ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2016
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория нелинейных колебаний

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ЧИСЛА КОМПАКТНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ СИНГУЛЯРНЫХ СЛОЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. Ю. Тыщенко

Гродненский государственный университет
230023, Гродно, ул. Ожешко, 22
e-mail: valentinet@mail.ru

Аннотация

Рассматриваются вещественные сингулярные слоения, определяемые уравнениями Пфаффа и автономными системами уравнений в полных дифференциалах. Получены признаки ограниченности числа компактных инвариантных гиперповерхностей рассматриваемых слоений на основании индексов лакун кососимметрических тензорных полей, формулы Остроградского и степени отображения векторных полей. Результаты адаптированы на случай двумерной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные утверждения.

Ключевые слова: уравнение Пфаффа, автономная система уравнений в полных дифференциалах, компактная инвариантная гиперповерхность.

Abstract

Real singular foliations defined by Pfaff equations and autonomous systems of equations in total differentials are considered. Basing on the indexes of the lacunas of skew-symmetric tenzor fields, the Ostrogradsky formula and the degree of the map of vector fields criterions of boundedness of the number of compact invariant hypersurfaces of considered foliations have been obtained. The results have been adapted for the case two-dimensional autonomous system of ordinary differential equations. Illustrating examples are given.

Keywords: Pfaff equation, autonomous system of equations in total differentials, compact invariant hypersurface.

1. Введение. Гильберт [1, с. 48 – 49] шестнадцатой из двадцати трех поставил проблему, вторая часть которой состоит из задачи о возможном расположении и максимальном числе предельных циклов автономной обыкновенной дифференциальной системы второго порядка. Дивергентный признак отсутствия замкнутых траекторий в односвязной области был получен Бендиксоном [2]. Обобщение дивергентного признака принадлежит Дюлаку [3], который модифицировал его на кольцевую область и ввел вспомогательный множитель, называемый теперь функцией Дюлака. В [4 – 6] дивергентный признак ограниченности числа возможных замкнутых траекторий был распространен на многосвязную область. Добавление к дивергентному признаку кривых без контакта и преобразование дивергентного выражения, на основании которого вместо функции Дюлака используется ее вещественная степень, было рассмотрено в [7]. В [8, 9] были проведены модификации признака Бендиксона–Дюлака для многосвязной области [4 – 6] с двумерного на многомерный случай, а в [10] и [11] – его распространение на случаи одномерных и многомерных дискретных динамических систем, соответственно. Адаптация признака Бендиксона–Дюлака для сингулярных слоений (т.е. таких слоений, у которых размерности слоев могут меняться при переходе от точки к точке) коразмерности 1, определяемых вполне интегрируемыми [12, с. 75] уравнениями Пфаффа и вполне разрешимыми [13, с. 113] многомерными автономными дифференциальными системами, проводилась в [14]. В данной работе будем рассматривать вопросы оценки числа компактных гиперповерхностей, определяемых сингулярными слоениями (их в дальнейшем будем называть компактными гиперповерхностями данных слоений), на основании систем уравнений Пфаффа, им соответствующим. При этом за основу будем брать монографию [13].

2. Один класс сингулярных слоений и их связь с системами уравнений Пфаффа и автономными системами уравнений в полных дифференциалах. Аппаратом (и объектами) исследования будут вполне интегрируемые системы уравнений Пфаффа

$$(A^k(x), dx) = 0,\ k = \overline{1,n},\ n \leqslant m, \tag{1.2}$$

и вполне разрешимые автономные системы уравнений в полных дифференциалах

$$dx = F(x)dt, \tag{2.2}$$

где $(\cdot,\cdot)$ есть операция скалярного произведения, $x = (x_1, \ldots, x_{m+1})$, $t = (t_1, \ldots, t_{m-n+1})$, векторы $A^k = ||A^k_l|| : G \to \mathbb{R}^{n(m+1)}$ и матрица $F = ||F_{ji}|| : G \to \mathbb{R}^{(m-n+1)(m+1)}$ являются дважды гладкими на области $G \subset \mathbb{R}^{m+1}$, векторы $A^k(x),\ k = \overline{1,n}$, а также векторные поля $F_j(x) = (F_{j1}(x), \ldots, F_{j,m+1}(x))$ (и соответствующие им линейные дифференциальные операторы $\mathfrak{F}_j = \sum_{i=1}^{m+1} F_{ji}(x)\partial_{x_i}$), $j = \overline{1, m-n+1}$, соответственно, линейно несвязаны [15, с. 113 – 114] на G. Согласно [12, с. 75; 13, с. 113] вполне интегрируемые уравнения Пфаффа (1.2) и вполне разрешимые автономные системы уравнений в полных дифференциалах (2.2) определяют на области G сингулярные слоения коразмерности n. Следует отметить, что вполне разрешимая автономная система уравнений в полных дифференциалах (2.2) интегрально эквивалентна на области G якобиевой [13, с.38] линейной однородной системе уравнений в частных производных первого порядка $(F_j(x), \partial_x u) = 0,\ \forall\ x \in G,\ j = \overline{1, m-n+1}$, где $\partial_x u = (\partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_{m+1}} u)$.

Рассмотрим теперь на области G сингулярное слоение $\mathfrak{L}$ коразмерности n, определяемое трижды гладким семейством

$$H_k(x) = C_k,\ k = \overline{1,n}. \tag{3.2}$$

Нетрудно видеть, что все множество вполне интегрируемых систем уравнений Пфаффа (1.2), имеющих полную систему интегралов [12, с, 105] (3.2), определяется соотношениями

$$\mu_j(x)(grad\ H_j(x), dx) = 0,\ \forall\ x \in G,\ j = \overline{1,n}, \tag{4.2}$$

где $\mu_j : G \to \mathbb{R},\ j = \overline{1,n}$, есть дважды гладкие знакопостоянные функции. Поэтому в дальнейшем вместо сингулярного слоения $\mathfrak{L}$ будем рассматривать вполне интегрируемую систему уравнений Пфаффа (4.2). При этом компактным гиперповерхностям сингулярного слоения $\mathfrak{L}$ соответствуют компактные инвариантные гиперповерхности вполне интегрируемой системы уравнений Пфаффа (4.2). С другой стороны, вполне разрешимая автономная система уравнений в полных дифференциалах (2.2) имеет базис первых автономных интегралов [13, с. 29] (3.2) тогда и только тогда, когда

$$(grad\ H(x), F_j(x)) = 0,\ \forall\ x \in G,\ j = \overline{1, m-n+1}. \tag{5.2}$$

С учетом линейной несвязанности на области G векторов $A^k(x),\ k = \overline{1,n}$, и векторных полей $F_j(x) = (F_{j1}(x), \ldots, F_{j,m+1}(x)),\ j = \overline{1, m-n+1}$, соответственно, на основании [13, с. 114] имеем, что на данной области вполне интегрируемая система уравнений Пфаффа (4.2) и вполне разрешимая автономная система уравнений в полных дифференциалах (2.2) при выполнении соотношений (5.2) интегрально эквивалентны.

Алгоритм перехода от вполне интегрируемых систем уравнений Пфаффа (1.2) к интегрально эквивалентным им вполне разрешимым автономным системам уравнений в полных дифференциалах (2.2), и наоборот, описан в [13, с. 83 – 85, 39]. При этом вполне интегрируемая система уравнений Пфаффа (1.2) определяется с точностью до умножения слева на невырожденную квадратную матрицу с дважды гладкими коэффициентами. В дальнейшем такую систему уравнений Пфаффа (класс систем уравнений Пфаффа) будем обозначать через (Pf). Аналогичным образом класс вполне разрешимых автономных систем уравнений в полных дифференциалах (2.2) будем обозначать через (DE). Это дает возможность изучать свойства слоев (являющихся инвариантными множествами систем уравнений Пфаффа (1.2) и автономных систем уравнений в полных дифференциалах (2.2)) слоения $\mathfrak{L}$ на основании одного из двух вышеприведенных объектов и, кроме того, переносить полученные свойства от одного объекта к другому. Отметим, что при данных переходах может произойти сужение области G на множестве $(m+1)$–мерной меры нуль.

3. Признаки ограниченности числа компактных гиперповерхностей на основании индексов лакун кососимметрических тензорных полей.

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{m+1}$ имеет гомотопическую группу $\pi_m(G)$ ранга $d(\pi_m(G)) = r$. Наряду с пространством $\mathbb{R}^{m+1}$ будем использовать его компактификацию с использованием $(m+1)$–мерной сферы S^{m+1}, полученной добавлением бесконечно удаленной точки ∞ при применении многомерной стереографичекой проекции. При этом все вычисления будем проводить в карте сферы S^{m+1}, соответствующей пространству $\mathbb{R}^{m+1}$. Будем полагать, что область G образована лакунами (линейно связными множествами, для каждых из которых существует гиперповерхность, гомеоморфная m-мерной сфере S^m и содержащая внутри себя это и только это множество) $\Gamma_l,\ l = \overline{1, r+1}$. При этом лакуны $\Gamma_l,\ l = \overline{1, r}$, не содержат бесконечно удаленную точку ∞ (их будем называть внутренними), а внешняя лакуна Γ_{r+1} содержит бесконечно удаленную точку ∞. Далее всюду будем полагать, что в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$ задана ориентация. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_{m+1})$ есть гладкое на G кососимметрическое тензорное поле типа $(0, m)$. Рассмотрим соответствующую ему дифференциальную m–форму $\omega = \sum\limits_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} a_i(x) dx^i$, а также всевозможные пределы

$$\lim_{\gamma_l \to \Gamma_l} \int\limits_{\gamma_l} \omega, \tag{1.3}$$

где $dx^i = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_{m+1}$, $i = \overline{1, m+1}$, γ_l есть простая замкнутая (т.е. гомеоморфная сфере S^m) кусочно–гладкая гиперповерхность (в дальнейшем все гиперповерхности будем полагать кусочно–гладкими), внутри которой расположена лакуна Γ_l (и лишь она одна), $l = \overline{1, r}$. При этом будем считать, что ориентация гиперповерхности γ_l согласована с ориентацией внутренности. Верхний (нижний) точный предел (1.3) будем называть верхним (нижним) индексом внутренней лакуны Γ_l относительно тензорного поля a и обозначать символом $\overline{ind}_a \Gamma_l$ $(\underline{ind}_a \Gamma_l)$, $l = \overline{1, r}$. При этом будем использовать следующие условные обозначения:

$$sgn\ \overline{ind}_a \Gamma_l = \left[\begin{array}{l} +1 : \ \overline{ind}_a \Gamma_l \in (0, +\infty], \\ 0 : \ \overline{ind}_a \Gamma_l = 0, \\ -1 : \ \overline{ind}_a \Gamma_l \in [-\infty, 0); \end{array} \right.$$

$$sgn\ \underline{ind}_a \Gamma_l = \left[\begin{array}{l} +1 : \ \underline{ind}_a \Gamma_l \in (0, +\infty], \\ 0 : \ \underline{ind}_a \Gamma_l = 0, \\ -1 : \ \underline{ind}_a \Gamma_l \in [-\infty, 0). \end{array} \right.$$

Аналогичным образом рассматривая всевозможные пределы $\lim\limits_{\gamma_{r+1} \to \Gamma_{r+1}} \int\limits_{\gamma_{r+1}} \omega$, где γ_{r+1} есть простая замкнутая гиперповерхность, внутри которой расположена лакуна Γ_{r+1} (и лишь она одна), вводим понятия верхнего (нижнего) индекса $\overline{ind}_a \Gamma_{r+1}$ $(\underline{ind}_a \Gamma_{r+1})$ внешней лакуны Γ_{r+1} относительно тензорного поля a и условные обозначения $sgn\ \overline{ind}_a \Gamma_{r+1}$ и $sgn\ \underline{ind}_a \Gamma_{r+1}$.

Рассмотрим вполне интегрируемую систему уравнений Пфаффа (1.2). Возьмем гладкие на области G дифференциальные $(m-1)$–формы ϖ_k, $k = \overline{1, n}$. На основании данных дифференциальных форм ϖ_k, $k = \overline{1, n}$, и системы уравнений Пфаффа (1.2) построим дифференциальную m–форму $\sum\limits_{k=1}^{n} \varpi_k \wedge (A^k, dx)$, а также соответствующие последней дифференциальной форме гладкие кососимметрическое тензорное и векторное поля b и B, соответственно (состоящие из одинаковых компонент).

Лемма 1.3. *Пусть существуют такие гладкие на области G дифференциальные $(m-1)$–формы ϖ_k, $k = \overline{1, n}$, что на данной области (кроме,* *быть может, множества $(m+1)$–мерной меры нуль) выполняется одна из десяти серий условий*

$$sgn\ \overline{ind}_b\Gamma_l\ div\ B > 0; \tag{2.3}$$

$$sgn\ \underline{ind}_b\Gamma_l\ div\ B > 0; \tag{3.3}$$

$$sgn\ \overline{ind}_b\Gamma_l = 0,\ div\ B > 0; \tag{4.3}$$

$$sgn\ \overline{ind}_b\Gamma_l = 0,\ div\ B < 0; \tag{5.3}$$

$$sgn\ \underline{ind}_b\Gamma_l = 0,\ div\ B > 0; \tag{6.3}$$

$$sgn\ \underline{ind}_b\Gamma_l = 0,\ div\ B < 0; \tag{7.3}$$

$$sgn\ \overline{ind}_b\Gamma_l > 0,\ div\ B = 0; \tag{8.3}$$

$$sgn\ \overline{ind}_b\Gamma_l < 0,\ div\ B = 0; \tag{9.3}$$

$$sgn\ \underline{ind}_b\Gamma_l > 0,\ div\ B = 0; \tag{10.3}$$

$$sgn\ \underline{ind}_b\Gamma_l < 0,\ div\ B = 0. \tag{11.3}$$

Тогда невозможна такая ситуация: система уравнений Пфаффа (1.2) *имеет компактную инвариантную гиперповерхность V_l, внутри которой расположена лакуна Γ_l, а все остальные лакуны расположены вне компактной инвариантной гиперповерхности $V_l,\ l \in \{1,\ldots,r\}$.*

Доказательство. Предположим, что описанная в лемме 1.3 ситуация имеет место: компактная инвариантная гиперповерхность V_l окружает лакуну Γ_l, а все остальные лакуны расположены вне компактной инвариантной гиперповерхности V_l.

Пусть выполняются условия (2.3). Тогда на основании общей формулы Стокса [16, с. 472] имеем, что

$$\int\limits_{V_l}\sum_{k=1}^{n}\varpi_k \wedge (A^k,dx) - \int\limits_{\gamma_l}\sum_{k=1}^{n}\varpi_k \wedge (A^k,dx) = \int\limits_{U_{\gamma_l}} div\ B\ d\ U_{\gamma_l}, \tag{12.3}$$

где γ_l есть простая замкнутая гиперповерхность, внутри которой расположена лакуна Γ_l, а U_{γ_l} есть область, ограниченная данными замкнутыми гиперповерхностями V_l и γ_l. Так как первый интеграл (вычисляемый на инвариантной гиперповерхности системы уравнений Пфаффа $(A^k,dx)=0,\ k=\overline{1,n}$) равен нулю, то переходя в (12.3) к пределу при $\gamma_l \to \Gamma_l$, в силу (2.3) получаем противоречие. Оно доказывает невозможность ситуации, описанной в лемме 1.3.

Далее аналогичным образом на основании соотношений (12.3) доказываем справедливость утверждения леммы 1.3 и при выполнении каждой из серий условий (3.3) – (11.3). Лемма 1.3 доказана.

Подобно лемме 1.3 на основании общей формулы Стокса имеем такие утверждения.

Лемма 2.3. *Пусть существуют такие гладкие на области G дифференциальные $(m-1)$–формы $\varpi_k,\ k=\overline{1,n}$, что $\{sgn\ \overline{ind}_b\Gamma_{l_i} \vee sgn\ \underline{ind}_b\Gamma_{l_i}\} = \{sgn\ \overline{ind}_b\Gamma_{l_j} \vee sgn\ \underline{ind}_b\Gamma_{l_j}\},\ l_i \in \{1,\ldots,r\},\ l_j \in \{1,\ldots,r\},\ i=\overline{1,s},\ j=\overline{1,s},\ s \leqslant r$, и при $l=l_i$ на данной области (кроме, быть может, множества $(m+1)$–мерной меры нуль) выполняется одна из десяти серий условий* (2.3) – (11.3).

Тогда невозможна такая ситуация: система уравнений Пфаффа (1.2) *имеет компактную инвариантную гиперповерхность V, внутри которой расположены лакуны $\Gamma_{l_i},\ i=\overline{1,s}$, а все остальные лакуны расположены вне компактной инвариантной гиперповерхности V.*

Утверждение 1.3. *Пусть существуют такие гладкие на области G дифференциальные $(m-1)$–формы $\varpi_k,\ k=\overline{1,n}$, что на данной области (кроме, быть может, множества $(m+1)$–мерной меры нуль) выполняется одна из десяти серий условий: $sgn\ \overline{ind}_b\Gamma_{r+1}\ div\ B>0;\ sgn\ \underline{ind}_b\Gamma_{r+1}\ div\ B>0;\ sgn\ \overline{ind}_b\Gamma_{r+1}=0,\ div\ B>0;\ sgn\ \overline{ind}_b\Gamma_{r+1}=0,\ div\ B<0;\ sgn\ \underline{ind}_b\Gamma_{r+1}=0,\ div\ B>0;\ sgn\ \underline{ind}_b\Gamma_{r+1}=0,\ div\ B<0;\ sgn\ \overline{ind}_b\Gamma_{r+1}>0,\ div\ B=0;\ sgn\ \overline{ind}_b\Gamma_{r+1}<0,\ div\ B=0;\ sgn\ \underline{ind}_b\Gamma_{r+1}>0,\ div\ B=0;\ sgn\ \underline{ind}_b\Gamma_{r+1}<0,\ div\ B=0.$*

Тогда система уравнений Пфаффа (1.2) *не может иметь компактную инвариантную гиперповерхность, внутри которой расположены все лакуны $\Gamma_l,\ l=\overline{1,r}$.*

Следствие 1.3. *Пусть выполняются условия утверждения* 1.3. *Тогда интегрально эквивалентные системе уравнений Пфаффа* (1.2) *на области G автономные системы уравнений в полных дифференциалах* (DE) *не могут иметь компактную инвариантную гиперповерхность, внутри которой расположены все лакуны $\Gamma_l,\ l=\overline{1,r}$.*

Далее на основании леммы 2.3 и теоремы 3 из [8] имеем такое утверждение.

Теорема 1.3. Пусть существуют такие гладкие на области G дифференциальные $(m-1)$–формы $\varpi_k,\ k=\overline{1,n}$, что $\{sgn\ \overline{ind}_b\Gamma_{l_i} \vee sgn\ \underline{ind}_b\Gamma_{l_i}\} = \{sgn\ \overline{ind}_b\Gamma_{l_j} \vee sgn\ \underline{ind}_b\Gamma_{l_j}\},\ l_i \in \{1,\ldots,r\},\ l_j \in \{1,\ldots,r\},\ i=\overline{1,s},\ j=$

$\overline{1,s},\ s \leqslant r,$ *и при* $l = l_i$ *на данной области (кроме, быть может, множества* $(m+1)$*–мерной меры нуль) выполняется одна из шести серий условий* (2.3) – (7.3). *Тогда на области* G *система уравнений Пфаффа* (1.2) *может иметь не более* $r - s$ *компактных инвариантных гиперповерхностей.*

Следствие 2.3. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.3. *Тогда интегрально эквивалентные системе уравнений Пфаффа* (1.2) *на области* G *автономные системы уравнений в полных дифференциалах* (DE) *могут иметь не более* $r - s$ *компактных инвариантных гиперповерхностей.*

Рассмотрим отдельно случай $m = n = 1$, как часто встречающийся в приложениях. В этом случае уравнение Пфаффа (1.2) является уравнением траекторий двумерной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx_1}{dt_1} = A_2(x_1, x_2),\ \frac{dx_2}{dt_1} = -A_1(x_1, x_2)$, которую, используя замены $x_1 \mapsto x,\ x_2 \mapsto y,\ t_1 \mapsto t,\ A_2 \mapsto P,\ -A_1 \mapsto Q$, запишем в виде

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{13.3}$$

где P и Q есть дважды гладкие на $(r+1)$–связной области $G \subset \mathbb{R}^2$ функции. При этом уравнением траекторий системы (13.3) является $P(x, y)dy - Q(x, y)dx = 0$. Теперь на основании теоремы 1.3, леммы 2.3 и теоремы 18 из [6] имеем такое утверждение.

Теорема 2.3. *Пусть существует такая гладкая положительная на* $(r+1)$*–связной области* G *функция* μ, *что* $\{sgn\ \overline{ind}_{(\mu P,\mu Q)}\Gamma_{l_i} \vee sgn\ \underline{ind}_{(\mu P,\mu Q)}\Gamma_{l_i}\} = \{sgn\ \overline{ind}_{(\mu P,\mu Q)}\Gamma_{l_j} \vee sgn\ \underline{ind}_{(\mu P,\mu Q)}\Gamma_{l_j}\},\ l_i \in \{1, \ldots, r\},\ l_j \in \{1, \ldots, r\},\ i = \overline{1,s},\ j = \overline{1,s},\ s \leqslant r,$ *и при* $l = l_i$ *на данной области (кроме, быть может, множества двумерной меры нуль) выполняется одна из десяти серий условий:* $sgn\ \overline{ind}_{(\mu P,\mu Q)}\Gamma_l\ div(\mu P, \mu Q) > 0;\ sgn\ \underline{ind}_{(\mu P,\mu Q)}\Gamma_l\ div(\mu P, \mu Q) > 0;\ sgn\ \overline{ind}_{(\mu P,\mu Q)}\Gamma_l = 0,\ div(\mu P, \mu Q) > 0;\ sgn\ \overline{ind}_{(\mu P,\mu Q)}\Gamma_l = 0,\ div(\mu P, \mu Q) < 0;\ sgn\ \underline{ind}_{(\mu P,\mu Q)}\Gamma_l = 0,\ div(\mu P, \mu Q) > 0;\ sgn\ \underline{ind}_{(\mu P,\mu Q)}\Gamma_l = 0,\ div(\mu P, \mu Q) < 0;\ sgn\ \overline{ind}_{(\mu P,\mu Q)}\Gamma_l > 0,\ div(\mu P, \mu Q) = 0;\ sgn\ \overline{ind}_{(\mu P,\mu Q)}\Gamma_l < 0,\ div(\mu P, \mu Q) = 0;\ sgn\ \underline{ind}_{(\mu P,\mu Q)}\Gamma_l > 0,\ div(\mu P, \mu Q) = 0;\ sgn\ \underline{ind}_{(\mu P,\mu Q)}\Gamma_l < 0,\ div(\mu P, \mu Q) = 0.$

Тогда на области G *система* (13.3) *может иметь не более* $r - s$ *предельных циклов.*

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = x + y + x(x^2 + y^2),\ \frac{dy}{dt} = -x + y + y(x^2 + y^2). \tag{14.3}$$

Для данной системы выберем: $G = \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$ (поэтому $r = 1$), $\mu = (x^2 + y^2)^{-1}$.

Теперь непосредственными вычислениями получаем, что $div(\mu P, \mu Q) = 2$, $\oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \mu P dy - \mu Q dx = 2\pi(1+R^2)$ (обход по окружностям осуществляется в положительном направлении), и поэтому $sgn\ \overline{ind}_{(\mu P, \mu Q)}\Gamma_1 = +1$. Очевидно, что выполняется первая серия условий теоремы 2.3. Поэтому в ее силу на двусвязной области $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ система (14.3) не имеет предельных циклов. Учитывая, что $(0,0)$ есть состояние равновесия системы (14.3), окончательно приходим к выводу, что данная система не имеет предельных циклов.

Заметим, что в утверждении 1.3 и теоремах 1.3 и 2.3 показано, что в отличие от теоремы 3 из [8], теоремы 18 из [6] и теоремы 2 из [7] на ограниченность компактных инвариантных гиперповерхностей, соответственно, влияет не только ранг m–мерной гомотопической группы области, но и индексы ее лакун.

В заключение этого пункта также отметим на возможность применения данного подхода к системе внешних дифференциальных форм [8].

4. Признаки ограниченности числа компактных гиперповерхностей на основании формулы Остроградского.

В данном пункте будем полагать, что область G имеет такую же структуру, как и в предыдущем. Кроме того, в этом пункте будем рассматривать сингулярные слоения коразмерности 1.

Теорема 1.4. *Пусть на области G существует такое гладкое векторное поле B, что на данной области (кроме, может быть, множества m–мерной меры нуль) выполняется одна из шести серий условий*

$$det(B, F_1, \ldots, F_m) > 0,\ div\ B = 0; \tag{1.4}$$

$$det(B, F_1, \ldots, F_m) < 0,\ div\ B = 0; \tag{2.4}$$

$$det(B, F_1, \ldots, F_m) = 0,\ div\ B > 0; \tag{3.4}$$

$$det(B, F_1, \ldots, F_m) = 0,\ div\ B < 0; \tag{4.4}$$

$$((kx - a), det(e, F_1, \ldots, F_m)) > 0,\ det(B, F_1, \ldots, F_m)\ div\ B < 0, \tag{5.4}$$

$$((kx - a), det(e, F_1, \ldots, F_m)) < 0,\ det(B, F_1, \ldots, F_m)\ div\ B > 0, \tag{6.4}$$

где $(B, F_1, \ldots, F_m)$ есть матрица, строками которой являются упорядоченные элементы векторов $B, F_1, \ldots, F_m$, соответственно, $kx = (k_1x_1, \ldots, k_{m+1}x_{m+1})$, $k_i > 0$, $i = \overline{1, m+1}$, a есть некоторый постоянный вектор, $e = (e_1, \ldots, e_{m+1})$ есть ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^{m+1}$.

Тогда на области G автономная система уравнений в полных дифференциалах (2.2) при $n = 1$ может иметь не более r компактных инвариантных гиперповерхностей.

Доказательство теоремы 1.4 аналогично доказательствам теоремы 18 из [6] и теоремы 3 из [8] и базируется на таком вспомогательном утверждении.

Лемма 1.4. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда во всякой области $\Omega \subset G$, внутри внешней границы которой расположено $s \leqslant r$ лакун, относительно компактных инвариантных гиперповерхностей автономной системы уравнений в полных дифференциалах* (2.2) *невозможна такая ситуация: всякая из s лакун содержится внутри своей компактной инвариантной гиперповерхности $V_1, \ldots, V_s$, компактная инвариантная гиперповерхность V_{s+1} содержит внутри себя эти s лакун, причем гиперповерхности $V_1, \ldots, V_s$ не пересекаются, не содержатся друг в друге и все целиком располагаются внутри гиперповерхности V_{s+1}.*

Доказательство. Предположим, что имеет место ситуация, описанная в лемме. Введем вспомогательную гиперповерхность $V = \cup_{l=1}^{s+1} V_l$.

Пусть выполняются условия (1.4). Так как составная гиперповерхность V является инвариантной для системы (2.2) при $n = 1$, то каждое из линейно несвязанных векторных полей $F_j,\ j = \overline{1, m}$, в своих неособых точках касается данной гиперповерхности. Поэтому векторное поле $N = det(e, F_1, \ldots, F_m)$ ортогонально к гиперповерхности V. На основании формулы Остроградского [17, с. 324, 588 – 593] имеем, что

$$\int\limits_V (B, N)|N|^{-1} dS = \pm \int\limits_U div\ B\ dU, \tag{7.4}$$

где $|N|$ есть евклидова норма векторного поля N, U есть область, ограниченная гиперповерхностью V, причем здесь знак "+" имеет место в случае, когда N есть внешнее нормальное поле к гиперповерхности V_{s+1}, а знак "$-$" имеет место в противном случае. В силу условий (1.4) получаем, что интеграл в левой части последнего равенства положителен, а в правой равен нулю. Полученное противоречие доказывает невозможность ситуации, описанной в лемме 1.4.

Далее аналогичным образом на основании соотношения (7.4) доказываем справедливость утверждения леммы 1.4 и при выполнении каждой из серий условий (2.4) – (6.4). При этом отметим, что первое неравенство из (5.4) позволяет применить знак "+" в соотношении (7.4), а первое неравенство из (6.4) – знак "$-$". Лемма 1.4 доказана.

Отметим, что теорема 1.4 при (3.4) и (4.4) соответствует теореме 4 из [14].

Следствие 1.4. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда интегрально эквивалентные автономной системе уравнений в полных дифференциалах* (2.2) *при* $n = 1$ *на области* G *уравнения Пфаффа* (Pf) *при* $n = 1$ *могут иметь не более* r *компактных инвариантных гиперповерхностей.*

Рассмотрим случай $m = n = 1$. В этом случае автономная система уравнений в полных дифференциалах (2.2) является автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx_1}{dt_1} = F_{11}(x_1, x_2)$, $\frac{dx_2}{dt_1} = F_{12}(x_1, x_2)$, и ее, используя замены $x_1 \mapsto x$, $x_2 \mapsto y$, $t_1 \mapsto t$, $F_{11} \mapsto P$, $F_{12} \mapsto Q$, запишем в виде (13.3), где P и Q есть дважды гладкие на $(r+1)$–связной области $G \subset \mathbb{R}^2$ функции. Теперь на основании теоремы 1.4 имеем такое утверждение.

Теорема 2.4. *Пусть на* $(r + 1)$*–связной области* G *существует такое гладкое векторное поле* (R, S)*, что на данной области (кроме, может быть, множества изолированных точек) выполняется одна из шести серий условий:* $(RQ - PS) > 0$, $(\partial_x R + \partial_y S) = 0$; $(RQ - PS) < 0$, $(\partial_x R + \partial_y S) = 0$; $(RQ - PS) = 0$, $(\partial_x R + \partial_y S) > 0$; $(RQ - PS) = 0$, $(\partial_x R + \partial_y S) < 0$; $(ax - c)Q - (by - d)P > 0$, $(RQ - PS)(\partial_x R + \partial_y S) < 0$; $(ax - c)Q - (by - d)P < 0$, $(RQ - PS)(\partial_x R + \partial_y S) > 0$, *где* $a > 0$, $b > 0$, c *и* d *есть некоторые постоянные.*

Тогда на области G *система* (13.3) *может иметь не более* r *предельных циклов.*

Отметим, что теорема 2.4 уточняет и распространяет результаты общей теоремы 1 из [18] об отсутствии в односвязной области у системы (13.3) предельных циклов на многосвязную область. Так, например, система

$$\frac{dx}{dt} = x + y - x(x^2 + y^2), \ \frac{dy}{dt} = -x + y - y(x^2 + y^2), \tag{8.4}$$

имеет [19, с. 215] предельный цикл $x^2 + y^2 = 1$ и он является единственным. Выбирая (в обозначениях статьи [18]) функции $P(x, y) = x + y - x(x^2 + y^2)$, $Q(x, y) = -x + y - x(x^2 + y^2)$, $N(x, y) = x$, $M(x, y) = -y$, получаем, что $h(x, y) = P(x, y)M(x, y) + Q(x, y)N(x, y) = -x^2 - y^2$, $k(x, y) = \partial_x N(x, y) - \partial_y M(x, y) = 2$, и в силу общей теоремы 1 из [18] предельных циклов у системы (8.4) не должно быть.

Теорема 3.4. *Пусть на области* G *существуют такое гладкое векторное поле* B*, что на данной области (кроме, быть может, множества* m*–мерной меры нуль) выполняется одна из шести серий условий:* $(B, A^1) > 0$, $div\ B = 0$; $(B, A^1) < 0$, $div\ B = 0$; $(B, A^1) = 0$, $div\ B > 0$;

$(B, A^1) = 0,\ div\ B < 0$; $((kx-a), A^1) > 0,\ (B, A^1)\ div\ B < 0$; $((kx-a), A^1) < 0,\ (B, A^1)\ div\ B > 0$.

Тогда на области G уравнения Пфаффа (1.2) *при $n = 1$ могут иметь не более r компактных инвариантных гиперповерхностей.*

Доказательство данного утверждения проводится аналогично доказательству теоремы 1.4 с учетом того, что векторное поле A^1 в неособых точках ортогонально каждой инвариантной гиперповерхности уравнения Пфаффа (1.2) при $n = 1$.

Заметим, что теорема 3.4 при третьей и четвертой сериях условиях соответствует теореме 2 из [14].

Следствие 2.4. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4. *Тогда интегрально эквивалентные уравнению Пфаффа* (1.2) *при $n = 1$ на области G автономные системы уравнений в полных дифференциалах* (DE) *при $n = 1$ могут иметь не более r компактных инвариантных гиперповерхностей.*

5. Признаки ограниченности числа компактных гиперповерхностей на основании степени отображения векторных полей.

В этом пункте также будем рассматривать сингулярные слоения коразмерности 1 и считать, что область G является гиперповерхностно односвязной (т. е. в ней каждая замкнутая гиперповерхность, гомеоморфная гиперсфере, может быть стянута в точку, не выходя за пределы области).

Теорема 1.5. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *функция $\nu_j : G \to \mathbb{R}$, где*

$$\nu_j(x) = \begin{vmatrix} F_{j1}(x) & \dots & F_{j,m+1}(x) \\ \mathfrak{F}_1(F_{j1}(x)) & \dots & \mathfrak{F}_1(F_{j,m+1}(x)) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{F}_m(F_{j1}(x)) & \dots & \mathfrak{F}_m(F_{j,m+1}(x)) \end{vmatrix},$$

является строго положительной или строго отрицательной на области $G,\ j \in \{1, \dots, m\}$,

2) *векторное поле F_j на области G не имеет особых точек.*

Тогда на области G автономная система уравнений в полных дифференциалах (2.2) *при $n = 1$ не имеет компактных инвариантных гиперповерхностей.*

Доказательство. Предположим, что имеет место ситуация, описанная в теореме при строгой положительности функции ν_j (случай строгой отрицательности данной функции рассматривается аналогично). Пусть V есть компактная инвариантная гиперповерхность системы (2.2). На основании [16, с. 516] приходим к выводу, что степень векторного поля F_j на гиперповерхности V равна нулю. Поэтому в силу [16, с. 508] имеем, что интеграл

$$\int_S \nu_j(x(t))\Big(\sum\nolimits_{i=1}^{m+1}(F_{ji}(x(t)))^2\Big)^{-n/2} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_m = 0,$$

где $x(t),\ t \in S$, есть параметризация ориентированной гиперповерхности V. С другой стороны, в силу строгой положительности функции ν_j на области G приходим к выводу, что данный интеграл должен быть больше нуля. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Следствие 1.5. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.5. *Тогда интегрально эквивалентные автономной системе уравнений в полных дифференциалах* (2.2) *при* $n = 1$ *на области* G *уравнения Пфаффа* (Pf) *не имеют компактных инвариантных гиперповерхностей.*

Рассмотрим теперь случай $m = n = 1$. Как и в предыдущем пункте, от системы (2.2) перейдем к системе (13.3) с дважды гладкими на односвязной области $G \subset \mathbb{R}^2$ функциями P и Q. На основании теоремы 1.5 имеем такое утверждение.

Следствие 2.5. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *функция* $\nu_j : G \to \mathbb{R}$, *где* $\nu = P\Big(\dfrac{\partial Q}{\partial x}P + \dfrac{\partial Q}{\partial x}Q\Big) - Q\Big(\dfrac{\partial P}{\partial x}P + \dfrac{\partial P}{\partial x}Q\Big)$, *является строго положительной или строго отрицательной на области* G,

2) *векторное поле* (P, Q) *на области* G *не имеет особых точек.*

Тогда на односвязной области G *система* (13.3) *не имеет предельных циклов.*

Литература

[1] Проблемы Гильберта. – М.: Наука, 1969. – 240 с.

[2] Bendixon J. Sur les courbes defines par des equations differentielles // Acta Mathem. – 1901. – V. 24, № 1. – P. 1 – 88.

[3] Dulac H. Recherche des cycles limites // C. r. Acad. sci. – 1937. – V. 204, № 23. – P. 1703 – 1706.

[4] Lloyd N. G. A note on the number of limit cycles in certain two-dimensional systems // London Math. Soc. – 1979. – V. 20, № 2. – P. 277 – 286.

[5] Yamato K. An effective method of counting the number of limit cycles // Nagoya Math. J. – 1979. – V. 79. – P. 35 – 114.

[6] Горбузов В. Н., Тыщенко В. Ю. Частные интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Матем. сборник. – 1992. – Т. 183, № 3. – С. 76 – 94.

[7] Черкас Л. А. Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 5. – С. 689 – 699.

[8] Горбузов В. Н. Признаки ограниченности числа возможных компактных гиперповерхностей, определяемых дифференциальными системами // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 30 – 37.

[9] Gorbuzov V. N. Compact integral manifolds of differentional systems // Mathematics. Dynamical Systems / arXiv:1009.2998v1 [math.DS]. Cornell Univ., Ithaca, New York. – New York , 2010. – 27 p.

[10] Тыщенко В. Ю. О компактных инвариантных гиперповерхностях дискретных динамических систем // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 7. – С. 1005 – 1006.

[11] Тыщенко В. Ю. Инварианты голоморфных многомерных дискретных динамических систем // Дифференц. уравнения и процессы управления (http://www.math.spbu.ru/diffjournal). – 2013. – № 2. – С. 12 – 50.

[12] Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. – М.–Л.:ГИТТЛ, 1947. – 355 с.

[13] Горбузов В. Н. Интегралы дифференциальных систем. – Гродно: ГрГУ, 2006. – 447 с.

[14] Горбузов В. Н. Оценка количества компактных слоев слоений, определяемых дифференциальными уравнениями // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 10. – С. 1307 – 1311.

[15] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[16] Дубровин С. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. – М.: Наука, 1986. – 760 с.

[17] Шилов Г. Е. Математический анализ (функции нескольких переменных). – М.: Наука, 1972. – 623 с.

[18] Ткачев В. Ф., Ткачев Вл. Ф. О критериях отсутствия любых и кратных предельных циклов // Матем. сборник. – 1960. – Т. 52 (94), № 3. – С. 811 – 822.

[19] Богданов Ю. С., Мазаник С. А., Сыроид Ю. Б. Курс дифференциальных уравнений. – Минск: Унiверсiтэцкае, 1996. – 287 с.