения задач для упругого пространства, растянутого на бесконечности и имеющего сферическую неоднородность в виде полости, упругого и жесткого включений. В случае упругого включения рассмотрены предельные случаи в зависимости от отношения модулей сдвига включения и пространства. 4. Рассмотрено напряженно-деформированное состояние упругого пространства с эллиптической полостью, близкой к сферической и нагруженной гидростатическим давлением. Представлены два варианта решения: 1) первое приближение, полученное методом малого параметра в сочетании с методом, использованным для случая сферической полости; 2) при помощи МКЭ. Это позволило определить границы применимости аналитического решения.

В результате проведенного исследования можно сделать следующие основные выводы и практические рекомендации: - предложенный подход применим для тел со сферическими и близким к сферическим границами; - при соотношении модулей сдвига $\mu_{in}/\mu_{out} = 1/35$ или

$\mu_{in}/\mu_{out} = 35/1$ задачу о растяжении пространства с упругим включением можно рассматривать как частный случай полости или жесткого включения соответственно; - с учетом 10% погрешности ($\varepsilon^2 \leq 0.04$) эллипсоидальные полости при внутреннем гидростатическом давлении можно аппроксимировать сферическими полостями.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК России:

1. Гасратова Н. А. Напряженно-деформируемое состояние упругого пространства со сферическим жестким включением. //Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер.10, 2009. С. 14-18,

2. Гасратова Н. А., Шамина В. А. Решение в напряжениях линейной осесимметричной задачи для сферы и упругого пространства со сферической полостью.// Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер.1, 2008, вып.2. С.122-128.

3. Гасратова Н. А., Шамина В. А. Об одном подходе к решению осесимметричных задач линейной теории упругости. // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 1, 2007, вып. 2. С. 101-107.

Другие публикации:

4. Гасратова Н.А. Решение в напряжениях для линейной осесимметричной задачи об упругом пространстве со сферической полостью или жестким включением.//XVII Петербургские чтения по проблемам прочности. Санкт-Петербург, 10-12 апреля 2007г.:сборник материалов. - Ч.1.-СПб., 2007. С.254-255.