

На правах рукописи

Петренко

Евгений Игоревич

Компьютерное исследование динамических систем на  
основе метода символического образа

05.13.11 Математическое и программное обеспечение вычислительных  
машин, комплексов и компьютерных сетей

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2009

Работа выполнена на Кафедре информатики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,  
доцент Ампилова Наталья Борисовна.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Флегонтов Александр  
Владимирович (Российский государственный  
педагогический университет  
им. А.И. Герцена),  
доктор физико-математических наук,  
профессор Андрианов Сергей Николаевич  
(Санкт-Петербургский государственный  
университет).

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный  
политехнический университет.

Защита диссертации состоится “ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2009 года в \_\_\_\_\_ час. на заседании совета Д 212.232.51 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет Санкт-Петербургского государственного университета, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб. 7/9.

Автореферат разослан “ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2009 года.

Ученый секретарь диссертационного  
совета доктор физико-математических  
наук, профессор



И.К. Даугавет

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Широкое применение динамических систем как моделей реальных процессов в различных областях естествознания способствовало интенсивному развитию компьютерных методов их исследования. Методы численного анализа позволяют строить траектории на конечном интервале времени, при этом внимание уделяется точности построений.

Практика показала, что для успешного изучения сложных динамических систем и их долгосрочного поведения необходимы новые компьютерно-ориентированные методы, которые позволяют определять асимптотику поведения траекторий. Разработка и реализация программного комплекса, который объединяет методы определения важных характеристик систем со сложным поведением траекторий, является актуальной задачей.

**Основной** из важных характеристик поведения динамической системы является цепно-рекуррентное множество — множество всех периодических псевдо-траекторий. Оно приближает множество периодических траекторий, и его локализация является начальным шагом многих методов исследования динамических систем. Локализация таких множеств (кроме простейших — неподвижных точек) является затруднительной при использовании классических методов численного анализа, поскольку они дают немного информации об асимптотике системы.

При решении этой задачи используется идея разбиения фазового пространства на конечный набор ячеек (клеток) и моделирования поведения системы в соответствии с преобразованиями этих ячеек под действием системы. Уточнение фазового портрета происходит при последовательном подразбиении ячеек покрытия. Практическая реализация таких методов сталкивается с проблемой быстрого роста числа ячеек, что повышает сложность разработки и реализации применимых на практике методов. Для исследования и моделирования динамических систем Г. С. Осипенко предложил метод символического образа, представляющий собой развитие идеи о разбиении фазового пространства и кодировании траекторий [10]. Этот метод позволяет получать важные характеристики исходной динамической системы с помощью алгоритмов на ориентированном графе, вершинами которого являются элементы разбиения фазового пространства, а ребра определяются поведением системы на элементах разбиения.

Задача локализации цепно-рекуррентных множеств решается с помощью выделения на графе символического образа компонент сильной связности (классов эквивалентности вершин, между которыми существует путь). Получаемый при помощи этого метода результат существенно зависит от способа построения символического образа. В литературе описан наиболее простой метод построения образа ячейки (далее будем называть его точечный метод), который исследует поведение системы через поведение системы на фиксированном наборе точек [9, 10]. Для некоторых систем применение такого метода может оказаться затруднительным (из-за необходимости рассмотрения очень большого числа точек), поэтому требуется разработать новые методы построения образа ячейки.

В данной работе разработаны и реализованы новые методы построения образа ячейки, реализован точечный метод, проведено сравнение всех методов, оценена их сложность и сложность построения символического образа, приведена сравнительная характеристика.

**Второй** важной характеристикой поведения системы является устойчивость ее цепно-рекуррентного множества при малом возмущении системы (правых частей). Она имеет большое значение для приложений, поскольку определение областей существования устойчивых режимов при изменении как параметров, так и правых частей, позволяет исследователю контролировать поведение системы. Непосредственная проверка такой устойчивости представляется затруднительной. Теоретически она может быть сведена к эквивалентной задаче — оценке предельного множества показателей Ляпунова периодических псевдо-траекторий системы — спектра Морса. Эта характеристика особенно важна, когда динамическая система имеет бесконечно много периодических траекторий большого периода. Г. С. Осипенко впервые предложил теоретический способ оценки спектра Морса динамической системы с помощью оснащенного символического образа [10], что позволило впервые получить компьютерный способ проверки устойчивости цепно-рекуррентного множества.

Первые результаты диссертанта по реализации метода получения оценки спектра Морса динамической системы были опубликованы в [7], где для решения этой задачи впервые был применен симплекс-метод, перенесенный на ориентированный граф. В диссертационной работе разработаны и реали-

зованы методы построения оснащенного символического образа (образа ячейки для системы на проективном расширении), впервые реализован алгоритм оценки спектра Морса оснащенного символического образа, на основании которого получены численные результаты для систем, имеющих нетривиальные цепно-рекуррентные множества.

**Третьей** важной характеристикой динамических систем является инвариантная мера. Инвариантная мера динамической системы дает важное для приложений вероятностное описание поведения системы. Динамическая система может иметь много инвариантных мер, поэтому нужно выбирать те, которые интересны с точки зрения динамики. Аппроксимации инвариантной меры посвящено много работ, где в основном используется конечная аппроксимация оператора Перрона-Фробениуса [8], которая позволяет построить только одну специальную меру и только в случае, если известно, что такая мера существует для конкретной системы. Проверка этого свойства оказывается сложной теоретической задачей.

В диссертации разработаны и реализованы алгоритмы построения инвариантной меры на символическом образе, впервые основанные на построении стационарного потока на графе. Такие меры являются приближением инвариантных мер исходной системы, для их построения не требуется проверки дополнительных свойств динамической системы.

На данный момент не существует комплекса компьютерного исследования динамических систем, который реализует все описанные методы. Автором был разработан и реализован программный комплекс компьютерного исследования динамических систем на основе метода символического образа, который позволяет решать описанные задачи. В программном комплексе впервые применена динамическая генерация кода.

**Цели и задачи диссертационной работы.** Основными целями работы являются разработка и реализация программного комплекса компьютерного исследования дискретных и непрерывных динамических систем, основанного на методе символического образа, который впервые объединяет описанные выше методы исследования динамических систем: построение цепно-рекуррентного множества динамической системы при помощи различных методов построения символического образа (образа ячейки); вычисление оценки спектра Морса динамической системы через применение симплекс-

метода к ориентированному графу, построенному для динамической системы; построение приближения к инвариантной мере динамической системы, а также вычисление оценки энтропии по построенной инвариантной мере.

Для достижения обозначенных целей были поставлены следующие задачи:

- разработать и реализовать новые алгоритмы построения символического образа (образа ячейки), провести сравнение полученных алгоритмов, получить оценки скорости построения символического образа;
- исследовать и оценить возможность применения симплекс-метода к ориентированному графу оснащенного символического образа для получения оценки спектра Морса динамической системы;
- разработать и сравнить различные алгоритмы построения стационарного процесса на графе символического образа для получения приближения к инвариантной мере динамической системы;
- разработать программный комплекс компьютерного исследования динамических систем на основе метода символического образа, который впервые будет включать в себя реализации описанных выше методов исследования динамических систем.

### **Основные результаты.**

1. Разработан и реализован программный комплекс компьютерного исследования динамических систем на основе метода символического образа, который впервые объединяет в себе: методы построения цепно-рекуррентных множеств дискретных и непрерывных динамических систем; метод построения оценки спектра Морса для непрерывных и дискретных динамических систем, применимый для компьютерной проверки устойчивости цепно-рекуррентного множества; метод построения приближения к инвариантной мере динамической системы. В комплексе была успешно использована динамическая генерация кода. Реализованный программный комплекс может быть расширен новыми методами и алгоритмами исследования динамических систем. Компоненты данного программного комплекса могут быть использованы как части другой системы.
2. Разработаны и проанализированы линейный, точечный, улучшенный точечный, адаптивный и прямоугольный адаптивный методы построения символического образа (образа ячейки). Доказана теорема об оценках

сложности построения очередного шага символического образа. Точечный, линейный и адаптивный методы применимы для построения оснащенного символического образа (для расширенной динамической системы). Полученный набор методов построения символического образа дает исследователю возможность выбрать наиболее подходящий для исследуемой системы метод на основе полученных результатов сравнения методов и практических экспериментов.

3. Разработан алгоритм поиска контуров с минимальной и максимальной характеристикой на ориентированном графе, основанный на модификации симплекс-метода, перенесенной на ориентированный граф, что впервые позволило получить компьютерный метод оценки спектра Морса динамической системы и способ проверки устойчивости цепно-рекуррентного множества динамической системы. Доказана теорема о сходимости метода.
4. Разработаны и обоснованы алгоритмы построения стационарного потока на ориентированном графе символического образа, что более легким способом позволило получить приближение к инвариантной мере динамической системы. Впервые эффективно применен релаксационный метод, перенесенный на ориентированный граф, для построения стационарного потока. Проведено их сравнение, доказаны теоремы о сходимости.

**Научная новизна.** Все полученные в работе результаты являются новыми. Научная новизна заключается в следующем:

- разработаны и проанализированы: линейный, точечный, улучшенный точечный, адаптивный и прямоугольный адаптивный методы построения символического образа (образа ячейки), при этом, линейный, точечный, адаптивный методы применимы для построения оснащенного символического образа. Для всех методов приведена сравнительная характеристика и оценки сложности работы;
- впервые реализован метод получения оценки спектра Морса динамической системы, основанный на применении симплекс-метода к ориентированному графу оснащенного символического образа;
- впервые разработаны и реализованы методы построения приближения к инвариантной мере динамической системы путем построения стационарного процесса на графе символического образа.

**Практическая ценность.** Разработанный программный комплекс

компьютерного исследования динамических систем на основе символического образа может быть применен для исследования как непрерывных, так и дискретных динамических систем небольшой размерности.

Программный комплекс позволяет строить цепно-рекуррентные множества динамической системы, проверять цепно-рекуррентную устойчивость динамической системы при помощи вычисления оценки ее спектра Морса, строить приближение к инвариантной мере, вычислять оценку энтропии.

Созданный программный комплекс компьютерного исследования динамических систем на основе метода символического образа применяется в курсе по компьютерному исследованию динамических систем на математическом факультете СПбГУ, для исследования нетривиальных динамических систем, может быть применен в учебных и исследовательских целях.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались:

- на конкурсе - конференции работ студентов, аспирантов и молодых ученых “Технологии Microsoft в теории и практике программирования” (Санкт-Петербург, 2004, 2005, 2007, 2008 — диплом первой степени)
- на конкурсе стипендий Intel (Санкт-Петербург, 2006, 2007)
- на VIII-й международной научно-технической конференции “Компьютерное моделирование” (Санкт-Петербург, 2007)
- на третьей международной научно-практической конференции “Современные информационные технологии” (Москва, 2008)
- на международной научной конференции “Космос, астрономия и программирование (Лавровские чтения)” (Санкт-Петербург, 2008)
- на шестой конференции “EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008)” (Санкт-Петербург, 2008)
- на XL международной конференции “Процессы управления и устойчивость” Control Processes and Stability (CPS’09) (Санкт-Петербург, 2009)
- на 5-й международной конференции “Dynamical Systems and Applications” (Constantza, Romania, 2009)

**Публикации.** Основные результаты представлены в 7 работах автора, перечисленных в прилагающемся списке работ автора. Работы [1, 2] опубликованы в изданиях по перечню ВАК. В работах [1] и [6] автору принадлежит разработка и реализация методов построения инвариантных мер, а также реализации метода получения оценки энтропии. В работе [7] автору принадлежит



разработка и реализация методов построения образа ячейки в проективном пространстве, реализация метода вычисления оценки спектра Морса по динамической системе.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа объемом 197 машинописных страниц состоит из: введения, четырех глав, одного приложения и списка литературы, содержащего 85 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Введение** содержит обзор современного состояния данной предметной области, обоснование актуальности диссертационной работы. Во введении сформулированы цели и аргументирована научная новизна исследований, представлены выносимые на защиту положения.

Первые три главы работы содержат описание решенных при разработке комплекса компьютерного исследования динамических систем задач. В четвертой главе приведено описание особенностей реализации разработанного комплекса.

**Первая глава** содержит описание метода символического образа, а также разработанных автором методов представления и построения его на компьютере. Описанная в этой главе задача построения символического образа и ее реализация задает необходимый базис для решения следующих задач.

Символический образ представляет собой ориентированный граф, который строится по дискретной динамической системе  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f$  — диффеоморфизм, или по отображению сдвига для непрерывной динамической системы ( $\dot{x} = g(x)$ ), и разбиению множества  $D$  на конечный набор ячеек  $\{C_i\}$ . Вершинам графа соответствуют ячейки, между вершинами  $i$  и  $j$  существует дуга  $i \rightarrow j$ , тогда и только тогда, когда  $f(C_i) \cap C_j \neq \emptyset$ .

В реализации алгоритма рассматриваются одинаковые ячейки. Каждая ячейка в таком случае представляется точкой её “верхнего левого угла”. Множество  $D$  берется в виде параллелепипеда, ориентированного по осям координат. Координатные оси пространства  $\mathbb{R}^m$  разбиваются на части одинаковой длины, так, чтобы по  $i$ -ому направлению множество  $D$  разбивалось на  $p_i$  частей. Рассматривается система координат, за единицу длины в которой принимается размер ячейки. Каждой ячейке сопоставляется набор из  $m$  целых чисел.

Автором разработаны, реализованы и проанализированы пять методов построения образа ячейки:

**Линейный метод.** Образ ячейки оценивается через расширенный прямоугольник, ориентированный по осям координат, построенный по точкам образов (под действием системы) вершин исходной ячейки. Коэффициент расширения является параметром метода.

**Точечный метод.** Образ ячейки строится как объединение ячеек, которым принадлежат образы (под действием системы) равномерно выбранных точек внутри исходной ячейки. Количество точек является параметром данного метода.

**Улучшенный точечный метод.** Работает аналогично точечному методу, однако, если образ некоторой точки оказывается близко к границе ячейки, то к результату добавляются соседние ячейки.

**Адаптивный и прямоугольный адаптивный методы.** Строится образ ячейки по точкам, выбранным в зависимости от поведения системы на ячейке. В адаптивном методе рассматривается граф соседних точек, измеряются расстояния между образами точек, соответствующих вершинам ребра графа разбиений: если расстояния велико, то ребро разбивается, добавляется вершина и новые ребра. В прямоугольном адаптивном методе на каждом шаге рассматриваются главные диагонали параллелепипедов: если расстояние между точками образов велико, то относительно точки центра диагонали рассматриваются новые  $2^m$  параллелепипедов. По полученным образам точек оба метода вычисляют наборы ячеек при помощи способа, описанного в улучшенном точечном методе. В этих методах вводится ограничение на количество рассматриваемых точек.

Реализация графа должна выполнять только операции поиска и добавления вершин и ребер, используется хэшированные списки, в качестве хэш-функции берется линейная комбинация целочисленных координат с простыми коэффициентами по простому модулю.

Полученные оценки сложности построения одного шага символического образа сформулированы в виде следующей теоремы:

**Теорема 1.** Пусть  $N$  — количество ячеек (вершин в символическом образе), тогда сложность построения следующего шага: для точечного и улучшенного точечного методов — в среднем  $O(N)$ ; для линейного, адап-

тивного и прямоугольного адаптивного методов — в среднем  $O(N^2)$ .

Разработанный автором комплекс компьютерного исследования динамических систем имеет меньшую оценку сложности построения символического образа точечным методом (в среднем), по сравнению с реализацией, приведенной в [9]. Полученные оценки сложности позволяют говорить о практической применимости приведенных реализаций, полученные компьютерные эксперименты подтверждают это.

В заключение приводятся результаты компьютерных экспериментов для дискретных и непрерывных динамических систем размерности 2 и 3 со сложным поведением траекторий.

**Вторая глава** содержит описание метода построения оценки спектра Морса динамической системы с помощью оснащенного символического образа, построенного для специального расширения исходной системы, при этом каждой дуге присваивается некоторый вес. Пусть динамическая система задана в виде  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Рассматривается расширенная динамическая система:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad v_{n+1} = \frac{Df(x_n)v_n}{|Df(x_n)v_n|},$$

где  $x_i \in \mathbb{R}^m$ ,  $v_i \in P^{m-1}$ ,  $P^{m-1}$  — проективное пространство (множество всех прямых в  $\mathbb{R}^m$ , проходящих через начало координат). Автором реализованы три способа введения координат в проективном пространстве: для двумерного пространства координаты вводятся как угол наклона прямой и через отрезки, для трехмерного — сферические координаты. На проективном пространстве были реализованы линейный, точечный и адаптивный методы.

Для оценки спектра Морса оснащенного символического образа нужно найти контуры с экстремальными характеристиками на каждой компоненте сильной связности символического образа. Объединение интервалов составленных из минимальных и максимальных значений этих характеристик на каждой компоненте сильной связности задает спектр Морса оснащенного символического образа. Вес контура определяется как среднее значение весов его ребер.

Для решения этой задачи был реализован метод, который сводит задачу поиска контура к задаче линейного программирования на ориентированном

графе. Впервые для решения этой задачи был применен симплекс-метод, перенесенный на ориентированный граф. Полученная автором реализация позволила впервые получить компьютерный способ построения оценки спектра Морса динамической системы, с помощью которого впервые стала возможна проверка устойчивости цепно-рекуррентного множества. Доказана теорема:

**Теорема 2.** *Предложенный метод поиска контуров с экстремальными характеристиками сходится к экстремальному решению за конечное число шагов (как симплекс-метод).*

В заключение приводятся результаты компьютерных экспериментов.

**В третьей главе** описано решение задачи построения приближения к инвариантной мере динамической системы. Путь  $G = \langle V, E \rangle$  — граф символического образа. Тогда функция  $\mu : E \rightarrow \mathbb{R}$  задает инвариантную меру (вес) на дугах, если для всех  $e \in E$   $\mu(e) \geq 0$ , для каждой вершины сумма мер входящих дуг равна сумме мер исходящих дуг, и сумма мер на всех дугах равна 1. Меру можно расширить на множество  $V$  как сумму мер входящих или исходящих ребер.

Автором разработаны и реализованы два способа построения инвариантной меры на символическом образе. Первый способ основан на следующем свойстве: пусть  $\mu_1$  и  $\mu_2$  инвариантные меры, тогда и их выпуклая линейная комбинация тоже является инвариантной мерой. Инвариантная мера строится как линейная комбинация мер, сосредоточенных на простых циклах. Рассматриваются различные алгоритмы поиска простых циклов на графе. Поскольку их количество может быть велико (экспоненциально от количества вершин), предложенные алгоритмы позволяют находить лишь некоторые из простых циклов (полиномиальное количество от количества вершин), что не мешает получать приемлемые, с точки зрения исходной задачи, результаты. Доказана теорема:

**Теорема 3.** *Алгоритм частичного перебора простых циклов завершается за  $O(|V||E|)$  шагов.*

Второй подход к решению задачи основан на методе балансировки. Суть метода сводится к поиску вершины с наибольшей ошибкой и пересчету весов ребер входящих в эту вершину и исходящих из нее. Впервые для получения оценки инвариантной меры динамической системы успешно применен алгоритм балансировки потока на ориентированном графе. В диссертационной

работе рассмотрены критерии остановки метода балансировки, приводится их сравнительный анализ. Доказана теорема:

**Теорема 4.** *Последовательность балансировок, получаемая алгоритмом, сходится.*

На основе разработанных и реализованных методов построения оценки инвариантной меры, разработан и реализован метод вычисления энтропии символического образа через энтропию марковской цепи. Далее приводятся результаты компьютерных экспериментов по построению инвариантных мер динамических систем и вычислению значения энтропии символического образа. Для проверки получаемых результатов был реализован способ вычисления модуля максимального собственного числа матрицы смежности символического образа, на основании которого можно получить оценку сверху значений энтропии символического образа.

Разработан и реализован метод итераций ломаной, с помощью которого реализован метод оценки энтропии. Проведено сравнение оценок энтропии динамических систем, полученных при помощи различных методов.

**В четвертой главе** приводится описание приемов использованных при реализации комплекса компьютерного исследования динамических систем на основе метода символического образа, который впервые включает в себя методы локализации цепно-рекуррентных множеств динамической системы, построения оценки спектра Морса динамической системы, построения приближения к инвариантной мере динамической системы.

Разработанный комплекс реализован на языке C# 3.0, который входит в состав Microsoft .NET Framework 3.5. Для построения рисунков компьютерных экспериментов используется пакет GNUPLLOT. Все использованные программные продукты распространяются бесплатно для академического использования. На языке C# написано около 92 тысяч строк кода, на языке C++ написано около 35 тысяч строк кода.

В начале главы приведено подробное описание подсистемы динамической генерации кода, которая позволяет снизить требования к оперативной памяти и повысить производительность системы. По заданной динамической системе программный комплекс генерирует код реализации некоторых алгоритмов и структур данных. Сгенерированный код компилируется при помощи встроенного в .NET Framework компилятора языка C#, после чего загру-

жается и используется. Динамическая генерация кода впервые применяется к реализации методов исследования динамических систем. В разработанном программном комплексе она используется для реализации методов целочисленной системы координат, методов построения образа ячеек и для создания структуры данных представления целочисленной координаты ячейки. Использование динамической генерации кода позволило снизить требования к оперативной памяти и снизить время, требуемое для построения символического образа. В диссертационной работе приведены результаты компьютерных экспериментов сравнения времени работы программного комплекса с использованием динамической генерации кода и без нее. По результатам экспериментов, экономия оперативной памяти составляет от 30% (для 4-х мерных систем), до 60% (для двумерного случая), выигрыш по времени при построении цепно-рекуррентного множества составляет в среднем 15%.

Для организации взаимодействия объектов программного комплекса применяются компоненты и сервисы. Для этого используется концепция “обращение контроля”. Такой подход широко применяется при разработке больших программных продуктов. Автором были проанализированы доступные реализации библиотек обращения контроля и была реализована собственная библиотека обращения контроля, которая обладает необходимыми для разрабатываемого программного комплекса свойствами и простотой использования.

Разработанный программный комплекс компьютерного исследования динамических систем на основе метода символического образа может быть применен для исследования непрерывных и дискретных динамических систем небольшой размерности. Он используется в курсе по компьютерному исследованию динамических систем на математическом факультете СПбГУ, а также может быть использован для исследования нетривиальных динамических систем, и в учебном процессе.

**Заключение** содержит список основных результатов, полученных в работе.

### **Публикации автора по теме диссертации**

#### **Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:**

1. *Ампилова Н. Б., Петренко Е. И.* Об оценке энтропии символического образа динамической системы // *Вестник СПбГУ, сер.10, вып.3.* — 2008. — С. 3–11.
2. *Петренко Е. И.* Оптимизация алгоритмов построения инвариантного мно-

жества динамической системы с помощью генерации кода // *Вестник СПб-ГУ, сер.10, вып.3.* — 2009. — Сентябрь. — С. 112–118.

### **Другие публикации:**

3. *Петренко Е. И.* Разработка и реализация алгоритмов построения символического образа // *Эл. Ж. Дифф. уравнения и процессы управления.* — 2006. — № 3. — С. 55–96. <http://www.math.spbu.ru/diffjournal/j>.
4. *Петренко Е. И.* Применение символического образа для исследования непрерывных динамических систем // Труды III Международной научно-практической конф.: Современные информационные технологии / Под ред. В. А. Сухомлин. — М.: МГУ, 2008. — С. 437–442.
5. *Петренко Е. И.* Об оценке энтропии символического образа // Процессы управления и устойчивость: Труды 40-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. Н. В. Смирнова, Г. Ш. Тамасяна. — СПб: Издат. СПбГУ, 2009. — С. 497–502.
6. *Романовский И. В., Ампилова Н. Б., Петренко Е. И.* О максимизации энтропии при линейных ограничениях // Труды Международной научной конференции “Космос, астрономия и программирование (Лавровские чтения)”. — СПб: СПбГУ, 2008. — С. 181–185.
7. Computation of the Morse spectrum / G. S. Osipenko, J. V. Romanovsky, E. I. Petrenko, N. B. Ampilova // *J. of Math. Sci.* — 2004. — Vol. 120, no. 2. — Pp. 1155–1166. <http://www.ingentaconnect.com/content/klu/joth/2004/00000120/00000002/00484193>.

### **Цитированная литература:**

8. *Dellnitz M., Junge O.* Set Oriented Methods for Dynamical Systems / Ed. by B. Fiedler. — Berlin, Germany: Freie Universität Berlin, Institut für Mathematik I, 2002. — Feb. — Vol. 2. — P. 1098.
9. *Fundinger D.* Investigating Dynamics by Multilevel Phase Space Discretization: Ph.D. thesis / Institut für Parallele und Verteilte Systeme. — Abteilung Bildverstehen, 2006. <http://elib.uni-stuttgart.de/opus/volltexte/2006/2614>.
10. *Osipenko G.* Dynamical Systems, Graphs, and Algorithms. — Springer, 2007. — Vol. 1889 of *Lecture Notes in Mathematics.* — P. 288. <http://www.springer.com/math/analysis/book/978-3-540-35593-9>.

---

Подписано к печати \_\_\_\_ . \_\_\_\_ . 2009г. Формат 60 × 84 1/16.  
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать цифровая. Печ. л. 0,7.  
Тираж 100 экз. Заказ \_\_\_\_\_.

---

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии химического факультета СПбГУ  
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 26  
Тел.: (812)428-4043, 428-6919