ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2004
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

СИНТЕЗ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

И.Е.ЗУБЕР

Россия, 198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Библиотечная пл., д. 2,
Санкт-Петербургский государственный университет,
e-mail: zuber@EZ7332.spb.edu

Аннотация.

Рассматривается класс нелинейных систем управления с запаздывающим аргументом. Ставится и решается задача синтеза стабилизирующего управления по скалярному выходу системы. Решение задачи базируется на преобразовании подобия специального вида и синтезе экспоненциально устойчивого наблюдателя для преобразованной системы.

1 Введение

В настоящее время количество работ по системам управления с запаздывающим аргументом очень велико и продолжает возрастать. При этом чаще всего рассматриваются линейные или линеаризуемые системы [1], однако

[0]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта N НШ-2257.2003.1 Совета по грантам президента РФ и при поддержке РФФИ, проекты 02-01-00544.

нелинейные системы рассматриваются в работе [2] о колебаниях нелинейных нейтральных дифференциальных уравнений с запаздыванием и работе [3] о достаточных условиях устойчивости нелинейных нейтральных дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Для анализа и синтеза линейных систем с запаздывающим аргументом применяется метод замены переменных [4]. Для частного случая нелинейных систем управления с запаздывающим аргументом формируется замена переменных, позволяющая в явном виде получить решение задачи стабилизации в целом [5]. Этот частный случай

$$\dot{x}(t) = A(x(t-\tau), x(t))x(t) + b(x(t-\tau), x(t))u, \quad u = s^*(x(t), x(t-\tau))x(t) \quad (1)$$

обычно рассматривается при формировании и синтезе биологических и физических моделей [6], когда параметры модели определяются в момент $t-\tau$, матрица объекта зависит от состояния объекта в текущий момент и в момент расчета параметров. При этом зависимость системы от состояния предполагается сугубо нелинейной, а зависимость от управления линейной.

В предлагаемой статье рассматривается система вида (1) с задаваемым скалярным выходом и определяется решение задачи синтеза стабилизирующего управления по выходу.

2 Постановка задачи

Рассматривается система управления

$$\dot{x}(t) = A(x(t-\tau), x(t))x(t) + b(x(t-\tau), x(t))u, \quad \sigma(t) = c^* x(t). \qquad (2)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы в момент t, τ — постоянный скаляр, $b(x(t-\tau), x(t))$ — заданный равномерно ограниченный вектор распределения управления, $A(x(t-\tau), x(t))$ — заданная равномерно ограниченная матрица объекта, c — постоянный вектор наблюдения. Предполагается существование и равномерная ограниченность частных производных пары $\Big(A(x(t-\tau), x(t)), b(x(t-\tau), x(t))\Big)$ по всем аргументам порядка до $2n-1$ включительно.

Допустимым управлением полагаем скалярное управление по выходу системы (2) $\sigma(t)$.

Задача: Определить допустимое управление, обеспечивающее экспоненциальную устойчивость в целом замкнутой системы (2).

3 Основные результаты

Введем в рассмотрение наборы векторов

$$X_k = (x(t), x(t-\tau), \ldots, x(t-k\tau)) \tag{3}$$

и выпишем план решения поставленной задачи стабилизации системы (2).

1. Проводим преобразование системы (1)

$$y = T(X_{n-1})x, \tag{4}$$

обеспечивающее матрице объекта преобразованной системы вид матрицы Фробениуса с последней функциональной строкой, а вектору распределения управления преобразованной системы вид последнего единичного орта.

2. Проводим решение задачи экспоненциальной стабилизации преобразованной системы управлением вида

$$u_1 = s^*(Y_{n-1})y(t),$$

обеспечивающее экспоненциальную устойчивость в целом системе (2), замкнутой этим управлением, где

$$Y_{n-1} \text{ — набор } T(X_{n-1})x(t), \ldots, T(X_{n-1})x(t-(n-1)\tau).$$

3. Формируем экспоненциально устойчивый наблюдатель $\widehat{y}$ для T-преобразованной системы (2).

4. Формируем T-преобразованную систему вида (2) с управлением

$$u = s^*(\widehat{Y}_{n-1})\widehat{y}, \quad \widehat{Y}_{n-1} \text{ — набор векторов } (\widehat{y}(t), \ldots, \widehat{y}(t-(n-1)\tau)$$

и проверяем ее экспоненциальную устойчивость в целом.

Решение задач, соответствующих пунктам плана 1, 2, содержится в работе [6]. В этой работе формируется явный вид и определяются необходимые и достаточные условия существования преобразования подобия (4) $y = T(X_{n-1})x(t)$, при котором преобразованная система (2) имеет вид

$$\dot{\widetilde{y}} = \widetilde{A}(Y_{n-1})\widetilde{y} + e_n\widetilde{s}^*(Y_{n-1})\widetilde{y}, \tag{5}$$

где $\widetilde{A}$ — матрица Фробениуса с последней строкой $\alpha^*(Y_{n-1})$. Построенное в [6] преобразование есть преобразование типа Ляпунова, т.е. устойчивость преобразованной системы обеспечивает устойчивость исходной. Необходимым и достаточным условием существования такого преобразования является, согласно [6], равномерная невырожденность матрицы управляемости пары $\Big(A(X_1),$

$b(X_1)\Big)$, т.е. условие

$$\exists\, \varepsilon > 0: \quad |\det P(X_{n-1})| > \varepsilon, \tag{6}$$

где

$$P(X_{n-1}) = |b(X_1), L_1(X_1)b(X_1), \ldots, L_{n-1}(X_{n-1})b(X_1)|,$$

$L_i(X_i)$ — матрица производной от вектора $x(t)$ в силу однородной системы

$$\dot{x}(t) = A(x(t-\tau), x(t))x(t),$$

т.е. производной Ли. Отметим, что для систем вида (1) с запаздывающим аргументом матрицы производных Ли задаются соотношениями

$$\begin{aligned} &L_1(X_1) = A(X_1),\\ &L_j(X_j) = \Big(\frac{d}{dt} + A(X_1)\Big)L_{j-1}(X_{j-1}). \end{aligned} \tag{7}$$

При выполнении условия (6) стабилизация системы (5) достигается выбором вектора обратной связи $\widetilde{s}(Y_{n-1})$ вида

$$\widetilde{s}(Y_{n-1}) = -\alpha(X_{n-1}) + p, \tag{8}$$

где p — постоянный вектор, компоненты которого суть коэффициенты гурвицева полинома. При этом вектор обратной связи исходной системы (1) принимает вид

$$s^*(X_{n-1}) = \widetilde{s}^*(Y_{n-1})T(X_{n-1}).$$

Переходим к пункту 3 плана решения поставленной задачи стабилизации системы (1) по выходу.

Отметим, что матрица системы (5) при управлении (8) становится постоянной, т.е.

$$D(Y_{n-1}) = \widetilde{A}(Y_{n-1}) + e_n(-\alpha^* + p^*) = D_0,$$

$$D_0 = \begin{vmatrix} E \\ p^* \end{vmatrix}, \qquad E = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} \tag{9}$$

Поэтому будем рассматривать систему (5) при управлении по выходу в виде

$$\dot{y} = Ey + e_n p^* \widehat{y}, \tag{10}$$

где $\widehat{y}$ — экспоненциально устойчивый наблюдатель для системы (10), т.е.

$$\dot{\widehat{y}} = D_0\widehat{y} + d\widetilde{c}^*(\widehat{y})(y - \widehat{y}), \tag{11}$$

d — вектор коэффициентов усиления наблюдателя. Вычитая (11) из (10), получаем

$$\begin{aligned} &\dot{y} = Ey + e_n p^* \widehat{y} + e_n p^* y - e_n p^* y = D_0 y + e_n p^* z, \\ &z = y - \widehat{y}. \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом

$$\dot{z} = D_0 z - e_n p^* z + d\widetilde{c}^*(\widehat{y})z = Ez + d\widetilde{c}^*(\widehat{y})z. \tag{13}$$

Выберем теперь вектор $d(\widehat{y})$, обеспечивающий экспоненциальную устойчивость системы (12).

Введем в рассмотрение функцию Ляпунова системы (12) в виде

$$V = z^* H z, \tag{14}$$

полагая

$$H^{-1} = \left| \begin{array}{ccccc} h_1 & h_{12} & 0 & \dots & 0 \\ h_{12} & h_2 & h_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & & h_{n-1\,n} \\ 0 & \dots & & h_{n-1\,n} & h_n \end{array} \right|, \qquad \begin{array}{c} h_i > 0, \quad h_{ij} = -\frac{1}{2}\sqrt{h_i h_j}, \\ j = i-1,\, i+1. \end{array} \tag{15}$$

Перейдем к определению вектора $d(\widehat{y})$, для которого выполняются условия

$$\dot{V} < -\alpha V \tag{16}$$

на траектории системы (13). Выпишем матрицу производной от V в силу системы (13), обозначив ее R. Тогда условие (16) переписывается в виде

$$R = M^* H + HM < -\alpha H, \quad M = E + d\widetilde{c}^*(\widehat{y}) \tag{17}$$

или в эквивалентном виде

$$R_1 = MH^{-1} + H^{-1}M < -\alpha H^{-1}. \tag{18}$$

Перепишем условие (18) в виде

$$\begin{aligned} &R_1 = C_\alpha + H^{-1}\widetilde{c}(\widehat{y})d^* + d\widetilde{c}^*(\widehat{y})H^{-1} < 0, \\ &C_\alpha = \Big(E + \frac{\alpha}{2} I\Big) H^{-1} + H^{-1}\Big(E + \frac{\alpha}{2} I\Big)^*. \end{aligned} \tag{19}$$

Рассмотрим подробнее матрицу C_α. Согласно (15), (19)

$$C_\alpha = \left| \begin{array}{cccccc} 2h_{12}+\alpha & h_2 & h_{23} & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & 2h_{23}+\alpha & h_3 & h_{34} & 0 & \vdots \\ h_{23} & h_3 & 2h_{34}+\alpha & h_4 & h_{45} & \\ 0 & h_{34} & h_4 & 2h_{45}+\alpha & & \\ \vdots & & & & & \\ & & & & & h_n \\ 0 & & & & h_n & \alpha \end{array} \right|$$

т.е.

$$C_\alpha = \{\delta_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad \delta_{ij} = \delta_{ji},$$

$$\text{для } i \le n-1 \quad \delta_{ii} = 2h_{ii+1} + \alpha, \quad \delta_{ii+1} = h_{i+1},$$

$$\delta_{ii+2} = h_{i+1\,i+2}, \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{при } j > i+2.$$

Определим теперь матрицу H^{-1} так, чтобы в последовательности главных диагональных миноров матрицы C_α имелась $n-1$ перемена знаков, т.е. выполнялось требование

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0 \dots, \operatorname{sign} \Delta_n = (-1)^n.$$

Введем в рассмотрение $Q_i = \{q_{mp}\}_{m,p=1}^i$ — матрицу, составленную из первых i строк и столбцов матрицы C_α, q_i — вектор, составленный из первых i элементов первого столбца Q_i, Δ^i — детерминант Q_i. Тогда очевидно выполнение следующих условий:

1) $\Delta^{i+1} = \Delta^i (q_{i+1\,i+1} - q_i^* Q_i^{-1} q_i)$.

2) От числа h_{i+1} зависит только $q_{i+1\,i+1} = 2h_{i\,i+1} + \alpha$ и не зависят Δ^k при $k < i$. Отсюда следует, что выбором чисел h_i, $i = \overline{1,n}$, т.е. решением последовательности неравенств

$$q_{i+1\,i+1} < q_i^* Q_i^{-1} q_i, \quad \text{где} \quad q_{i+1\,i+1} < 0, \quad q_i^* Q_i^{-1} q_i < 0,$$

обеспечивается $n-1$ перемена знаков в последовательности главных диагональных миноров матрицы C_α.

В работе [7] решается следующая задача. Рассматриваются система

$$\dot r = B(r)r + P(r)S^*(r)r$$

$(P(r), S(r)$ — $n \times m$-матрицы, $r \in \mathbb{R}^n)$ и постоянная матрица $H > 0$. Цель: определить $P(r), S(r)$, при которых выполняется условие

$$F^*(r)H + HF(r) < 0, \quad \text{где} \quad F(r) = B(r) + P(r)S^*(r). \tag{20}$$

По решению поставленной задачи в [7] были получены следующие результаты.

1. Минимальная размерность управления, т.е. минимальное значение числа m равно ρ, где ρ — число перемен знаков (для всех r) в последовательности главных диагональных миноров матрицы $C(r) = B^*(r)H + HB(r)$ или $C_1(r) = B(r)H^{-1} + H^{-1}B^*(r)$.

2. Выполнение сформулированного условия размерности управления является необходимым, но не достаточным. Называем $n \times m$-матрицу распределения управления $P(r)$ допустимой, если существует парная ей $n \times m$-матрица $S(r)$, для которых выполняется условие (20). Аналогично, называем матрицу обратных связей $S(r)$ допустимой, если существует парная ей $n \times m$-матрица распределения управления $P(r)$, для которых выполняется условие (20). Условие допустимости матрицы распределения управления $P(r)$: проекция $P(r)$ на неотрицательное подпространство матрицы $C(r)$ не обращается в ноль. Условие допустимости матрицы обратных связей $S(r)$: проекция $S(r)$ на неотрицательное подпространство матрицы $C(r)$ не обращается в ноль.

3. Пусть $n \times m$- матрица распределения управления $P(r)$ допустима. Тогда условие (18) выполняется при

$$S(r) = \lambda HP(r), \quad |\lambda| \geq |\lambda_0|, \quad \text{такого что} \quad C(r) + \lambda_0 P(r)P^*(r) < 0.$$

(Существование такого λ_0 доказывается.)

4. Пусть $n \times m$-матрица обратных связей $S(r)$ допустима. Тогда условия (20) выполняются при

$$P(r) = \lambda H^{-1}S(r), \quad |\lambda| \geq |\lambda_0|, \quad \text{такого что} \quad C(r) + \lambda_0 S(r)S^*(r) < 0.$$

Вернемся к рассматриваемой задаче. При выполнении условия наличия $n-1$ перемены знаков в последовательности главных диагональных миноров матрицы C_α минимальная размерность управления, при которой выполняется условие (20), есть единица. Вектор обратной связи $\widetilde{c}(\widehat{y})$ допустим, если его последняя компонента не обращается в нуль. Выполнение последнего требования осуществляется построением $\widetilde{c}^*(\widehat{y}) = c^*T^{-1}(\widehat{y})$. Следовательно, вектор коэффициентов усиления наблюдателя $d(\widehat{y})$ определяется соотношением

$$d(\widehat{y}) = \lambda H^{-1}\widetilde{c}(\widehat{y}), \quad |\lambda| \geq |\lambda_0|, \quad \text{такого что} \quad C_\alpha + \lambda_0 e_n e_n^* < 0. \tag{21}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1 *Пусть для системы* (5) *выполняются условия* (6). *Тогда для* $T(X_{n-1})$*-преобразованной системы* (2) *существует экспоненциально устойчивый наблюдатель, определяемый соотношениями* (11), (21).

Переходим к пункту 4 плана решения поставленной задачи. Возвращаемся к рассмотрению $T(X_{n-1})$-преобразованной системы (2), т.е. к системе (5) при управлении по наблюдателю $\widehat{y}$

$$\dot{y} = Ey + e_n p^* \widehat{y} = Ey + e_n p^* y + e_n p^* z,$$

т.е. из устойчивости системы $\dot{y} = Ey + e_n p^* \widehat{y}$ и системы (13) следует

Теорема 2 *Пусть для системы* (2) *выполняются условия равномерной невырожденности матрицы управляемости* (6). *Тогда экспоненциальная устойчивость системы* (2) *при управлении по выходу обеспечивается выбором управления вида* $u = p^* \widehat{y}$ *для* $T(X_{n-1})$*-преобразованной системы (2).*

4 Заключение

Задача стабилизации рассматриваемого класса нелинейных систем с запаздывающим аргументом при управлении по выходу сведена к решению задачи синтеза экспоненциально устойчивого наблюдателя и синтезу стабилизирующего управления по наблюдателю. Следует отметить, что запаздывание аргумента для рассматриваемого класса систем при решении задачи стабилизации сказывается только в вычислении производных Ли.

Список литературы

[1] H.El-Owaidy, H.Y. Mohamed. Linearized Oscillation for Non-Linear Systems of Delay Differential Equations. // Applied Mathematics and Computation, 2002, N 142, P. 17-21.

[2] Van Tong Li, S.H. Saker. Oscillation of Nonlinear Neutral Delay Differential Equations with Applications. // Annales Polonici Mathematici, 2004, LXXVII, N 1, P. 39-51.

[3] Shuyong Li, Daoyi Xu. Stable Set of Nonlinear Neutral Delay Differential Equations. // Indian J Pure Appl. Math.,2000, 31, N 10, P. 1257-1271.

[4] Jan Čermák. A Change of Variales for Differential Equations with Deviating Argument. // Folia FSN Universetatis Masarykiane, 2002, 13, P. 87-94.

[5] Зубер И.Е. Решение задачи стабилизации для одного класса нелинейных систем с запаздывающим аргументом. // Электронный журнал, Диф. уравнения и процессы управления, 2003, N 3.

[6] Дж. Марри. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.

[7] Зубер И.Е., Якубович Е.Д. Об одном подходе к задаче стабилизации нелинейных систем управления. // Аналитические методы синтеза регуляторов. Межвуз. науч. сб. Саратов СГИ, 1985, С. 8-16.