ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2004
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ВЫХОДУ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

И.Е.ЗУБЕР

Россия, 198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Библиотечная пл., д. 2,
Санкт-Петербургский государственный университет,
e-mail: zuber@EZ7332.spb.edu

Аннотация.

Рассматриваются нелинейные нестационарные дискретные системы. Заданы начальное состояние системы и окрестность конечного состояния. Определяются достаточные условия существования и явный вид управления скалярной обратной связью по асимптотически устойчивому наблюдателю, обеспечивающие достижение заданной окрестности за число шагов, равное порядку системы.

1 Введение

Задача терминального управления была поставлена в 1948г. А.А.Фельдбаумом [1], и ее решение известно для линейных и узкого

[0]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта N НШ-2257.2003.1 Совета по грантам президента РФ и при поддержке РФФИ, проекты 02-01-00542.

класса нелинейных систем и, как правило, в виде программного управления [2].

В литературе различаются два вида терминального управления. Первый вид — (сильное) терминальное управление, переводящее систему из заданного начального состояния в заданное конечное состояние за заданное время.

Второй вид — слабое терминальное управление, переводящее за заданное число шагов систему из заданного начального состояния в заданную окрестность заданного конечного состояния.

В предлагаемой статье ставится и решается задача слабого терминального управления для дискретных нелинейных систем со скалярным выходом. Решение поставленной задачи базируется на нелинейном преобразовании подобия специального вида, обеспечивающем при выбранном специальным образом управлении обратной связью по состоянию переход исходной системы в линейную и стационарную систему.

Для преобразованной системы задача синтеза (сильного) терминального управления решается как задача модального управления, обеспечивающего матрице замкнутой системы выбранный в соответствии с выполнением терминального условия спектр [3].

Решение задачи слабого терминального управления проводится синтезом асимптотически устойчивого в целом наблюдателя [3] и заменой найденного при решении предыдущей задачи управления обратной связью по состоянию управлением обратной связью по наблюдателю. При этом достижение заданной окрестности за заданное число шагов обеспечивается выбором вектора коэффициентов усиления наблюдателя, т.е. скоростью убывания функции Ляпунова уравнения ошибок наблюдателя.

2 Постановка задачи

Рассматривается нелинейная нестационарная система управления в векторно-матричной форме

$$x_{k+1} = A(x_k, k)x_k + b(x_k, k)u_k, \tag{1}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы в момент k, $k = 0, 1, \ldots$, $A(x_k, k) \stackrel{\Delta}{=} A_k$ — матрица объекта, $b(x_k, k) \stackrel{\Delta}{=} b_k$ — вектор распределения скалярного управления, формируемого как оператор от скалярного выхода

$$y_k = c_k^* x_k, \quad c_k \stackrel{\Delta}{=} c(x_k, k). \tag{2}$$

Тройка (A_k, b_k, c_k) предполагается заданной и равномерно ограниченной для всех $x_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 0, 1, \ldots$ Предполагаются заданными два значения вектора состояния $\underline{x}$ и $\overline{x}$ и число $m > 0$.

Задача. Определить допустимое управление, обеспечивающее выполнение слабого терминального условия:

$$\text{при} \quad x_0 = \underline{x} \qquad \|\overline{x} - x_n\| \leq m. \tag{3}$$

В качестве нормы в условии (3) выбрана, например, евклидова норма.

3 Решение поставленной задачи

Решение поставленной задачи проводится в два этапа. На первом этапе рассматривается система (1) в предположении, что допустимо управление скалярной обратной связью по состоянию системы x_k, т.е. решается задача (сильного) терминального управления для системы

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + b_k u_k^1, \\ u_k^1 &= s_k^* x_k + c \end{aligned} \tag{4}$$

при заданных $x_0 = \underline{x}$, $\overline{x}$, определяются вектор $s_k \stackrel{\Delta}{=} s(x_k, k)$ и $c = \text{const}$, обеспечивающие выполнение (сильного) терминального условия

$$x_n = \overline{x}. \tag{5}$$

Решение этой задачи для стационарных нелинейных дискретных систем проводится в [3, § 3].

Приведем кратко результаты, полученные в [3]. В рассмотрение вводится преобразование подобия

$$\widetilde{x}_k = T_k(x_k, k, x_{k-1}, k-1) x_k, \tag{6}$$

обеспечивающее матрице объекта преобразованной системы форму Фробениуса с последней функциональной строкой $\alpha_k^*(\widetilde{x}_k, k)$, а вектору распределения управления преобразованной системы вид последнего единичного орта e_n.

Рассмотрим преобразованную систему (4), (6)

$$\begin{gathered} \widetilde{x}_{k+1} = \widetilde{A}_k(\widetilde{x}_k, k)\widetilde{x}_k + \widetilde{b}_k \widetilde{s}_k(\widetilde{x}_k, k) + c\widetilde{b}_k, \\ \widetilde{A}_k = T_{k+1} A_k T_k^{-1}, \quad \widetilde{b}_k = T_{k+1} b_k = e_n, \\ \widetilde{s}_k^* = s_k^* T_k^{-1}. \end{gathered} \tag{7}$$

Матрица замкнутой системы (7), т.е. системы $\widetilde{x}_{k+1} = \widetilde{D}_k(\widetilde{x}_k, k)\widetilde{x}_k$, где $\widetilde{D}_k = \widetilde{A}_k + \widetilde{b}_k \widetilde{s}_k^*$, имеет форму Фробениуса с последней функциональной строкой $\alpha_k^*(\widetilde{x}_k, k) + \widetilde{s}_k^*(\widetilde{x}_k, k)$.

Сформируем преобразование подобия T_k с требуемыми свойствами, как показано в [3]. Пусть P^j — оператор сдвига на j шагов вперед в силу однородной системы $x_{k+1} = A_k x_k$, т.е.

$$P^1 x_k = A_k x_k, \quad P^j x_k = \prod_{i=j-1}^{0} A_{k+i} x_k, \quad M_i = \prod_{j=i-1}^{0} A_{j+k}. \tag{8}$$

Тогда

$$T_k = \begin{vmatrix} n_k^* \\ P n_k^* + n_k^* A_k \\ \vdots \\ P^{n-1} n_k^* + C_{n-1}^1 P^{n-2} n_k^* + \ldots + C_{n-1}^{n-2} P n_k^* M_{n-2} + n_k^* M_{n-1} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

где C_j^i — биномиальные коэффициенты, $n_k^* G_k = e_k^*$, $G_k = \|g_1^k, \ldots, g_n^k\|$, $g_1^k = b_{k-1}$,

$$g_i^k = M_i b_{k-1} - C_i^1 P(M_{i-1} b_{k-1}) + C_i^2 P^2(M_{i-2} b_{k-1}) + \ldots + (-1)^i P^i b_{k-1}. \tag{10}$$

Для существования и единственности требуемого преобразования T_k, T_k^{-1} необходимо и достаточно [3] выполнение условий равномерной невырожденности матриц

$$W_k = |b_{k-1}, M_1 b_{k-1}, \ldots M_{n-1} b_{k-1}| \tag{11}$$

для всех $k = 0, 1, \ldots$, т.е. выполнение условия

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \quad |\det W_k| > \varepsilon. \tag{12}$$

В предположении выполнения условия (12) выпишем терминальное условие (5) для преобразованной системы (7)

$$\begin{aligned} T_0 x_0 &= \widetilde{x}_0, \\ T_n \overline{x} &= \widetilde{x}_n \end{aligned} \tag{13}$$

и сформируем вектор $\widetilde{s}_k$ в виде

$$s_k^*(\widetilde{x}_k, k) = -\alpha_k^*(\widetilde{x}_k, k) + r^*, \tag{14}$$

где r^* — подлежащий определению постоянный вектор-строка, т.е. последняя строка матрицы замкнутой системы (7), (14) $\widetilde{D}(\widetilde{x}_k, k) \overset{\Delta}{=} D_0 = \text{const}$. Матрица замкнутой системы (7), (14) есть постоянная матрица Фробениуса, т.е. ее собственные векторы $d_i = (1, \lambda_i, \dots, \lambda_i^{n-1})^*$ и собственные векторы транспонированной матрицы определяются соотношениями

$$l_j = \frac{g_j}{\prod_{j\neq i}^n (\lambda_i - \lambda_j)}, \qquad \begin{aligned} &\text{где } g_j = (g_j^1, \dots, g_j^n)^*, \\ &g_j^n = (-1)^{n-1}, \\ &g_j^{n-1} = (-1)^{n-2} \textstyle\sum_{j\neq i} \lambda_i, \\ &\vdots \\ &g_j^1 = \textstyle\prod_{i\neq j}^n \lambda_i, \end{aligned} \tag{15}$$

т.е. координаты вектора g_j есть коэффициенты характеристического полинома $f^j = \prod_{i\neq j}^n (\lambda - \lambda_j)$ и, следовательно, компоненты последней строки сопровождающей его матрицы Фробениуса порядка $(n-1) \times (n-1)$.

Вернемся к терминальному условию (13). Имеем в силу системы (7), (14)

$$\widetilde{x}_n = D_0^n \widetilde{x}_0 + \sum_{j=0}^{n-1} D_0^j \gamma, \quad \text{где} \quad \gamma = (0, \dots, 0, c)^*, \tag{16}$$

и умножим последнее соотношение слева на векторы g_j, $j = \overline{1, n}$

$$g_j^* \widetilde{x}_n = \lambda_j^n g_j^* \widetilde{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_j^i g_j^* \gamma. \tag{17}$$

Систему (17) будем называть системой терминальных уравнений. Выбираем теперь λ_i в виде

$$\lambda_i = \lambda_1 + (i-1)\delta, \quad \lambda_1 \equiv \lambda \tag{18}$$

и покажем, что существуют λ, δ, удовлетворяющие уравнениям (17). Перепишем уравнения (17) в виде

$$g_j^* \widetilde{x}_n = \lambda_j^n \sum_{i=1}^{n-1} g_i^i \widetilde{x}_n^i + (-1)^{n-1} (\lambda_j^n \widetilde{x}_0^n + c \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_j^i), \tag{19}$$

где $\widetilde{x}_n^i$ — i-я компонента вектора $\widetilde{x}_n$, $\widetilde{x}_0^i$ — i-я компонента вектора $\widetilde{x}_0$. Выберем теперь константу c в виде

$$c = \rho \prod_{i=1}^n (\lambda_i - 1), \tag{20}$$

где число ρ выбирается из условия

$$\begin{gathered} \widetilde{x}_0 = (\widetilde{x}_0^1, \dots \widetilde{x}_0^n)^*, \quad \widetilde{x}_n = (\widetilde{x}_n^1, \dots \widetilde{x}_n^n)^*, \\ \beta = \widetilde{x}_0^1 + \rho \widetilde{x}_0^n, \quad \operatorname{sign} \widetilde{x}_n^1 = \operatorname{sign} \beta. \end{gathered} \tag{21}$$

Теорема 1 *Пусть спектр матрицы* D_0 *удовлетворяет условиям* (18), *где* $\operatorname{sign}\delta = \operatorname{sign}\lambda$.

Тогда для каждого δ *существует и определяется* λ, *удовлетворяющее терминальным уравнениям* (17).

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 1 в [3].

Вернемся к системе (7) и определим вектор обратной связи $\widetilde{s}_k$ как вектор модального управления, обеспечивающий матрице D_0 спектр (18), удовлетворяющий системе (21) [3]. Тогда для исходной системы (1) имеем вектор обратной связи

$$s_k^* = \widetilde{s}_k^* T_k. \tag{22}$$

Итак доказана следующая

Теорема 2 *Пусть для системы* (1) *выполняются условия* (12). *Тогда для этой системы существует и определяется как модальное управление (сильное) терминальное управление обратной связью по состоянию системы.*

Перейдем к решению задачи слабого терминального управления, для чего предположим, что управление строится не обратной связью по состоянию, а обратной связью по асимптотически устойчивому наблюдателю. Согласно [4] сформируем асимптотически устойчивый наблюдатель $\widehat{x}_k$ для системы (7)

$$\widehat{x}_{k+1} = \widetilde{A}(\widehat{x}_k, k)\widehat{x}_k + e_n u_n + v_k \widehat{\widetilde{c}}_k^{\,*} (\widehat{x}_k - \widetilde{x}_k),$$

где $\widehat{\widetilde{c}}_k = \widetilde{c}(\widehat{x}_k, k)$, v_k — вектор коэффициентов усиления наблюдателя. Вектор v_k выбирается так, чтобы для произвольно заданного числа α, $0 < \alpha < 1$, для функции Ляпунова

$$V_k(\widetilde{z}_k) = \widetilde{z}_k^* H \widetilde{z}_k \tag{23}$$

системы уравнений ошибок наблюдателя $\widetilde{z}_k = \widetilde{x}_k - \widehat{x}_k$ выполнялось условие

$$V_{k+1} < \alpha V_k, \quad \text{т.е.} \quad V_n < \alpha^{n-1} V_0.$$

Вернемся к терминальному условию для системы (7) и определим требования к выбору числа α, при котором слабое терминальное условие (3) для системы (7) выполняется, т.е.

$$\|\widetilde{z}_n\|^2 = \|T_n\widetilde{x}_n - T_n\overline{x}\|^2 \leq m\|T_n\|^2.$$

Имеем $V_n(\widetilde{z}_n) \leq \|\widetilde{z}_n\|^2\lambda_{max}(H)$, где $\lambda_{max}(H)$ — максимальное собственное число матрицы H,

$$\|\widetilde{z}_n\|^2 < \frac{\alpha^{n-1}V_0}{\lambda_{min}(H)},$$

где $\lambda_{min}(H)$ — минимальное собственное число матрицы H. Пусть σ_m, σ_M — минимальное и максимальное сингулярные числа матрицы T_n. Требуем

$$\|\widetilde{z}_n\|^2 < \frac{\alpha^{n-1}V_0}{\lambda_{min}(H)} < m\sigma_m\|T_n\|^2.$$

Тогда для вектора $z_n = x_n - \overline{x}$ слабое сингулярное условие (3), очевидно, выполняется при

$$\alpha^{n-1} \leq m\frac{\sigma_m\|T_k\|}{\sigma_M\|T_k\|}\frac{\lambda_{min}(H)}{\lambda_{max}(H)} \cdot \frac{1}{\|x_0\|^2}. \tag{24}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3 *Пусть функция Ляпунова* (23) *системы уравнений ошибок экспоненциально устойчивого наблюдателя удовлетворяет условию* $V_{k+1} < \alpha V_k$ *для* α*, удовлетворяющего соотношению* (24).

Тогда для системы (1), (12), (22) *выполняется слабое терминальное условие* (3) *при управлении обратной связью по наблюдателю.*

4 Заключение

Итак, для дискретных нелинейных нестационарных систем определены условия существования и явный вид слабого терминального управления. При этом достаточными условиями существования такого управления оказываются равномерная ограниченность параметров системы (1) и выполнение соотношений (12), которые в непрерывном случае соответствуют требованию равномерной управляемости системы.

Список литературы

[1] Фельдбаум А.А. О распределении корней характеристического уравнения системы регулирования. // АиТ, 1948, N 4, С.253-279.

[2] Lee E.B., Markus L. Foundations of Optimal Control Theory. New York, London: John Wily & Sons, 1967, 631 c.

[3] Зубер И.Е. Канонические преобразования подобия для нелинейных нестационарных динамических систем. // Электронный журнал. Диф. уравнения и процессы управления, 2003, N 4.

[4] Зубер И.Е. Стабилизация нелинейных наблюдаемых систем при управлении по выходу. // Вестник СПбГУ, Сер. 1, 2003, N 1, С.7-19.