ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2004
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Управление в нелинейных системах

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ЧАСТОТНЫЙ КРИТЕРИЙ ОЦЕНКИ ЧИСЛА ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЙ ЦИКЛОВ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ.

В. Б. Смирнова, Н. В. Утина, А. И. Шепелявый

Россия, 198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28,
Санкт-Петербургский Государственный Университет,
математико-механический факультет,
e-mail: root@al2189.spb.edu, unv74@mail.ru, as@as1020.spb.edu

Аннотация.

Для многомерной дискретной системы с периодической дифференцируемой нелинейностью решается задача оценки сверху числа проскальзываний циклов — одной из важных характеристик переходного процесса фазовой системы управления. Исследование ведется прямым методом Ляпунова с привлечением процедуры Бакаева–Гужа и учетом условий на производную нелинейной функции. Применение частотной теоремы Якубовича–Калмана позволяет сформулировать результаты в виде многопараметрического частотного критерия.

Рассматривается многомерная дискретная система вида

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + b\xi(n), \\ \sigma(n+1) &= \sigma(n) + c^*x(n) - \rho\xi(n), \\ \xi(n) &= \varphi(\sigma(n)), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

где A — постоянная вещественная $(\nu \times \nu)$-матрица, b, c — постоянные вещественные ν-векторы, $\rho \geq 0$ — число, x, σ — соответственно ν-мерная и скалярная компоненты вектора состояния системы, $\varphi(\sigma)$ — скалярная непрерывно дифференцируемая Δ-периодическая функция.

Такими уравнениями описываются, например, системы фазовой автоподстройки частоты, электрические машины, синхронно следящие системы. Любая из этих систем в случае устойчивости может работать в двух различных режимах: синхронном режиме (режим сопровождения) и режиме захвата (режим установления или переходный процесс). Каждый из этих режимов имеет определенные физические ограничения и характеристики. Одной из основных характеристик переходного процесса является число проскальзываний циклов.

Для исследования поведения решений многомерной дискретной фазовой системы в данной работе используется аппарат второго метода Ляпунова, частотная теорема В. А. Якубовича о разрешимости специальных матричных неравенств [1] и метод, получивший название "процедура Бакаева–Гужа"по имени исследователей, впервые его применивших [2]. Согласно процедуре Бакаева-Гужа, исходная нелинейная функция, имеющая ненулевое среднее значение на периоде, заменяется в функциях Ляпунова вида "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности"на функцию с теми же нулями, но меньшую по модулю.

Частотный критерий глобальной асимптотики фазовой системы дифференциальных уравнений, полученный с помощью процедуры Бакаева–Гужа, был опубликован в [3]. В статье [4] этот критерий был распространен на случай дискретных систем, а в статье [5] - на случай систем интегродифференциальных уравнений.

В статье [6] показано, как с помощью процедуры Бакаева–Гужа можно установить верхнюю оценку числа проскальзываний циклов для многомерной дискретной системы. В данной работе оценка числа проскальзываний циклов формулируется с учетом условий на производную от нелинейности.

В дальнейшем будем предполагать, что все собственные числа матрицы A

лежат внутри единичного круга, пара (A, b) управляема, пара (A, c) наблюдаема. Предположим также, что функция $\varphi(\sigma)$ имеет на периоде $[0, \Delta)$ два однократных нуля: $\sigma_1 < \sigma_2$, причем $\varphi\prime(\sigma_1) > 0$, $\varphi\prime(\sigma_2) < 0$. Не умаляя общности, можно считать, что

$$\int\limits_0^\Delta \varphi(\sigma)\, d\sigma < 0. \qquad (2)$$

Пусть числа α_1, α_2 таковы, что

$$\alpha_1 \leq \frac{d\varphi}{d\sigma} \leq \alpha_2. \qquad (3)$$

Заметим, что $\alpha_1\alpha_2 < 0$.

Число проскальзываний циклов является важной характеристикой переходных процессов фазовых систем управления и определяет их работоспособность в целом. В теории фазовой синхронизации, например, проскальзыванием циклов называют нарастание или уменьшение ошибки по фазовой компоненте вектора состояния системы на величины, кратные периоду входящей в систему нелинейности. В общем случае, для многомерной дискретной системы (1), определение рассматриваемой характеристики переходного процесса можно сформулировать следующим образом.

Определение. Говорят, что решение $\{x(n), \sigma(n)\}$ системы (1) с начальными значениями $\{x(0), \sigma(0)\}$ *проскальзывает* m *циклов*, если
1) для всех натуральных n выполняется $|\sigma(n) - \sigma(0)| < \Delta(m + 1)$,
2) хотя бы для одного натурального числа n_0 справедливо неравенство $|\sigma(n_0) - \sigma(0)| \geq \Delta m$.

Введем в рассмотрение передаточную функциию линейной части системы (1) от входа ξ к приращению выхода $-(\sigma(n+1) - \sigma(n))$

$$\chi(p) = c^*(A - pE_\nu)^{-1}b + \rho, \qquad (4)$$

где E_ν — единичная $(\nu \times \nu)$-матрица, p — комплексная переменная.

Введем полезные в дальнейшем обозначения:

$$\Gamma = \int\limits_0^{\sigma_1} |\varphi(\sigma)|\, d\sigma + \int\limits_{\sigma_2}^{\Delta} |\varphi(\sigma)|\, d\sigma, \qquad \gamma = \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} \varphi(\sigma)\, d\sigma, \qquad R = \frac{2\Gamma\gamma}{\Gamma + \gamma}.$$

В силу (2) имеет место $\Gamma > \gamma$, и, кроме того, справедливы соотношения

$$\int\limits_0^\Delta \varphi(\sigma)\, d\sigma = \gamma - \Gamma, \qquad \int\limits_0^\Delta |\varphi(\sigma)|\, d\sigma = \gamma + \Gamma.$$

С помощью величин Γ и γ определим функции

$$\mu_1(\varkappa, m, w) = \frac{\gamma - \Gamma - \frac{w+|\varkappa|R}{\varkappa m}}{\gamma + \Gamma}, \qquad \mu_2(\varkappa, m, w) = \frac{\gamma - \Gamma + \frac{w+|\varkappa|R}{\varkappa m}}{\gamma + \Gamma}. \tag{5}$$

Эти функции потребуются непосредственно для реализации процедуры Бакаева–Гужа.

Следуя [7], расширим пространство состояний системы (1). Для этого введем обозначения:

$$y = \left\| \begin{matrix} x \\ \varphi(\sigma) \end{matrix} \right\|, \quad P = \left\| \begin{matrix} A & b \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad L = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|, \quad c_1^* = \left\| \begin{matrix} c^* & -\rho \end{matrix} \right\|$$

и $\xi_1(n) = \varphi(\sigma(n+1)) - \varphi(\sigma(n))$. Тогда рассматриваемая система (1) примет вид

$$\begin{aligned} y(n+1) &= Py(n) + L\xi_1(n), \\ \sigma(n+1) &= \sigma(n) + c_1^* y(n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим квадратичные формы $(\nu+1)$-вектора y и скалярной величины ξ_1

$$M(y, \xi_1) = (Py + L\xi_1)^* H(Py + L\xi_1) - y^* Hy + F_1(y, \xi_1),$$

$$F_1(y, \xi_1) = \varkappa y^* L c_1^* y + \varepsilon y^* c_1 c_1^* y + \eta y^* L L^* y + \tau(\alpha_1 c_1^* y - \xi_1)^*(\xi_1 - \alpha_2 c_1^* y),$$

где $H = H^*$ — некоторая $(\nu \times \nu)$-матрица, ε, η, $\varkappa$, τ — числа. Сделаем ряд замечаний.

Замечание 1. [7] Из управляемости пары (A, b) следует управляемость пары (P, L).

Замечание 2. При $p \neq 1$ справедливы равенства [7]:

$$c_1^*(P - pE)^{-1} L = \frac{1}{p-1}\chi(p), \tag{7}$$

$$L^*(P - pE)^{-1} L = -\frac{1}{p-1}. \tag{8}$$

Лемма 1. Пусть все собственные числа матрицы A содержатся внутри единичного круга. Если можно указать такие числа $\varepsilon > 0, \eta > 0, \varkappa \neq 0, \tau > 0$, что для всех p, $|p| = 1$, выполнено частотное неравенство

$$\Re e\{\varkappa\chi(p) - \varepsilon|\chi(p)|^2 - \eta + \tau(\alpha_1\chi(p) + (p-1))^*((p-1) + \alpha_2\chi(p))\} \geq 0 \tag{9}$$

то существует $(\nu+1) \times (\nu+1)$-матрица $H = H^*$ такая, что $M(y, \xi_1) \leq 0$ для всех $y \in \mathbf{R}^{\nu+1}$, $\xi_1 \in \mathbf{R}$.

Доказательство леммы 1. Согласно частотной теореме [1] для того, чтобы существовала матрица $H = H^*$ такая,что для всех $y \in \mathbf{R}^{\nu+1}$ и $\xi_1 \in \mathbf{R}$ выполнялось

$$M(y, \xi_1) \leq 0, \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы при всех p, $|p| = 1$, $p \neq 1$ выполнялось неравенство

$$\tilde{F}_1(-(P - pE)^{-1}L\xi_1, \xi_1) \leq 0, \tag{11}$$

где форма $\tilde{F}_1(y, \xi_1)$ получена распространением формы F_1 на комплексные значения аргументов с сохранением эрмитовости. Рассмотрим

$$\tilde{F}_1(-(P - pE)^{-1}L\xi_1, \xi_1) = \Re e\{\xi_1^*[\varkappa L^*((P - pE)^{-1})^* L c_1^*(P - pE)^{-1}L +$$

$$+\varepsilon L^*((P - pE)^{-1})^* c_1 c_1^*(P - pE)^{-1}L + \eta L^*((P - pE)^*)^{-1}LL^*(P - pE)^{-1}L -$$

$$-\tau(\alpha_1 c_1^*(P - pE)^{-1}L + 1)^*(1 + \alpha_2 c_1^*(P - pE)^{-1}L)]\xi_1\}.$$

Используя (7) и (8), получим

$$\tilde{F}_1(-(P - pE)^{-1}L\xi_1, \xi_1) = \Re e\{-\frac{\varkappa}{|p-1|^2}\chi(p) + \varepsilon L^* \frac{|\chi(p)|^2}{|p-1|^2} + \frac{\eta}{|p-1|^2} +$$

$$+\tau(\alpha_1 \frac{\chi(p)}{p-1} + 1)^*(1 + \alpha_2 \frac{\chi(p)}{p-1})]\}|\xi_1|^2.$$

Следовательно, выполнение частотного неравенства (9) обеспечивает выполнение неравенства (11). Тем самым доказывается существование матрицы $H = H^*$, обеспечивающей выполнение неравенства (10). Лемма 1 доказана.

Рассмотрим теперь последовательность $W(n) = y^*(n)Hy(n)$. Так как все собственные числа матрицы A лежат внутри единичного круга, а функция $\varphi(\sigma)$ ограничена, то $|y(n)| \leq const$ при $n \geq 0$. Это неравенство гарантирует ограниченность последовательности $W(n)$ при $n \geq 0$.

Теорема 1. Пусть все собственные числа матрицы A содержатся внутри единичного круга, пара (A, b) управляема, пара (A, c) наблюдаема. Пусть также существуют такие числа $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $\varkappa \neq 0$, $\tau > 0$, что выполнены следующие условия:

1) справедливо частотное неравенство (9);

2) справедливы неравенства

$$4\eta\ [\ \varepsilon - \frac{\varkappa\alpha_0}{2}(1 + |\mu_i(\varkappa, m, y^*(0)Hy(0) - r)|)] > [\ \varkappa\mu_i(\varkappa, m, y^*(0)Hy(0) - r)]^2,$$

где $i = 1, 2$, $\alpha_0 = \alpha_2$, если $\varkappa \geq 0$, и $\alpha_0 = \alpha_1$, если $\varkappa < 0$,

$$r \leq \inf_{n=0,1,2,\ldots} y^*(n)Hy(n), \qquad y(0) = \left\| \begin{array}{c} x(0) \\ \varphi(\sigma(0)) \end{array} \right\|,$$

$H = H^*$ — вещественная $(\nu + 1) \times (\nu + 1)$-матрица, для которой при любых y, ξ_1 выполнено неравенство $M(y, \xi_1) \leq 0$.

Тогда для решения $(x(n), \sigma(n))$ системы (1) с начальными данными $(x(0), \sigma(0))$ при всех натуральных n выполняется неравенство

$$|\sigma(n) - \sigma(0)| < m\Delta. \tag{12}$$

Прежде чем проводить доказательство теоремы 1, установим лемму ляпуновского типа. Предполагаем, что заданы последовательности $\sigma(n)$ и $W(n)$, где $W(n)$ ограничена снизу для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$, а функция $\varphi(\sigma)$ — Δ-периодическая функция системы (1), удовлетворяющая условиям (2) и (3).

Лемма 2. Пусть для чисел $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $\varkappa \neq 0$, натурального числа m, последовательностей $\sigma(n)$, $W(n)$ и функции $\varphi(\sigma)$ с вышеуказанными свойствами выполнены условия:

1) для любых целых $n \geq 0$ справедливо неравенство

$$W(n+1) - W(n) + \varkappa\varphi(\sigma(n))[\sigma(n+1) - \sigma(n)] + \varepsilon[\sigma(n+1) - \sigma(n)]^2 + \eta\varphi^2(\sigma(n)) \leq 0;$$

2) функции $\mu_i(\varkappa, m, w)$ удовлетворяют неравенствам

$$4\eta\left[\,\varepsilon - \frac{\varkappa\alpha_0}{2}\,(1 + |\mu_i(\varkappa, m, W(0) - r)|)\right] > [\,\varkappa\mu_i(\varkappa, m, W(0) - r)]^2, \quad i = 1, 2,$$

где $\alpha_0 = \alpha_2$, если $\varkappa \geq 0$, и $\alpha_0 = \alpha_1$, если $\varkappa < 0$, а $r \leq \inf\limits_{n=0,1,2,\ldots} W(n)$.

Тогда для всех натуральных n имеет место оценка

$$|\sigma(n) - \sigma(0)| < m\Delta. \tag{13}$$

Доказательство леммы 2. Из условия 2) леммы 2 и вида функций $\mu_i(\varkappa, m, w)$, $i = 1, 2$ (в дальнейших обозначениях просто μ_i, если отдельно не оговариваются специальные значения параметров функциий) следует, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и всех $k > m$ справедливы неравенства

$$4\eta(\varepsilon - \frac{\varkappa\alpha_0}{2}(1 + |\mu_i(\varkappa, k, W(0) - r + \varepsilon_0)|)) \geq (\varkappa\mu_i(\varkappa, k, W(0) - r + \varepsilon_0))^2. \tag{14}$$

Определим далее функции

$$F_i(\sigma) = \varphi(\sigma) - \mu_i|\varphi(\sigma)|, \quad i = 1, 2.$$

Для функций $F_i(\sigma)$ справедливы оценки $(i = 1, 2)$

$$F_i(a)(u-a)+\frac{\alpha_1}{2}(1+|\mu_i|)(u-a)^2 \leq \int\limits_a^u F_i(\sigma)\,d\sigma \leq F_i(a)(u-a)+\frac{\alpha_2}{2}(1+|\mu_i|)(u-a)^2. \tag{15}$$

Доказательство этих оценок проводится точно так же, как доказательство оценок (5.4.11) в монографии [7].

Введем в рассмотрение последовательности Ляпунова $(i = 1, 2)$

$$V_i(n) = W(n) + \varkappa \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(n)} F_i(\sigma)\,d\sigma, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

и рассмотрим их приращения, учитывая условие 1) леммы 2 и оценки (15) и (14).

$$V_i(n+1) - V_i(n) = W(n+1) - W(n) + \varkappa \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(n+1)} F_i(\sigma)\,d\sigma - \varkappa \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(n)} F_i(\sigma)\,d\sigma =$$

$$= W(n+1) - W(n) + \varkappa \int\limits_{\sigma(n)}^{\sigma(n+1)} F_i(\sigma)\,d\sigma.$$

Оценим $W(n+1) - W(n)$ с помощью условия 1) леммы 2. Тогда

$$V_i(n+1) - V_i(n) \leq$$

$$\leq -\varkappa\varphi(\sigma(n))[\sigma(n+1)-\sigma(n)] - \varepsilon[\sigma(n+1)-\sigma(n)]^2 - \eta\varphi^2(\sigma(n)) + \varkappa \int\limits_{\sigma(n)}^{\sigma(n+1)} F_i(\sigma)\,d\sigma.$$

Для оценки интеграла применим (15). В итоге,

$$V_i(n+1)-V_i(n) \leq -\varkappa\varphi(\sigma(n))[\sigma(n+1)-\sigma(n)] - \varepsilon(\sigma(n+1)-\sigma(n))^2 - \eta\varphi^2(\sigma(n)) +$$

$$+\varkappa[F_i(\sigma(n))(\sigma(n+1) - \sigma(n)) + \frac{\alpha_0}{2}(1 + |\mu_i|)(\sigma(n+1) - \sigma(n))^2] =$$

$$= -\varepsilon(\sigma(n+1)-\sigma(n))^2 - \eta\varphi^2(\sigma(n)) - \varkappa(\sigma(n+1)-\sigma(n))(\varphi(\sigma(n))) - F_i(\sigma(n))) +$$

$$+\frac{\varkappa\alpha_0}{2}(1 + |\mu_i|)(\sigma(n+1) - \sigma(n))^2 =$$

$$
= (\sigma(n+1)-\sigma(n))^2(-\varepsilon+\frac{\varkappa\alpha_0}{2}(1+|\mu_i|))-\eta\varphi^2(\sigma(n))-
$$

$$
-\varkappa[\sigma(n+1)-\sigma(n)][\varphi(\sigma(n)))-F_i(\sigma(n))]\pm\frac{\varkappa^2[\varphi(\sigma(n))-F_i(\sigma(n))]^2}{4(\varepsilon-\frac{\varkappa\alpha_0}{2}(1+|\mu_i|))}\le
$$

$$
\le -\delta|\varphi(\sigma(n))|^2,
$$

где

$$
\delta=\frac{4\eta(\varepsilon-\frac{\varkappa\alpha_0}{2}(1+|\mu_i|))-(\varkappa\mu_i)^2}{4(\varepsilon-\frac{\varkappa\alpha_0}{2}(1+|\mu_i|))}.
$$

В силу (14) для любого $n\ge 0$ выполнено $V_i(n+1)-V_i(n)\le 0$, $(i=1,2)$. Отсюда следует, что $V_i(n)\le V_i(0)=W(0)$, т. е.

$$
V_i(n)\le W(0),\quad i=1,2. \tag{16}
$$

Предположим теперь, что оценка (13) нарушена, т. е. найдется такое значение n_0, что

$$
|\sigma(n_0)-\sigma(0)|\ge m\Delta.
$$

Рассмотрим случай, когда $\sigma(n_0)-\sigma(0)\ge m\Delta$. Пусть $\sigma(n_0)=\sigma(0)+l\Delta+\beta_1$, где $\beta_1\in[0,\Delta)$, $\quad l\ge m$. Рассмотрим

$$
V_1(n_0)=W(n_0)+\varkappa\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(n_0)}F_1(\sigma)\,d\sigma.
$$

Справедливы равенства

$$
\varkappa\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(n_0)}F_1(\sigma)\,d\sigma=\varkappa\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(0)+l\Delta+\beta_1}F_1(\sigma)\,d\sigma=
$$

$$
=\varkappa\left(\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(0)+l\Delta+\beta_1}\varphi(\sigma)\,d\sigma-\mu_1(\varkappa,l,W(0)-r+\varepsilon_0)\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(0)+l\Delta+\beta_1}|\varphi(\sigma)|\,d\sigma\right)=
$$

$$
=l\varkappa\left(\int\limits_0^\Delta\varphi(\sigma)\,d\sigma-\mu_1(\varkappa,l,W(0)-r+\varepsilon_0)\int\limits_0^\Delta|\varphi(\sigma)|\,d\sigma\right)+
$$

$$
+\varkappa\left(\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(0)+\beta_1}\varphi(\sigma)\,d\sigma-\mu_1(\varkappa,l,W(0)-r+\varepsilon_0)\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(0)+\beta_1}|\varphi(\sigma)|\,d\sigma\right). \tag{17}
$$

Рассмотрим каждое из слагаемых, полученных в правой части цепочки (17) в отдельности. Для первого слагаемого справедлива цепочка равенств:

$$\varkappa l\left(\int_0^\Delta \varphi(\sigma)\,d\sigma - \mu_1(\varkappa, l, W(0)-r+\varepsilon_0)\int_0^\Delta |\varphi(\sigma)|\,d\sigma\right) =$$

$$= \varkappa l\left(\gamma - \Gamma - \frac{\gamma - \Gamma - \frac{W(0)-r+\varepsilon_0+|\varkappa|R}{\varkappa l}}{\gamma+\Gamma}(\gamma+\Gamma)\right) = W(0) - r + \varepsilon_0 + |\varkappa|R.$$

Перейдем ко второму слагаемому. Представим $\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(0)+\beta_1} \varphi(\sigma)\,d\sigma$ в виде

$$\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(0)+\beta_1} \varphi(\sigma)\,d\sigma = \gamma_0 - \Gamma_0, \quad \text{где} \quad \gamma_0 \geq 0, \;\; \Gamma_0 \geq 0.$$

Тогда

$$\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(0)+\beta_1} |\varphi(\sigma)|\,d\sigma = \gamma_0 + \Gamma_0.$$

Заметим, что $\gamma_0 \leq \gamma$, $\Gamma_0 \leq \Gamma$. Тогда для второго слагаемого справедливы соотношения

$$\varkappa\left(\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(0)+\beta_1} \varphi(\sigma)\,d\sigma - \mu_1(\varkappa, l, W(0)-r+\varepsilon_0)\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(0)+\beta_1} |\varphi(\sigma)|\,d\sigma\right) =$$

$$= \frac{\varkappa}{\gamma+\Gamma}(2\gamma_0\Gamma - 2\gamma\Gamma_0 + \left(\gamma_0+\Gamma_0)\frac{W(0)-r+\varepsilon_0+|\varkappa|R}{\varkappa l}\right) =$$

$$= \frac{(\gamma_0+\Gamma_0)(W(0)-r+\varepsilon_0+|\varkappa|R)}{l(\gamma+\Gamma)} + \frac{2\varkappa(\Gamma\gamma_0 - \Gamma_0\gamma)}{\gamma+\Gamma} > \frac{2\varkappa(\Gamma\gamma_0 - \Gamma_0\gamma)}{\gamma+\Gamma}.$$

В итоге правая часть (17) оценивается снизу числом

$$L = W(0) - r + \varepsilon_0 + \frac{2|\varkappa|\Gamma\gamma}{\gamma+\Gamma} + \frac{2\varkappa(\Gamma\gamma_0 - \Gamma_0\gamma)}{\gamma+\Gamma}.$$

Но $\gamma_0 \leq \gamma$, $\Gamma_0 \leq \Gamma$ и, следовательно,

$$\varkappa\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(n_0)} F_1(\sigma)\,d\sigma \geq W(0) - r + \varepsilon_0.$$

Тогда
$$V_1(n_0) \geq W(n_0) + W(0) - r + \varepsilon_0. \qquad (18)$$
Рассмотрим теперь неравенства (16) и (18) совместно. Получим
$$W(0) \geq V_1(n_0) \geq W(n_0) + W(0) - r + \varepsilon_0,$$
где, напомним, $r \leq \inf\limits_{n=0,1,2,\ldots} W(n)$. Из этой оценки следует неравенство
$$W(n_0) \leq r - \varepsilon_0, \qquad (19)$$
что противоречит условию $W(n) \geq r$ для всех целых n.

Рассмотрим случай, когда $\sigma(n_0) - \sigma(0) \leq -m\Delta$. Пусть $\sigma(n_0) = \sigma(0) - l\Delta - \beta_2$, где $\beta_2 \in [0, \Delta)$, $l \geq m$. Оценим значение $V_2(n_0)$.
$$V_2(n_0) = W(n_0) + \varkappa \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(n_0)} F_2(\sigma)\, d\sigma.$$
Справедливы равенства
$$\varkappa \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(n_0)} F_2(\sigma)\, d\sigma = l\varkappa \left(\int\limits_{0}^{-\Delta} \varphi(\sigma)\, d\sigma - \mu_2(\varkappa, l, W(0) - r + \varepsilon_0) \int\limits_{-\Delta}^{0} |\varphi(\sigma)|\, d\sigma \right) +$$
$$+\varkappa \left(\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(0)-\beta_2} \varphi(\sigma)\, d\sigma - \mu_2(\varkappa, l, W(0) - r + \varepsilon_0) \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(0)-\beta_2} |\varphi(\sigma)|\, d\sigma \right). \qquad (20)$$
Оценим каждое слагаемое правой части равенства (20). Для первого слагаемого справедливы равенства
$$\varkappa l \left(\int_0^{-\Delta} \varphi(\sigma)\, d\sigma - \mu_2(\varkappa, l, W(0) - r + \varepsilon_0) \int_0^{-\Delta} |\varphi(\sigma)|\, d\sigma \right) =$$
$$= -\varkappa l \left(\gamma - \Gamma - \frac{\gamma - \Gamma + \frac{W(0) - r + \varepsilon_0 + |\varkappa| R}{\varkappa l}}{\gamma + \Gamma} (\gamma + \Gamma) \right) = W(0) - r + \varepsilon_0 + |\varkappa| R.$$
Чтобы преобразовать второе слагаемое, представим сначала $\int\limits_{\sigma(0)-\beta_2}^{\sigma(0)} \varphi(\sigma)\, d\sigma$ в виде
$$\int\limits_{\sigma(0)-\beta_2}^{\sigma(0)} \varphi(\sigma)\, d\sigma = \gamma_1 - \Gamma_1, \quad \text{где} \quad \gamma_1 \geq 0, \;\; \Gamma_1 \geq 0, \;\; \gamma_1 \leq \gamma, \;\; \Gamma_1 \leq \Gamma.$$

Тогда для второго слагаемого правой части (20) справедливы соотношения

$$\varkappa\left(\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(0)-\beta_2}\varphi(\sigma)\,d\sigma-\mu_2(\varkappa,l,W(0)-r+\varepsilon_0)\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(0)-\beta_2}|\varphi(\sigma)|\,d\sigma\right)=$$

$$=-\varkappa\left(\int\limits_{\sigma(0)-\beta_2}^{\sigma(0)}\varphi(\sigma)\,d\sigma-\mu_2(\varkappa,l,W(0)-r+\varepsilon_0)\int\limits_{\sigma(0)-\beta_2}^{\sigma(0)}|\varphi(\sigma)|\,d\sigma\right)=$$

$$=-\varkappa\left(\gamma_1-\Gamma_1-\frac{\gamma-\Gamma+\frac{W(0)-r+\varepsilon_0+|\varkappa|R}{\varkappa l}}{\gamma+\Gamma}(\gamma_1+\Gamma_1)\right)>\frac{2\varkappa(\Gamma_1\gamma-\Gamma\gamma_1)}{\gamma+\Gamma}.$$

Таким образом, правая часть (20) оценивается снизу числом

$$T=W(0)-r+\varepsilon_0+\frac{2|\varkappa|\Gamma\gamma}{\gamma+\Gamma}+\frac{2\varkappa(\Gamma_1\gamma-\Gamma\gamma_1)}{\gamma+\Gamma}.$$

Если $\varkappa>0$, то $2|\varkappa|\Gamma\gamma-2\varkappa\Gamma\gamma_1\geq 0$, т.к. $\gamma\geq\gamma_1$. Если $\varkappa<0$, то $2|\varkappa|\Gamma\gamma-2|\varkappa|\Gamma_1\gamma\geq 0$, т.к. $\Gamma\geq\Gamma_1$. В итоге,

$$V_2(n_0)\geq W(n_0)+W(0)-r+\varepsilon_0. \tag{21}$$

Из (16) и (21) следует неравенство (19), приводящее как и предыдущем случае к противоречию с условием $W(n)\geq 0$ для всех целых n. Следовательно, предположение о том, что существует n_0, для которого выполнено $\sigma(n_0)-\sigma(0)\leq -m\Delta$, неверно.

Следовательно, ни для какого значения n не может быть выполнено $|\sigma(n_0)-\sigma(0)|\geq m\Delta$. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $W(n)=y^*(n)Hy(n)$. Рассмотрим

$$Z=W(n{+}1)-W(n)+\varkappa\varphi(\sigma(n))[\sigma(n{+}1)-\sigma(n)]+\varepsilon[\sigma(n{+}1)-\sigma(n)]^2+\eta\varphi^2(\sigma(n))$$

и преобразуем это выражение в силу системы (6) и соотношения $\varphi(\sigma)=L^*y$. Тогда

$$Z=(Py(n)+L\xi_1(n))^*H(Py(n)+L\xi_1(n))-y^*(n)Hy(n)+$$
$$+\varkappa y^*(n)Lc_1^*y(n)+\varepsilon|c_1^*y(n)|^2+\eta y^*(n)LL^*y(n)=$$
$$=M(y(n),\xi_1)-\tau(\alpha_1c_1^*y(n)-\xi_1(n))^*(\xi_1(n)-\alpha_2c_1^*y(n)).$$

Далее в силу системы (6) имеем

$$\alpha_1c_1^*y(n)-\xi_1(n)=\alpha_1(c^*x(n)+\rho\varphi(\sigma(n))-\varphi(\sigma(n+1))+\varphi(\sigma(n))=$$

$$= \alpha_1((\sigma(n+1) - \sigma(n)) - (\varphi(\sigma(n+1)) - \varphi(\sigma(n));$$

$$\xi_1(n) - \alpha_2 c_1^* y(n) = \varphi(\sigma(n+1)) - \varphi(\sigma(n)) - \alpha_2(c^* x(n) + \rho\varphi(\sigma(n)) =$$

$$= \varphi(\sigma(n+1)) - \varphi(\sigma(n)) - \alpha_2((\sigma(n+1) - \sigma(n)).$$

Учитывая, что $\varphi(\sigma(n+1)) - \varphi(\sigma(n)) = \varphi'(\sigma')(\sigma(n+1) - \sigma(n))$, где $\sigma(n) > \sigma' > \sigma(n+1)$ либо $\sigma(n) < \sigma' < \sigma(n+1)$, а $\varphi'(\sigma') \in [\alpha_1, \alpha_2]$, установим, что

$$(\alpha_1 c_1^* y(n) - \xi_1(n))^*(\xi_1(n) - \alpha_2 c_1^* y(n)) \geq 0.$$

В результате получим $Z \leq M(y(n), \xi_1(n))$. В силу (9) по лемме 1 устанавливаем, что $Z \leq 0$, что означает выполнение для выбранной функции $W(n)$ неравенства 1) леммы 2. Неравенство 2) леммы 2 совпадает с неравенством 2) теоремы 1. Таким образом, оценка (13) по лемме 2 справедлива, и теорема 1 доказана.

Список литературы

[1] **Якубович В.А.** Частотная теорема в теории управления. Сиб. мат. журнал, т. 14, N 2, 1973.

[2] **Бакаев Ю. И., Гуж А. А.** Оптимальный прием сигналов частотной модуляции в условиях эффекта Доплера. Радиомеханика и электроника. т. 10, N 1, 1965.

[3] **Корякин Ю. А., Леонов Г. А.** Процедура Бакаева–Гужа для систем со многими угловыми координатами. Изв. АН Каз–ССР. Сер. физ.-мат., N 3, 1976.

[4] **Корякин Ю. А.** Процедура Бакаева–Гужа для дискретных систем. В книге "Нелинейные колебания и теория управления". Ижевск, 1977.

[5] **Леонов Г.А., Смирнова В.Б.** Асимптотика решений системы интегро-дифференциальных уравнений с периодическими нелинейными функциями. Сиб. мат. журнал, т. 19, N 6, 1978, стр. 1406-1412.

[6] **Смирнова В. Б., Утина Н. В., Шепелявый А. И.** Оценка сверху числа проскальзываний циклов в дискретных системах с периодической нелинейностью. Вестник СПбГУ, сер. 1, 2003, вып. 2, N 9, стр. 48-57.

[7] **Леонов Г. А., Смирнова В. Б.** Математические проблемы теории фазовой синхронизации. С.-Пб., Наука, 2000.