ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2004
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

НАКРЫВАЮЩИЕ СЛОЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В.Ю. Тыщенко

Гродненский государственный аграрный университет
230005, Гродно, ул. Терешковой, 28
e-mail: valentinet@mail.ru

Введение

Истоки теории слоений восходят к работам Анри Пуанкаре [1]. Став самостоятельной научной дисциплиной, теория слоений в настоящее время является одним из эффективных аппаратов топологического исследования (см., например, [2 – 4]), развитие которого идет в тесной связи с приложениями.

Теория слоений дает один из методов качественного (топологического) исследования дифференциальных уравнений. На основании этих методов свойства дифференциальных уравнений изучались, например, И. Г. Петровским и Е. М. Ландисом [5], Ю. С. Ильяшенко [6], Н. Н. Ладисом [7], C. Camacho и P. Sad [8] и др. В данной работе будем рассматривать глобальные качественные характеристики некоторых классов систем дифференциальных уравнений (в основном комплексных) на основании топологических свойств частного вида слоений, а, именно, накрывающих.

Вопросы глобальной топологической классификации дифференциальных систем (т.е. определяемых ими слоений) впервые были рассмотрены в работе

[9]. В ней, в частности, был получен критерий глобальной топологической эквивалентности для вещественных автономных линейных обыкновенных дифференциальных систем общего положения. В дальнейшем данная проблема рассматривалась в [10] и окончательно была решена в [11]. Аналогичные задачи для вещественных вполне разрешимых автономных линейных дифференциальных систем в случае двух независимых переменных изучались в [12], а в случае, когда число независимых переменных на 1 меньше числа зависимых – в [13] и [14].

В комплексном случае глобальная топологическая классификация автономных линейных обыкновенных дифференциальных систем общего положения была проведена в [15 – 19], а в [20] данная задача была решена в случае вполне разрешимых автономных линейных дифференциальных систем. Кроме того, в работах [6, 7, 21] этот вопрос изучался для комплексных автономных полиномиальных обыкновенных дифференциальных систем второго порядка.

Для неавтономных дифференциальных систем задача глобальной топологической классификации рассматривалась лишь для скалярного комплексного линейного обыкновенного дифференциального уравнения [22, 23].

Следует отметить, что все полученные в вышеперечисленных работах критерии глобальной топологической эквивалентности соответствующих дифференциальных систем были получены исключительно для интегрируемых в квадратурах случаях (что существенно облегчило получение этих критериев).

В первой главе данной работы изучаются задачи глобальных топологической, гладкой, $\mathbb{R}$–голоморфной [24] и голоморфной классификаций накрывающих слоений.

Во второй и третьей главах проводятся, соответственно, вышеуказанные классификации для накрывающих слоений, определяемых комплексными неавтономными линейными дифференциальными системами и проективными матричными уравнениями Риккати [25].

В четвертой главе рассматриваются вопросы глобальных топологической и фазовой устойчивостей неавтономных линейных дифференциальных систем и проективных матричных уравнений Риккати, как комплексных, так и вещественных.

Для ссылок на формулы (теоремы, леммы, следствия и определения) будем использовать обозначения вида $(k,\ l)$ и $(k,\ l,\ m)$, где k есть номер формулы (теоремы, леммы, следствия и определения), l – номер параграфа, m – номер главы.

Глава 1. Классификации накрывающих слоений.

§ 1. Накрывающие слоения.

Определение 1.1. *Пусть A и B есть линейно связные гладкие многообразия размерностей $dim\ A = n$ и $dim\ B = m$. Гладкое слоение $\mathfrak{F}$ размерности m на многообразии $A \times B$, трансверсальное к $A \times \{b\}$ для всех $b \in B$, будем называть* **накрывающим слоением***, если проекция $p : A \times B \to B$ определяет для каждого слоя этого слоения накрытие многообразия B. При этом многообразие A будем называть* **фазовым слоем***, а многообразие B –* **базой** *накрывающего слоения $\mathfrak{F}$.*

Определение 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}_c$ есть слой накрывающего слоения $\mathfrak{F}$, содержащий точку $c \in A \times B$.* **Фазовой группой** *$Ph(\mathfrak{F}, b_0)$, $b_0 \in B$, накрывающего слоения $\mathfrak{F}$ будем называть группу диффеоморфизмов $Diff(A, \pi_1(B, b_0))$ действий на фазовом слое A фундаментальной группы $\pi_1(B, b_0)$ с отмеченной точкой b_0, определяемых по формулам $\Phi^\gamma(a) = q \circ r \circ s(1)$, $\forall a \in A$, $\forall \gamma \in \pi_1(B, b_0)$, где r есть поднятие одного из путей $s(\tau) \subset B$, $\forall \tau \in [0, 1]$, соответствующих элементу γ группы $\pi_1(B, b_0)$, на слой $\mathfrak{F}_{(a,s(0))}$ накрывающего слоения $\mathfrak{F}$ в точку $(a, s(0))$, проекция $q : A \times B \to A$.*

Нетрудно видеть, что в силу линейной связности и гладкости многообразия B фазовые группы $Ph(\mathfrak{F}, b_1)$ и $Ph(\mathfrak{F}, b_2)$ гладко сопряжены для любых двух точек b_1 и b_2 базы B. Поэтому в дальнейшем, как правило, будем просто говорить о **фазовой группе** $Ph(\mathfrak{F})$ накрывающего слоения $\mathfrak{F}$, не связывая ее с какой-либо точкой базы B. Таким же образом будем поступать и с объектами, ассоциированными с фазовой группой.

Определение 3.1. *Фазовую группу накрывающего слоения будем называть* **тривиальной***, если все диффеоморфизмы этой группы являются тождественными отображениями, и* **нетривиальной** *в противном случае.*

Определение 4.1. *Накрывающее слоение будем называть* **тривиальным***, если его фазовая группа тривиальна, и* **нетривиальным** *в противном случае.*

Определение 5.1. Орбитой точки фазового слоя *накрывающего слоения будем называть орбиту этой точки, определяемую фазовой группой слоения.*

Определение 6.1. *Точку фазового слоя будем называть* **неподвижной** *для накрывающего слоения, если ее орбита совпадает с самой точкой.*

Определение 7.1. *Слой накрывающего слоения, являющийся ν–листным накрытием базы ($\nu \in \mathbb{N}$), будем называть ν–**листным**; а являющийся бесконечнолистным накрытием базы –* **бесконечнолистным**.

Теорема 1.1. *Каждой изолированной неподвижной точке накрывающего слоения биективно соответствует некоторый однолистный слой этого слоения.*

Доказательство данной теоремы непосредственно вытекает из конструкции построения фазовой группы накрывающего слоения (см. определение 2.1).

Определение 8.1. *Накрывающее слоение будем называть* **слабо эргодическим**, *если оно не имеет неподвижных точек.*

Определение 9.1. *Слабо эргодическое накрывающее слоение будем называть* **эргодическим**, *если замыкание орбиты каждой точки фазового слоя совпадает с самим фазовым слоем.*

Определение 10.1. *Эргодическое накрывающее слоение будем называть* **сильно эргодическим** *(или* **транзитивным**), *если орбита каждой точки фазового слоя совпадает с самим фазовым слоем.*

Определение 11.1. *Пусть накрывающее слоение не является слабо эргодическим. Если оно имеет конечное число неподвижных точек, то его будем называть* **невырожденным**, *и* **вырожденным** *в противном случае.*

Определение 12.1. *Накрывающее слоение с абелевой фазовой группой будем называть* **абелевым**, *в противном случае –* **неабелевым**.

Далее нам понадобятся следующие частные случаи фазовых групп и соответствующих им накрывающих слоений.

Определение 13.1. *Фазовую группу $Ph(\mathfrak{F})$ накрывающего слоения $\mathfrak{F}$ будем называть* **линейной** *и обозначать $L(n)$, если $A = \mathbb{K}^n$, $\Phi^\gamma(a) = L^\gamma a$, $\forall\ a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, $L^\gamma \in GL(n, \mathbb{K})$, $\forall\ \gamma \in \pi_1(B)$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$. При этом абелеву линейную группу $L(n)$ будем обозначать $CL(n)$.*

Определение 14.1. *Накрывающее слоение с линейной фазовой группой $L(n)$ будем называть* **линейным** *и обозначать $\mathfrak{L}(n)$. Абелево линейное накрывающее слоение будем обозначать $C\mathfrak{L}(n)$.*

Определение 15.1. *Фазовую группу $Ph(\mathfrak{F})$ накрывающего слоения*

$\mathfrak{F}$ *будем называть* **дробно-линейной** *и обозначать* $PL(n)$, *если* $A = \mathbb{K}P^n$, $\Phi^\gamma(a) = R^\gamma a$, $\forall a = (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{K}P^n$, $R^\gamma \in GL(n+1, \mathbb{K})$, $\forall \gamma \in \pi_1(B)$. *Абелеву дробно-линейную группу* $PL(n)$ *будем обозначать* $CPL(n)$.

Определение 16.1. *Накрывающее слоение с дробно-линейной фазовой группой* $PL(n)$ *будем называть* **дробно-линейным** *и обозначать* $\mathfrak{PL}(n)$. *Абелево дробно-линейное накрывающее слоение будем обозначать* $C\mathfrak{PL}(n)$.

§ 2. Эквивалентности накрывающих слоений.

В дальнейшем при рассмотрении вопросов, связанных с топологическими (гладкими, $\mathbb{R}$–голоморфными, голоморфными) классификациями накрывающих слоений, будем полагать, что их фазовые слои гомеоморфны (диффеоморфны, $\mathbb{R}$–голоморфно эквивалентны, голоморфно эквивалентны) друг другу. Кроме того, под $\mathbb{R}$–голоморфизмом (голоморфизмом) будем понимать биективное $\mathbb{R}$–голоморфное (голоморфное) отображение, имеющее $\mathbb{R}$–голоморфным (голоморфным) и себе обратное.

Определение 1.2. *Будем говорить, что накрывающее слоение* $\mathfrak{F}^1$ *на многообразии* $A_1 \times B_1$ **топологически (гладко, $\mathbb{R}$–голоморфно, голоморфно) эквивалентно** *накрывающему слоению* $\mathfrak{F}^2$ *на многообразии* $A_2 \times B_2$, *если существует гомеоморфизм (диффеоморфизм,* $\mathbb{R}$*–голоморфизм, голоморфизм)* $h : A_1 \times B_1 \to A_2 \times B_2$, *такой, что* $q_2 \circ h(A_1 \times B_1) = A_2$, $h\Big(\mathfrak{F}^1_{c_1}\Big) = \mathfrak{F}^2_{h(c_1)}$, $\forall c_1 \in A_1 \times B_1$, *где проекция* $q_2 : A_2 \times B_2 \to A_2$.

Определение 2.2. *Будем говорить, что риманова метрика* d *на многообразии* $A \times B$ **индуцирует** *римановы метрики* d_1 *и* d_2 *на многообразиях* A *и* B, *соответственно, если имеют место неравенства* $d_1(q \circ c_1, q \circ c_2) \leqslant d(c_1, c_2)$, $d_2(p \circ c_1, p \circ c_2) \leqslant d(c_1, c_2)$, $d(c_1, c_2) \leqslant d_1(q \circ c_1, q \circ c_2) + d_2(p \circ c_1, p \circ c_2)$, $\forall c_1 \in A \times B$, $\forall c_2 \in A \times B$.

Определение 3.2. *Будем говорить, что накрывающее слоение* $\mathfrak{F}^1$ *на многообразии* $A \times B$ **сильно топологически (гладко, $\mathbb{R}$–голоморфно, голоморфно) эквивалентно** *накрывающему слоению* $\mathfrak{F}^2$ *на многообразии* $A \times B$, *если эти накрывающие слоения эквивалентны посредством гомеоморфизма (диффеоморфизма,* $\mathbb{R}$*–голоморфизма, голоморфизма)* $h : A \times B \to A \times B$ *и при этом* $d(c, h(c)) < \varepsilon$, $\forall c \in A \times B$, *где* d *есть риманова метрика на многообразии* $A \times B$, *индуцирующая римановы метрики* d_1 *и* d_2 *на многообразиях* A *и* B, *соответственно.*

Теорема 1.2 [26]. *Для топологической (гладкой,* $\mathbb{R}$*–голоморфной, голоморфной) эквивалентности накрывающих слоений* $\mathfrak{F}^1$ *и* $\mathfrak{F}^2$ *необходи-*

мо и достаточно существования изоморфизма μ фундаментальных групп $\pi_1(B_1)$ и $\pi_1(B_2)$, порожденного гомеоморфизмом (диффеоморфизмом, $\mathbb{R}$–голоморфизмом, голоморфизмом) $g_\mu : B_1 \to B_2$ баз, и гомеоморфизма (диффеоморфизма, $\mathbb{R}$–голоморфизма, голоморфизма) $f : A_1 \to A_2$ фазовых слоев, таких, что

$$f \circ \Phi_1^{\gamma_1} = \Phi_2^{\mu(\gamma_1)} \circ f,\ \forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1), \tag{1.2}$$

где $\Phi_\xi^{\gamma_\xi} \in Ph\Big(\mathfrak{F}^\xi\Big),\ \gamma_\xi \in \pi_1(B_\xi),\ \xi = \overline{1,2}.$

Доказательство. Сначала заметим, что для гладких ($\mathbb{R}$–голоморфных, голоморфных) многообразий, являющихся базами накрывающих слоений, определения фундаментальных групп и их действий на гладких ($\mathbb{R}$–голоморфных, голоморфных) фазовых слоях с помощью непрерывных и с помощью гладких ($\mathbb{R}$–голоморфных, голоморфных) путей эквивалентны.

Необходимость. Пусть отображение $h : A_1 \times B_1 \to A_2 \times B_2$ определяет топологическую (гладкую, $\mathbb{R}$–голоморфную, голоморфную) эквивалентность накрывающих слоений $\mathfrak{F}^1$ и $\mathfrak{F}^2$. Возьмем фиксированную точку a_1^0 на многообразии A_1 и отмеченную точку b_1^0 на многообразии B_1. Для произвольной точки a_1 многообразия A_1 обозначим через $s(\tau),\ \forall \tau \in [0,1]$, такой путь в $A_1 \times \{b_1^0\} \subset A_1 \times B_1$, соединяющий точки (a_1, b_1^0) и (a_1^0, b_1^0), что $s(0) = (a_1, b_1^0),\ s(1) = (a_1^0, b_1^0)$. Теперь положим $s_1(\tau) = p_2 \circ h \circ s(\tau),\ a_2 = q_2 \circ h(a_1, b_1^0),\ f(a_1) = q_2 \circ r_1(1)$, где p_2 есть проекция на второй сомножитель, $r_1(\tau)$ – поднятие пути $s_1(\tau),\ \forall \tau \in [0,1]$, на слой накрывающего слоения $\mathfrak{F}^2$ в точку $(a_2, s_1(0))$. Справедливость соотношений (1.2) проверяется непосредственно.

Достаточность. Пусть для действий фазовых групп $Ph(\mathfrak{F}^1)$ и $Ph(\mathfrak{F}^2)$ выполняются соотношения (1.2). Для пути $s_2 : [0,1] \to B_1$, такого, что $s_2(0) = b_1,\ s_2(1) = b_1^0$, положим

$$h(a_1, b_1) = (g_\mu s_4^{-1} \circ f \circ s_3(a_1),\ g_\mu(b_1)),\ \forall a_1 \in A_1,\ \forall b_1 \in B_1, \tag{2.2}$$

где $s_3(a_1) = q_1 \circ r_2(1),\ q_1$ – проекция на первый сомножитель, $r_2(\tau)$ – поднятие пути s_2 на слой слоения $\mathfrak{F}^1$ в точку $(a_1, b_1),\ g_\mu s_4^{-1}(a_2) = q_2 \circ g_\mu r_3^{-1}(1),\ g_\mu r_3^{-1}(\tau)$ есть результат поднятия пути $g_\mu \circ s_2^{-1}$ на слой слоения $\mathfrak{F}^2$ в соответствующую точку, s_2^{-1} – путь, обратный пути s_2. Теперь непосредственным образом приходим к выводу, что отображение (2.2) задает топологическую (гладкую, $\mathbb{R}$–голоморфную, голоморфную) эквивалентность накрывающих слоений $\mathfrak{F}^1$ и $\mathfrak{F}^2$.

Теорема 2.2. *Для сильной топологической (гладкой, $\mathbb{R}$–голоморфной, голоморфной) эквивалентности накрывающих слоений $\mathfrak{F}^1$ и $\mathfrak{F}^2$ необ-*

ходимо и достаточно существования автоморфизма μ *фундаментальной группы* $\pi_1(B)$, *порожденной гомеоморфизмом (диффеоморфизмом,* $\mathbb{R}$*–голоморфизмом, голоморфизмом)* $g_\mu : B \to B$ *базы, и гомеоморфизма (диффеоморфизма,* $\mathbb{R}$*–голоморфизма, голоморфизма)* $f : A \to A$ *фазового слоя, таких, что выполняются соотношения* $f \circ \Phi_1^\gamma = \Phi_2^{\mu(\gamma)} \circ f$, $\forall \gamma \in \pi_1(B)$, $\Phi_\xi^\gamma \in Ph\left(\mathfrak{F}^\xi\right)$, $\gamma \in \pi_1(B)$, $\xi = \overline{1,2}$, *и неравенства* $d_1(a, f(a)) < \varepsilon_1$, $\forall a \in A$, $d_2(b, g_\mu(b)) < \varepsilon_2$, $\forall b \in B$.

Доказательство данного утверждения проводится аналогично доказательству теоремы 2.2 и использует определение 2.2.

§ 3. Вложимости накрывающих слоений.

Определение 1.3. *Будем говорить, что накрывающее слоение* $\mathfrak{F}^1$ *на многообразии* $A_1 \times B_1$ **вложимо (гладко вложимо,** $\mathbb{R}$**–голоморфно вложимо, голоморфно вложимо)** *в накрывающее слоение* $\mathfrak{F}^2$ *на многообразии* $A_2 \times B_2$, *если существует такое вложение (гладкое вложение,* $\mathbb{R}$*–голоморфное вложение, голоморфное вложение)* $h : A_1 \times B_1 \hookrightarrow A_2 \times B_2$, *что* $q_2 \circ h(A_1 \times B_1) = A_2$ *и* $h\left(\mathfrak{F}^1_{c_1}\right) \hookrightarrow \mathfrak{F}^2_{h(c_1)}$, $\forall c_1 \in A_1 \times B_1$.

Теорема 1.3. *Для вложимости (гладкой вложимости,* $\mathbb{R}$*–голоморфной вложимости, голоморфной вложимости) накрывающего слоения* $\mathfrak{F}^1$ *в накрывающее слоение* $\mathfrak{F}^2$ *необходимо и достаточно существования гомоморфизма* μ *фундаментальной группы* $\pi_1(B_1)$ *в фундаментальную группу* $\pi_1(B_2)$, *порожденного вложением (гладким вложением,* $\mathbb{R}$*–голоморфым вложением, голоморфым вложением)* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$ *баз, и гомеоморфизма (диффеоморфизма,* $\mathbb{R}$*–голоморфизма, голоморфизма)* $f : A_1 \to A_2$ *фазовых слоев, таких, что выполняются соотношения* (1.2).

Доказательство данного утверждения аналогично доказательству теоремы 1.2.

Определение 2.3. *Будем говорить, что накрывающее слоение* $\mathfrak{F}^1$ *на многообразии* $A_1 \times B_1$ **слабо топологически (гладко,** $\mathbb{R}$**–голоморфно, голоморфно) эквивалентно** *накрывающему слоению* $\mathfrak{F}^2$ *на многообразии* $A_2 \times B_2$, *если они вложимы (гладко вложимы,* $\mathbb{R}$*–голоморфно вложимы, голоморфно вложимы) друг в друга.*

Теперь на основании теоремы 1.3 непосредственным образом получаем критерии слабой топологической (гладкой, $\mathbb{R}$–голоморфной, голоморфной) эквивалентности накрывающих слоений.

§ 4. Накрытия накрывающих слоений.

Определение 1.4. *Будем говорить, что накрывающее слоение* $\mathfrak{F}^1$ *на многообразии* $A_1 \times B_1$ **накрывает (гладко накрывает, $\mathbb{R}$–голоморфно накрывает, голоморфно накрывает)** *накрывающее слоение* $\mathfrak{F}^2$ *на многообразии* $A_2 \times B_2$, *если существует такое накрытие (гладкое накрытие, $\mathbb{R}$–голоморфное накрытие, голоморфное накрытие)* $h : A_1 \times B_1 \to A_2 \times B_2$, *что* $q_2 \circ h(A_1 \times B_1) = A_2$ *и* $h\Big(\mathfrak{F}^1_{c_1}\Big) \to \mathfrak{F}^2_{h(c_1)},\ \forall c_1 \in A_1 \times B_1$.

Аналогично теореме 1.2 получаем следующий критерий накрытия (гладкого накрытия, $\mathbb{R}$–голоморфного накрытия, голоморфного накрытия) накрывающих слоений.

Теорема 1.4. *Для того, чтобы накрывающее слоение* $\mathfrak{F}^1$ *накрывало (гладко накрывало, $\mathbb{R}$–голоморфно накрывало, голоморфно накрывало) накрывающее слоение* $\mathfrak{F}^2$, *необходимо и достаточно существования мономорфизма* μ *фундаментальной группы* $\pi_1(B_1)$ *в фундаментальную группу* $\pi_1(B_2)$, *порожденного накрытием (гладким накрытием, $\mathbb{R}$–голоморфым накрытием, голоморфым накрытием)* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$ *баз, и гомеоморфизма (диффеоморфизма, $\mathbb{R}$–голоморфизма, голоморфизма)* $f : A_1 \to A_2$ *фазовых слоев, таких, что выполняются соотношения* (1.2).

§ 5. Структурная устойчивость накрывающих слоений.

Определение 1.5. *Рассмотрим гладкое семейство накрывающих слоений* $\mathfrak{F}(\lambda)$, *такое, что* $\mathfrak{F}(\lambda^0) = \mathfrak{F}$, *где* $\lambda = (\lambda_1, \ldots,\ \lambda_l)$. *Накрывающее слоение* $\mathfrak{F}$ *будем называть* **структурно (сильно структурно) устойчивым**, *если при всех достаточно малых* δ *ему топологически (сильно топологически) эквивалентно любое накрывающее слоение* $\mathfrak{F}(\lambda)$, *удовлетворяющее условию* $||\lambda - \lambda^0|| < \delta$, *где* $||\lambda||$ *есть евклидова норма вектора* λ.

Теорема 1.5. *Комплексные неабелевы невырожденные накрывающие слоения структурно неустойчивы.*

Доказательство проводится на основании теоремы 1.2 с использованием следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 1.5. *Пусть при* $A = \mathbb{C}^n,\ n > 1$, *неабелевы фазовые группы с изолированной неподвижной точкой* $0 \in \mathbb{C}^n$, *порождены, соответственно, образующими голоморфизмами* $P_r w + \varphi_r(w),\ \ \forall w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, *и* $Q_r w + \psi_r(w),\ \forall w \in \mathbb{C}^n,\ \varphi_r(w) = o(||w||),\ \psi_r(w) = o(||w||),\ w \to 0,\ \forall r \in I$, *где* I *есть некоторое множество индексов, и, кроме того, топологически сопряжены. Тогда соответствующие им неабелевы линейные фазовые группы*

$L^1(n)$ *и* $L^2(n)$ *общего положения сопряжены посредством невырожденного* $\mathbb{R}$*–линейного* [27, с. 13] *преобразования.*

Доказательство данного утверждения проводится непосредственными вычислениями и использует ход доказательства леммы 2.2.2 (ее мы докажем позднее).

Следствие 1.5. *Если комплексное невырожденное накрывающее слоение структурно устойчиво, то оно абелево.*

Предположим теперь, что комплексное абелево невырожденное накрывающее слоение является структурно устойчивым. Тогда аналогично теореме 1.5 на основании теорем 1.1.2 и 2.1.2 получаем такое утверждение.

Теорема 2.5. *Если комплексное абелево невырожденное накрывающее слоение структурно устойчиво, то фундаментальная группа его базы имеет одну независимую образующую.*

Глава 2. Классификации комплексных линейных накрывающих слоений.

Теоремы 1.2.1, 2.2.1, 1.3.1 и 1.4.1 сводят задачи топологической, гладкой, $\mathbb{R}$–голоморфной и голоморфной классификаций накрывающих слоений к задачам аналогичных классификаций фазовых групп слоений при соответствующих этим классификациям морфизмах (изоморфизмах, автоморфизмах, гомоморфизмах и мономорфизмах). Поэтому рассматриваемые в данной главе вопросы будем исследовать на основании топологической, гладкой, $\mathbb{R}$–голоморфной и голоморфной классификаций линейных фазовых групп $L(n)$, что соответствует задачам о нахождении необходимых и достаточных условий существования такого гомеоморфизма (диффеоморфизма, $\mathbb{R}$–голоморфизма, голоморфизма) $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, что имеют место тождества

$$f(P_r w) = Q_r f(w),\ \forall w \in \mathbb{C}^n,\ \forall r \in I, \tag{1.0}$$

где $f(w) = (f_1(w), \ldots, f_n(w))$, квадратные матрицы $P_r \in GL(n, \mathbb{C})$, $Q_r \in GL(n, \mathbb{C})$, $\forall r \in I$, I есть некоторое множество индексов. При этом линейную фазовую группу, определяемую линейными действиями $P_r w$, $\forall w \in \mathbb{C}^n$, $\forall r \in I$, будем обозначать $L^1(n)$, а через $L^2(n)$ будем обозначать аналогичную фазовую группу, определяемую линейными действиями $Q_r w$, $\forall w \in \mathbb{C}^n$, $\forall r \in I$.

Определение 1.0. *Набор* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *ненулевых комплексных чисел будем называть* **простым**, *если* $\lambda_k/\lambda_l \neq s_{lk}^{\pm 1}$, $s_{lk} \in \mathbb{N}$, $l \neq k$, $k = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, n}$.

Определение 2.0. *Квадратную матрицу размера $n > 1$ будем называть* **простой**, *если она имеет простую структуру и простой набор собственных значений.*

Определение 3.0. *Квадратную матрицу размера $n > 1$ будем называть* **нерезонансной**, *если она имеет простую структуру и никакие два собственные значения этой матрицы не отличаются на натуральное число. В противном случае данную матрицу будем называть* **резонансной**.

§ 1. Топологическая сопряженность абелевых линейных фазовых групп.

В этом случае заметим, что если все матрицы P_r (все матрицы Q_r) имеют простую структуру, $\forall r \in I$, то они приводятся к диагональному виду общим преобразованием подобия [28, с. 194].

Теорема 1.1 [22, 23]. *Для топологической сопряженности* (1.0) *линейных фазовых групп $L^1(1)$ и $L^2(1)$ необходимо и достаточно, чтобы либо*

$$q_{1r} = p_{1r}|p_{1r}|^{\alpha},\ Re\ \alpha > -1,\ \forall\ r \in I, \tag{1.1}$$

либо

$$q_{1r} = \overline{p}_{1r}|p_{1r}|^{\alpha},\ Re\ \alpha > -1,\ \forall\ r \in I, \tag{2.1}$$

где $P_r = p_{1r},\ Q_r = q_{1r},\ \forall\ r \in I.$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что сопрягающий гомеоморфизм f сохраняет ориентацию (случай, когда гомеоморфизм f меняет ориентацию, рассматривается аналогично).

Так как вращения комплексной плоскости вокруг начала координат на углы φ и ψ, где $-\pi < \varphi \leqslant \pi,\ -\pi < \psi \leqslant \pi$, топологически сопряжены, если и только если $\varphi = \psi$, то для всех $r \in I$ с условием, что $|p_{1r}| = 1$, имеем $q_{1r} = p_{1r}$, и, стало быть, соотношение (1.0) выполняется при любом α.

Если $|p_{1r_1}| \neq 1$ и $|p_{1r_2}| \neq 1$ для некоторых r_1 и r_2 из I, то

$$sgn\ ln\ |p_{1r_1}| = sgn\ ln\ |p_{1r_2}|. \tag{3.1}$$

Нетрудно видеть, что существуют такие последовательности $\{l_s\}$ и $\{m_s\}$ целых чисел, что

$$\lim_{s\to+\infty} p_{1r_1}^{l_s} p_{1r_2}^{m_s} = 1, \tag{4.1}$$

и при этом $\lim\limits_{s\to+\infty} |l_s| = \lim\limits_{s\to+\infty} |m_s| = +\infty.$

Из тождеств (1.0) вытекает, что $f(p_{1r_1}^{l_s}p_{1r_2}^{m_s}w) = q_{1r_1}^{l_s}q_{1r_2}^{m_s}f(w),\ \forall w \in \mathbb{C},\ \forall s \in \mathbb{N}$. Отсюда с учетом (4.1) имеем, что

$$\lim_{s\to+\infty} q_{1r_1}^{l_s}q_{1r_2}^{m_s} = 1. \tag{5.1}$$

Поэтому из (4.1) и (5.1) для некоторых значений логарифмов получаем соотношения

$$ln\ |p_{1r_1}|/ln\ |p_{1r_2}| = -\lim_{s\to+\infty}(m_s/l_s) \tag{6.1}$$

и

$$l_s ln\ p_{1r_1} + n_s ln\ p_{1r_2} = l_s ln\ q_{1r_1} + n_s ln\ q_{1r_2}. \tag{7.1}$$

Разделим левую и правую части равенства (7.1) на l_s и перейдем к пределу при $s \to +\infty$. Тогда с учетом (6.1) получим, что

$$(ln\ q_{1r_1} - ln\ p_{1r_1})/ln\ |p_{1r_1}| = (ln\ q_{1r_2} - ln\ p_{1r_2})/ln\ |p_{1r_2}|. \tag{8.1}$$

Теперь, полагая, что $\alpha_{r_1} = (ln\ q_{1r_1} - ln\ p_{1r_1})/ln\ |p_{1r_1}|$, получаем равенство (1.1), где $\alpha = \alpha_{r_1}$. Кроме того, из (8.1) следует, что $\alpha_{r_1} = \alpha_{r_2} = \alpha$ для всех r_1 и r_2 из I с учетом того, что $|p_{1r_1}| \neq 1$ и $|q_{1r_1}| \neq 1$. И, наконец, неравенство $Re\ \alpha > -1$ вытекает из равенств $Re\ \alpha = Re\ \alpha_{r_1} = ln\ |q_{1r_1}|/ln\ |p_{1r_1}| - 1$ и (3.1).

Достаточность доказывается путем построения сопрягающих гомеоморфизмов $f(w) = \gamma w|w|^{\alpha},\ \forall w \in \mathbb{C}$, при выполнении соотношений (1.1); и $f(w) = \gamma\overline{w}|w|^{\alpha},\ \forall w \in \mathbb{C}$, при выполнении соотношений (2.1).

Теорема 2.1. *Пусть при* $n > 1$ *матрицы* $P_r = S\ diag\{p_{1r},\ \ldots, p_{nr}\}\ S^{-1},\ Q_r = T\ diag\{q_{1r}, \ldots, q_{nr}\}\ T^{-1}$, *а матрицы* $ln\ P_r$ *и* $ln\ Q_r$ *являются простыми,* $\forall\ r \in I$. *Тогда для топологической сопряженности* (1.0) *линейных фазовых групп* $CL^1(n)$ *и* $CL^2(n)$ *необходимо и достаточно существования таких перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n) \to (1, \ldots, n)$ *и комплексных чисел* α_k *с* $Re\ \alpha_k > -1,\ k = \overline{1, n}$, *что либо*

$$q_{\varrho(k)r} = p_{kr}|p_{kr}|^{\alpha_k},\ \forall\ r \in I, \tag{9.1}$$

либо

$$q_{\varrho(k)r} = \overline{p}_{kr}|p_{kr}|^{\alpha_k},\ \forall\ r \in I, \tag{10.1}$$

$k = \overline{1, n}$.

Доказательство. С помощью замены $\xi(w) = T^{-1}f(Sw),\ \forall w \in \mathbb{C}^n$, от тождеств (1.0) переходим к тождествам

$$\xi(diag\{p_{1r}, \ldots, p_{nr}\}w) = diag\{q_{1r}, \ldots, q_{nr}\}\xi(w),\ \forall w \in \mathbb{C}^n,\ \forall\ r \in I. \tag{11.1}$$

Поэтому топологическая сопряженность линейных групп $CL^1(n)$ и $CL^2(n)$ равносильна выполнению тождеств (11.1).

Необходимость. Пусть выполняются тождества (11.1). Голоморфизм $u_r(w) = P_r w,\ \forall\ w \in \mathbb{C}^n$ (голоморфизм $v_r(w) = Q_r w,\ \forall w \in \mathbb{C}^n$), определяет на пространстве $\mathbb{C}^n$ инвариантное голоморфное слоение $\mathfrak{U}_r$ (инвариантное голоморфное слоение $\mathfrak{V}_r$) комплексной размерности 1, определяемое базисом абсолютных инвариантов [29, с. 23] $w_k^{-ln\ p_{nr}} w_n^{ln\ p_{kr}},\ k = \overline{1, n-1}$ (базисом абсолютных инвариантов $w_k^{-ln\ q_{nr}} w_n^{ln\ q_{kr}},\ k = \overline{1, n-1}$), $\forall\ r \in I$. Обозначим через $\mathbb{C}_k$ координатную комплексную плоскость $w_l = 0,\ l \neq k,\ l = \overline{1,n}$, а через $\overset{o}{\mathbb{C}}_k$ – координатную комплексную плоскость $\mathbb{C}_k$ с выколотым началом координат, $k = \overline{1,n}$. Так как матрицы $ln\ P_r$ (матрицы $ln\ Q_r$) являются простыми, $\forall\ r \in I$, то при: 1) $ln\ p_{kr}/ln\ p_{nr} \notin \mathbb{R}$ ($ln\ q_{kr}/ln\ q_{nr} \notin \mathbb{R}$), замыкание каждой из гиперповерхностей $w_k^{-ln\ p_{nr}} w_n^{ln\ p_{kr}} = C_k$ (гиперповерхностей $w_k^{-ln\ q_{nr}} w_n^{ln\ q_{kr}} = C_k$) при $C_k \neq 0$ содержит гиперплоскость $w_k = 0$; 2) $ln\ p_{kr}/ln\ p_{nr} \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ($ln\ q_{kr}/ln\ q_{nr} \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$), замыкание каждой из гиперповерхностей $w_k^{-ln\ p_{nr}} w_n^{ln\ p_{kr}} = C_k$ (гиперповерхностей $w_k^{-ln\ q_{nr}} w_n^{ln\ q_{kr}} = C_k$) при $C_k \neq 0$ содержит точки, не принадлежащие этой гиперповерхности; 3) $ln\ p_{kr}/ln\ p_{nr} \in \mathbb{Q}$, $ln\ p_{kr}/ln\ p_{nr} \neq s_{kr}^{\pm 1}$, $s_{kr} \in \mathbb{N}$ ($ln\ q_{kr}/ln\ q_{nr} \in \mathbb{Q}$, $ln\ q_{kr}/ln\ q_{nr} \neq s_{kr}^{\pm 1}$, $s_{kr} \in \mathbb{N}$), замыкание каждой из гиперповерхностей $w_k^{-ln\ p_{nr}} w_n^{ln\ p_{kr}} = C_k$ (гиперповерхностей $w_k^{-ln\ q_{nr}} w_n^{ln\ q_{kr}} = C_k$) при $C_k \neq 0$ не содержит неподвижную точку $0 \in \mathbb{C}^n$ голоморфизмов $v_r(w),\ \forall w \in \mathbb{C}^n$, и $v_r(w),\ \forall w \in \mathbb{C}^n,\ k = \overline{1, n-1},\ \forall\ r \in I$. Поэтому сопрягающий гомеоморфизм $\xi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ переводит слой $\mathfrak{u}_k = \overset{o}{\mathbb{C}}_k$ слоения $\mathfrak{U}_r$ в слой $\mathfrak{v}_{\rho(k)} = \overset{o}{\mathbb{C}}_{\rho(k)}$ слоения $\mathfrak{V}_r,\ k = \overline{1,n},\ \forall\ r \in I$. Кроме того, из тождеств (11.1) следует, что начало координат пространства $\mathbb{C}^n$ является неподвижной точкой гомеоморфизма ξ. Тогда у этого гомеоморфизма проекции $\xi_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ таковы, что их сужения $\tilde{\xi}_k : \mathbb{C}_k \to \mathbb{C}_{\rho(k)}$ являются гомеоморфизмами и $\tilde{\xi}_{\rho(k)}(p_{kr}\tilde{w}_k) = q_{\rho(k)r}\tilde{\xi}_{\rho(k)}(\tilde{w}_k),\ \forall\ \tilde{w}_k = (0, \ldots, 0, w_k, 0, \ldots, 0),\ k = \overline{1,n},\ \forall\ r \in I$. Отсюда на основании теоремы 1.1 приходим к выводу, что существуют такие комплексные числа α_k с $Re\ \alpha_k > -1$, что выполняется одно из соотношений (9.1) или (10.1), $k = \overline{1,n}$.

Достаточность доказывается путем построения сопрягающего гомеоморфизма $\xi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, такого, что его проекции $\xi_{\rho(k)}(w) = \gamma_k w_k |w_k|^{\alpha_k},\ \forall w \in \mathbb{C}^n$, если имеют место соотношения (9.1); и $\xi_{\rho(k)}(w) = \gamma_k \overline{w}_k |w_k|^{\alpha_k},\ \forall w \in \mathbb{C}^n$, если имеют место соотношения (10.1); $k = \overline{1,n}$.

§ 2. Топологическая сопряженность неабелевых линейных фазовых групп.

В этом параграфе будем рассматривать неабелевые линейные фазовые группы $L^1(n)$ и $L^2(n)$.

Теорема 1.2 [30]. *Из топологической сопряженности неабелевых линейных фазовых групп $L^1(n)$ и $L^2(n)$ общего положения следует их $\mathbb{R}$–голоморфная сопряженность.*

Доказательство теоремы 1.2 непосредственно вытекает из следующих двух вспомогательных утверждений (лемм 1.2 и 2.2).

Лемма 1.2. *Пусть при $I = \{1,2\}$ линейные фазовые группы $L^1(1)$ и $L^2(1)$ топологически сопряжены, а подгруппа группы $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел по умножению, образованая числами p_{11} и p_{12}, плотна в множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Тогда сопрягающий гомеоморфизм f задается либо формулой $f(w) = \gamma w|w|^\alpha$, $\forall w \in \mathbb{C}$, либо формулой $f(w) = \gamma\overline{w}|w|^\alpha$, $\forall w \in \mathbb{C}$, где $Re\,\alpha > -1$.*

Доказательство. Пусть сопрягающий гомеоморфизм f сохраняет ориентацию (случай, когда он меняет ориентацию, рассматривается аналогично). В силу теоремы 1.1 имеют место соотношения $q_{1r} = p_{1r}|p_{1r}|^\alpha$, $r = \overline{1,2}$, $Re\,\alpha > -1$. На основании тождеств (1.0) приходим к выводу о справедливости равенств $f(p_{11}^l p_{12}^m) = f(1)p_{11}^l p_{12}^m|p_{11}^l p_{12}^m|^\alpha$, $\forall l \in \mathbb{Z}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. В силу плотности нашей подгруппы группы $\mathbb{C}^*$ в множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел имеем, что для всякого комплексного числа $w \in \mathbb{C}$ существуют такие последовательности $\{l_s(w)\}$ и $\{m_s(w)\}$ целых чисел, что $\lim\limits_{s\to+\infty} p_{11}^{l_s(w)}p_{12}^{m_s(w)} = w$, $\lim\limits_{s\to+\infty}|l_s(w)| = \lim\limits_{s\to+\infty}|m_s(w)| = +\infty$. Отсюда получаем первое представление утверждения леммы, где $\gamma = f(1)$.

Лемма 2.2. *Пусть матрицы $P_r = S_r\ diag\{p_{1r}, \ldots, p_{nr}\}\ S_r^{-1}$, $Q_r = T_r\ diag\{q_{1r},\ \ldots, q_{nr}\}\ T_r^{-1}$, а матрицы $ln\ P_r$ и $ln\ Q_r$ являются простыми, $\forall\ r \in I$. Тогда из топологической сопряженности неабелевых линейных фазовых групп $L^1(n)$ и $L^2(n)$ общего положения следует их $\mathbb{R}$–линейная сопряженность (т.е. гомеоморфизм $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ в тождествах (1.0) является невырожденным $\mathbb{R}$–линейным отображением).*

Доказательство. Пусть имеют место тождества (1.0). С помощью замены $\xi(w) = T_1^{-1}f(S_1 w)$, $\forall w \in \mathbb{C}^n$, от них переходим к тождествам

$$\xi(diag\{p_{11}, \ldots, p_{n1}\}w) = diag\{q_{11}, \ldots, q_{n1}\}\xi(w),\ \forall w \in \mathbb{C}^n. \qquad (1.2)$$

Теперь аналогичным образом, как и при доказательстве теоремы 1.1, приходим к выводу, что начало координат пространства $\mathbb{C}^n$ является неподвижной точкой гомеоморфизма ξ, а его проекции $\xi_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ таковы, что имеют место соотношения $\xi_{\rho(k)}(0,\dots,0,p_{k1}w_k,0,\dots,0) = q_{\rho(k)1}\xi_{\rho(k)}(0,\dots,0,w_k,0,\dots,0)$, $\xi_l(0,\dots,0,w_k,0,\dots,0) = 0$, $\forall w_k \in \mathbb{C}$, $l \neq \rho(k)$, $l = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n}$; где $\rho : (1,\dots,n) \to (1,\dots,n)$ есть некоторая перестановка. Отсюда в случае общего положения на основании соотношений (1.0), теоремы 2.1 и леммы 1.2 приходим к выводу о справедливости тождеств $\xi_{\rho(k)}(0,\dots,0,w_k,0,\dots,0) = \gamma_k w_k^* |w_k|^{\alpha_k}$, $\forall w_k \in \mathbb{C}$, $Re\ \alpha_k > -1$, $k = \overline{1,n}$, где $w_k^* = w_k \vee \overline{w}_k$, $k = \overline{1,n}$. От этих тождеств далее приходим к соотношениям

$$\begin{gathered}\xi_{\rho(k)}(w) = \gamma_k w_k^* |w_k|^{\alpha_k}(1 + \varphi_{\rho(k)}(w)),\ \forall w \in \mathbb{C}^n,\\ Re\ \alpha_k > -1,\ \varphi_{\rho(k)}(0,\dots,0,w_k,0,\dots,0) = 0,\\ \forall w_k \in \mathbb{C}/\{0\},\ k = \overline{1,n}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Теперь на основании тождеств (1.2) имеем, что $\varphi_k(diag\{p_{11},\ \dots,p_{n1}\}w) = \varphi_k(w)$, $\forall w \in \mathbb{C}^n$, $k = \overline{1,n}$. Учитывая соотношения (2.2) и базис абсолютных инвариантов слоения $\mathfrak{U}_1$ из доказательства теоремы 2.1, получаем представления

$$\begin{gathered}\xi_{\rho(k)}(w) = \gamma_k w_k^* |w_k|^{\alpha_k}(1 + \psi_{\rho(k)}(w_1 w_k^{-lnp_{11}/lnp_{k1}},\dots,\\ w_{k-1} w_k^{-lnp_{k-1,1}/lnp_{k1}}, w_{k+1} w_k^{-lnp_{k+1,1}/lnp_{k1}},\dots,\\ w_n w_k^{-lnp_{n1}/lnp_{k1}})),\ \forall w \in \mathbb{C}^n,\ k = \overline{1,n},\end{gathered} \tag{3.2}$$

где функции $\psi_{\rho(k)}$ непрерывны по своим аргументам, $k = \overline{1,n}$. Принимая во внимание некоммутативность линейных групп и тождества (1.2), на основании соотношений (2.2) и (3.2) с учетом простоты наборов чисел из условия леммы приходим к ее утверждению.

§ 3. Сильная топологическая сопряженность линейных фазовых групп.

Рассмотрим сильную топологическую сопряженность линейных фазовых групп $L^1(n)$ и $L^2(n)$.

Теорема 1.3. *Отличные друг от друга линейные фазовые группы $L^1(n)$ и $L^2(n)$ не могут быть сильно топологически сопряжены.*

Доказательство данного утверждения будем проводить методом "от противного". В самом деле, пусть отличные друг от друга линейные фазовые группы $L^1(n)$ и $L^2(n)$ сильно топологически сопряжены посредством гомеоморфизма $Iw + \varphi(w)$, $\forall w \in \mathbb{C}^n$, где I есть единичная матрица. Так как линейные фазовые группы $L^1(n)$ и $L^2(n)$ отличны друг от друга, то существуют такие различные между собой матрицы $P \in GL(n,\mathbb{C})$ и $Q \in GL(n,\mathbb{C})$, что имеют место соотношения $(P-Q)w = Q\varphi(w) - \varphi(Pw)$, $||\varphi(w)|| < \varepsilon$, $\forall w \in \mathbb{C}^n$. Вычисляя евклидову норму от обеих частей последнего равенства, при $||w|| \to +\infty$ приходим к противоречию.

§ 4. Гладкая, $\mathbb{R}$–голоморфная и голоморфная сопряженности линейных фазовых групп.

Рассмотрим случаи гладкой, $\mathbb{R}$–голоморфной и голоморфной сопряженностей линейных фазовых групп $L^1(n)$ и $L^2(n)$.

Теорема 1.4 [30]. *Линейные фазовые группы $L^1(n)$ и $L^2(n)$ гладко ($\mathbb{R}$–голоморфно) сопряжены тогда и только тогда, когда они $\mathbb{R}$–линейно сопряжены.*

Доказательство. Необходимость. Пусть линейные фазовые группы $L^1(n)$ и $L^2(n)$ гладко ($\mathbb{R}$–голоморфно) сопряжены. Тогда имеют место тождества (1.0) при диффеоморфизме ($\mathbb{R}$–голоморфизме) f. Вычисляя в них полный дифференциал в точке $w = 0$, имеем, что $D_w f(0) P_r dw + D_{\overline{w}} f(0) \overline{P}_r d\overline{w} = Q_r D_w f(0) dw + Q_r D_{\overline{w}} f(0) d\overline{w}$, $\forall\ r \in I$. Поэтому $\mathbb{R}$–линейное отображение $D_w f(0) w +\ D_{\overline{w}} f(0) \overline{w}$, $\forall w \in \mathbb{C}^n$, определяет сопряженность (1.0). Так как отображение f есть диффеоморфизм ($\mathbb{R}$–голоморфизм), то оно невырождено.

Достаточность проверяется непосредственными вычислениями.

Теорема 2.4. *Линейные фазовые группы $L^1(n)$ и $L^2(n)$ голоморфно сопряжены тогда и только тогда, когда они линейно сопряжены.*

Доказательство. Необходимость. Пусть линейные фазовые группы $L^1(n)$ и $L^2(n)$ голоморфно сопряжены. Тогда имеют место тождества (1.0) при голоморфизме f. Вычисляя в них комплексный дифференциал в точке $w = 0$, имеем, что $D_w f(0) P_r dw = Q_r D_w f(0) dw$, $\forall\ r \in I$. Поэтому линейное отображение $D_w f(0) w$, $\forall w \in \mathbb{C}^n$, определяет сопряженность (1.0). Так как отображение f есть голоморфизм, то оно невырождено.

Достаточность проверяется непосредственными вычислениями.

§ 5. Эквивалентности линейных накрывающих слоений.

Рассмотрим линейные накрывающие слоения $\mathfrak{L}^1(n)$ и $\mathfrak{L}^2(n)$ с соответствующими им линейными фазовыми группами $L^1(n)$ и $L^2(n)$, определяемыми линейными действиями $P_{\gamma_1} w$, $\forall\ w \in \mathbb{C}^n$, $P_{\gamma_1} \in GL(n,\mathbb{C})$, $\forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, и

$Q_{\gamma_2}w$, $\forall w \in \mathbb{C}^n$, $Q_{\gamma_2} \in GL(n, \mathbb{C})$, $\forall \gamma_2 \in \pi_1(B_2)$, соответственно. На основании теорем 1.2.1, 1.1, 2.1, 1.4, 2.4, лемм 1.2 и 2.2 получаем следующие критерии топологической, гладкой, $\mathbb{R}$–голоморфной и голоморфной эквивалентностей линейных накрывающих слоений.

Теорема 1.5. *Для топологической эквивалентности линейных накрывающих слоений $\mathfrak{L}^1(1)$ и $\mathfrak{L}^2(1)$ необходимо и достаточно существования такого изоморфизма $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденного гомеоморфизмом $g_\mu : B_1 \to B_2$, что либо $q_{1\mu(\gamma_1)} = p_{1\gamma_1}|p_{1\gamma_1}|^\alpha$, $Re\ \alpha > -1$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, либо $q_{1\mu(\gamma_1)} = \overline{p}_{1\gamma_1}|p_{1\gamma_1}|^\alpha$, $Re\ \alpha > -1$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, где $P_{\gamma_1} = p_{1\gamma_1}$, $\forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $Q_{\gamma_2} = q_{1\gamma_2}$, $\forall \gamma_2 \in \pi_1(B_2)$.*

Теорема 2.5. *Пусть при $n > 1$ матрицы $P_{\gamma_1} = S\ diag\{p_{1\gamma_1},\ \ldots, p_{n\gamma_1}\}\ S^{-1}$, $Q_{\gamma_2} = T\ diag\{q_{1\gamma_2}, \ldots, q_{n\gamma_2}\}\ T^{-1}$, а матрицы $ln\ P_{\gamma_1}$ и $ln\ Q_{\gamma_2}$ являются простыми, $\forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $\forall \gamma_2 \in \pi_1(B_2)$. Тогда для топологической эквивалентности абелевых линейных накрывающих слоений $C\mathfrak{L}^1(n)$ и $C\mathfrak{L}^2(n)$ необходимо и достаточно существования таких изоморфизма $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденного гомеоморфизмом $g_\mu : B_1 \to B_2$, перестановки $\varrho : (1, \ldots, n) \to (1, \ldots, n)$ и комплексных чисел α_k с $Re\ \alpha_k > -1$, $k = \overline{1, n}$, что либо $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)} = p_{k\gamma_1}|p_{k\gamma_1}|^{\alpha_k}$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, либо $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)} = \overline{p}_{k\gamma_1}|p_{k\gamma_1}|^{\alpha_k}$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$; $k = \overline{1, n}$.*

Теорема 3.5. *Пусть при $n > 1$ матрицы $P_{\gamma_1} = S_{\gamma_1}\ diag\ \{p_{1\gamma_1}, \ldots, p_{n\gamma_1}\}\ S_{\gamma_1}^{-1}$, $Q_{\gamma_2} = T_{\gamma_2}\ diag\{q_{1\gamma_2}, \ldots, q_{n\gamma_2}\}\ T_{\gamma_2}^{-1}$, а матрицы $ln\ P_{\gamma_1}$ и $ln\ Q_{\gamma_2}$ являются простыми, $\forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $\forall \gamma_2 \in \pi_1(B_2)$. Тогда из топологической эквивалентности неабелевых линейных накрывающих слоений $\mathfrak{L}^1(n)$ и $\mathfrak{L}^2(n)$ с соответствующими им неабелевыми линейными фазовыми группами $L^1(n)$ и $L^2(n)$ общего положения следует $\mathbb{R}$–линейная сопряженность данных фазовых групп при некотором изоморфизме $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденном гомеоморфизмом $g_\mu : B_1 \to B_2$.*

Следствие 1.5. *Из топологической эквивалентности неабелевых линейных накрывающих слоений $\mathfrak{L}^1(n)$ и $\mathfrak{L}^2(n)$ общего положения следует их $\mathbb{R}$–голоморфная эквивалентность.*

Теорема 4.5. *Линейные накрывающие слоения $\mathfrak{L}^1(n)$ и $\mathfrak{L}^2(n)$ с соответствующими им линейными фазовыми группами $L^1(n)$ и $L^2(n)$ гладко ($\mathbb{R}$–голоморфно) эквивалентны тогда и только тогда, когда их фазовые группы $\mathbb{R}$–линейно сопряжены при некотором изоморфизме $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденном диффеоморфизмом ($\mathbb{R}$–голоморфизмом) $g_\mu : B_1 \to B_2$.*

Теорема 5.5. *Линейные накрывающие слоения $\mathfrak{L}^1(n)$ и $\mathfrak{L}^2(n)$ с соответ-*

ствующими им линейными фазовыми группами $L^1(n)$ и $L^2(n)$ голоморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда их фазовые группы линейно сопряжены при некотором изоморфизме $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденном голоморфизмом $g_\mu : B_1 \to B_2$.

И, наконец, на основании теорем 2.2.1 и 1.3 приходим к следующему утверждению.

Теорема 6.5. *Пусть линейные накрывающие слоения $\mathfrak{L}^1(n)$ и $\mathfrak{L}^2(n)$ с соответствующими им линейными фазовыми группами $L^1(n)$ и $L^2(n)$ таковы, что линейные действия данных фазовых групп, взятые в совокупности, различны при любом автоморфизме $\mu : \pi_1(B) \to \pi_1(B)$, порожденном гомеоморфизмом $g_\mu : B \to B$. Тогда данные линейные накрывающие слоения не могут быть сильно топологически эквивалентными.*

Данная теорема показывает, что топологическая эквивалентность различных линейных накрывающих слоений не может осуществляться гомеоморфизмом, достаточно близким к тождественному.

§ 6. Вложимости линейных накрывающих слоений.

Рассмотрим линейные накрывающие слоения $\mathfrak{L}^1(n)$ и $\mathfrak{L}^2(n)$ с соответствующими им линейными фазовыми группами $L^1(n)$ и $L^2(n)$. На основании теорем 1.3.1, 1.1, 2.1, 1.4, 2.4, лемм 1.2 и 2.2 получаем следующие критерии вложимостей линейных накрывающих слоений.

Теорема 1.6. *Для вложимости линейного накрывающего слоения $\mathfrak{L}^1(1)$ в линейное накрывающее слоение $\mathfrak{L}^2(1)$ необходимо и достаточно существования такого гомоморфизма $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденного вложением $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, что либо $q_{1\mu(\gamma_1)} = p_{1\gamma_1}|p_{1\gamma_1}|^\alpha,\ Re\ \alpha > -1,\ \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, либо $q_{1\mu(\gamma_1)} = \overline{p}_{1\gamma_1}|p_{1\gamma_1}|^\alpha,\ Re\ \alpha > -1,\ \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$.*

Теорема 2.6. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.5. *Тогда для вложимости абелевого линейного накрывающего слоения $C\mathfrak{L}^1(n)$ в абелево линейное накрывающее слоение $C\mathfrak{L}^2(n)$ необходимо и достаточно существования таких гомоморфизма $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденного вложением $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, перестановки $\varrho : (1, \ldots, n) \to (1, \ldots, n)$ и комплексных чисел α_k с $Re\ \alpha_k > -1,\ k = \overline{1, n}$, что либо $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)} = p_{k\gamma_1}|p_{k\gamma_1}|^{\alpha_k},\ \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, либо $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)} = \overline{p}_{k\gamma_1}|p_{k\gamma_1}|^{\alpha_k},\ \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1);\ k = \overline{1, n}$.*

Теорема 3.6. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.5. *Тогда из вложимости неабелевого линейного накрывающего слоения $\mathfrak{L}^1(n)$ в неабелевое линейное накрывающее слоение $\mathfrak{L}^2(n)$ с соответствующими им неабелевы-*

ми линейными фазовыми группами $L^1(n)$ и $L^2(n)$ общего положения следует $\mathbb{R}$–линейная сопряженность данных фазовых групп при некотором гомоморфизме $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденном вложением $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$.

Следствие 1.6. *Из вложимости неабелевого линейного накрывающего слоения общего положения $\mathfrak{L}^1(n)$ в неабелевое линейное накрывающее слоение $\mathfrak{L}^2(n)$ общего положения следует их $\mathbb{R}$–голоморфная вложимость.*

Теорема 4.6. *Линейное накрывающее слоение $\mathfrak{L}^1(n)$ гладко ($\mathbb{R}$–голоморфно) вложимо в линейное накрывающее слоение $\mathfrak{L}^2(n)$ с соответствующими им линейными фазовыми группами $L^1(n)$ и $L^2(n)$ тогда и только тогда, когда их фазовые группы $\mathbb{R}$–линейно сопряжены при некотором гомоморфизме $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденном гладким ($\mathbb{R}$–голоморфным) вложением $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$.*

Теорема 5.6. *Линейное накрывающее слоение $\mathfrak{L}^1(n)$ голоморфно вложимо в линейное накрывающее слоение $\mathfrak{L}^2(n)$ с соответствующими им линейными фазовыми группами $L^1(n)$ и $L^2(n)$ тогда и только тогда, когда их фазовые группы линейно сопряжены при некотором гомоморфизме $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденном голоморфным вложением $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$.*

Теперь на основании теорем 1.6 – 5.6 получаем критерии слабой топологической (гладкой, $\mathbb{R}$–голоморфной, голоморфной) эквивалентности линейных накрывающих слоений.

§ 7. Накрытия линейных накрывающих слоений.

Рассмотрим линейные накрывающие слоения $\mathfrak{L}^1(n)$ и $\mathfrak{L}^2(n)$ с соответствующими им линейными фазовыми группами $L^1(n)$ и $L^2(n)$. На основании теорем 1.4.1, 1.1, 2.1, 1.4, 2.4, лемм 1.2 и 2.2 получаем следующие критерии накрытий линейных накрывающих слоений.

Теорема 1.7. *Для накрытия линейного накрывающего слоения $\mathfrak{L}^2(1)$ линейным накрывающим слоением $\mathfrak{L}^1(1)$ необходимо и достаточно существования такого мономорфизма $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденного накрытием $g_\mu : B_1 \to B_2$, что либо $q_{1\mu(\gamma_1)} = p_{1\gamma_1}|p_{1\gamma_1}|^\alpha,\ Re\ \alpha > -1,\ \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, либо $q_{1\mu(\gamma_1)} = \overline{p}_{1\gamma_1}|p_{1\gamma_1}|^\alpha,\ Re\ \alpha > -1,\ \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$.*

Теорема 2.7. *Пусть выполняются условия теоремы 2.5. Тогда для накрытия абелевого линейного накрывающего слоения $C\mathfrak{L}^2(n)$ абелевым линейным накрывающим слоением $C\mathfrak{L}^1(n)$ необходимо и достаточно существования таких мономорфизма $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденного накрытием $g_\mu : B_1 \to B_2$, перестановки $\varrho : (1, \ldots, n) \to (1, \ldots, n)$ и комплексных чисел*

α_k *с* $Re\ \alpha_k > -1,\ k = \overline{1,n}$, *что либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)} = p_{k\gamma_1}|p_{k\gamma_1}|^{\alpha_k},\ \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, *либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)} = \overline{p}_{k\gamma_1}|p_{k\gamma_1}|^{\alpha_k},\ \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1);\ k = \overline{1,n}$.

Теорема 3.7. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.5. *Тогда из накрытия неабелевого линейного накрывающего слоения* $\mathfrak{L}^2(n)$ *неабелевым линейным накрывающим слоением* $\mathfrak{L}^1(n)$ *с соответствующими им неабелевыми линейными фазовыми группами* $L^2(n)$ *и* $L^1(n)$ *общего положения следует* $\mathbb{R}$*–линейная сопряженность данных фазовых групп при некотором мономорфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном накрытием* $g_\mu : B_1 \to B_2$.

Следствие 1.7. *Накрытие неабелевого линейного накрывающего слоения общего положения* $\mathfrak{L}^2(n)$ *неабелевым линейным накрывающим слоением* $\mathfrak{L}^1(n)$ *общего положения является* $\mathbb{R}$*–голоморфным.*

Теорема 4.7. *Линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{L}^1(n)$ *гладко (*$\mathbb{R}$*–голоморфно) накрывает линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{L}^2(n)$ *с соответствующими им линейными фазовыми группами* $L^1(n)$ *и* $L^2(n)$ *тогда и только тогда, когда их фазовые группы* $\mathbb{R}$*–линейно сопряжены при некотором мономорфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном гладким (*$\mathbb{R}$*–голоморфным) накрытием* $g_\mu : B_1 \to B_2$.

Теорема 5.7. *Линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{L}^1(n)$ *голоморфно накрывает линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{L}^2(n)$ *с соответствующими им линейными фазовыми группами* $L^1(n)$ *и* $L^2(n)$ *тогда и только тогда, когда их фазовые группы линейно сопряжены при некотором мономорфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном голоморфным накрытием* $g_\mu : B_1 \to B_2$.

§ 8. Структурная устойчивость линейных накрывающих слоений.

Рассмотрим линейное накрывающее слоение $\mathfrak{L}^1(n)$ с соответствующей ему линейной фазовой группой $L^1(n)$.

Теорема 1.8. *Неабелевы линейные накрывающие слоения структурно неустойчивы.*

Доказательство данного утверждения проводится на основании теоремы 3.5.

Следствие 1.8. *Если линейное накрывающее слоение структурно устойчиво, то оно абелево.*

Предположим, что абелево линейное накрывающее слоение является структурно устойчивым. Аналогично теореме 1.8 на основании теорем 1.5 и 2.5 имеем утверждения.

Теорема 2.8. *Если абелево линейное накрывающее слоение структурно устойчиво, то фундаментальная группа его базы имеет одну независимую образующую.*

Теорема 3.8. *Для того, чтобы линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{L}^1(1)$ *было структурно устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы группа* $\pi_1(B_1)$ *имела одну независимую образующую* γ_1 *и при этом* $|p_{1\gamma_1}| \neq 1$.

Теорема 4.8. *Для того, чтобы при* $n > 1$ *линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{L}^1(n)$ *было структурно устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы группа* $\pi_1(B_1)$ *имела одну независимую образующую* γ_1 *и при этом для матрицы* P_{γ_1} *выполнялись условия теоремы* 2.5.

И, наконец, на основании теоремы 6.5 приходим к такому выводу.

Теорема 5.8. *Линейные накрывающие слоения не могут быть сильно структурно устойчивыми.*

§ 9. Эквивалентности неавтономных линейных дифференциальных систем.

Рассмотрим линейные дифференциальные системы

$$dw = \sum_{j=1}^{m} A_j(z_1, \ldots, z_m)w\ dz_j \tag{1.9}$$

и

$$dw = \sum_{j=1}^{m} B_j(z_1, \ldots, z_m)w\ dz_j, \tag{2.9}$$

обыкновенные при $m = 1$ и вполне разрешимые [31] при $m > 1$, где квадратные матрицы $A_j(z_1, \ldots, z_m) = ||a_{ikj}(z_1, \ldots,\ z_m)||$ и $B_j(z_1, \ldots, z_m) = ||b_{ikj}(z_1, \ldots,\ z_m)||$ размера n состоят из голоморфных функций $a_{ikj} : B_1 \to \mathbb{C}$ и $b_{ikj} : B_2 \to \mathbb{C},\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$, линейно связные голоморфные многообразия B_1 и B_2 голоморфно эквивалентны друг другу. Общие решения линейных дифференциальных систем (1.9) и (2.9) определяют линейные накрывающие слоения $\mathfrak{L}^1(n)$ и $\mathfrak{L}^2(n)$, соответственно, на многообразиях $\mathbb{C}^n \times B_1$ и $\mathbb{C}^n \times B_2$.

Определение 1.9. *Будем говорить, что линейные дифференциальные системы* (1.9) *и* (2.9) **топологически (гладко, $\mathbb{R}$–голоморфно, голоморфно, сильно топологически) эквивалентны**, *если топологически (гладко, $\mathbb{R}$–голоморфно, голоморфно, сильно топологически) эквивалентны соответствующие им линейные накрывающие слоения* $\mathfrak{L}^1(n)$ и $\mathfrak{L}^2(n)$.

Определение 2.9. *Линейную фазовую группу* $L^1(n)$ $(L^2(n))$ *линейного накрывающего слоения* $\mathfrak{L}^1(n)$ $(\mathfrak{L}^2(n))$, *определяемого линейной дифференциальной системой* (1.9) ((2.9)), *будем называть* **группой монодромии** *этой системы.*

На основании теорем 1.5 – 6.5 получаем следующие утверждения.

Теорема 1.9. *Для топологической эквивалентности при* $n = 1$ *линейных дифференциальных систем* (1.9) *и* (2.9) *необходимо и достаточно существования такого изоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного гомеоморфизмом* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *что либо* $q_{1\mu(\gamma_1)} = p_{1\gamma_1}|p_{1\gamma_1}|^\alpha,\ Re\ \alpha > -1,\ \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, *либо* $q_{1\mu(\gamma_1)} = \overline{p}_{1\gamma_1}|p_{1\gamma_1}|^\alpha,\ Re\ \alpha > -1,\ \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$.

Теорема 2.9. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.5. *Тогда для топологической эквивалентности линейных дифференциальных систем* (1.9) *и* (2.9) *с абелевыми группами монодромии необходимо и достаточно существования таких изоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного гомеоморфизмом* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n) \to (1, \ldots, n)$ *и комплексных чисел* α_k *с* $Re\ \alpha_k > -1,\ k = \overline{1, n}$, *что либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)} = p_{k\gamma_1}|p_{k\gamma_1}|^{\alpha_k},\ \forall\gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, *либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)} = \overline{p}_{k\gamma_1}|p_{k\gamma_1}|^{\alpha_k},\ \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1);\ k = \overline{1, n}$.

Теорема 3.9. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.5. *Тогда из топологической эквивалентности линейных дифференциальных систем* (1.9) *и* (2.9) *с неабелевыми группами монодромии общего положения следует* $\mathbb{R}$–*линейная сопряженность данных групп при некотором изоморфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном гомеоморфизмом* $g_\mu : B_1 \to B_2$.

Следствие 1.9. *Из топологической эквивалентности линейных дифференциальных систем* (1.9) *и* (2.9) *с неабелевыми группами монодромии общего положения следует их* $\mathbb{R}$–*голоморфная эквивалентность.*

Теорема 4.9. *Линейные дифференциальные системы* (1.9) *и* (2.9) *гладко* ($\mathbb{R}$–*голоморфно) эквивалентны тогда и только тогда, когда их группы монодромии* $\mathbb{R}$–*линейно сопряжены при некотором изоморфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном диффеоморфизмом* ($\mathbb{R}$–*голоморфизмом)* $g_\mu : B_1 \to B_2$.

Теорема 5.9. *Линейные дифференциальные системы* (1.9) *и* (2.9) *голоморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда их группы монодромии линейно сопряжены при некотором изоморфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном голоморфизмом* $g_\mu : B_1 \to B_2$.

Теорема 6.9. *Пусть линейные дифференциальные системы* (1.9) *и* (2.9) *с соответствующими им группами монодромии таковы, что линейные действия данных групп, взятые в совокупности, различны при любом ав-*

томорфизме $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_1)$, *порожденном гомеоморфизмом* $g_\mu : B_1 \to B_1$. *Тогда данные линейные дифференциальные системы не могут быть сильно топологически эквивалентными.*

На основании данного утверждения приходим к выводу, что топологическая эквивалентность различных линейных дифференциальных систем не может осуществляться гомеоморфизмом, достаточно близким к тождественному.

§ 10. Вложимости неавтономных линейных дифференциальных систем.

Рассмотрим линейные дифференциальные системы (1.9) и (2.9) с соответствующими им линейными накрывающими слоениями $\mathfrak{L}^1(n)$ и $\mathfrak{L}^2(n)$ и группами монодромии $L^1(n)$ и $L^2(n)$.

Определение 1.10. *Будем говорить, что линейная дифференциальная система* (1.9) **вложима (гладко вложима, $\mathbb{R}$–голоморфно вложима, голоморфно вложима)** *в линейную дифференциальную систему* (2.9), *если линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{L}^1(n)$ *вложимо (гладко вложимо, $\mathbb{R}$–голоморфно вложимо, голоморфно вложимо) в линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{L}^2(n)$.

Определение 2.10. *Будем говорить, что линейные дифференциальные системы* (1.9) *и* (2.9) **слабо топологически (гладко, $\mathbb{R}$–голоморфно, голоморфно) эквивалентны**, *если слабо топологически (гладко, $\mathbb{R}$–голоморфно, голоморфно) эквивалентны линейные накрывающие слоения* $\mathfrak{L}^1(n)$ и $\mathfrak{L}^2(n)$.

На основании теорем 1.6 – 5.6 получаем следующие утверждения.

Теорема 1.10. *Для вложимости при* $n = 1$ *линейной дифференциальной системы* (1.9) *в линейную дифференциальную систему* (2.9) *необходимо и достаточно существования такого гомоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, *что либо* $q_{1\mu(\gamma_1)} = p_{1\gamma_1}|p_{1\gamma_1}|^\alpha,\ Re\ \alpha > -1,\ \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, *либо* $q_{1\mu(\gamma_1)} = \overline{p}_{1\gamma_1}|p_{1\gamma_1}|^\alpha,\ Re\ \alpha > -1,\ \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$.

Теорема 2.10. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.5. *Тогда для вложимости линейной дифференциальной системы* (1.9) *с абелевой группой монодромии в линейную дифференциальную систему* (2.9) *с абелевой группой монодромии необходимо и достаточно существования таких гомоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, *перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n) \to (1, \ldots, n)$ *и комплексных чисел* α_k *с*

Re $\alpha_k > -1,\ k = \overline{1,n},$ *что либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)} = p_{k\gamma_1}|p_{k\gamma_1}|^{\alpha_k},\ \forall\ \gamma \in \pi_1(B_1),$ *либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)} = \overline{p}_{k\gamma_1}|p_{k\gamma_1}|^{\alpha_k},\ \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1);\ k = \overline{1,n}.$

Теорема 3.10. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.5. *Тогда из вложимости линейной дифференциальной системы* (1.9) *с неабелевой группой монодромии общего положения в линейную дифференциальную систему* (2.9) *с неабелевой группой монодромии общего положения следует* $\mathbb{R}$–*линейная сопряженность данных групп при некотором гомоморфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$.

Следствие 1.10. *Из вложимости линейной дифференциальной системы* (1.9) *с неабелевой группой монодромии общего положения в линейную дифференциальную систему* (2.9) *с неабелевой группой монодромии общего положения следует их* $\mathbb{R}$–*голоморфная вложимость.*

Теорема 4.10. *Линейная дифференциальная система* (1.9) *гладко (*$\mathbb{R}$–*голоморфно) вложима в линейную дифференциальную систему* (2.9) *тогда и только тогда, когда их группы монодромии* $\mathbb{R}$–*линейно сопряжены при некотором гомоморфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном гладким (*$\mathbb{R}$–*голоморфным) вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$.

Теорема 5.10. *Линейная дифференциальная система* (1.9) *голоморфно вложима в линейную дифференциальную систему* (2.9) *тогда и только тогда, когда их группы монодромии линейно сопряжены при некотором гомоморфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном голоморфным вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$.

Кроме того, на основании теорем 1.10 – 5.10 получаем критерии слабой топологической (гладкой, $\mathbb{R}$–голоморфной, голоморфной) эквивалентности линейных дифференциальных систем.

§ 11. Накрытия неавтономных линейных дифференциальных систем.

Рассмотрим линейные дифференциальные системы (1.9) и (2.9) с соответствующими им линейными накрывающими слоениями $\mathfrak{L}^1(n)$ и $\mathfrak{L}^2(n)$ и группами монодромии $L^1(n)$ и $L^2(n)$.

Определение 1.11. *Будем говорить, что линейная дифференциальная система* (1.9) **накрывает (гладко накрывает,** $\mathbb{R}$**–голоморфно накрывает, голоморфно накрывает)** *линейную дифференциальную систему* (2.9), *если линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{L}^1(n)$ *накрывает (гладко накрывает,* $\mathbb{R}$–*голоморфно накрывает, голоморфно накрывает) линейное на-*

крывающее слоение $\mathfrak{L}^2(n)$.

На основании теорем 1.7 – 5.7 получаем следующие критерии накрытий линейных дифференциальных систем.

Теорема 1.11. *Для накрытия при* $n = 1$ *линейной дифференциальной системы* (2.9) *линейной дифференциальной системой* (1.9) *необходимо и достаточно существования такого мономорфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного накрытием* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *что либо* $q_{1\mu(\gamma_1)} = p_{1\gamma_1}|p_{1\gamma_1}|^{\alpha},\ Re\ \alpha > -1,\ \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, *либо* $q_{1\mu(\gamma_1)} = \overline{p}_{1\gamma_1}|p_{1\gamma_1}|^{\alpha},\ Re\ \alpha > -1,\ \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$.

Теорема 2.11. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.5. *Тогда для накрытия линейной дифференциальной системы* (2.9) *с абелевой группой монодромии линейной дифференциальной системой* (1.9) *с абелевой группой монодромии необходимо и достаточно существования таких мономорфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного накрытием* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n) \to (1, \ldots, n)$ *и комплексных чисел* α_k *с* $Re\ \alpha_k > -1,\ k = \overline{1, n}$, *что либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)} = p_{k\gamma_1}|p_{k\gamma_1}|^{\alpha_k},\ \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, *либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)} = \overline{p}_{k\gamma_1}|p_{k\gamma_1}|^{\alpha_k},\ \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1);\ k = \overline{1, n}$.

Теорема 3.11. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.5. *Тогда из накрытия линейной дифференциальной системы* (2.9) *с неабелевой группой монодромии общего положения линейной дифференциальной системой* (1.9) *с с неабелевой группой монодромии общего положения следует* $\mathbb{R}$*–линейная сопряженность данных групп при некотором мономорфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном накрытием* $g_\mu : B_1 \to B_2$.

Следствие 1.11. *Накрытие линейной дифференциальной системы* (2.9) *с неабелевой группой монодромии общего положения линейной дифференциальной системой* (1.9) *с неабелевой группой монодромии общего положения является* $\mathbb{R}$*–голоморфным.*

Теорема 4.11. *Линейная дифференциальная система* (1.9) *гладко* ($\mathbb{R}$*–голоморфно) накрывает линейную дифференциальную систему* (2.9) *тогда и только тогда, когда их группы монодромии* $\mathbb{R}$*–линейно сопряжены при некотором мономорфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном гладким* ($\mathbb{R}$*–голоморфным) накрытием* $g_\mu : B_1 \to B_2$.

Теорема 5.11. *Линейная дифференциальная система* (1.9) *голоморфно накрывает линейную дифференциальную систему* (2.9) *тогда и только тогда, когда их группы монодромии линейно сопряжены при некотором мономорфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном голоморфным накрытием* $g_\mu : B_1 \to B_2$.

§ 12. Структурная устойчивость неавтономных линейных дифференциальных систем.

Рассмотрим линейную дифференциальную систему (1.9) с соответствующими ей линейным накрывающим слоением $\mathfrak{L}^1(n)$ и группой монодромии $L^1(n)$.

Определение 1.12. *Будем говорить, что линейная дифференциальная система* (1.9) **структурно (сильно структурно) устойчива**, *если структурно (сильно структурно) устойчиво линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{L}^1(n)$.

В силу теорем 1.8 – 5.8 имеем такие утверждения.

Теорема 1.12. *Линейные дифференциальные системы вида* (1.9) *с неабелевыми группами монодромии структурно неустойчивы.*

Следствие 1.12. *Если линейная дифференциальная система вида* (1.9) *структурно устойчива, то её группа монодромии абелева.*

Теорема 2.12. *Если линейная дифференциальная система вида* (1.9) *с абелевой группой монодромии структурно устойчива, то группа* $\pi_1(B_1)$ *имеет одну независимую образующую.*

Теорема 3.12. *Для того, чтобы при* $n = 1$ *линейная дифференциальная система вида* (1.9) *была структурно устойчива, необходимо и достаточно, чтобы группа* $\pi_1(B_1)$ *имела одну независимую образующую* γ_1 *и при этом* $|p_{1\gamma_1}| \neq 1$.

Теорема 4.12. *Для того, чтобы при* $n > 1$ *линейная дифференциальная система вида* (1.9) *была структурно устойчива, необходимо и достаточно, чтобы группа* $\pi_1(B_1)$ *имела одну независимую образующую* γ_1 *и при этом для матрицы* P_{γ_1} *выполнялись условия теоремы* 2.5.

Теорема 5.12. *Линейные дифференциальные системы вида* (1.9) *не могут быть сильно структурно устойчивыми.*

§ 13. Эквивалентности линейных обыкновенных дифференциальных систем с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим линейные обыкновенные дифференциальные системы

$$\frac{dw}{dz} = A(z)w \tag{1.13}$$

и

$$\frac{dw}{dz} = B(z)w, \tag{2.13}$$

где квадратные матрицы $A(z) = ||a_{ik}(z)||$ и $B(z) = ||b_{ik}(z)||$ размера n состоят из 1–периодических голоморфных функций $a_{ik} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и $b_{ik} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n}$. Общие решения линейных обыкновенных дифференциальных систем (1.13) и (2.13) определяют линейные накрывающие слоения на многообразии $\mathbb{C}^n \times Z$, где Z есть цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}$, S^1 – единичная окружность. Так как группа $\pi_1(Z)$ абелева, то на основании определений 2.1.1 и 2.9 имеем, что группы монодромии линейных обыкновенных дифференциальных систем (1.13) и (2.13) также абелевы.

Рассмотрим сначала случай $n = 1$ (т.е. случай скалярных уравнений (1.13) и (2.13)). Непосредственными вычислениями получаем, что $p_{1\gamma_1} = exp \int\limits_0^1 a_{11}(\xi)d\xi$, $q_{1\gamma_1} = exp \int\limits_0^1 b_{11}(\xi)d\xi$, где γ_1 есть образующая группы $\pi_1(Z)$. Поэтому на основании теорем 1.9, 4.9, 5.9 и 3.12 получаем такие утверждения.

Теорема 1.13. *Для топологической эквивалентности при* $n = 1$ *линейных обыкновенных дифференциальных систем* (1.13) *и* (2.13) *необходимо и достаточно, чтобы либо* $q_{1\gamma_1} = p_{1\gamma_1}|p_{1\gamma_1}|^{\alpha}$, $Re\ \alpha \neq -1$, *либо* $q_{1\gamma_1} = \overline{p}_{1\gamma_1}|p_{1\gamma_1}|^{\alpha}$, $Re\ \alpha \neq -1$.

Теорема 2.13. *Для гладкой* ($\mathbb{R}$*–голоморфной) эквивалентности при* $n = 1$ *линейных обыкновенных дифференциальных систем* (1.13) *и* (2.13) *необходимо и достаточно, чтобы либо* $q_{1\gamma_1} = p_{1\gamma_1}^{\pm 1}$, *либо* $q_{1\gamma_1} = \overline{p}_{1\gamma_1}^{\pm 1}$.

Теорема 3.13. *Для голоморфной эквивалентности при* $n = 1$ *линейных обыкновенных дифференциальных систем* (1.13) *и* (2.13) *необходимо и достаточно, чтобы* $q_{1\gamma_1} = p_{1\gamma_1}^{\pm 1}$.

Теорема 4.13. *Для того, чтобы при* $n = 1$ *линейная обыкновенная дифференциальная система* (1.13) *была структурно устойчива, необходимо и достаточно, чтобы* $|p_{1\gamma_1}| \neq 1$.

Рассмотрим теперь случай $n > 1$. На основании теорем 2.9, 4.9, 5.9 и 4.12 имеем утверждения.

Теорема 5.13. *Пусть при* $n > 1$ *матрицы* $P_{\gamma_1} = S\ diag\{p_{1\gamma_1}, \ldots, p_{n\gamma_1}\}\ S^{-1}$, $Q_{\gamma_1} = T\ diag\{q_{1\gamma_1}, \ldots, q_{n\gamma_1}\}\ T^{-1}$, *а матрицы* $ln\ P_{\gamma_1}$ *и* $ln\ Q_{\gamma_1}$ *являются простыми. Тогда для топологической эквивалентности линейных обыкновенных дифференциальных систем* (1.13) *и* (2.13) *необходимо и достаточно существования таких перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n) \to (1, \ldots, n)$ *и комплексных чисел* α_k *с* $Re\ \alpha_k \neq -1$, $k = \overline{1,n}$, *что либо* $q_{\varrho(k)\gamma_1} = p_{k\gamma_1}|p_{k\gamma_1}|^{\alpha_k}$, *либо* $q_{\varrho(k)\gamma_1} = \overline{p}_{k\gamma_1}|p_{k\gamma_1}|^{\alpha_k}$; $k = \overline{1,n}$.

Теорема 6.13. *Для гладкой* ($\mathbb{R}$*–голоморфной) эквивалентности при*

$n > 1$ линейных обыкновенных дифференциальных систем (1.13) *и* (2.13) *необходимо и достаточно, чтобы линейные отображения $P_{\gamma_1}w,\ \forall w \in \mathbb{C}^n$, и $Q_{\gamma_1}w,\ \forall w \in \mathbb{C}^n$, были $\mathbb{R}$–линейно сопряжены.*

Теорема 7.13. *Для голоморфной эквивалентности при $n > 1$ линейных обыкновенных дифференциальных систем* (1.13) *и* (2.13) *необходимо и достаточно, чтобы линейные отображения $P_{\gamma_1}w,\ \forall w \in \mathbb{C}^n$, и $Q_{\gamma_1}w,\ \forall w \in \mathbb{C}^n$, были линейно сопряжены.*

Теорема 8.13. *Для того, чтобы при $n > 1$ линейная обыкновенная дифференциальная система* (1.13) *была структурно устойчива, необходимо и достаточно, чтобы для матрицы P_{γ_1} выполнялись условия теоремы* 5.13.

§ 14. Эквивалентности линейных вполне разрешимых дифференциальных систем с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим линейные вполне разрешимые дифференциальные системы

$$dw = \sum_{j=1}^{m} A_j(z_1, \ldots, z_m) w \ dz_j \tag{1.14}$$

и

$$dw = \sum_{j=1}^{m} B_j(z_1, \ldots, z_m) w \ dz_j, \tag{2.14}$$

где $m > 1$, квадратные матрицы $A_j(z_1, \ldots, z_m) = ||a_{ikj}(z_1, \ldots,\ z_m)||$ и $B_j(z_1, \ldots, z_m) = ||b_{ikj}(z_1, \ldots,\ z_m)||$ размера n состоят из 1–периодических по своим аргументам голоморфных функций $a_{ikj} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ и $b_{ikj} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$, $i = \overline{1, n},\ k = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m}$. Общие решения линейных вполне разрешимых дифференциальных систем (1.14) и (2.14) определяют линейные накрывающие слоения на многообразии $\mathbb{C}^n \times Z^m$, где Z^m есть декартово произведение m цилиндров. Так как группа $\pi_1(Z^m)$ абелева, то на основании определений 2.1.1 и 2.9 имеем, что группы монодромии линейных вполне разрешимых дифференциальных систем (1.14) и (2.14) также являются абелевыми.

Рассмотрим сначала случай $n = 1$ (т.е. случай скалярных уравнений (1.14) и (2.14)). Непосредственными вычислениями получаем, что $p_{1\gamma_l} = exp \int\limits_0^1 a_{11}(0, \ldots, 0, \xi_l, 0, \ldots, 0) d\xi_l, q_{1\gamma_l} = exp \int\limits_0^1 b_{11}(0, \ldots, 0, \xi_l, 0, \ldots, 0) d\xi_l,\ l = \overline{1, m}$, где $\gamma_l,\ l = \overline{1, m}$ есть образующие группы $\pi_1(Z^m)$. Отсюда на основании теорем 1.9, 4.9, 5.9 и [32, с. 225] получаем такие утверждения.

Теорема 1.14. *Для топологической эквивалентности при* $n = 1$ *линейных вполне разрешимых дифференциальных систем* (1.14) *и* (2.14) *необходимо и достаточно существования таких унимодулярной матрицы (целочисленной матрицы с определителем, по модулю равным* 1*)* $U = ||u_{lj}||$ *размера* m *и комплексного числа* α *с* $Re\ \alpha \neq -1$, *что либо* $\prod\limits_{j=1}^{m} q_{1\gamma_j}^{u_{lj}} = p_{1\gamma_l}|p_{1\gamma_l}|^{\alpha},\ l = \overline{1,m}$, *либо* $\prod\limits_{j=1}^{m} q_{1\gamma_j}^{u_{lj}} = \overline{p}_{1\gamma_l}|p_{1\gamma_l}|^{\alpha},\ l = \overline{1,m}.$

Теорема 2.14. *Для гладкой* ($\mathbb{R}$*–голоморфной) эквивалентности при* $n = 1$ *линейных вполне разрешимых дифференциальных систем* (1.14) *и* (2.14) *необходимо и достаточно существования такой унимодулярной матрицы* $U = ||u_{lj}||$ *размера* m, *что либо* $\prod\limits_{j=1}^{m} q_{1\gamma_j}^{u_{lj}} = p_{1\gamma_l},\ l = \overline{1,m}$, *либо* $\prod\limits_{j=1}^{m} q_{1\gamma_j}^{u_{lj}} = \overline{p}_{1\gamma_l},\ l = \overline{1,m}.$

Теорема 3.14. *Для голоморфной эквивалентности при* $n = 1$ *линейных вполне разрешимых дифференциальных систем* (1.14) *и* (2.14) *необходимо и достаточно существования такой унимодулярной матрицы* $U = ||u_{lj}||$ *размера* m, *что* $\prod\limits_{j=1}^{m} q_{1\gamma_j}^{u_{lj}} = p_{1\gamma_l},\ l = \overline{1,m}.$

В случае $n > 1$ на основании теорем 2.9, 4.9 и 5.9 имеем утверждения.

Теорема 4.14. *Пусть при* $n > 1$ *матрицы* $P_{\gamma_l} = S\ diag\{p_{1\gamma_l}, \ldots, p_{n\gamma_l}\}\ S^{-1},\ Q_{\gamma_l} = T\ diag\{q_{1\gamma_l}, \ldots, q_{n\gamma_l}\}\ T^{-1}$, *а матрицы* $ln\ P_{\gamma_l}$ *и* $ln\ Q_{\gamma_l}$ *являются простыми,* $l = \overline{1,m}$. *Тогда для топологической эквивалентности линейных вполне разрешимых дифференциальных систем* (1.14) *и* (2.14) *необходимо и достаточно существования таких унимодулярной матрицы* $U = ||u_{lj}||$ *размера* m, *перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n) \to (1, \ldots, n)$ *и комплексных чисел* α_k *с* $Re\ \alpha_k \neq -1,\ k = \overline{1,n}$, *что либо* $\prod\limits_{j=1}^{m} q_{\varrho(k)\gamma_j}^{u_{lj}} = p_{k\gamma_l}|p_{k\gamma_l}|^{\alpha_k}$, *либо* $\prod\limits_{j=1}^{m} q_{\varrho(k)\gamma_j}^{u_{lj}} = \overline{p}_{k\gamma_l}|p_{k\gamma_l}|^{\alpha_k};\ k = \overline{1,n}.$

Теорема 5.14. *Для гладкой* ($\mathbb{R}$*–голоморфной) эквивалентности при* $n > 1$ *линейных вполне разрешимых дифференциальных систем* (1.14) *и* (2.14) *необходимо и достаточно существования такой унимодулярной матрицы* $U = ||u_{lj}||$ *размера* m, *что совокупности линейных отображений* $P_{\gamma_l}w,\ \forall w \in \mathbb{C}^n,\ l = \overline{1,m}$, *и* $\prod\limits_{j=1}^{m} Q_{\gamma_j}^{u_{lj}} w,\ \forall w \in \mathbb{C}^n,\ l = \overline{1,m}$, *были* $\mathbb{R}$*–линейно сопряжены.*

Теорема 6.14. *Для голоморфной эквивалентности при* $n > 1$ *линейных* *вполне разрешимых дифференциальных систем* (1.14) *и* (2.14) *необходимо и достаточно существования такой унимодулярной матрицы* $U = ||u_{lj}||$ *размера* m, *что совокупности линейных отображений* $P_{\gamma_l} w, \ \forall w \in \mathbb{C}^n, \ l = \overline{1,m}$, *и* $\prod\limits_{j=1}^{m} Q_{\gamma_j}^{u_{lj}} w, \ \forall w \in \mathbb{C}^n, \ l = \overline{1,m}$, *были линейно сопряжены.*

И, наконец, на основании теоремы 2.12 получаем следующее утверждение.

Теорема 7.14. *Линейная вполне разрешимая дифференциальная система* (1.14) *структурно неустойчива.*

§ 15. Эквивалентности фуксовых линейных обыкновенных дифференциальных систем.

Рассмотрим фуксовы [33] линейные обыкновенные дифференциальные системы

$$\frac{dw}{dz} = \sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{z - a_j}\, w \tag{1.15}$$

и

$$\frac{dw}{dz} = \sum_{j=1}^{m} \frac{B_j}{z - b_j}\, w, \tag{2.15}$$

где $A_j, \ j = \overline{1,m}$, и $B_j, \ j = \overline{1,m}$, есть квадратные матрицы размера n (дифференциальные подстановки), $j = \overline{1,m}$, и, кроме того, выполняются соотношения $\sum\limits_{j=1}^{m} A_j = \sum\limits_{j=1}^{m} B_j = O, \ O$ – нулевая матрица. Общее решение линейной обыкновенной дифференциальной системы (1.15) ((2.15)) определяет линейное накрывающее слоение на многообразии $\mathbb{C}^n \times \Gamma_1^m$ ($\mathbb{C}^n \times \Gamma_2^m$), где Γ_1^m (Γ_2^m) есть открытая комплексная плоскость $\mathbb{C}$ с m выколотыми точками $a_j, \ j = \overline{1,m}$ ($b_j, \ j = \overline{1,m}$).

В случае $n = 1$ непосредственными вычислениями получаем, что $p_{1\gamma_l} = exp(2\pi i a_{1l}), \ q_{1\gamma_l} = exp(2\pi i b_{1l}), \ l = \overline{1,m}$, где $A_l = a_{1l}, \ B_l = b_{1l}$, а $\gamma_l, \ l = \overline{1,m}$ есть образующие группы $\pi_1(\Gamma_1^m)$. Отсюда на основании теорем 1.9, 4.9, 5.9 и 3.12 получаем такие утверждения.

Теорема 1.15. *Для топологической эквивалентности при* $n = 1$ *линейных обыкновенных дифференциальных систем* (1.15) *и* (2.15) *необходимо и достаточно существования таких перестановки* $\nu : (1, \ldots, m) \to (1, \ldots, m)$ *и комплексного числа* α *с* $Re\ \alpha \neq -1$, *что либо* $q_{1\gamma_{\nu(l)}} = p_{1\gamma_l} |p_{1\gamma_l}|^{\alpha}, \ l = \overline{1,m}$, *либо* $q_{1\gamma_{\nu_l}} = \overline{p}_{1\gamma_l} |p_{1\gamma_l}|^{\alpha}, \ l = \overline{1,m}$.

Теорема 2.15. *Для гладкой ($\mathbb{R}$–голоморфной) эквивалентности при* $n = 1$ *линейных обыкновенных дифференциальных систем* (1.15) *и* (2.15) *необходимо и достаточно существования такой перестановки* $\nu : (1, \ldots, m) \to (1, \ldots, m)$, *что либо* $q_{1\gamma_{\nu(l)}} = p^{\varepsilon}_{1\gamma_l},\ l = \overline{1,m},\ \varepsilon^2 = 1$, *либо* $q_{1\gamma_{\nu(l)}} = \overline{p}^{\varepsilon}_{1\gamma_l},\ l = \overline{1,m},\ \varepsilon^2 = 1$.

Теорема 3.15. *Для голоморфной эквивалентности при* $n = 1$ *линейных обыкновенных дифференциальных систем* (1.15) *и* (2.15) *необходимо и достаточно существования такой перестановки* $\nu : (1, \ldots, m) \to (1, \ldots, m)$, *что* $q_{1\gamma_{\nu(l)}} = p^{\varepsilon}_{1\gamma_l},\ l = \overline{1,m},\ \varepsilon^2 = 1$.

Теорема 4.15. *Для того, чтобы при* $n = 1$ *линейная обыкновенная дифференциальная система* (1.15) *была структурно устойчива, необходимо и достаточно, чтобы* $m = 2$ и $|p_{1\gamma_1}| \neq 1$.

Пусть теперь $n > 1$. При исследовании вопроса о топологической эквивалентности линейных обыкновенных дифференциальных систем (1.15) и (2.15) рассмотрим сначала коммутативный случай, т.е. когда $A_jA_l = A_lA_j,\ B_jB_l = B_lB_j,\ j = \overline{1,m},\ l = \overline{1,m}$. Непосредственными вычислениями получаем, что $P_{\gamma_l} = exp(2\pi i A_l),\ Q_{\gamma_l} = exp(2\pi i B_l),\ l = \overline{1,m}$. Поэтому в силу теоремы 2.9 имеем такое утверждение.

Теорема 5.15. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.14. *Тогда для топологической эквивалентности линейных обыкновенных дифференциальных систем* (1.15) *и* (2.15) *с абелевыми дифференциальными подстановками необходимо и достаточно существования таких перестановок* $\nu : (1, \ldots, m) \to (1, \ldots, m),\ \varrho : (1, \ldots, n) \to (1, \ldots, n)$ *и комплексных чисел* α_k *с* $Re\ \alpha_k \neq -1,\ k = \overline{1,n}$, *что либо* $q_{\varrho(k)\gamma_{\nu(l)}} = p_{k\gamma_l}|p_{k\gamma_l}|^{\alpha_k},\ l = \overline{1,m}$, *либо* $q_{\varrho(k)\gamma_{\nu(l)}} = \overline{p}_{k\gamma_l}|p_{k\gamma_l}|^{\alpha_k},\ l = \overline{1,m};\ k = \overline{1,n}$.

Рассмотрим теперь случай, когда совокупность дифференциальных подстановок $A_j,\ j = \overline{1,m}$ $(B_j,\ j = \overline{1,m})$, линейной обыкновенной дифференциальной системы (1.15) ((2.15)) неабелева. Тогда представления для нерезонансных матриц P_{γ_l} и $Q_{\gamma_l},\ l = \overline{1,m}$, имеем на основании теоремы III [34, с. 147] и [28, с. 449 – 450]. И в силу теоремы 3.5 получаем утверждение.

Теорема 6.15. *Пусть при* $n > 1$ *матрицы* $P_{\gamma_l} = S_{\gamma_l}\ diag\{p_{1\gamma_l}, \ldots, p_{n\gamma_l}\}\ S^{-1}_{\gamma_l},\ Q_{\gamma_l} = T_{\gamma_l}\ diag\{q_{1\gamma_l}, \ldots, q_{n\gamma_l}\}\ T^{-1}_{\gamma_l}$, *а матрицы* $ln\ P_{\gamma_l}$ *и* $ln\ Q_{\gamma_l}$ *являются простыми,* $l = \overline{1,m}$. *Тогда из топологической эквивалентности линейных обыкновенных дифференциальных систем* (1.15) *и* (2.15) *с неабелевыми группами монодромии общего положения следует* $\mathbb{R}$*–линейная сопряженность данных групп при некоторой* *перестановке* $\nu : (1, \ldots, m) \to (1, \ldots, m)$ *образующих* $\gamma_l,\ l = \overline{1, m}$, *группы* $\pi_1(\Gamma_1^m)$.

Следствие 1.15. *Из топологической эквивалентности линейных обыкновенных дифференциальных систем* (1.15) *и* (2.15) *с неабелевыми группами монодромии общего положения следует их* $\mathbb{R}$*–голоморфная эквивалентность.*

И, наконец, на основании теорем 4.9, 5.9 и 4.12 имеем такие утверждения.

Теорема 7.15. *Линейные обыкновенные дифференциальные системы* (1.15) *и* (2.15) *при* $n > 1$ *гладко* ($\mathbb{R}$*–голоморфно) эквивалентны тогда и только тогда, когда их группы монодромии* $\mathbb{R}$*–линейно сопряжены при некоторой перестановке* $\nu : (1, \ldots, m) \to (1, \ldots, m)$ *образующих* $\gamma_l,\ l = \overline{1, m}$, *группы* $\pi_1(\Gamma_1^m)$.

Теорема 8.15. *Линейные обыкновенные дифференциальные системы* (1.15) *и* (2.15) *при* $n > 1$ *голоморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда их группы монодромии линейно сопряжены при некоторой перестановке* $\nu : (1, \ldots, m) \to (1, \ldots, m)$ *образующих* $\gamma_l,\ l = \overline{1, m}$, *группы* $\pi_1(\Gamma_1^m)$.

Теорема 9.15. *Для того, чтобы при* $n > 1$ *линейная обыкновенная дифференциальная система* (1.15) *была структурно устойчива, необходимо и достаточно, чтобы* $m = 2$ *и при этом для матрицы* P_{γ_1} *выполнялись условия теоремы* 4.14.

Глава 3. Классификации комплексных дробно–линейных накрывающих слоений.

Аналогично предыдущей, данная глава будет базироваться на основании топологической, гладкой, $\mathbb{R}$–голоморфной и голоморфной классификаций дробно–линейных фазовых групп $PL(n)$. Это соответствует задачам о нахождении необходимых и достаточных условий существования такого гомеоморфизма (диффеоморфизма, $\mathbb{R}$–голоморфизма, голоморфизма) $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$, что имеют место тождества

$$f(P_r v) = Q_r f(v),\ \forall v \in \mathbb{C}P^n,\ \forall r \in I, \tag{1.0}$$

где $v = (v_1, \ldots, v_{n+1})$ есть однородные координаты, $f(v) = (f_1(v), \ldots, f_{n+1}(v))$, квадратные матрицы $P_r \in GL(n+1, \mathbb{C}),\ Q_r \in GL(n+1, \mathbb{C}),\ \forall r \in I$. При этом дробно–линейную фазовую группу, определяемую дробно–линейными действиями $P_r v,\ \forall v \in \mathbb{C}P^n,\ \forall r \in I$, будем обозначать $PL^1(n)$, а через $PL^2(n)$ будем обозначать аналогичную фазовую группу, определяемую дробно–линейными действиями $Q_r v,\ \forall v \in \mathbb{C}P^n,\ \forall r \in I$.

§ 1. Топологическая сопряженность абелевых дробно–линейных фазовых групп.

Лемма 1.1. *Пусть дробно–линейные фазовые группы* $PL^1(1)$ *и* $PL^2(1)$ *топологически сопряжены. Тогда нормальные жордановы формы матриц* P_r *и* Q_r*, определяющих нетождественные дробно-линейные преобразования, имеют одинаковое число блоков Жордана,* $\forall r \in I$.

Доказательство данного утверждения проводится на основании того факта, что количество неподвижных точек дробно–линейных преобразований совпадает с числом собственных векторов матриц, определяющих эти преобразования.

На основании леммы 1.1 непосредственными вычислениями приходим к такому утверждению.

Лемма 2.1 [35]. *Для топологической сопряженности абелевых дробно–линейных фазовых групп* $PL^1(1)$ *и* $PL^2(1)$ *необходимо, чтобы нормальные жордановы формы всех матриц* P_r *и* Q_r*, определяющих нетождественные дробно-линейные преобразования,* $\forall r \in I$*, имели одинаковое число блоков Жордана.*

Теорема 1.1 [36]. *Пусть матрицы* $P_r = S\ diag\{p_{1r}, p_{2r}\}\ S^{-1}$, $Q_r = T\ diag\{q_{1r}, q_{2r}\}\ T^{-1}$, $\forall r \in I$. *Тогда для топологической сопряженности дробно–линейных фазовых групп* $PL^1(1)$ *и* $PL^2(1)$ *необходимо и достаточно, чтобы либо*

$$q_{1r}/q_{2r} = (p_{1r}/p_{2r})|p_{1r}/p_{2r}|^{\alpha},\ Re\ \alpha \neq -1, \forall r \in I, \tag{1.1}$$

либо

$$q_{1r}/q_{2r} = (\overline{p_{1r}/p_{2r}})|p_{1r}/p_{2r}|^{\alpha},\ Re\ \alpha \neq -1, \forall r \in I. \tag{2.1}$$

Доказательство. С помощью замены $\xi(v) = T^{-1}f(Sv)$, $\forall v \ \in \mathbb{C}P^1$, от тождеств (1.0) при $n = 1$ переходим к тождествам

$$\xi(diag\{p_{1r}, p_{2r}\}v) = diag\{q_{1r}, q_{2r}\}\xi(v),\ \forall v \in \mathbb{C}P^1,\ \forall\ r \in I. \tag{3.1}$$

Поэтому топологическая сопряженность абелевых фазовых дробно–линейных групп $PL^1(1)$ и $PL^2(1)$ равносильна выполнению тождеств (3.1).

Необходимость. Пусть выполняются тождества (3.1).

Если все $p_{1r}/p_{2r} = 1$, $\forall\ r \in I$, то из (3.1) имеем, что и $q_{1r}/q_{2r} = 1$, $\forall\ r \in I$. Поэтому в этом случае выполняются соотношения (1.1) при любом α с $Re\ \alpha \neq -1$.

Пусть теперь $p_{1r}/p_{2r} \neq 1,\ r \in I$. На основании тождеств (3.1) получаем, что либо $\xi(O_1) = O_1$, либо $\xi(O_1) = O_2$, где O_τ (начала координат аффинных карт $M_\tau = \{v,\ v_\tau \neq 0\}$ атласа M многообразия $\mathbb{C}P^1$), $\tau = \overline{1,2}$, есть общие неподвижные точки дробно–линейных преобразований $diag\{p_{1r}, p_{2r}\}v,\ \forall v \in \mathbb{C}P^1$, и $diag\{q_{1r}, q_{2r}\}v,\ \forall v \in \mathbb{C}P^1,\ \forall\ r \in I$.

Если $\xi(O_1) = O_1$, то на основании теоремы 1.1.2 делаем вывод, что при $Re\ \alpha > -1$ имеют место либо равенства (1.1), либо равенства (2.1).

Если же $\xi(O_1) = O_2$, то с помощью замены $\zeta(v) = (\xi_2(v),\ \xi_1(v)),\ \forall v \in \mathbb{C}P^1$, приходим к предыдущему случаю и в итоге получаем либо равенства (1.1) при $Re\ \alpha < -1$, либо равенства (2.1) при $Re\ \alpha < -1$.

Достаточность доказывается путем построения сопрягающего гомеоморфизма $\xi(v) = (\gamma_1 v_1|v_1|^\alpha, \gamma_2 v_2|v_2|^\alpha),\ \forall v \in \mathbb{C}P^1$, в случае выполнения соотношений (1.1), и сопрягающего гомеоморфизма $\xi(v) = (\gamma_1\overline{v}_1|v_1|^\alpha,\ \gamma_2\overline{v}_2|v_2|^\alpha),\ \forall v \in \mathbb{C}P^1$, в случае выполнения соотношений (2.1).

Теорема 2.1 [30]. *Пусть при $n > 1$ матрицы $P_r = S\ diag\ \{p_{1r},\ \ldots, p_{n+1,r}\}\ S^{-1},\ Q_r = T\ diag\{q_{1r}, \ldots, q_{n+1,r}\}\ T^{-1}$, наборы чисел $\{ln\ (p_{1r}/p_{n+1,r}),\ \ldots,\ ln\ (p_{nr}/p_{n+1,r})\}$ и $\{ln\ (q_{1r}/q_{n+1,r}), \ldots,\ ln\ (q_{nr}/q_{n+1,r})\}$ являются простыми, $\forall\ r \in I$. Тогда для топологической сопряженности абелевых дробно–линейных фазовых групп $PL^1(n)$ и $PL^2(n)$ необходимо и достаточно существования таких перестановки $\varrho : (1, \ldots, n+1) \to (1, \ldots, n+1)$ и комплексного числа α с $Re\ \alpha > -1$, что либо*

$$q_{\varrho(k)r}/q_{\varrho(n+1)r} = (p_{kr}/p_{n+1,r})|p_{kr}/p_{n+1,r}|^\alpha,\ \forall\ r \in I,\ k = \overline{1,n}, \tag{4.1}$$

либо

$$q_{\varrho(k)r}/q_{\varrho(n+1)r} = (\overline{p_{kr}/p_{n+1,r}})|p_{kr}/p_{n+1,r}|^\alpha,\ \forall\ r \in I, k = \overline{1,n}. \tag{5.1}$$

Доказательство. С помощью замены $\xi(v) = T^{-1}f(Sv),\ \forall v\ \in \mathbb{C}P^n$, от тождеств (1.0) переходим к тождествам

$$\begin{gathered}\xi(diag\{p_{1r}, \ldots, p_{n+1,r}\}v) = diag\{q_{1r}, \ldots, q_{n+1,r}\}\xi(v),\\ \forall v \in \mathbb{C}P^n,\ \forall\ r \in I.\end{gathered} \tag{6.1}$$

Стало быть, топологическая сопряженность абелевых фазовых дробно–линейных групп $PL^1(n)$ и $PL^2(n)$ эквивалентна выполнению тождеств (6.1). При этом, не умаляя общности, будем считать, что сопрягающий гомеоморфизм ξ оставляет на месте общие неподвижные точки O_τ (начала координат аффинных карт $M_\tau = \{v,\ v_\tau \neq 0\}$ атласа M многообразия $\mathbb{C}P^n$), $\tau = \overline{1, n+1}$, невырожденных дробно–линейных преобразований

$$diag\{p_{1r}, \ldots, p_{n+1,r}\}v,\ \forall v \in \mathbb{C}P^n,\ \forall\ r \in I, \tag{7.1}$$

и

$$diag\{q_{1r},\ldots,q_{n+1,r}\}v,\ \forall v\in\mathbb{C}P^n,\ \forall\ r\in I, \qquad (8.1)$$

(чего всегда можно добиться путем невырожденного дробно–линейного преобразования).

Необходимость. Пусть выполняются тождества (6.1). Невырожденные дробно–линейные преобразования (7.1) (дробно–линейные преобразования (8.1)) определяют на пространстве $\mathbb{C}P^n$ инвариантные голоморфные слоения $\mathfrak{C}_r$ (инвариантные голоморфные слоения $\mathfrak{D}_r$) комплексной размерности 1, образованные базисами абсолютных инвариантов $v_k^{ln\ (p_{nr}/p_{n+1,r})}v_n^{ln\ (p_{n+1,r}/p_{kr})}v_{n+1}^{ln\ (p_{kr}/p_{nr})},\ k=\overline{1,n-1}$ (базисами абсолютных инвариантов $v_k^{ln\ (q_{nr}/q_{n+1,r})}v_n^{ln\ (q_{n+1,r}/q_{kr})}v_{n+1}^{ln\ (q_{kr}/q_{nr})},\ k=\overline{1,n-1}$), $\forall r\in I$. Учитывая, что сопрягающий гомеоморфизм ξ переводит слои слоений $\mathfrak{C}_r$ в гомеоморфные им слои слоений $\mathfrak{D}_r,\ \forall\ r\in I$, а также принимая во внимание простоту наборов чисел из условия теоремы, приходим к выводу, что гомеоморфизм ξ переводит сферы Римана $\overline{\mathbb{C}}_{ls}: v_k=0,\ k\neq l,\ k\neq s,\ s\neq l,\ k=\overline{1,n+1}$, в сферы Римана вида $\overline{\mathbb{C}}_{ij},\ j\neq i$, причем все гомеоморфизмы сфер Римана одновременно или сохраняют, или меняют ориентацию.

Пусть гомеоморфизмы сфер Римана сохраняют ориентацию (случай меняющих ориентацию гомеоморфизмов рассматривается аналогично). Тогда в силу хода доказательства теорем 2.1.2 и 1.1 приходим к выводу, что в аффинной карте $M_{n+1}=\{v,\ v_{n+1}\neq 0\}$ выполняются соотношения $q_{\varrho(k)r}/q_{\varrho(n+1)r}$ $=(p_{kr}/p_{n+1,r})|p_{kr}/p_{n+1,r}|^{\alpha_k},\ r=\overline{1,\nu},\ k=\overline{1,n},$ и у комплексных чисел α_k действительные части $Re\ \alpha_k>-1,\ k=\overline{1,n}$. Принимая во внимание последние равенства, а также тот факт, что в тождествах (6.1) векторы $\{p_{1r},\ldots,p_{n+1,r}\}$ и $\{q_{1r},\ldots,q_{n+1,r}\}$ определены с точностью до скалярных множителей, $\forall\ r\in I$, и проводя аналогичные рассуждения в других аффинных картах $M_\tau,\ \tau=\overline{1,n}$, приходим к выводу, что $\alpha_k=\alpha,\ k=\overline{1,n}$. В итоге приходим к соотношениям (4.1).

Достаточность доказывается путем построения сопрягающего гомеоморфизма $\xi:\mathbb{C}P^n\to\mathbb{C}P^n$, такого, что его проекции $\xi_{\varrho(k)}(v)=\gamma_k v_k|v_k|^\alpha,\ \forall v\in\mathbb{C}P^n,\ k=\overline{1,n+1}$, если имеют место соотношения (4.1); и его проекции $\xi_{\varrho(k)}(v)=\gamma_k\overline{v}_k|v_k|^\alpha,\ \forall v\in\mathbb{C}P^n,\ k=\overline{1,n+1}$, если имеют место соотношения (5.1).

§ 2. Топологическая сопряженность неабелевых дробно–линейных фазовых групп.

В этом параграфе будем рассматривать неабелевые дробно–линейные фазовые группы $PL^1(n)$ и $PL^2(n)$.

Теорема 1.2 [37]. *Из топологической сопряженности неабелевых дробно–линейных фазовых групп $PL^1(1)$ и $PL^2(1)$ общего положения следует их $\mathbb{R}$–голоморфная сопряженность, осуществляемая либо невырожденным дробно-линейным, либо невырожденным антиголоморфным дробно-линейным преобразованиями.*

Доказательство теоремы 1.2 непосредственно вытекает из следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 1.2. *Пусть при $I = \{1, 2\}$ неабелевые дробно–линейные фазовые группы $PL^1(1)$ и $PL^2(1)$ топологически сопряжены, а сопрягающий гомеоморфизм f таков, что:*

1) $f(O_\tau) = O_\tau,\ \tau = \overline{1,2};$ (1.2)

2) *либо*

$$f(\lambda v_1, v_2) = (\lambda|\lambda|^\alpha f_1(v), f_2(v)),\ \forall v \in \mathbb{C}P^1,\ Re\ \alpha > -1; \tag{2.2}$$

либо

$$f(\lambda v_1, v_2) = (\overline{\lambda}|\lambda|^\alpha f_1(v), f_2(v)),\ \forall v \in \mathbb{C}P^1,\ Re\ \alpha > -1; \tag{3.2}$$

3) $f(av_1 + bv_2, cv_1 + dv_2) = (Af_1(v) + Bf_2(v), Cf_1(v) + Df_2(v)),\ \forall v \in \mathbb{C}P^1,\ |b| + |c| > 0;$

4) *матрицы* $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1}$ *и* $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$ *таковы, что* $|\mu| \neq 1,\ |\theta| \neq 1,\ S = \begin{pmatrix} a_* & b_* \\ c_* & d_* \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} A_* & B_* \\ C_* & D_* \end{pmatrix},\ B_*/D_* = (b_*/d_*)^{1+\beta},\ Re\ (\beta - \alpha)\ ln\ |b_*/d_*| - Im\ (\beta - \alpha)\ arg\ (b_*/d_*) \neq 0;$

5) *подгруппа группы $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел по умножению, образованная числами λ и b_*/d_*, плотна в множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Тогда при (2.2) этот гомеоморфизм имеет вид $f(v) = (v_1|v_1|^\alpha,\ v_2|v_2|^\alpha),\ \forall v \in \mathbb{C}P^1$; а при (3.2) – вид $f(v) = (\overline{v}_1|v_1|^\alpha,\ \overline{v}_2|v_2|^\alpha),\ \forall v \in \mathbb{C}P^1$.*

Доказательство. В силу соотношений (1.2) – (3.2) приходим к выводу, что $ln\ |\mu|\ ln\ |\theta| > 0$.

Пусть выполняется тождество (2.2) (случай, когда имеет место тождество (3.2), рассматривается аналогично). На основании (2.2) и условия 3 данной леммы имеем следующие соотношения в карте M_2 атласа M многообразия $\mathbb{C}P^1 :\ \psi(\lambda^k (P^m)^l v^2) = \lambda^k |\lambda|^{k\alpha} (Q^m)^l \psi(v_1),\ \forall v^2 \in M_2,\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall l \in \mathbb{Z},\ \forall m \in \mathbb{Z}$. Переходя в них к пределу при $m \to -\infty$, если $|\mu| > 1$, и к пределу при $m \to +\infty$, если $|\mu| < 1$, получаем, что

$$\psi(\lambda^k (b_*/d_*)^l) = \lambda^k |\lambda|^{k\alpha} (B_*/D_*)^l,\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall l \in \mathbb{Z}. \tag{4.2}$$

Из условия 5 леммы вытекает, что для всякого комплексного числа $w \in \mathbb{C}$ существуют такие последовательности $\{k_s(w)\}$ и $\{l_s(w)\}$ целых чисел, что $\lim\limits_{s\to+\infty} \lambda^{k_s(w)} (b_*/d_*)^{l_s(w)} = w,\ \lim\limits_{s\to+\infty} |k_s(w)| = \lim\limits_{s\to+\infty} |l_s(w)| = +\infty$. Отсюда на основании соотношений (4.2) имеем, что $\psi(v_1) = v_1 |v_1|^\alpha \lim\limits_{s\to+\infty} (b_*/d_*)^{(\beta-\alpha) l_s(v_1)}$, $\forall v^2 \in M_2$. Теперь из условия 5 данной леммы вытекает, что $|b_*/d_*| \neq 1$, а из условия 4 – что $\lim\limits_{s\to+\infty} (b_*/d_*)^{(\beta-\alpha) l_s(v_1)} = 1$. В итоге получаем первое представление из условия леммы 1.2.

Теорема 2.2 [30]. *Из топологической сопряженности при $n > 1$ неабелевых дробно–линейных фазовых групп $PL^1(n)$ и $PL^2(n)$ общего положения следует их $\mathbb{R}$–голоморфная сопряженность.*

Справедливость данной теоремы вытекает из следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 2.2. *Пусть матрицы $P_r = S_r\ diag\{p_{1r}, \ldots, p_{n+1,r}\} S_r^{-1}, Q_r = T_r\ diag\{q_{1r}, \ldots, q_{n+1,r}\} T_r^{-1}$, наборы чисел $\{ln\ (p_{1r}/p_{n+1,r}), \ldots, ln\ (p_{nr}/p_{n+1,r})\}$ и $\{ln\ (q_{1r}/q_{n+1,r}), \ldots, ln\ (q_{nr}/q_{n+1,r})\}$ являются простыми, $\forall\ r \in I$. Тогда из топологической сопряженности неабелевых дробно–линейных фазовых групп $PL^1(n)$ и $PL^2(n)$ общего положения следует их сопряженность, осуществляемая либо невырожденным дробно–линейным, либо невырожденным антиголоморфным дробно–линейным преобразованиями.*

Доказательство. Пусть выполняются тождества (1.0). С помощью замены $\xi(v) = T_1^{-1} f(S_1 v),\ \forall v \in \mathbb{C}P^n$, от них переходим к тождествам

$$\xi(diag\{p_{11}, \ldots, p_{n+1,1}\} v) = diag\{q_{11}, \ldots, q_{n+1,1}\} \xi(v),\ \forall v \in \mathbb{C}P^n. \tag{5.2}$$

Аналогичным образом, как и при доказательстве теоремы 2.1, приходим к выводу, что сопрягающий гомеоморфизм ξ оставляет на месте общие неподвижные точки $O_\tau,\ \tau = \overline{1, n+1}$, дробно–линейных преобразований (7.1) и (8.1) при $r = 1$.

Пусть гомеоморфизмы всех сфер Римана $\overline{\mathbb{C}}_{ls},\ s \neq l$, сохраняют ориентацию (случай изменения ориентации рассматривается аналогично). Тогда на основании теоремы 2.1.2, лемм 1.2.2, 2.2.2 и хода доказательства теоремы 2.1 приходим к утверждению леммы 2.2.

§ 3. Гладкая, $\mathbb{R}$–голоморфная и голоморфная сопряженности дробно–линейных фазовых групп.

Сначала рассмотрим гладкую, $\mathbb{R}$–голоморфную и голоморфную сопряженности абелевых дробно–линейных фазовых групп $PL^1(n)$ и $PL^2(n)$.

Теорема 1.3. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.1. *Тогда для гладкой ($\mathbb{R}$–голоморфной) сопряженности дробно–линейных фазовых групп* $PL^1(1)$ *и* $PL^2(1)$ *необходимо и достаточно, чтобы либо* $q_{1r}/q_{2r} = (p_{1r}/p_{2r})^{\varepsilon},\ \forall\ r \in I$, *либо* $q_{1r}/q_{2r} = (\overline{p_{1r}/p_{2r}})^{\varepsilon},\ \forall\ r \in I;\ \varepsilon^2 = 1$.

Доказательство данного утверждения аналогично доказательству теоремы 1.1 и основано на теореме 1.4.2.

Аналогично теореме 1.3 получаем следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.1. *Тогда для голоморфной сопряженности дробно–линейных фазовых групп* $PL^1(1)$ *и* $PL^2(1)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $q_{1r}/q_{2r} = (p_{1r}/p_{2r})^{\varepsilon},\ \forall\ r \in I,\ \varepsilon^2 = 1$.

Теорема 3.3. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.1. *Тогда для гладкой ($\mathbb{R}$–голоморфной) сопряженности дробно–линейных фазовых групп* $PL^1(n)$ *и* $PL^2(n)$ *необходимо и достаточно существования такой перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n+1) \to (1, \ldots, n+1)$, *что либо* $q_{\varrho(k)r}/q_{\varrho(n+1)r} = p_{kr}/p_{n+1,r},\ \forall\ r \in I,\ k = \overline{1,n}$, *либо* $q_{\varrho(k)r}/q_{\varrho(n+1)r} = \overline{p_{kr}/p_{n+1,r}},\ \forall\ r \in I, k = \overline{1,n}$.

Доказательство утверждения осуществляется с использованием хода доказательства теоремы 2.1 путем дифференцирования тождеств (6.1).

Теперь аналогично данной теореме доказываем следующую.

Теорема 4.3. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.1. *Тогда для голоморфной сопряженности дробно–линейных фазовых групп* $PL^1(n)$ *и* $PL^2(n)$ *необходимо и достаточно существования такой перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n+1) \to (1, \ldots, n+1)$, *что* $q_{\varrho(k)r}/q_{\varrho(n+1)r} = p_{kr}/p_{n+1,r},\ \forall\ r \in I,\ k = \overline{1,n}$.

И, наконец, рассмотрим гладкую и голоморфную сопряженности неабелевых дробно–линейных фазовых групп $PL^1(n)$ и $PL^2(n)$.

Теорема 5.3 [37]. *Пусть выполняются условия леммы* 1.2. *Тогда для гладкой ($\mathbb{R}$–голоморфной) сопряженности неабелевых дробно–линейных фа-*

зовых групп $PL^1(1)$ и $PL^2(1)$ необходима и достаточна их сопряженность, осуществляемая либо невырожденным дробно-линейным, либо невырожденным антиголоморфным дробно-линейным преобразованиями.

Доказательство теоремы 5.3 аналогично доказательству теоремы 1.2 и базируется на следующем вспомогательном утверждении.

Лемма 1.3. *Пусть и $I = \{1\}$ дробно–линейные группы $PL^1(1)$ и $PL^2(1)$ гладко сопряжены, а сопрягающий диффеоморфизм f таков, что:*

1) *выполняются соотношения* (1.2)*;*

2) *либо*

$$f(p_1v_1, v_2) = (p_1f_1(v), f_2(v)), \ \forall v \in \mathbb{C}P^1, \ p_1 \neq 0, \ p_1 \neq 1; \qquad (1.3)$$

либо

$$f(p_1v_1, v_2) = (\overline{p}_1f_1(v), f_2(v)), \ \forall v \in \mathbb{C}P^1, \ p_1 \neq 0, \ p_1 \neq 1. \qquad (2.3)$$

Тогда при (1.3) *этот гомеоморфизм имеет вид* $f(v) = (av_1, v_2), \ \forall v \in \mathbb{C}P^1$*; а при* (2.3) *– вид* $f(v) = (a\overline{v}_1, \overline{v}_2), \ \forall v \in \mathbb{C}P^1$.

Доказательство. Пусть выполняются соотношения (1.2). Дифференцируя в карте M_2 атласа M многообразия $\mathbb{C}P^1$ тождество (1.1) при $v_1 = 0$, получаем равенство $p_1D_{v_1}\psi(0)dv_1 + \overline{p}_1D_{\overline{v}_1}\psi(0)d\overline{v}_1 = q_1(D_{v_1}\psi(0)dv_1 + D_{\overline{v}_1}\psi(0)d\overline{v}_1)$. В силу того, что f есть диффеоморфизм, имеем, что $|D_{v_1}\psi(0)| + |D_{\overline{v}_1}\psi(0)| > 0$. Поэтому из последнего равенства приходим либо к соотношению $q_1 = p_1$, либо к соотношению $q_1 = \overline{p}_1$.

В первом случае имеет место тождество (1.3), из которого получаем тождества $\psi(p_1^lv_1) = p_1^l\psi(v_1), \ \forall v^2 \in M_2, \ \forall \in \mathbb{Z}$, голоморфно дифференцируя которые по v_1, приходим к тождествам $D_{v_1}\psi(p_1^lv_1) = D_{v_1}\psi(v_1), \ \forall v^2 \in M_2, \ \forall l \in \mathbb{Z}$. В силу того, что преобразование ψ является диффеоморфизмом, получаем тождество $D_{v_1}\psi(v_1) = a, \ \forall v^2 \in M_2$. Отсюда с учетом соотношения (1.3) приходим к первому представлению из данной леммы.

Аналогичным образом во втором случае получаем второе представление из леммы 1.3.

Теперь аналогично теореме 5.3 получаем утверждение.

Теорема 6.3. *Пусть выполняются условия леммы* 1.2*. Тогда для голоморфной сопряженности неабелевых дробно–линейных фазовых групп $PL^1(1)$ и $PL^2(1)$ необходима и достаточна их сопряженность, осуществляемая невырожденным дробно-линейным преобразованием.*

Теорема 7.3 [30]. *Пусть выполняются условия леммы* 2.2*. Тогда для гладкой ($\mathbb{R}$–голоморфной) сопряженности неабелевых дробно–линейных фа-*

зовых групп $PL^1(n)$ *и* $PL^2(n)$ *необходима и достаточна их сопряженность, осуществляемая либо невырожденным дробно–линейным, либо невырожденным антиголоморфным дробно–линейным преобразованиями.*

Доказательство. Необходимость. Как и при доказательстве леммы 2.2, от тождеств (1.0) переходим к тождествам (5.2). Далее в силу теоремы 2.1 приходим к выводу, что имеют место либо соотношения (4.1) при $r = 1$, либо соотношения (5.1) при $r = 1$.

Пусть выполняются соотношения (4.1) при $r = 1$ (случай выполнения соотношений (5.1) при $r = 1$ рассматривается аналогично). Рассмотрим аффинную карту M_{n+1} атласа M проективного пространства $\mathbb{C}P^n$. В силу хода доказательства теоремы 2.1 и теоремы 1.4.2 гладкая (голоморфная) сопряженность сужений дробно–линейных фазовых групп $PL^1(n)$ и $PL^2(n)$ на эту карту осуществляется невырожденным линейным $\mathbb{R}$–голоморфным преобразованием. Непосредственными вычислениями на основании соотношений (4.1) при $r = 1$ убеждаемся, что $\alpha = 0$ и даное невырожденное линейное преобразование является голоморфным, как сохраняющее собственные значения матриц. С помощью дробно–линейных функций перехода между аффинными картами атласа M на основании вышеуказанного невырожденного линейного преобразования получаем невырожденное дробно–линейное преобразование. Оно и будет искомым сопрягающим диффеоморфизмом (голоморфизмом).

Достаточность проверяется непосредственными вычислениями.

Аналогично теореме 7.3 имеем такое утверждение.

Теорема 8.3. *Пусть выполняются условия леммы* 2.2. *Тогда для голоморфной сопряженности неабелевых дробно–линейных фазовых групп* $PL^1(n)$ *и* $PL^2(n)$ *необходима и достаточна их сопряженность, осуществляемая невырожденным дробно–линейным преобразованием.*

§ 4. Эквивалентности дробно–линейных накрывающих слоений.

Рассмотрим дробно–линейные накрывающие слоения $\mathfrak{PL}^1(n)$ и $\mathfrak{PL}^2(n)$ с соответствующими им дробно–линейными фазовыми группами $PL^1(n)$ и $PL^2(n)$, определяемыми дробно–линейными действиями $P_{\gamma_1}v$, $\forall v \in \mathbb{C}P^n$, $P_{\gamma_1} \in GL(n+1,\mathbb{C})$, $\forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, и $Q_{\gamma_2}v$, $\forall v \in \mathbb{C}P^n$, $Q_{\gamma_2} \in GL(n+1,\mathbb{C})$, $\forall \gamma_2 \in \pi_1(B_2)$, соответственно. На основании теорем 1.2.1, 1.1, 2.1, 1.3 – 8.3, лемм 1.2 и 2.2 получаем следующие критерии топологической, гладкой, $\mathbb{R}$–голоморфной и голоморфной эквивалентностей дробно–линейных накрывающих слоений.

Теорема 1.4. *Пусть матрицы* $P_{\gamma_1} = S\ diag\{p_{1\gamma_1}, p_{2\gamma_1}\}\ S^{-1}$, $Q_{\gamma_2} = T\ diag\{q_{1\gamma_2}, q_{2\gamma_2}\}\ T^{-1}$, $\forall\gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $\forall\gamma_2 \in \pi_1(B_2)$. *Тогда для топологической эквивалентности абелевых дробно–линейных накрывающих слоений* $C\mathfrak{PL}^1(1)$ *и* $C\mathfrak{PL}^2(1)$ *необходимо и достаточно существования такого изоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного гомеоморфизмом* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *что либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})|p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}|^\alpha$, $Re\ \alpha \neq -1$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, *либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = \overline{p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}}|p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}|^\alpha$, $Re\ \alpha \neq -1$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$.

Теорема 2.4. *Пусть при* $n > 1$ *матрицы* $P_{\gamma_1} = S\ diag\{p_{1\gamma_1},\ \ldots, p_{n+1,\gamma_1}\}\ S^{-1}$, $Q_{\gamma_2} = T\ diag\{q_{1\gamma_2}, \ldots, q_{n+1,\gamma_2}\}\ T^{-1}$, *наборы чисел* $\{ln\ (p_{1\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}), \ldots, ln\ (p_{n\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1})\}$ *и* $\{ln\ (q_{1\gamma_2}/q_{n+1,\gamma_2}), \ldots, ln\ (q_{n\gamma_2}/q_{n+1,\gamma_2})\}$ *являются простыми,* $\forall\gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $\forall\gamma_2 \in \pi_1(B_2)$. *Тогда для топологической эквивалентности абелевых дробно–линейных накрывающих слоений* $C\mathfrak{PL}^1(n)$ *и* $C\mathfrak{PL}^2(n)$ *необходимо и достаточно существования таких изоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного гомеоморфизмом* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n+1) \to (1, \ldots, n+1)$ *и комплексного числа* α *с* $Re\ \alpha > -1$, *что либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = (p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1})|p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}|^\alpha, \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1), k = \overline{1,n}$, *либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = (\overline{p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}})|p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}|^\alpha$, $\forall\gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$.

Теорема 3.4. *Пусть при* $n = 1$ *выполняются условия леммы* 1.2, *а при* $n > 1$ *матрицы* $P_{\gamma_1} = S_{\gamma_1}\ diag\{p_{1\gamma_1}, \ldots, p_{n+1,\gamma_1}\}S_{\gamma_1}^{-1}$, $Q_{\gamma_2} = T_{\gamma_2}\ diag\{q_{1\gamma_2}, \ldots, q_{n+1,\gamma_2}\}\ T_{\gamma_2}^{-1}$, *наборы чисел* $\{ln\ (p_{1\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}), \ldots, ln\ (p_{n\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1})\}$ *и* $\{ln\ (q_{1\gamma_1}/q_{n+1,\gamma_1}), \ldots, ln\ (q_{n\gamma_1}/q_{n+1,\gamma_1})\}$ *являются простыми,* $\forall\gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $\forall\gamma_2 \in \pi_1(B_2)$. *Тогда из топологической эквивалентности неабелевых дробно–линейных накрывающих слоений* $\mathfrak{PL}^1(n)$ *и* $\mathfrak{PL}^2(n)$ *с соответствующими им неабелевыми дробно–линейными фазовыми группами* $PL^1(n)$ *и* $PL^2(n)$ *общего положения следует* $\mathbb{R}$*–голоморфная сопряженность данных фазовых групп при некотором изоморфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном гомеоморфизмом* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *осуществляемая либо невырожденным дробно–линейным, либо невырожденным антиголоморфным дробно–линейным преобразованиями.*

Следствие 1.4. *Из топологической эквивалентности неабелевых дробно–линейных накрывающих слоений* $\mathfrak{PL}^1(n)$ *и* $\mathfrak{PL}^2(n)$ *общего положения следует их* $\mathbb{R}$*–голоморфная эквивалентность.*

Теорема 4.4. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда для гладкой (*$\mathbb{R}$*–голоморфной) эквивалентности абелевых дробно–линейных накрывающих слоений* $C\mathfrak{PL}^1(1)$ *и* $C\mathfrak{PL}^2(1)$ *необходимо и достаточно существования такого изоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного дифео-*

морфизмом ($\mathbb{R}$–голоморфизмом) $g_\mu : B_1 \to B_2$, *что либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})^\varepsilon$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, *либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (\overline{p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}})^\varepsilon$, $\forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$; $\varepsilon^2 = 1$.

Теорема 5.4. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда для голоморфной эквивалентности абелевых дробно–линейных накрывающих слоений* $C\mathfrak{PL}^1(1)$ *и* $C\mathfrak{PL}^2(1)$ *необходимо и достаточно существования такого изоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного голоморфизмом* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *что* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})^\varepsilon$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $\varepsilon^2 = 1$.

Теорема 6.4. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.4. *Тогда для гладкой ($\mathbb{R}$–голоморфной) эквивалентности абелевых дробно–линейных накрывающих слоений* $C\mathfrak{PL}^1(n)$ *и* $C\mathfrak{PL}^2(n)$ *необходимо и достаточно существования таких изоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного дифеоморфизмом ($\mathbb{R}$–голоморфизмом)* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n+1) \to (1, \ldots, n+1)$, *что либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$, *либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = \overline{p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}}$, $\forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$.

Теорема 7.4. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.4. *Тогда для голоморфной эквивалентности абелевых дробно–линейных накрывающих слоений* $C\mathfrak{PL}^1(n)$ *и* $C\mathfrak{PL}^2(n)$ *необходимо и достаточно существования таких изоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного голоморфизмом* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n+1) \to (1, \ldots, n+1)$, *что* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$.

Теорема 8.4. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4. *Тогда для гладкой ($\mathbb{R}$–голоморфной) эквивалентности неабелевых дробно–линейных накрывающих слоений* $\mathfrak{PL}^1(n)$ *и* $\mathfrak{PL}^2(n)$ *с соответствующими им дробно–линейными фазовыми группами* $PL^1(n)$ *и* $PL^2(n)$ *необходима и достаточна сопряженность данных фазовых групп при некотором изоморфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном дифеоморфизмом ($\mathbb{R}$–голоморфизмом)* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *осуществляемая либо невырожденным дробно–линейным, либо невырожденным антиголоморфным дробно–линейным преобразованиями.*

Теорема 9.4. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4. *Тогда для голоморфной эквивалентности неабелевых дробно–линейных накрывающих слоений* $\mathfrak{PL}^1(n)$ *и* $\mathfrak{PL}^2(n)$ *с соответствующими им дробно–линейными фазовыми группами* $PL^1(n)$ *и* $PL^2(n)$ *необходима и достаточна сопряженность данных фазовых групп при некотором изоморфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном голоморфизмом* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *осуществляемая невырожденным дробно–линейным преобразованием.*

§ 5. Вложимости дробно–линейных накрывающих слоений.

Рассмотрим дробно–линейные накрывающие слоения $\mathfrak{PL}^1(n)$ и $\mathfrak{PL}^2(n)$ с соответствующими им дробно–линейными фазовыми группами $PL^1(n)$ и $PL^2(n)$. На основании теорем 1.3.1, 1.1, 2.1, 1.3 – 8.3, лемм 1.2 и 2.2 получаем следующие критерии вложимостей дробно–линейных накрывающих слоений.

Теорема 1.5. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда для вложимости абелева дробно–линейного накрывающего слоения* $C\mathfrak{PL}^1(1)$ *в абелево дробно–линейное накрывающее слоение* $C\mathfrak{PL}^2(1)$ *необходимо и достаточно существования такого гомоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, *что либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})|p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}|^\alpha$, $Re\ \alpha \neq -1$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, *либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = \overline{p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}}|p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}|^\alpha$, $Re\ \alpha \neq -1$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$.

Теорема 2.5. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.4. *Тогда для вложимости абелева дробно–линейного накрывающего слоения* $C\mathfrak{PL}^1(n)$ *в абелево дробно–линейное накрывающее слоение* $C\mathfrak{PL}^2(n)$ *необходимо и достаточно существования таких гомоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, *перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n{+}1) \to (1, \ldots, n{+}1)$ *и комплексного числа* α *с* $Re\ \alpha > -1$, *что либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = (p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1})|p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}|^\alpha, \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1), k = \overline{1,n}$, *либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = (\overline{p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}})|p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}|^\alpha$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$.

Теорема 3.5. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4. *Тогда из вложимости неабелевого дробно–линейного накрывающего слоения* $\mathfrak{PL}^1(n)$ *в неабелевое дробно–линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{PL}^2(n)$ *с соответствующими им неабелевыми дробно–линейными фазовыми группами* $PL^1(n)$ *и* $PL^2(n)$ *общего положения следует* $\mathbb{R}$*–голоморфная сопряженность данных фазовых групп при некотором гомоморфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, *осуществляемая либо невырожденным дробно–линейным, либо невырожденным антиголоморфным дробно–линейным преобразованиями.*

Следствие 1.5. *Из вложимости неабелевого дробно–линейного накрывающего слоения общего положения* $\mathfrak{PL}^1(n)$ *в неабелевое дробно–линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{PL}^2(n)$ *общего положения следует их* $\mathbb{R}$*–голоморфная вложимость.*

Теорема 4.5. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда для гладкой (*$\mathbb{R}$*–голоморфной) вложимости абелева дробно–линейного накрывающего слоения* $C\mathfrak{PL}^1(1)$ *в абелево дробно–линейное накрывающее слоение*

$C\mathfrak{PL}^2(1)$ *необходимо и достаточно существования такого гомоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного гладким* ($\mathbb{R}$–*голоморфным*) *вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, *что либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})^\varepsilon$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, *либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (\overline{p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}})^\varepsilon$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$; $\varepsilon^2 = 1$.

Теорема 5.5. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда для голоморфной вложимости абелева дробно–линейного накрывающего слоения* $C\mathfrak{PL}^1(1)$ *в абелево дробно–линейное накрывающее слоение* $C\mathfrak{PL}^2(1)$ *необходимо и достаточно существования такого гомоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного голоморфным вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, *что* $q_{1\mu(\gamma_1)}/ q_{2\mu(\gamma_1)} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})^\varepsilon$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $\varepsilon^2 = 1$.

Теорема 6.5. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.4. *Тогда для гладкой* ($\mathbb{R}$–*голоморфной*) *вложимости абелева дробно–линейного накрывающего слоения* $C\mathfrak{PL}^1(n)$ *в абелево дробно–линейное накрывающее слоение* $C\mathfrak{PL}^2(n)$ *необходимо и достаточно существования таких гомоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного гладким* ($\mathbb{R}$–*голоморфным*) *вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, *перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n+1) \to (1, \ldots, n+1)$, *что либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$, *либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = \overline{p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}}$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$.

Теорема 7.5. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.4. *Тогда для голоморфной вложимости абелева дробно–линейного накрывающего слоения* $C\mathfrak{PL}^1(n)$ *в абелево дробно–линейное накрывающее слоение* $C\mathfrak{PL}^2(n)$ *необходимо и достаточно существования таких гомоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного голоморфным вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, *перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n+1) \to (1, \ldots, n+1)$, *что* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$.

Теорема 8.5. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4. *Тогда для гладкой* ($\mathbb{R}$–*голоморфной*) *вложимости неабелевого дробно–линейного накрывающего слоения* $\mathfrak{PL}^1(n)$ *в неабелевое дробно–линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{PL}^2(n)$ *с соответствующими им дробно–линейными фазовыми группами* $PL^1(n)$ *и* $PL^2(n)$ *необходима и достаточна сопряженность данных фазовых групп при некотором гомоморфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном гладким* ($\mathbb{R}$–*голоморфным*) *вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, *осуществляемая либо невырожденным дробно–линейным, либо невырожденным антиголоморфным дробно–линейным преобразованиями.*

Теорема 9.5. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4. *Тогда для голоморфной вложимости неабелевого дробно–линейного накрывающего сло-*

ения $\mathfrak{PL}^1(n)$ в неабелевое дробно–линейное накрывающее слоение $\mathfrak{PL}^2(n)$ с соответствующими им дробно–линейными фазовыми группами $PL^1(n)$ и $PL^2(n)$ необходима и достаточна сопряженность данных фазовых групп при некотором гомоморфизме $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденном голоморфным вложением $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, осуществляемая невырожденным дробно–линейным преобразованием.

Теперь на основании теорем 1.5 – 9.5 получаем критерии слабой топологической (гладкой, $\mathbb{R}$–голоморфной, голоморфной) эквивалентности дробно–линейных накрывающих слоений.

§ 6. Накрытия дробно–линейных накрывающих слоений.

Рассмотрим дробно–линейные накрывающие слоения $\mathfrak{PL}^1(n)$ и $\mathfrak{PL}^2(n)$ с соответствующими им дробно–линейными фазовыми группами $PL^1(n)$ и $PL^2(n)$. На основании теорем 1.4.1, 1.1, 2.1, 1.3 – 8.3, лемм 1.2 и 2.2 получаем следующие критерии накрытий дробно–линейных накрывающих слоений.

Теорема 1.6. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда для накрытия абелева дробно–линейного накрывающего слоения $C\mathfrak{PL}^2(1)$ абелевым дробно–линейным накрывающим слоением $C\mathfrak{PL}^1(1)$ необходимо и достаточно существования такого мономорфизма $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденного накрытием $g_\mu : B_1 \to B_2$, что либо $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})\,|p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}|^\alpha$, $Re\ \alpha \neq -1$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, либо $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = \overline{p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}}|p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}|^\alpha$, $Re\ \alpha \neq -1$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$.*

Теорема 2.6. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.4. *Тогда для накрытия абелевого дробно–линейного накрывающего слоения $C\mathfrak{PL}^2(n)$ абелевым дробно–линейным накрывающим слоением $C\mathfrak{PL}^1(n)$ необходимо и достаточно существования таких мономорфизма $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденного накрытием $g_\mu : B_1 \to B_2$, перестановки $\varrho : (1,\ldots,n+1) \to (1,\ldots,n+1)$ и комплексного числа α с $Re\ \alpha > -1$, что либо $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = (p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1})|p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}|^\alpha, \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1), k = \overline{1,n}$, либо $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = (\overline{p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}})|p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}|^\alpha$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$,*

Теорема 3.6. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4. *Тогда из накрытия неабелевого дробно–линейного накрывающего слоения $\mathfrak{PL}^2(n)$ неабелевым дробно–линейным накрывающим слоением $\mathfrak{PL}^1(n)$ с соответствующими им неабелевыми дробно–линейными фазовыми группами $PL^2(n)$ и $PL^1(n)$ общего положения следует $\mathbb{R}$–голоморфная сопряженность данных фазовых групп при некотором мономорфизме $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, по-*

рожденном накрытием $g_\mu : B_1 \to B_2$, осуществляемая либо невырожденным дробно–линейным, либо невырожденным антиголоморфным дробно–линейным преобразованиями.

Следствие 1.6. *Накрытие неабелевого дробно–линейного накрывающего слоения общего положения $\mathfrak{PL}^2(n)$ неабелевым дробно–линейным накрывающим слоением $\mathfrak{PL}^1(n)$ общего положения является $\mathbb{R}$–голоморфным.*

Теорема 4.6. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда для гладкого ($\mathbb{R}$–голоморфного) накрытия абелева дробно–линейного накрывающего слоения $C\mathfrak{PL}^2(1)$ абелевым дробно–линейным накрывающим слоением $C\mathfrak{PL}^1(1)$ необходимо и достаточно существования такого мономорфизма $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденного гладким ($\mathbb{R}$–голоморфным) накрытием $g_\mu : B_1 \to B_2$, что либо $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})^\varepsilon$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, либо $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (\overline{p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}})^\varepsilon$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$; $\varepsilon^2 = 1$.*

Теорема 5.6. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда для голоморфного накрытия абелева дробно–линейного накрывающего слоения $C\mathfrak{PL}^2(1)$ абелевым дробно–линейным накрывающим слоением $C\mathfrak{PL}^1(1)$ необходимо и достаточно существования такого мономорфизма $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденного голоморфным накрытием $g_\mu : B_1 \to B_2$, что $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})^\varepsilon$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $\varepsilon^2 = 1$.*

Теорема 6.6. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.4. *Тогда для гладкого ($\mathbb{R}$–голоморфного) накрытия абелевого дробно–линейного накрывающего слоения $C\mathfrak{PL}^2(n)$ абелевым дробно–линейным накрывающим слоением $C\mathfrak{PL}^1(n)$ необходимо и достаточно существования таких мономорфизма $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденного гладким ($\mathbb{R}$–голоморфным) накрытием $g_\mu : B_1 \to B_2$, перестановки $\varrho : (1,\ldots,n+1) \to (1,\ldots,n+1)$, что либо $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$, либо $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = \overline{p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}}$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$.*

Теорема 7.6. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.4. *Тогда для голоморфного накрытия абелевого дробно–линейного накрывающего слоения $C\mathfrak{PL}^2(n)$ абелевым дробно–линейным накрывающим слоением $C\mathfrak{PL}^1(n)$ необходимо и достаточно существования таких мономорфизма $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденного голоморфным накрытием $g_\mu : B_1 \to B_2$, перестановки $\varrho : (1,\ldots,n+1) \to (1,\ldots,n+1)$, что $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$.*

Теорема 8.6. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4. *Тогда для гладкого ($\mathbb{R}$–голоморфного) накрытия неабелевого дробно–линейного накрываю-*

щего слоения $\mathfrak{PL}^2(n)$ неабелевым дробно–линейным накрывающим слоением $\mathfrak{PL}^1(n)$ с соответствующими им дробно–линейными фазовыми группами $PL^2(n)$ и $PL^1(n)$ необходима и достаточна сопряженность данных фазовых групп при некотором мономорфизме $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденном гладким ($\mathbb{R}$–голоморфным) накрытием $g_\mu : B_1 \to B_2$, осуществляемая либо невырожденным дробно–линейным, либо невырожденным антиголоморфным дробно–линейным преобразованиями.

Теорема 9.6. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4. *Тогда для голоморфного накрытия неабелевого дробно–линейного накрывающего слоения $\mathfrak{PL}^2(n)$ неабелевым дробно–линейным накрывающим слоением $\mathfrak{PL}^1(n)$ с соответствующими им дробно–линейными фазовыми группами $PL^2(n)$ и $PL^1(n)$ необходима и достаточна сопряженность данных фазовых групп при некотором мономорфизме $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, порожденном голоморфным накрытием $g_\mu : B_1 \to B_2$, осуществляемая невырожденным дробно–линейным преобразованием.*

§ 7. Структурная устойчивость дробно–линейных накрывающих слоений.

Рассмотрим дробно–линейное накрывающее слоение $\mathfrak{PL}^1(n)$ с соответствующей ему дробно–линейной фазовой группой $PL^1(n)$.

Теорема 1.7. *Неабелевы дробно–линейные накрывающие слоения структурно неустойчивы.*

Доказательство данного утверждения проводится на основании теоремы 3.4.

Следствие 1.7. *Если дробно–линейное накрывающее слоение структурно устойчиво, то оно абелево.*

Предположим, что абелево дробно–линейное накрывающее слоение является структурно устойчивым. Аналогично теореме 1.7 на основании теорем 1.4 и 2.4 получаем утверждения.

Теорема 2.7. *Если абелево дробно–линейное накрывающее слоение структурно устойчиво, то фундаментальная группа его базы имеет одну независимую образующую.*

Теорема 3.7. *Для того, чтобы дробно–линейное накрывающее слоение $\mathfrak{PL}^1(n)$ было структурно устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы $n = 1$, группа $\pi_1(B_1)$ имела одну независимую образующую γ_1 и при этом $|p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}| \neq 1$.*

§ 8. Эквивалентности неавтономных проективных матричных уравнений Риккати.

Рассмотрим однородные проективные матричные уравнения Риккати

$$dv = \sum_{j=1}^{m} A_j(z_1, \ldots, z_m) v \; dz_j \tag{1.8}$$

и

$$dv = \sum_{j=1}^{m} B_j(z_1, \ldots, z_m) v \; dz_j, \tag{2.8}$$

обыкновенные при $m = 1$ и вполне разрешимые при $m > 1$, где квадратные матрицы $A_j(z_1, \ldots, z_m) = ||a_{ikj}(z_1, \ldots, z_m)||$ и $B_j(z_1, \ldots, z_m) = ||b_{ikj}(z_1, \ldots, \; z_m)||$ размера $n+1$ состоят из голоморфных функций $a_{ikj} : B_1 \to \mathbb{C}$ и $b_{ikj} : B_2 \to \mathbb{C}$, $i = \overline{1, n+1}$, $k = \overline{1, n+1}$, $j = \overline{1, m}$, линейно связные голоморфные многообразия B_1 и B_2 голоморфно эквивалентны друг другу. Общие решения однородных проективных матричных уравнений Риккати (1.8) и (2.8) определяют дробно–линейные накрывающие слоения $\mathfrak{PL}^1(n)$ и $\mathfrak{PL}^2(n)$, соответственно, на многообразиях $\mathbb{C}P^n \times B_1$ и $\mathbb{C}P^n \times B_2$.

Определение 1.8. *Будем говорить, что однородные проективные матричные уравнения Риккати* (1.8) *и* (2.8) **топологически (гладко, $\mathbb{R}$–голоморфно, голоморфно) эквивалентны**, *если топологически (гладко, $\mathbb{R}$–голоморфно, голоморфно) эквивалентны соответствующие им дробно–линейные накрывающие слоения* $\mathfrak{PL}^1(n)$ и $\mathfrak{PL}^2(n)$.

Определение 2.8. *Дробно–линейную фазовую группу* $PL^1(n)$ $(PL^2(n))$ *дробно–линейного накрывающего слоения* $\mathfrak{PL}^1(n)$ $(\mathfrak{PL}^2(n))$, *определяемого однородным проективным матричным уравнением Риккати* (1.8) ((2.8)), *будем называть* **группой голономии** *этого уравнения.*

На основании теорем 1.4 – 9.4 получаем следующие утверждения.

Теорема 1.8. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда для топологической эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.8) *и* (2.8) *с абелевыми группами голономии необходимо и достаточно существования такого изоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного гомеоморфизмом* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *что либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})|p_{1\gamma_1}/p_{2(\gamma_1}|^{\alpha}$, $Re\ \alpha \neq -1$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, *либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (\overline{p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}})|p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}|^{\alpha}$, $Re\ \alpha \neq -1$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$.

Теорема 2.8. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.4. *Тогда для топологической эквивалентности однородных проективных матричных урав-*

нений Риккати (1.8) *и* (2.8) *с абелевыми группами голономии необходимо и достаточно существования таких изоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного гомеоморфизмом* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *перестановки* $\varrho : (1, \dots, n+1) \to (1, \dots, n+1)$ *и комплексного числа* α *с* $Re\ \alpha > -1$, *что либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = (p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1})|p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}|^\alpha$, $\forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$, *либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = (\overline{p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}})|p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}|^\alpha$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$.

Теорема 3.8. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4. *Тогда из топологической эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.8) *и* (2.8) *с неабелевыми группами голономии общего положения следует* $\mathbb{R}$*–голоморфная сопряженность данных групп при некотором изоморфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном гомеоморфизмом* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *осуществляемая либо невырожденным дробно–линейным, либо невырожденным антиголоморфным дробно–линейным преобразованиями.*

Следствие 1.8. *Из топологической эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.8) *и* (2.8) *с неабелевыми группами голономии общего положения следует их* $\mathbb{R}$*–голоморфная эквивалентность.*

Теорема 4.8. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда для гладкой (*$\mathbb{R}$*–голоморфной) эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.8) *и* (2.8) *с абелевыми группами голономии необходимо и достаточно существования такого изоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного диффеоморфизмом (*$\mathbb{R}$*–голоморфизмом)* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *что либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})^\varepsilon$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, *либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (\overline{p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}})^\varepsilon$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$; $\varepsilon^2 = 1$.

Теорема 5.8. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда для голоморфной эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.8) *и* (2.8) *с абелевыми группами голономии необходимо и достаточно существования такого изоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного голоморфизмом* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *что* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})^\varepsilon$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $\varepsilon^2 = 1$.

Теорема 6.8. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.4. *Тогда для гладкой (*$\mathbb{R}$*–голоморфной) эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.8) *и* (2.8) *с абелевыми группами голономии необходимо и достаточно существования таких изоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного диффеоморфизмом (*$\mathbb{R}$*–голоморфизмом)*

$g_\mu : B_1 \to B_2$, *перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n+1) \to (1, \ldots, n+1)$, *что либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = \underline{p_{k\gamma_1}}/p_{n+1,\gamma_1}$, $\forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$, *либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = \overline{p_{k\gamma_1}}/p_{n+1,\gamma_1}$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$.

Теорема 7.8. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.4. *Тогда для голоморфной эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.8) *и* (2.8) *с абелевыми группами голономии необходимо и достаточно существования таких изоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного голоморфизмом* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n+1) \to (1, \ldots, n+1)$, *что* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}$, $\forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$.

Теорема 8.8. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4. *Тогда для гладкой ($\mathbb{R}$–голоморфной) эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.8) *и* (2.8) *с неабелевыми группами голономии необходима и достаточна сопряженность данных групп при некотором изоморфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном диффеоморфизмом ($\mathbb{R}$–голоморфизмом)* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *осуществляемая либо невырожденным дробно–линейным, либо невырожденным антиголоморфным дробно–линейным преобразованиями.*

Теорема 9.8. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4. *Тогда для голоморфной эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.8) *и* (2.8) *с неабелевыми группами голономии необходима и достаточна сопряженность данных групп при некотором изоморфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном голоморфизмом* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *осуществляемая невырожденным дробно–линейным преобразованием.*

§ 9. Вложимости неавтономных проективных матричных уравнений Риккати.

Рассмотрим однородные проективные матричные уравнения Риккати (1.8) и (2.8) с соответствующим им дробно–линейными накрывающими слоениями $\mathfrak{PL}^1(n)$ и $\mathfrak{PL}^2(n)$ и группами голономии $PL^1(n)$ и $PL^2(n)$.

Определение 1.9. *Будем говорить, что однородное проективное матричное уравнение Риккати* (1.8) **вложимо (гладко вложимо, $\mathbb{R}$–голоморфно вложимо, голоморфно вложимо)** *в однородное проективное матричное уравнение Риккати* (2.8), *если дробно–линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{PL}^1(n)$ *вложимо (гладко вложимо, $\mathbb{R}$–голоморфно вложимо, голоморфно вложимо) в дробно–линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{PL}^2(n)$.

Определение 2.9. *Будем говорить, что однородные проективные матричные уравнения Риккати* (1.8) *и* (2.8) **слабо топологически (гладко,**

$\mathbb{R}$**–голоморфно, голоморфно) эквивалентны**, *если слабо топологически (гладко, $\mathbb{R}$–голоморфно, голоморфно) эквивалентны дробно–линейные накрывающие слоения $\mathfrak{PL}^1(n)$ и $\mathfrak{PL}^2(n)$.*

На основании теорем 1.5 – 9.5 получаем следующие утверждения.

Теорема 1.9. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда для вложимости однородного проективного матричного уравнения Риккати* (1.8) *с абелевой группой голономии в однородное проективное матричное уравнение Риккати* (2.8) *с абелевой группой голономии необходимо и достаточно существования такого гомоморфизма* $\mu\ :\ \pi_1(B_1)\ \to\ \pi_1(B_2)$, *порожденного вложением* $g_\mu\ :\ B_1\ \hookrightarrow\ B_2$, *что либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})|p_{1\gamma_1}/p_{2(\gamma_1}|^\alpha,\ Re\ \alpha\neq -1,\ \forall\ \gamma_1\in\pi_1(B_1)$, *либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (\overline{p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}})|p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}|^\alpha,\ Re\ \alpha\neq -1,\ \forall\ \gamma_1\in\pi_1(B_1)$.

Теорема 2.9. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.4. *Тогда для вложимости однородного проективного матричного уравнения Риккати* (1.8) *с абелевой группой голономии в однородное проективное матричное уравнение Риккати* (2.8) *с абелевой группой голономии необходимо и достаточно существования таких гомоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1)\to\pi_1(B_2)$, *порожденного вложением* $g_\mu : B_1\hookrightarrow B_2$, *перестановки* $\varrho : (1,\ldots,n+1)\to(1,\ldots,n+1)$ *и комплексного числа* α *с* $Re\ \alpha > -1$, *что либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = (p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1})|p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}|^\alpha,\ \forall\gamma_1\in\pi_1(B_1),\ k=\overline{1,n}$, *либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = (\overline{p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}})|p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}|^\alpha,\ \forall\gamma_1\in\pi_1(B_1),\ k=\overline{1,n}$.

Теорема 3.9. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4. *Тогда из вложимости однородного проективного матричного уравнения Риккати* (1.8) *с неабелевой группой голономии общего положения в однородное проективное матричное уравнение Риккати* (2.8) *с неабелевой группой голономии общего положения следует* $\mathbb{R}$*–голоморфная сопряженность данных групп при некотором гомоморфизме* $\mu : \pi_1(B_1)\to\pi_1(B_2)$, *порожденном вложением* $g_\mu : B_1\hookrightarrow B_2$, *осуществляемая либо невырожденным дробно–линейным, либо невырожденным антиголоморфным дробно–линейным преобразованиями.*

Следствие 1.9. *Из вложимости однородного проективного матричного уравнения Риккати* (1.8) *с неабелевой группой голономии общего положения в однородное проективное матричное уравнение Риккати* (2.8) *с неабелевой группой голономии общего положения следует их* $\mathbb{R}$*–голоморфная вложимость.*

Теорема 4.9. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда для гладкой (*$\mathbb{R}$*–голоморфной) вложимости однородного проективного матрич-*

ного уравнения Риккати (1.8) *с абелевой группой голономии в однородное проективное матричное уравнение Риккати* (2.8) *с абелевой группой голономии необходимо и достаточно существования такого гомоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного гладким* (*$\mathbb{R}$–голоморфным*) *вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, *что либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})^\varepsilon$, $\forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, *либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (\overline{p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}})^\varepsilon$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$; $\varepsilon^2 = 1$.

Теорема 5.9. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда для голоморфной вложимости однородного проективного матричного уравнения Риккати* (1.8) *с абелевой группой голономии в однородное проективное матричное уравнение Риккати* (2.8) *с абелевой группой голономии необходимо и достаточно существования такого гомоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного голоморфным вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, *что* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})^\varepsilon$, $\forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $\varepsilon^2 = 1$.

Теорема 6.9. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.4. *Тогда для гладкой* (*$\mathbb{R}$–голоморфной*) *вложимости однородного проективного матричного уравнения Риккати* (1.8) *с абелевой группой голономии в однородное проективное матричное уравнение Риккати* (2.8) *с абелевой группой голономии необходимо и достаточно существования таких гомоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного гладким* (*$\mathbb{R}$–голоморфным*) *вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, *перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n+1) \to (1, \ldots, n+1)$, *что либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}$, $\forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$, *либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = \overline{p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}}$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$.

Теорема 7.9. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.4. *Тогда для голоморфной вложимости однородного проективного матричного уравнения Риккати* (1.8) *с абелевой группой голономии в однородное проективное матричное уравнение Риккати* (2.8) *с абелевой группой голономии необходимо и достаточно существования таких гомоморфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного голоморфным вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, *перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n+1) \to (1, \ldots, n+1)$, *что* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}$, $\forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$.

Теорема 8.9. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4. *Тогда для гладкой* (*$\mathbb{R}$–голоморфной*) *вложимости однородного проективного матричного уравнения Риккати* (1.8) *с неабелевой группой голономии в однородное проективное матричное уравнение Риккати* (2.8) *с неабелевой группой голономии необходима и достаточна сопряженность данных групп при некотором гомоморфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном гладким* (*$\mathbb{R}$–голоморфным*) *вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, *осуществляемая либо невырожденным дробно–*

линейным, либо невырожденным антиголоморфным дробно–линейным преобразованиями.

Теорема 9.9. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4. *Тогда для голоморфной вложимости однородного проективного матричного уравнения Риккати* (1.8) *с неабелевой группой голономии в однородное проективное матричное уравнение Риккати* (2.8) *с неабелевой группой голономии необходима и достаточна сопряженность данных групп при некотором гомоморфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном голоморфным вложением* $g_\mu : B_1 \hookrightarrow B_2$, *осуществляемая невырожденным дробно–линейным преобразованием.*

Кроме того, на основании теорем 1.9 – 9.9 получаем критерии слабой топологической (гладкой, $\mathbb{R}$–голоморфной, голоморфной) эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати.

§ 10. Накрытия неавтономных проективных матричных уравнений Риккати.

Рассмотрим однородные проективные матричные уравнения Риккати (1.8) и (2.8) с соответствующим им дробно–линейными накрывающими слоениями $\mathfrak{PL}^1(n)$ и $\mathfrak{PL}^2(n)$ и группами голономии $PL^1(n)$ и $PL^2(n)$.

Определение 1.10. *Будем говорить, что однородное проективное матричное уравнение Риккати* (1.8) **накрывает (гладко накрывает, $\mathbb{R}$–голоморфно накрывает, голоморфно накрывает)** *однородное проективное матричное уравнение Риккати* (2.8), *если дробно–линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{PL}^1(n)$ *накрывает (гладко накрывает,* $\mathbb{R}$*–голоморфно накрывает, голоморфно накрывает) дробно–линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{PL}^2(n)$.

На основании теорем 1.6 – 9.6 получаем следующие утверждения.

Теорема 1.10. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда для накрытия однородного проективного матричного уравнения Риккати* (2.8) *с абелевой группой голономии однородным проективным матричным уравнением Риккати* (1.8) *с абелевой группой голономии необходимо и достаточно существования такого мономорфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного накрытием* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *что либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})|p_{1\gamma_1}/p_{2(\gamma_1}|^{\alpha}$, $Re\ \alpha \neq -1$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, *либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (\overline{p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}})|p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}|^{\alpha}$, $Re\ \alpha \neq -1$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$.

Теорема 2.10. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.4. *Тогда для на-*

крытия однородного проективного матричного уравнения Риккати (2.8) *с абелевой группой голономии однородным проективным матричным уравнением Риккати* (1.8) *с абелевой группой голономии необходимо и достаточно существования такого мономорфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного накрытием* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *перестановки* $\varrho : (1,\ldots,n+1) \to (1,\ldots,n+1)$ *и комплексного числа* α *с* $Re\ \alpha > -1$, *что либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = (p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1})|p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}|^\alpha$, $\forall\gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$, *либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = (\overline{p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}})|p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}|^\alpha$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1,n}$.

Теорема 3.10. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4. *Тогда из накрытия однородного проективного матричного уравнения Риккати* (2.8) *с неабелевой группой голономии общего положения однородным проективным матричным уравнением Риккати* (1.8) *с абелевой группой голономии общего положения следует* $\mathbb{R}$*–голоморфная сопряженность данных групп при некотором мономорфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном накрытием* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *осуществляемая либо невырожденным дробно–линейным, либо невырожденным антиголоморфным дробно–линейным преобразованиями.*

Следствие 1.10. *Накрытие однородного проективного матричного уравнения Риккати* (2.8) *с неабелевой группой голономии общего положения однородным проективным матричным уравнением Риккати* (1.8) *с неабелевой группой голономии общего положения является* $\mathbb{R}$*–голоморфным.*

Теорема 4.10. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда для гладкого (*$\mathbb{R}$*–голоморфного) накрытия однородного проективного матричного уравнения Риккати* (2.8) *с абелевой группой голономии однородным проективным матричным уравнением Риккати* (1.8) *с абелевой группой голономии необходимо и достаточно существования такого мономорфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного гладким (*$\mathbb{R}$*–голоморфным) накрытием* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *что либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})^\varepsilon, \forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, *либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (\overline{p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}})^\varepsilon$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1); \varepsilon^2 = 1$.

Теорема 5.10. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.4. *Тогда для голоморфного накрытия однородного проективного матричного уравнения Риккати* (2.8) *с абелевой группой голономии однородным проективным матричным уравнением Риккати* (1.8) *с абелевой группой голономии необходимо и достаточно существования такого мономорфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного голоморфным накрытием* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *что либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})^\varepsilon$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, *либо* $q_{1\mu(\gamma_1)}/q_{2\mu(\gamma_1)} = (\overline{p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}})^\varepsilon$, $\forall\ \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$; $\varepsilon^2 = 1$.

Теорема 6.10. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.4. *Тогда для гладкого* ($\mathbb{R}$*–голоморфного) накрытия однородного проективного матричного уравнения Риккати* (2.8) *с абелевой группой голономии однородным проективным матричным уравнением Риккати* (1.8) *с абелевой группой голономии необходимо и достаточно существования такого мономорфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного гладким* ($\mathbb{R}$*–голоморфным) накрытием* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *перестановки* $\varrho : (1, \dots, n+1) \to (1, \dots, n+1)$, *что либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = \overline{p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}}$, $\forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1, n}$, *либо* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}$, $\forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1, n}$.

Теорема 7.10. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.4. *Тогда для голоморфного накрытия однородного проективного матричного уравнения Риккати* (2.8) *с абелевой группой голономии однородным проективным матричным уравнением Риккати* (1.8) *с абелевой группой голономии необходимо и достаточно существования такого мономорфизма* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденного голоморфным накрытием* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *перестановки* $\varrho : (1, \dots, n+1) \to (1, \dots, n+1)$, *что* $q_{\varrho(k)\mu(\gamma_1)}/q_{\varrho(n+1)\mu(\gamma_1)} = p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}$, $\forall \gamma_1 \in \pi_1(B_1)$, $k = \overline{1, n}$.

Теорема 8.10. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4. *Тогда для гладкого* ($\mathbb{R}$*–голоморфного) накрытия однородного проективного матричного уравнения Риккати* (2.8) *с неабелевой группой голономии однородным проективным матричным уравнением Риккати* (1.8) *с неабелевой группой голономии необходима и достаточна сопряженность данных групп при некотором мономорфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном гладким* ($\mathbb{R}$*–голоморфным) накрытием* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *осуществляемая либо невырожденным дробно–линейным, либо невырожденным антиголоморфным дробно–линейным преобразованиями.*

Теорема 9.10. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4. *Тогда для голоморфного накрытия однородного проективного матричного уравнения Риккати* (2.8) *с неабелевой группой голономии однородным проективным матричным уравнением Риккати* (1.8) *с неабелевой группой голономии необходима и достаточна сопряженность данных групп при некотором мономорфизме* $\mu : \pi_1(B_1) \to \pi_1(B_2)$, *порожденном голоморфным накрытием* $g_\mu : B_1 \to B_2$, *осуществляемая невырожденным дробно–линейным преобразованием.*

§ 11. Структурная устойчивость неавтономных проективных матричных уравнений Риккати.

Рассмотрим однородное проективное матричное уравнение Риккати (1.8) с соответствующим ему дробно–линейным накрывающим слоением $\mathfrak{PL}^1(n)$ и группой голономии $PL^1(n)$.

Определение 1.11. *Будем говорить, что однородное проективное матричное уравнение Риккати* (1.8) **структурно устойчиво**, *если структурно устойчиво дробно–линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{PL}^1(n)$.

В силу теорем 1.7 – 3.7 имеем такие утверждения.

Теорема 1.11. *Однородные проективные матричные уравнения Риккати вида* (1.8) *с неабелевыми группами голономии структурно неустойчивы.*

Следствие 1.11. *Если однородное проективное матричное уравнение Риккати вида* (1.8) *структурно устойчиво, то его группа голономии абелева.*

Теорема 2.11. *Если однородное проективное матричное уравнение Риккати вида* (1.8) *структурно устойчиво, то группа* $\pi_1(B_1)$ *имеет одну независимую образующую.*

Теорема 3.11. *Для того, чтобы однородное проективное матричное уравнение Риккати вида* (1.8) *было структурно устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы* $n = 1$, *группа* $\pi_1(B_1)$ *имела одну независимую образующую* γ_1 *и при этом* $|p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}| \neq 1$.

§ 12. Эквивалентности обыкновенных проективных матричных уравнений Риккати с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим обыкновенные однородные проективные матричные уравнения Риккати

$$\frac{dv}{dz} = A(z)v \tag{1.12}$$

и

$$\frac{dv}{dz} = B(z)v, \tag{2.12}$$

где квадратные матрицы $A(z) = ||a_{ik}(z)||$ и $B(z) = ||b_{ik}(z)||$ размера $n+1$ состоят из 1–периодических голоморфных функций $a_{ik} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и $b_{ik} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $i = \overline{1, n+1}$, $k = \overline{1, n+1}$. Общие решения однородных проективных матричных уравнений Риккати (1.12) и (2.12) определяют дробно–линейные накрывающие слоения на многообразии $\mathbb{C}P^n \times Z$. Так как группа $\pi_1(Z)$ абелева, то на основании определений 2.1.1 и 2.8 имеем, что группы голономии однородных проективных матричных уравнений Риккати (1.12) и (2.12) также абелевы. Кроме того, обозначим через γ_1 образующую группы $\pi_1(Z)$.

В силу теорем 1.8, 2.8, 4.8 – 7.8 и 2.11 делаем такие выводы.

Теорема 1.12 [38]. *Пусть матрицы* $P_{\gamma_1} = S\ diag\{p_{1\gamma_1}, p_{2\gamma_1}\}S^{-1}$, $Q_{\gamma_1} = T\ diag\{q_{1\gamma_1}, q_{2\gamma_1}\}T^{-1}$. *Тогда для топологической эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.12) *и* (2.12) *необходимо и достаточно, чтобы либо* $q_{1\gamma_1}/q_{2\gamma_1} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})|p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}|^{\alpha}$, $Re\ \alpha \neq -1$, *либо* $q_{1\gamma_1}/q_{2\gamma_1} = (\overline{p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}})|p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}|^{\alpha}$, $Re\ \alpha \neq -1$.

Теорема 2.12. *Пусть при* $n > 1$ *матрицы* $P_{\gamma_1} = Sdiag\{p_{1\gamma_1}, \ldots, p_{n+1,\gamma_1}\}\ S^{-1}$, $Q_{\gamma_1} = T\ diag\{q_{1\gamma_1}, \ldots, q_{n+1,\gamma_1}\}\ T^{-1}$, *наборы чисел* $\{ln\ (p_{1\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}), \ldots, ln\ (p_{n\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1})\}$ *и* $\{ln\ (q_{1\gamma_1}/q_{n+1,\gamma_1}), \ldots, ln\ (q_{n\gamma_1}/q_{n+1,\gamma_1})\}$ *являются простыми. Тогда для топологической эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.12) *и* (2.12) *необходимо и достаточно существования таких перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n+1) \to (1, \ldots, n+1)$ *и комплексного числа* α *с* $Re\ \alpha > -1$, *что либо* $q_{\varrho(k)\gamma_1}/q_{\varrho(n+1)\gamma_1} = (p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1})|p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}|^{\alpha}$, $k = \overline{1, n}$, *либо* $q_{\varrho(k)\gamma_1}/q_{\varrho(n+1)\gamma_1} = (\overline{p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}})|p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}|^{\alpha}$, $k = \overline{1, n}$.

Теорема 3.12 [38]. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.12. *Тогда для гладкой* ($\mathbb{R}$*–голоморфной) эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.12) *и* (2.12) *необходимо и достаточно, чтобы либо* $q_{1\gamma_1}/q_{2\gamma_1} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})^{\varepsilon}$, *либо* $q_{1\gamma_1}/q_{2\gamma_1} = (\overline{p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}})^{\varepsilon}$; $\varepsilon^2 = 1$.

Теорема 4.12. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.12. *Тогда для голоморфной эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.12) *и* (2.12) *необходимо и достаточно, чтобы* $q_{1\gamma_1}/q_{2\gamma_1} = (p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1})^{\varepsilon}$, $\varepsilon^2 = 1$.

Теорема 5.12. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.12. *Тогда для гладкой* ($\mathbb{R}$*–голоморфной) эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.12) *и* (2.12) *необходимо и достаточно существования такой перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n+1) \to (1, \ldots, n+1)$, *что либо* $q_{\varrho(k)\gamma_1}/q_{\varrho(n+1)\gamma_1} = p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}$, $k = \overline{1, n}$, *либо* $q_{\varrho(k)\gamma_1}/q_{\varrho(n+1)\gamma_1} = \overline{p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1}}$, $k = \overline{1, n}$.

Теорема 6.12. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.12. *Тогда для голоморфной эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.12) *и* (2.12) *необходимо и достаточно существования такой перестановки* $\varrho : (1, \ldots, n+1) \to (1, \ldots, n+1)$, *что* $q_{\varrho(k)\gamma_1}/q_{\varrho(n+1)\gamma_1} =$

$p_{k\gamma_1}/p_{n+1,\gamma_1},\ k=\overline{1,n}$.

Теорема 7.12. *Для того, чтобы однородное проективное матричное уравнение Риккати* (1.12) *было структурно устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы* $n=1$ *и* $|p_{1\gamma_1}/p_{2\gamma_1}|\neq 1$.

§ 13. Эквивалентности вполне разрешимых проективных матричных уравнений Риккати с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим вполне разрешимые однородные проективные матричные уравнения Риккати

$$dv=\sum_{j=1}^{m}A_j(z_1,\ldots,z_m)v\ dz_j \tag{1.13}$$

и

$$dv=\sum_{j=1}^{m}B_j(z_1,\ldots,z_m)v\ dz_j, \tag{2.13}$$

где $m>1$, квадратные матрицы $A_j(z_1,\ldots,z_m)=||a_{ikj}(z_1,\ldots,\ z_m)||$ и $B_j(z_1,\ldots,z_m)=||b_{ikj}(z_1,\ldots,\ z_m)||$ размера $n+1$ состоят из 1–периодических по своим аргументам голоморфных функций $a_{ikj}:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}$ и $b_{ikj}:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C},\ i=\overline{1,n+1},\ k=\overline{1,n+1},\ j=\overline{1,m}$. Общие решения вполне разрешимых однородных проективных матричных уравнений Риккати (1.13) и (2.13) определяют дробно–линейные накрывающие слоения на многообразии $\mathbb{C}P^n\times Z^m$. Так как группа $\pi_1(Z^m)$ абелева, то на основании определений 2.1.1 и 2.8 имеем, что группы голономии однородных проективных матричных уравнений Риккати (1.13) и (2.13) также являются абелевыми. Кроме того, обозначим через $\gamma_l,\ l=\overline{1,m}$, образующую группы $\pi_1(Z^m)$.

В силу теорем 1.8, 2.8, 4.8 – 7.8 и 2.11 имеем такие утверждения.

Теорема 1.13 [35]. *Пусть матрицы* $P_{\gamma_l}=S diag\{p_{1\gamma_l},p_{2\gamma_l}\}S^{-1},\ Q_{\gamma_l}=T\ diag\{q_{1\gamma_l},q_{2\gamma_l}\}T^{-1},\ l=\overline{1,m}$. *Тогда для топологической эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.13) *и* (2.13) *необходимо и достаточно существования таких унимодулярной матрицы* $U=||u_{lj}||$ *размера* m *и комплексного числа* α *с* $Re\ \alpha\neq -1$, *что либо* $\prod_{j=1}^{m}(q_{1\gamma_j}/q_{2\gamma_j})^{u_{lj}}=(p_{1\gamma_l}/p_{2\gamma_l})|p_{1\gamma_l}/p_{2\gamma_l}|^{\alpha},\ l=\overline{1,m}$, *либо* $\prod_{j=1}^{m}(q_{1\gamma_j}/q_{2\gamma_j})^{u_{lj}}=\overline{(p_{1\gamma_l}/p_{2\gamma_l})}|p_{1\gamma_l}/p_{2\gamma_l}|^{\alpha},\ l=\overline{1,m}$.

Теорема 2.13. *Пусть при* $n>1$ *матрицы* $P_{\gamma_l}=S\ diag\{p_{1\gamma_l},\ldots,p_{n+1,\gamma_l}\}\ S^{-1},\ Q_{\gamma_l}=T\ diag\{q_{1\gamma_l},\ldots,q_{n+1,\gamma_l}\}\ T^{-1}$, *наборы чисел*

$\{ln\ (p_{1\gamma_l}/p_{n+1,\gamma_l}),\ldots,ln\ (p_{n\gamma_l}/p_{n+1,\gamma_l})\}$ *и* $\{ln\ (q_{1\gamma_l}/q_{n+1,\gamma_l}),\ldots,ln\ (q_{n\gamma_l}/q_{n+1,\gamma_l})\}$ *являются простыми,* $l=\overline{1,m}$. *Тогда для топологической эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.13) *и* (2.13) *необходимо и достаточно существования таких унимодулярной матрицы* $U=||u_{lj}||$ *размера* m, *перестановки* $\varrho:(1,\ldots,n+1)\to(1,\ldots,n+1)$ *и комплексного числа* α *с* $Re\ \alpha>-1$, *что либо* $\prod\limits_{j=1}^{m}(q_{\varrho(k)\gamma_j}/q_{\varrho(n+1)\gamma_j})^{u_{lj}}=(p_{k\gamma_l}/p_{n+1,\gamma_l})|p_{k\gamma_l}/p_{n+1,\gamma_l}|^{\alpha},\ k=\overline{1,n},\ l=\overline{1,m}$, *либо* $\prod\limits_{j=1}^{m}(q_{\varrho(k)\gamma_j}/q_{\varrho(n+1)\gamma_j})^{u_{lj}}=(\overline{p_{k\gamma_l}/p_{n+1,\gamma_l}})|p_{k\gamma_l}/p_{n+1,\gamma_l}|^{\alpha},\ k=\overline{1,n},\ l=\overline{1,m}$.

Теорема 3.13 [35]. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.13. *Тогда для гладкой* ($\mathbb{R}$–*голоморфной) эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.13) *и* (2.13) *необходимо и достаточно существования такой унимодулярной матрицы* $U=||u_{lj}||$ *размера* m, *что либо* $\prod\limits_{j=1}^{m}(q_{1\gamma_j}/q_{2\gamma_j})^{u_{lj}}=(p_{1\gamma_l}/p_{2\gamma_l})^{\varepsilon},\ l=\overline{1,m}$, *либо* $\prod\limits_{j=1}^{m}(q_{1\gamma_j}/q_{2\gamma_j})^{u_{lj}}=(\overline{p_{1\gamma_l}/p_{2\gamma_l}})^{\varepsilon},\ l=\overline{1,m};\ \varepsilon^2=1$.

Теорема 4.13. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.13. *Тогда для голоморфной эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.13) *и* (2.13) *необходимо и достаточно существования такой унимодулярной матрицы* $U=||u_{lj}||$ *размера* m, *что* $\prod\limits_{j=1}^{m}(q_{1\gamma_j}/q_{2\gamma_j})^{u_{lj}}=(p_{1\gamma_l}/p_{2\gamma_l})^{\varepsilon},\ l=\overline{1,m},\ \varepsilon^2=1$.

Теорема 5.13. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.13. *Тогда для гладкой* ($\mathbb{R}$–*голоморфной) эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.13) *и* (2.13) *необходимо и достаточно существования таких унимодулярной матрицы* $U=||u_{lj}||$ *размера* m, *перестановки* $\varrho:(1,\ldots,n+1)\to(1,\ldots,n+1)$, *что либо* $\prod\limits_{j=1}^{m}(q_{\varrho(k)\gamma_j}/q_{\varrho(n+1)\gamma_j})^{u_{lj}}=(p_{k\gamma_l}/p_{n+1,\gamma_l}),\ k=\overline{1,n},\ l=\overline{1,m}$, *либо* $\prod\limits_{j=1}^{m}(q_{\varrho(k)\gamma_j}/q_{\varrho(n+1)\gamma_j})^{u_{lj}}=(\overline{p_{k\gamma_l}/p_{n+1,\gamma_l}}),\ k=\overline{1,n},\ l=\overline{1,m}$.

Теорема 6.13. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.13. *Тогда для голоморфной эквивалентности однородных проективных матричных уравнений Риккати* (1.13) *и* (2.13) *необходимо и достаточно существования таких унимодулярной матрицы* $U=||u_{lj}||$ *размера* m, *перестановки* ϱ :

$(1,\ldots,n+1)\to(1,\ldots,n+1)$, *что* $\prod\limits_{j=1}^{m}(q_{\varrho(k)\gamma_j}/q_{\varrho(n+1)\gamma_j})^{u_{lj}}=(p_{k\gamma_l}/p_{n+1,\gamma_l}),\ k=\overline{1,n},\ l=\overline{1,m}.$

Теорема 7.13. *Однородное проективное матричное уравнение Риккати* (1.13) *структурно неустойчиво.*

§ 14. Эквивалентности обыкновенных дифференциальных уравнений Риккати с эллиптическими коэффициентами.

Рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения Риккати

$$\frac{dw}{dz}=a_2(z)w^2+a_1(z)w+a_0(z) \tag{1.14}$$

и

$$\frac{dw}{dz}=b_2(z)w^2+b_1(z)w+b_0(z), \tag{2.14}$$

где коэффициенты $a_k(z)$ и $b_k(z),\ k=\overline{0,2}$, являются эллиптическими (мероморфными двоякопериодическими) функциями с основным параллелограммом периодов П, образованным точками $0,\ 1,\ a+ib,\ a+1+ib,\ a>0,\ b>0.$ Через $z_k\in\Pi,\ k=\overline{1,n}$, обозначим совокупность полюсов коэффициентов обыкновенного дифференциального уравнения Риккати (1.14) (уравнения Риккати (2.14)). При этом, не умаляя общности, будем считать, что $z_k\notin\partial\Pi,\ k=\overline{1,n}$, где $\partial\Pi$ – граница параллелограмма П.

Так как сферу Римана (расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, где ∞ есть бесконечно удаленная точка) можно одновременно рассматривать и в качестве пространства $\mathbb{C}P^1$ (отождествив при этом их элементы следующим образом: $w=v_1/v_2,\ \forall(v_1,v_2):\ v_2\neq 0;\ w=\infty,\ \forall(v_1,v_2):\ v_2=0$), то обыкновенные дифференциальные уравнения Риккати (1.14) и (2.14) равносильны соответствующим обыкновенным однородным проективным матричным уравнениям Риккати вида (1.8) и (2.8) при $n=1$.

В силу двоякопериодичности коэффициентов обыкновенных дифференциальных уравнений Риккати (1.14) и (2.14) их общие решения определяют дробно–линейные накрывающие слоения на многообразии $\overline{\mathbb{C}}\times T_n$, где T_n есть тор с разверкой П. При этом группа голономии обыкновенного дифференциального уравнения Риккати (1.14) (уравнения Риккати (2.14)) определяется невырожденными дробно-линейными преобразованиями $P_k(w,1),\ \forall w\in\overline{\mathbb{C}},\ P_k\in GL(2,\mathbb{C})$ (невырожденными дробно-линейными преобразованиями $Q_k(w,1),\forall w\in\overline{\mathbb{C}},Q_k\in GL(2,\mathbb{C})$), $k=\overline{1,2}$, соответствующими образующим тора T_n; и невырожденными дробно-линейными преобразованиями

$P_{2+k}(w,1),\ \forall w\in\overline{\mathbb{C}},\ P_k\in GL(2,\mathbb{C})$ (невырожденными дробно-линейными преобразованиями $Q_{2+k}(w,1),\ \forall w\in\overline{\mathbb{C}},\ Q_k\in GL(2,\mathbb{C})$), соответствующими полюсам $z_k,\ k=\overline{1,n}$. Нетрудно видеть, что невырожденные дробно-линейные преобразования $P_k(w,1),\ \forall w\in\overline{\mathbb{C}}$ (невырожденные дробно-линейные преобразования $Q_k(w,1),\ \forall w\in\overline{\mathbb{C}}$), $k=\overline{1,2}$, перестановочны.

На основании теорем 1.8, 4.8, 5.8 и леммы 1.2.2 получаем такие конструктивные критерии классификаций обыкновенных дифференциальных уравнений Риккати (1.14) и (2.14).

Теорема 1.14. *Пусть матрицы $P_k = S\ diag\{p_{1k},p_{2k}\}\ S^{-1},\ Q_k = T\ diag\{q_{1k},q_{2k}\}\ T^{-1},\ k=\overline{1,2}$, таковы, что подгруппа группы $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел по умножению, образованная числами p_{11}/p_{21} и p_{12}/p_{22}, плотна в множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Тогда для топологической эквивалентности обыкновенных дифференциальных уравнений Риккати* (1.14) *и* (2.14) *необходимо существование таких унимодулярной матрицы $U=||u_{kj}||$ размера* 2 *и комплексного числа α с $Re\ \alpha\neq -1$, что либо*

$$\prod_{j=1}^{2}(q_{1j}/q_{2j})^{u_{kj}} = (p_{1k}/p_{2k})|p_{1k}/p_{2k}|^{\alpha},\ k=\overline{1,2}, \tag{3.14}$$

либо

$$\prod_{j=1}^{2}(q_{1j}/q_{2j})^{u_{kj}} = (\overline{p_{1k}/p_{2k}})|p_{1k}/p_{2k}|^{\alpha},\ k=\overline{1,2}, \tag{4.14}$$

причем при выполнении соотношений (3.14) *сопрягающий группы голономии гомеоморфизм задается формулой $f(w)=\gamma w|w|^{\alpha},\ \forall w\in\overline{\mathbb{C}},\ \gamma\neq 0$, а при выполнении соотношений* (4.14) *– формулой $f(w)=\gamma\overline{w}|w|^{\alpha},\ \forall w\in\overline{\mathbb{C}},\ \gamma\neq 0$.*

Теорема 2.14. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.14. *Тогда для гладкой ($\mathbb{R}$–голоморфной) эквивалентности обыкновенных дифференциальных уравнений Риккати* (1.14) *и* (2.14) *необходимо существование такой унимодулярной матрицы $U=||u_{kj}||$ размера* 2, *что либо*

$$\prod_{j=1}^{2}(q_{1j}/q_{2j})^{u_{kj}} = p_{1k}/p_{2k},\ k=\overline{1,2}, \tag{5.14}$$

либо

$$\prod_{j=1}^{2}(q_{1j}/q_{2j})^{u_{kj}} = \overline{p_{1k}/p_{2k}},\ k=\overline{1,2}, \tag{6.14}$$

причем при выполнении соотношений (5.14) *сопрягающий группы голономии диффеоморфизм ($\mathbb{R}$–голоморфизм) задается формулой $f(w)=\gamma w,\ \forall w\in$*

$\overline{\mathbb{C}}$, $\gamma \neq 0$, *а при выполнении соотношений* (6.14) *– формулой* $f(w) = \gamma\overline{w}$, $\forall w \in \overline{\mathbb{C}}$, $\gamma \neq 0$.

Теорема 3.14. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.14. *Тогда для голоморфной эквивалентности обыкновенных дифференциальных уравнений Риккати* (1.14) *и* (2.14) *необходимо существование такой унимодулярной матрицы* $U = ||u_{kj}||$ *размера* 2, *что* $\prod\limits_{j=1}^{2}(q_{1j}/q_{2j})^{u_{kj}} = p_{1k}/p_{2k}$, $k = \overline{1,2}$, *и при этом сопрягающий группы голономии голоморфизм задается формулой* $f(w) = \gamma w$, $\forall w \in \overline{\mathbb{C}}$, $\gamma \neq 0$.

Кроме того, на основании теоремы 2.11 получаем утверждение.

Теорема 4.14. *Обыкновенное дифференциальное уравнение Риккати* (1.14) *структурно неустойчиво.*

Глава 4. Глобальная топологическая устойчивость накрывающих слоений.

§ 1. Глобальная топологическая устойчивость накрывающих слоений.

Определение 1.1. *Накрывающее слоение будем называть* **глобально топологически устойчивым**, *если существует конечное число однолистных слоев (которые будем называть* **особыми**), *что все остальные слои (которые будем называть* **неособыми**) *этого слоения негомеоморфны особым и, кроме того, замыкание каждого из неособых слоев содержит все особые слои. Накрывающее слоение, не являющееся глобально топологически устойчивым, будем называть* **глобально топологически неустойчивым**.

Определение 2.1. *Накрывающее слоение будем называть* **глобально фазово устойчивым**, *если замыкание орбиты всякой, не являющейся неподвижной, точки фазового слоя содержит все неподвижные точки этого слоения, и будем называть* **глобально фазово неустойчивым** *в противном случае.*

Теорема 1.1. *Глобальная топологическая устойчивость накрывающего слоения равносильна его глобальной фазовой устойчивости.*

Доказательство этого утверждения проводится непосредственно на основании определения 2.1.1 путем сдвига отмеченной точки базы накрывающего слоения.

Следствие 1.1. *Глобально топологически устойчивыми могут быть лишь невырожденные нетривиальные накрывающие слоения.*

§ 2. Глобальная топологическая устойчивость абелевых линейных накрывающих слоений.

Рассмотрим сначала вещественное абелево линейное накрывающее слоение $C\mathfrak{L}^1(n)$ с вещественной абелевой фазовой группой $CL^1(n)$, определяемой линейными действиями

$$P_r w,\ \forall w \in \mathbb{R}^n,\ P_r \in GL(n,\mathbb{R}),\ r = \overline{1,\nu}. \tag{1.2}$$

При этом будем считать, что матрицы P_r имеют простую структуру и не имеют собственных значений, равных по модулю 1, $r = \overline{1,\nu}$. Будем рассматривать тот случай, когда фазовая группа имеет единственную неподвижную точку – начало координат $0 \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, что при этом вещественное линейное накрывающее слоение $C\mathfrak{L}^1(n)$ является невырожденным нетривиальным. В силу теоремы 1.1.1 вещественное линейное накрывающее слоение $C\mathfrak{L}^1(n)$ имеет единственный особый слой и этот слой соответствует неподвижной точке.

Для изучения глобальной топологической устойчивости вещественного линейного накрывающего слоения $C\mathfrak{L}^1(n)$ с помощью общего преобразования подобия все матрицы $P_r,\ r = \overline{1,\nu}$, одновременно приведем к диагональному виду, соответствующему вещественной нормальной жордановой форме (этого всегда можно добиться в силу простоты структуры и перестановочности матриц $P_r,\ r = \overline{1,\nu}$).

В новой системе координат образы линейных действий (1.2) запишем в виде

$$Q_r = \begin{cases} \lambda_{ir} y_i,\ \lambda_{ir} \in \mathbb{C},\ y_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{1,k}, \\ \lambda_{ir} y_i,\ \lambda_{ir} \in \mathbb{R},\ y_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{k+1,s},\ r = \overline{1,\nu}; \end{cases} \tag{2.2}$$

где $s + k = n;\ \lambda_{ir},\ i = \overline{1,s},$ – собственные значения матрицы $P_r,\ r = \overline{1,\nu}$.

Определение 1.2. Фазовой матрицей *вещественной фазовой группы* $CL^1(n)$ *будем называть матрицу* $||Re\ ln\ \lambda_{ir}||_{s\times\nu}$.

Определение 2.2. *Фазовую матрицу вещественной фазовой группы* $CL^1(n)$ *будем называть* **матрицей Пуанкаре**, *если выпуклая оболочка векторов*

$$\Lambda_i = (Re\ ln\ \lambda_{i1}, \ldots, Re\ ln\ \lambda_{i\nu}),\ i = \overline{1,s}, \tag{3.2}$$

не содержит начала координат $0 \in \mathbb{R}^\nu$, *и* **матрицей Зигеля** *в противном случае.*

Лемма 1.2. *Если фазовая матрица вещественной фазовой группы* $CL^1(n)$ *является матрицей Пуанкаре, то начало координат* $0 \in \mathbb{R}^n$ *принадлежит замыканию определяемой группой орбиты для любой точки* $x \neq 0$ *фазового слоя* $\mathbb{R}^n$, *а если фазовая матрица является матрицей Зигеля, то существует множество точек фазового слоя* $\mathbb{R}^n$ *размерности* n, *таких, что замыканию определяемой данной группой орбиты всякой точки этого множества не принадлежит начало координат* $0 \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть фазовая матрица является матрицей Пуанкаре. Перейдем от линейных преобразований (1.2) к линейным преобразованиям (2.2). На основании определения матрицы Пуанкаре приходим к выводу, что существует гиперплоскость Π, проходящая через начало координат $0 \in \mathbb{R}^\nu$, такая, что векторы (3.2) расположены по одну открытую сторону от данной гиперплоскости. Возьмем вектор $d \in \mathbb{R}^\nu$, ортогональный гиперплоскости Π и расположенный по другую открытую сторону от этой гиперплоскости. Следовательно, скалярные произведения $\Lambda_i \cdot d < 0,\ i = \overline{1, s}$. В силу плотности множества рациональных чисел в множестве вещественных чисел существуют натуральное число l и целочисленный вектор $c = (c_1, \ldots, c_\nu)$, такие, что длина вектора $ld - c$ достаточно мала и, кроме того, имеют место неравенства $\Lambda_i \cdot c < 0,\ i = \overline{1, s}$. Введем вспомогательное отображение $Q = \prod\limits_{r=1}^{\nu} Q_r^{c_r}$, где произведение обозначает суперпозицию линейных преобразований. Из полученных выше неравенств непосредственно вытекает, что $\lim\limits_{k \to +\infty} Q^k(y) = 0,\ \forall y = (y_1, \ldots, y_s) \in \mathbb{R}^n$.

Пусть теперь фазовая матрица является матрицей Зигеля. Как и в первом случае, перейдем к линейным преобразованиям (2.2). Исходя из определения матрицы Зигеля получаем, что для всякого вектора c с целочисленными координатами существует такой индекс $i \in \{1, \ldots, s\}$, что имеет место неравенство $\Lambda_i \cdot c \geqslant 0$. Отсюда вытекает неравенство $|p_i \circ Q(y)| \geqslant |p_i \circ y|,\ \forall y \in \mathbb{R}^n$, где $p_i \circ y$ есть проекция вектора y на координатную прямую y_i (комплексную при $i = \overline{1, k}$, и вещественную при $i = \overline{k+1, s}$). Возьмем точку $y^* \in \mathbb{R}^n$ такую, что все ее координаты отличны от нуля. Тогда из последнего неравенства и произвольности вектора c следует, что замыкание орбиты точки y^*, определяемой фазовой группой, не содержит начала координат. Лемма 1.2 доказана.

Теперь на основании теоремы 1.1 и леммы 1.2 имеем такое утверждение.

Теорема 1.2 [26]. *Если у невырожденного нетривиального вещественного абелевого линейного накрывающего слоения $C\mathfrak{L}^1(n)$ фазовая матрица вещественной фазовой группы $CL^1(n)$ является матрицей Пуанкаре, то оно глобально топологически устойчиво, а если является матрицей Зигеля – то глобально топологически неустойчиво.*

В случае невырожденного нетривиального комплексного линейного накрывающего слоения $C\mathfrak{L}^1(n)$ с комплексной фазовой группой $CL^1(n)$, образованной аналогично вещественной фазовой группе $CL^1(n)$, подобно теореме 1.2 получаем такое утверждение.

Теорема 2.2 [39]. *Если у невырожденного нетривиального комплексного абелевого линейного накрывающего слоения $C\mathfrak{L}^1(n)$ фазовая матрица комплексной фазовой группы $CL^1(n)$ является матрицей Пуанкаре, то оно глобально топологически устойчиво, а если является матрицей Зигеля – то глобально топологически неустойчиво.*

§ 3. Глобальная топологическая устойчивость неавтономных линейных дифференциальных систем с абелевыми группами монодромии.

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$dw = \sum_{j=1}^{m} A_j(z_1, \ldots, z_m)w\ dz_j, \tag{1.3}$$

обыкновенную при $m = 1$ и вполне разрешимую при $m > 1$, где квадратные матрицы $A_j(z_1, \ldots, z_m) = ||a_{ikj}(z_1, \ldots, z_m)||$ размера n состоят из голоморфных функций $a_{ikj} : B \to \mathbb{K},\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$. Общее решение линейной дифференциальной системы (1.3) определяет линейное накрывающее слоение $\mathfrak{L}^1(n)$ на многообразии $\mathbb{K}^n \times B$.

Определение 1.3. *Будем говорить, что линейная дифференциальная система* (1.3) **глобально топологически устойчива**, *если глобально топологически устойчиво линейное накрывающее слоение $\mathfrak{L}^1(n)$.*

Теперь на основании теорем 1.2 и 2.2 в случае абелевости группы монодромии $CL^1(n)$ линейной дифференциальной системы (1.3), соответствующей невырожденному нетривиальному абелевому линейному накрывающему слоению $C\mathfrak{L}^1(n)$, имеем такое утверждение.

Теорема 1.3. *Если у линейной дифференциальной системы* (1.3) *фазовая матрица группы монодромии $CL^1(n)$ является матрицей Пуанкаре, то* *система глобально топологически устойчива, а если является матрицей Зигеля – то глобально топологически неустойчива.*

§ 4. Глобальная топологическая устойчивость линейных дифференциальных систем с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$dw = \sum_{j=1}^{m} A_j(z_1, \ldots, z_m)w\ dz_j, \tag{1.4}$$

обыкновенную при $m = 1$ и вполне разрешимую при $m > 1$, где квадратные матрицы $A_j(z_1, \ldots, z_m) = ||a_{ikj}(z_1, \ldots, z_m)||$ размера n состоят из 1–периодических по своим аргументам голоморфных функций $a_{ikj} : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K},\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$. Общее решение линейной дифференциальной системы (1.4) определяет абелево линейное накрывающее слоение $C\mathfrak{L}^1(n)$ на многообразии $\mathbb{R}^n \times T^m$ (в вещественном случае, где T^m есть m–мерный тор) или на многообразии $\mathbb{C}^n \times Z^m$ (в комплексном случае).

Теперь на основании теоремы 1.3 имеем следующее утверждение в случае, когда накрывающее слоение $C\mathfrak{L}^1(n)$, соответствующее линейной дифференциальной систему (1.4), является невырожденным и нетривиальным.

Теорема 1.4. *Если у линейной дифференциальной системы* (1.4) *фазовая матрица группы монодромии* $CL^1(n)$ *является матрицей Пуанкаре, то система глобально топологически устойчива, а если является матрицей Зигеля – то глобально топологически неустойчива.*

§ 5. Глобальная орбитальная устойчивость автономных линейных дифференциальных систем.

Рассмотрим автономную линейную дифференциальную систему

$$dw = \sum_{j=1}^{m} A_j w\ dz_j, \tag{1.5}$$

обыкновенную при $m = 1$ и вполне разрешимую при $m > 1$, где постоянные квадратные матрицы $A_j = ||a_{ikj}||$ размера n состоят из элементов $a_{ikj} \in \mathbb{K},\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$. Общее решение автономной линейной дифференциальной системы (1.5) определяет тривиальное накрывающее слоение на многообразии $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$. В силу следствия 1.1 автономная линейная дифференциальная система (1.5) глобально топологически неустойчива.

Определение 1.5. *Автономную линейную дифференциальную систему* (1.5) *будем называть* **глобально орбитально устойчивой**, *если замыкание любой ее отличной от точки орбиты* [31, с. 114] *содержит начало координат* $O \in \mathbb{K}^n$.

Так как при $m > 1$ автономная линейная дифференциальная система (1.5) вполне разрешима, то [31, с. 64–65] матрицы $A_j,\ j = \overline{1,m}$, в совокупности перестановочны, и ее фундаментальная система решений имеет вид $\exp\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} A_j z_j\Big)$. Матрицы $exp\, A_j,\ j = \overline{1,m}$, образуют линейную фазовую группу $CL^1(n)$. Теперь на основании теорем 1.2 и 2.2 имеем такое утверждение.

Теорема 1.5 [26, 39]. *Если у автономной линейной дифференциальной системы* (1.5) *с единственным состоянием равновесия фазовая матрица линейной фазовой группы* $CL^1(n)$ *является матрицей Пуанкаре, то система глобально орбитально устойчива, а если является матрицей Зигеля – то глобально орбитально неустойчива.*

§ 6. Глобальная топологическая устойчивость абелевых дробно–линейных накрывающих слоений.

Рассмотрим сначала вещественное абелево дробно–линейное накрывающее слоение $C\mathfrak{PL}^1(n)$ с вещественной абелевой фазовой группой $CPL^1(n)$, определяемой дробно–линейными действиями

$$P_r v,\ \forall v \in \mathbb{R}P^n,\ P_r \in GL(n+1, \mathbb{R}),\ r = \overline{1,\nu}. \tag{1.6}$$

При этом будем считать, что невырожденные матрицы P_r не имеют кратных собственных значений, для любых двух собственных значений имеет место следующее свойство: если хотя бы одно из этих двух собственных значений вещественное, то модуль их частного отличен от 1, и, кроме того, если собственное значение $\lambda \in \mathbb{C}$, то $\pi^{-1} arg\lambda \notin \mathbb{Q},\ r = \overline{1,\nu}$. Будем рассматривать тот случай, когда фазовая группа имеет только $n+1$ неподвижных точек: O_τ – начала координат аффинных карт $M_\tau = \{v,\ v_\tau \neq 0\}$ атласа M многообразия $\mathbb{R}P^n,\ \tau = \overline{1, n+1}$. Очевидно, что при этом вещественное дробно–линейное накрывающее слоение $C\mathfrak{PL}^1(n)$ является невырожденным нетривиальным.

Как и ранее, с помощью общего преобразования подобия (которому соответствует невырожденное дробно-линейное преобразование пространства $\mathbb{R}P^n$) все матрицы $P_r,\ r = \overline{1,\nu}$, одновременно приводим к диагональному виду, соответствующему вещественной нормальной жордановой форме.

Рассмотрим две логические возможности: 1) матрица P_r не имеет вещественных собственных значений, $r = \overline{1,\nu}$; 2) матрица P_r имеет хотя бы одно вещественное собственное значение, $r = \overline{1,\nu}$.

В первом случае после вышеуказанного преобразования образы дробно-линейных преобразований (1.6) запишем в виде $\mathfrak{Q}_r = \{\lambda_{ir}y_i,\ \lambda_{ir} \in \mathbb{C},\ y_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{1,s}\},\ r = \overline{1,\nu}$; где $s = n/2$; $\lambda_{ir},\ i = \overline{1,s}$, – собственные значения матрицы $P_r,\ r = \overline{1,\nu}$. Непосредственными вычислениями приходим к выводу, что фазовая группа $CPL^1(n)$ в первом случае не имеет неподвижных точек. Следовательно, $C\mathfrak{P}\mathfrak{L}^1(n)$ является слабо эргодическим нетривиальным накрывающим слоением и в силу следствия глобально топологически неустойчиво.

Аналогично, во втором случае образы дробно-линейных преобразований (1.6) запишем в виде

$$\mathfrak{Q}_r = \begin{cases} \lambda_{ir}y_i,\ \lambda_{ir} \in \mathbb{C},\ y_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{1,k}, \\ \lambda_{ir}y_i,\ \lambda_{ir} \in \mathbb{R},\ y_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{k+1,s},\ r = \overline{1,\nu}; \end{cases} \tag{2.6}$$

где $s + k = n + 1$; $\lambda_{ir},\ i = \overline{1,s}$, – собственные значения матрицы $P_r,\ r = \overline{1,\nu}$. На основании (2.6) имеем, что фазовая группа $CPL^1(n)$ в данном случае имеет $p = n + 1 - 2k$ неподвижных точек, а именно $O_\tau \in M_{2k+\tau},\ \tau = \overline{1,p}$, где переменным $y_i,\ i = \overline{1,k}$, из (2.6) соответствуют переменные $v_j,\ j = \overline{1,2k}$. Следовательно, $C\mathfrak{P}\mathfrak{L}^1(n)$ является невырожденным нетривиальным накрывающим слоением.

В каждой карте $M_\tau,\ \tau = \overline{2k+1,n+1}$, дробно-линейные преобразования (2.6) задают невырожденные линейные однородные преобразования, которые в совокупности определяют фазовую группу $CL^1(n)(M_\tau),\ \tau = \overline{2k+1,n+1}$. Отсюда на основании теорем 1.1 и 1.2 получаем утверждение.

Лемма 1.6. *Если у невырожденного нетривиального вещественного дробно–линейного накрывающего слоения $C\mathfrak{P}\mathfrak{L}^1(n)$ фазовая матрица вещественной фазовой группы $CL^1(n)(M_\tau),\ \tau \in \{2k+1,\ldots,n+1\}$, является матрицей Зигеля, то оно глобально топологически неустойчиво.*

Пусть теперь фазовые матрицы фазовых групп $CL^1(n)(M_\tau),\ \tau = \overline{2k+1,n+1}$, являются матрицами Пуанкаре. Обозначим через $O(v)$ определяемую фазовой группой $CPL^1(n)$ орбиту точки $v \in \mathbb{R}P^n$. Если отличная от неподвижных точка $v^* \in M = \bigcap\limits_{\tau=1}^{n+1} M_\tau$ или $v^* \in \bigcup\limits_{\tau=1}^{p} M_{2k+\tau}$, то, очевидно, что $V^* \in \overline{O}(v^*)$, где $V^* = \bigcup\limits_{\tau}^{p} v^\tau$. В случае же $v^* \in S = \bigcup\limits_{\tau=1}^{2k} S_\tau \Big/ \bigcup\limits_{\tau=2k+1}^{n+1} S_\tau$, где $S_\tau = M_\tau / M$, на основании условий вида $\pi^{-1} arg\lambda \notin \mathbb{Q}$, $r = \overline{1, \nu}$, для комплексных характеристических корней аналогично [38] приходим к выводу, что $\overline{O}(v^*) \subset S$. Поэтому из того, что $dimS \geqslant 1$, с учетом первого случая, леммы 1.6 и теоремы 1.1 имеем такое утверждение.

Теорема 1.6 [26]. *Для того, чтобы невырожденное нетривиальное вещественное абелево дробно–линейное накрывающее слоение $C\mathfrak{P}\mathfrak{L}^1(n)$ было глобально топологически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы матрицы P_r, $r = \overline{1, \nu}$, определяющие вещественную фазовую группу $CPL^1(n)$, имели только вещественные собственные значения, и фазовые матрицы фазовых групп $CL^1(n)(M_\tau)$, $\tau = \overline{1, n+1}$, являлись матрицами Пуанкаре.*

Рассмотрим теперь комплексное абелево дробно–линейное накрывающее слоение $C\mathfrak{P}\mathfrak{L}^1(n)$ с комплексной абелевой фазовой группой $CPL^1(n)$, определяемой дробно–линейными действиями $P_r v$, $\forall v \in \mathbb{R}P^n$, $P_r \in GL(n+1, \mathbb{C})$, $r = \overline{1, \nu}$. Будем считать, что невырожденные матрицы P_r не имеют кратных собственных значений и модуль частного любых двух собственных значений отличен от 1, $r = \overline{1, \nu}$. Образованную таким образом фазовую группу также обозначим $CPL^1(n)$. Нетрудно видеть, что накрывающее слоение $C\mathfrak{P}\mathfrak{L}^1(n)$ является невырожденным нетривиальным.

Как и в случае проективного пространства $\mathbb{R}P^n$, фазовой группе $CPL^1(n)$ поставим в соответствие группы $CL^1(n)(M_\tau)$, $\tau = \overline{1, n+1}$, и на основании теоремы 2.2 аналогично теореме 1.6 доказываем следующее утверждение.

Теорема 2.6 [26]. *Для того, чтобы невырожденное нетривиальное комплексное абелево дробно–линейное накрывающее слоение $C\mathfrak{P}\mathfrak{L}^1(n)$ было глобально топологически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы фазовые матрицы фазовых групп $CL^1(n)(M_\tau)$, $\tau = \overline{1, n+1}$, являлись матрицами Пуанкаре.*

§ 7. Глобальная топологическая устойчивость неавтономных проективных матричных уравнений Риккати с абелевыми группами голономии.

Рассмотрим однородное проективное матричное уравнение Риккати

$$dv = \sum_{j=1}^{m} A_j(z_1, \ldots, z_m) v \, dz_j, \tag{1.7}$$

обыкновенное при $m = 1$ и вполне разрешимое при $m > 1$, где квадратные матрицы $A_j(z_1, \ldots, z_m) = ||a_{ikj}(z_1, \ldots, z_m)||$ размера $n+1$ состоят из голоморфных функций $a_{ikj} : B \to \mathbb{K},\ i = \overline{1, n+1},\ k = \overline{1, n+1},\ j = \overline{1, m}$. Общее решение однородного проективного матричного уравнения Риккати (1.7) определяет дробно–линейное накрывающее слоение $\mathfrak{PL}^1(n)$ на многообразии $\mathbb{K}P^n \times B$.

Определение 1.7. *Будем говорить, что однородное проективное матричное уравнение Риккати* (1.7) **глобально топологически устойчиво**, *если глобально топологически устойчиво дробно–линейное накрывающее слоение* $\mathfrak{PL}^1(n)$.

Теперь на основании теорем 1.6 и 2.6 в случае абелевости группы голономии $CPL^1(n)$ однородного проективного матричного уравнения Риккати (1.7), соответствующего невырожденному нетривиальному абелевому дробно–линейному накрывающему слоению $C\mathfrak{PL}^1(n)$, имеем такие утверждения.

Теорема 1.7. *Для того, чтобы вещественное однородное проективное матричное уравнение Риккати* (1.7) *с группой голономии* $CPL^1(n)$ *было глобально топологически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы матрицы* $P_r,\ r = \overline{1, \nu}$, *определяющие группу голономии, имели только вещественные собственные значения, и фазовые матрицы фазовых групп* $CL^1(n)(M_\tau),\ \tau = \overline{1, n+1}$, *являлись матрицами Пуанкаре.*

Теорема 2.7. *Для того, чтобы комплексное однородное проективное матричное уравнение Риккати* (1.7) *с группой голономии* $CPL^1(n)$ *было глобально топологически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы фазовые матрицы фазовых групп* $CL^1(n)(M_\tau),\ \tau = \overline{1, n+1}$, *являлись матрицами Пуанкаре.*

§ 8. Глобальная топологическая устойчивость проективных матричных уравнений Риккати с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим однородное проективное матричное уравнение Риккати

$$dv = \sum_{j=1}^{m} A_j(z_1, \ldots, z_m) v\ dz_j, \tag{1.8}$$

обыкновенное при $m = 1$ и вполне разрешимое при $m > 1$, где квадратные матрицы $A_j(z_1, \ldots, z_m) = ||a_{ikj}(z_1, \ldots, z_m)||$ размера $n + 1$ состоят из 1–периодических по своим аргументам голоморфных функций $a_{ikj} : \mathbb{K}^m \to$

$\mathbb{K}$, $i = \overline{1, n+1}$, $k = \overline{1, n+1}$, $j = \overline{1, m}$. Общее решение однородного проективного матричного уравнения Риккати (1.8) определяет абелево дробно–линейное накрывающее слоение $C\mathfrak{PL}^1(n)$ на многообразии $\mathbb{R}^n \times T^m$ (в вещественном случае) или на многообразии $\mathbb{C}^n \times Z^m$ (в комплексном случае).

Теперь на основании теорем 1.7 и 2.7 имеем следующие утверждения в случае, когда накрывающее слоение $C\mathfrak{PL}^1(n)$, соответствующее однородному проективному матричному уравнению Риккати (1.8), является невырожденным и нетривиальным.

Теорема 1.8. *Для того, чтобы вещественное однородное проективное матричное уравнение Риккати* (1.8) *с группой голономии* $CPL^1(n)$ *было глобально топологически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы матрицы* P_r, $r = \overline{1, \nu}$, *определяещие группу голономии, имели только вещественные собственные значения, и фазовые матрицы фазовых групп* $CL^1(n)(M_\tau)$, $\tau = \overline{1, n+1}$, *являлись матрицами Пуанкаре.*

Теорема 2.8. *Для того, чтобы комплексное однородное проективное матричное уравнение Риккати* (1.8) *с группой голономии* $CPL^1(n)$ *было глобально топологически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы фазовые матрицы фазовых групп* $CL^1(n)(M_\tau)$, $\tau = \overline{1, n+1}$, *являлись матрицами Пуанкаре.*

§ 9. Глобальная орбитальная устойчивость автономных проективных матричных уравнений Риккати.

Рассмотрим автономное однородное проективное матричное уравнение Риккати

$$dv = \sum_{j=1}^{m} A_j(z_1, \ldots, z_m) v \, dz_j, \tag{1.9}$$

обыкновенное при $m = 1$ и вполне разрешимое при $m > 1$, где постоянные квадратные матрицы $A_j = ||a_{ikj}||$ размера n состоят из элементов $a_{ikj} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n+1}$, $k = \overline{1, n+1}$, $j = \overline{1, m}$. Общее решение автономного однородного проективного матричного уравнение Риккати (1.9) определяет тривиальное накрывающее слоение на многообразии $\mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^m$. В силу следствия 1.1 автономное однородное проективное матричное уравнение Риккати (1.9) глобально топологически неустойчиво.

Определение 1.9. *Автономное однородное проективное матричное уравнение Риккати* (1.9) *будем называть* **глобально орбитально устойчивым**, *если замыкание любой ее отличной от точки орбиты содержит все состояния равновесия этого уравнения из пространства* $\mathbb{K}P^n$.

Так как при $m > 1$ автономное однородное проективное матричное уравнение Риккати (1.9) вполне разрешимо, то матрицы $A_j,\ j=\overline{1,m}$, в совокупности перестановочны, и его фундаментальная система решений имеет вид $\exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{m} A_j z_j\Bigr)$. Матрицы $exp\ A_j,\ j=\overline{1,m}$, образуют дробно–линейную фазовую группу $CPL(n)$. Теперь на основании теорем 1.6 и 2.6 имеем такие утверждения.

Теорема 1.9 [26]. *Для того, чтобы вещественное однородное проективное матричное уравнение Риккати* (1.9) *с изолированными состояниями равновесия было глобально орбитально устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы матрицы* $exp\ A_j,\ j=\overline{1,m}$, *определяющие вещественную фазовую группу* $CPL^1(n)$, *имели только вещественные собственные значения, и фазовые матрицы фазовых групп* $CL^1(n)(M_\tau),\ \tau=\overline{1,n+1}$, *являлись матрицами Пуанкаре.*

Теорема 2.9 [26]. *Для того, чтобы комплексное однородное проективное матричное уравнение Риккати* (1.9) *с изолированными состояниями равновесия было глобально орбитально устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы фазовые матрицы фазовых групп* $CL^1(n)(M_\tau),\ \tau=\overline{1,n+1}$, *являлись матрицами Пуанкаре.*

Литература

[1] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.; Л.: ОГИЗ, 1947. – 392 с.

[2] Reeb G. Sur certaines properiètès topologiques des varièt̀es feuilletès. – Paris: Herman, 1952. – 301 p.

[3] Новиков С. П. Топология слоений // Тр. Моск. мат. об–ва. – 1965. – Т. 14. – С. 248 – 278.

[4] Тамура И. Топология слоений. – М.: Мир, 1979. – 319 с.

[5] Петровский И. Г., Ландис Е. М. О числе предельных циклов уравнения $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, где P и Q — многочлены второй степени // Матем. сб. – 1955. – Т. 37, вып. 2. – С. 209 – 250.

[6] Ильяшенко Ю. С. Топология фазовых портретов аналитических дифференциальных уравнений на комплексной проективной плоскости // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. – 1978. – Вып. 4. – С. 83 – 136.

[7] Ладис Н. Н. Об интегральных кривых комплексного однородного урав-

нения // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 2. – С. 246 – 251.

[8] Camacho C., Sad P. Topological classification and bifurcations of holomorphic flows with resonances in $\mathbb{C}^2$ // Invent. math. – 1982. – V. 67. – P. 447 – 472.

[9] Вайсборд Э. М. Об эквивалентности систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки // Научн. доклады высшей школы (физ.–мат. науки). – 1958. – № 1. – С. 37 – 42.

[10] Дыманов Р. Г. О топологической классификации линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1970. – Т. 6, № 12. – С. 2270 – 2272.

[11] Ладис Н. Н. Топологическая эквивалентность линейных потоков // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9, № 7. – С. 1222 – 1235.

[12] Ладис Н. Н. Топологическая эквивалентность линейных действий $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^n$ // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 3. – С. 443 – 448.

[13] Рейзинь А. И. Классификация особых точек линейных систем в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, № 8. – С. 1282 – 1291.

[14] Перов А. И., Эгле И. Ю. Топологическая классификация точек многомерного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами // Латв. мат ежегодник. – 1976. – Вып. 19. – С. 162 – 179.

[15] Guckenheimer J. Hartman's theorem for complex flows in the Poincare domain // Compos. math. – 1972. – V. 24, № 1. – P. 75 – 82.

[16] Ладис Н. Н. Топологические инварианты комплексных линейных потоков // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 12. – С. 2159 – 2169.

[17] Ладис Н. Н. Топологическая эквивалентность гиперболических линейных систем // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 255 – 265.

[18] Ильяшенко Ю. С. Замечания о топологии особых точек аналитических дифференциальных уравнений в комплексной области и теорема Ладиса // Функц. анализ и его приложения. – 1977. – Т. 11, № 2. – С. 28 – 38.

[19] Camacho C., Kuiper N. H., Palis J. The topology of holomorphic flows with singularity. 1 // Publ. Math. IHES, Paris. – 1978. – V. 48. – P. 5 – 38.

[20] Горбузов В. Н., Тыщенко В. Ю. Об эквивалентности слоений линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 12. – С. 1596 – 1599.

[21] Худай–Веренов М. О. Об одном свойстве решений одного дифференциального уравнения // Матем. сборник. – 1962. – Т. 56, № 3. – С. 301 – 308.

[22] Ладис Н. Н. Топологическая эквивалентность неавтономных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 5. – С. 951 – 953.

[23] Амелькин В. В. Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения. – Минск.: Университетское, 1985. – 142 с.

[24] Горбузов В. Н., Тыщенко В. Ю. $\mathbb{R}$–голоморфные решения уравнения в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 4. – С. 447 – 452.

[25] Winternitz P. Lie groups and solutions of nonlinear differential equations // Lect. Notes in Phys. – 1983. – V. 189. – P. 263 – 331.

[26] Тыщенко В. Ю. О топологических характеристиках проективного матричного уравнения Риккати // Вестник Гроднен. ГУ. Сер. 2. – 2006. – № 1. – С. 20 – 28.

[27] Зверович Э. И. Вещественный и комплексный анализ. Кн. 4. Т. 6. Теория аналитических функций комплексного переменного. – Минск: Вышэйшая школа, 2008. – 319 с.

[28] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 549 с.

[29] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. – М., Л.: ГИТТЛ, 1948. – 408 с.

[30] Тыщенко В. Ю. О сопряженностях комплексных линейных и дробно–линейных действий // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2007. – № 3. – С. 96 – 101.

[31] Гайшун И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. – Минск: Наука и техника, 1983. – 272 с.

[32] Кононов С. Г., Прасолов А. В., Тимохович В. Л., Тралле А. Е., Феденко А. С. Топология (под общ. ред. Феденко А. С.). - Минск: Вышэйшая школа, 1990. - 318 с.

[33] Болибрух А. А. Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. - М.: МЦНМО, 2000. - 120 с.

[34] Лаппо-Данилевский И. А. Применение функций от матриц к теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: ГИТТЛ, 1957. - 456 с.

[35] Тыщенко В. Ю. Об эквивалентности комплексных многомерных уравнений Риккати с периодическими коэффициентами // Известия НАН Бела-

руси. Сер. физ.–мат. наук. – 2005. – № 4. – С. 119 – 120.

[36] Gorbuzov V. N., Tyshchenko V. Yu. On the embeddability of foliations of the Riccati equations // Buletinul AS Moldova. Matematica. – 1998. – № 3 (28). – P. 49 – 56.

[37] Тыщенко В. Ю. Классификация уравнений Риккати с неабелевыми группами голономии // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2007. – № 1. – С. 82 – 86.

[38] Тыщенко В. Ю. Эквивалентность уравнений Риккати с периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 4. – С. 565 – 567.

[39] Василевич Н. Д. Линейные уравнения Пфаффа // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. № 3. – С. 520 – 523.