ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2006
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Динамические системы на многообразиях

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ОКРЕСТНОСТИ НЕТРАНСВЕРСАЛЬНОЙ ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ДВУМЕРНОГО ДИФФЕОМОРФИЗМА

С.Б. Тихомиров

Россия, 198504, Россия, Санкт-Петербург, Старый Петергоф,
Университетский пр., дом 28,
С.-Петербургский государственный университет,
математико-механический факультет,
e-mail: quiet@st8008.spb.edu

Аннотация

Рассматривается нетрансверсальная гомоклиническая точка гиперболической неподвижной точки двумерного диффеоморфизма, в предположении, что седловая величина меньше 1. Представлено новое доказательство существования счетного семейства периодических точек в ее малой окрестности. Для случая квадратичного касания доказана гиперболичность найденных периодических точек и наличие трансверсальной гетероклинической структуры.

[0]Статья выполнена при финансовой поддержке министерства образования РФ, 2005 год, проект 37858

1 Введение

Рассмотрим дискретную динамическую систему, порожденную диффеоморфизмом f, заданном на многообразии M. Предположим, что p – ее гиперболическая неподвижная точка. Пусть W^s и W^u — устойчивое и неустойчивые многообразия точки p. Рассмотрим ситуацию, когда они имеют точку пересечения q, отличную от p. Такую точку пересечения называют гомоклинической точкой, а траекторию, проходящую через нее, гомоклинической траекторией. Гомоклинические точки играют важную роль в теории динамических систем [1], [5]. В зависимости от характера пересечения устойчивого и неустойчивого многообразия выделяют два класса гомоклинических точек — трансверсальные и нетрансверсальные. Динамика в окрестности трансверсальных гомоклинических структур достаточно хорошо изучена (например [1], [5]), в то время как в нетрансверсальном случае остается открытым множество вопросов [3].

В данной работе предложен новый метод анализа окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки для двумерных отображений. Основной идеей предлагаемого метода является представление отображения вдоль траектории из малой окрестности гомоклинической точки в себя в виде композиции двух отображений с более простыми свойствами. Одно из них — отображение в окрестности исходной неподвижной точки, соответствующее переменному количеству итераций отображения f и переводящее окрестность локально устойчивого многообразия неподвижной точки в окрестность локально неустойчивого. Второе — фиксированное количество итераций отображения f. В таком представлении важные объекты динамики, такие как периодические точки и инвариантные многообразия, достаточно просто описываются аналитическими уравнениями. Для полученных уравнений можно установить асимптотическое поведение их решений, которое позволяет делать выводы о поведении траектории исходной динамической системы.

В работе сформулированы достаточные условия существования счетного семейства периодических точек в окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки. Для случая квадратичного гомоклинического касания доказана гиперболичность найденных периодических точек и доказано наличие трансверсального пересечения их устойчивых многообразий с неустойчивым многообразием неподвижной точки, порождающей нетрансверсальную гомоклинику.

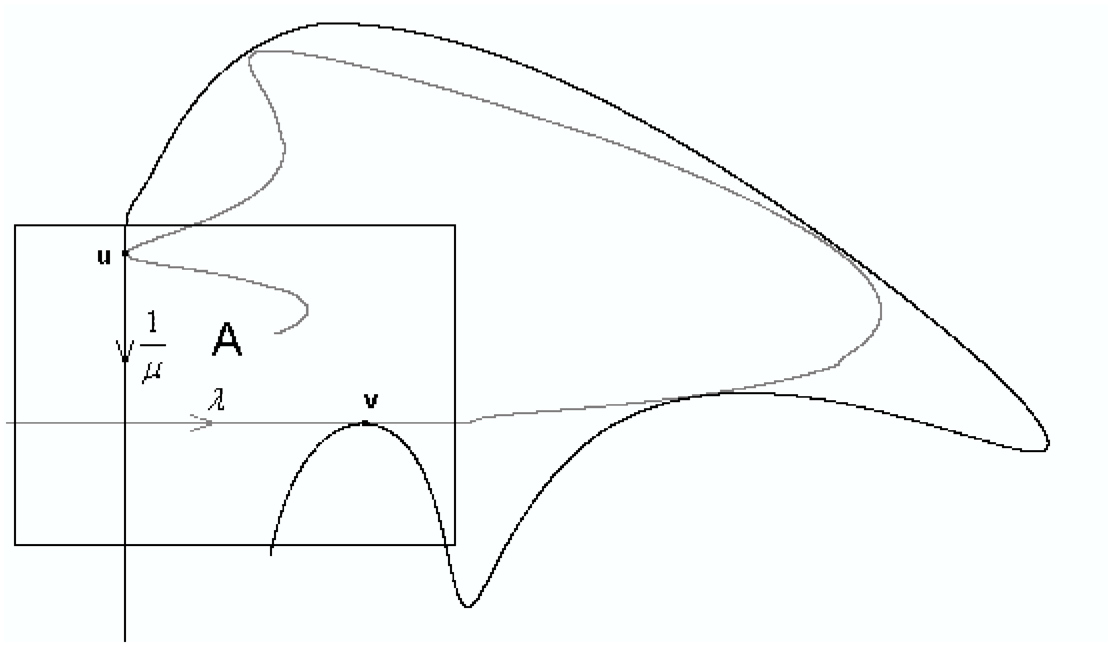

Рис. 1: Окрестность точки $(0, 0)$.

2 Основные обозначения

Рассмотрим дискретную динамическую систему на плоскости

$$\Phi : \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,$$

порожденную диффеоморфизмом f класса $\mathbf{C}^1$. Предположим, что $(0, 0)$ – ее гиперболическая седловая неподвижная точка. Пусть W^sи W^u– устойчивое и неустойчивое многообразия точки $(0, 0)$ соответственно. Предположим, что рассматриваемая динамическая система в некоторой окрестности нуля является линейной и ее локально устойчивое и неустойчивое многообразия направлены по осям y и x соответственно. Пусть $A = Df(0, 0)$. При сделанных предположениях выполнено равенство

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\mu \end{pmatrix}, \text{где} \quad |\lambda|, |\mu| > 1. \tag{1}$$

Замечание 1. *Как показано в [7], широкий класс систем может быть приведен к такому виду при помощи гладкой замены координат.*

Предположим, что существует точка касания u многообразий W^s и W^u, лежащая в области линейности динамической системы на оси y. Тогда существует такая точка касания v многообразий W^s и W^u, лежащая в области

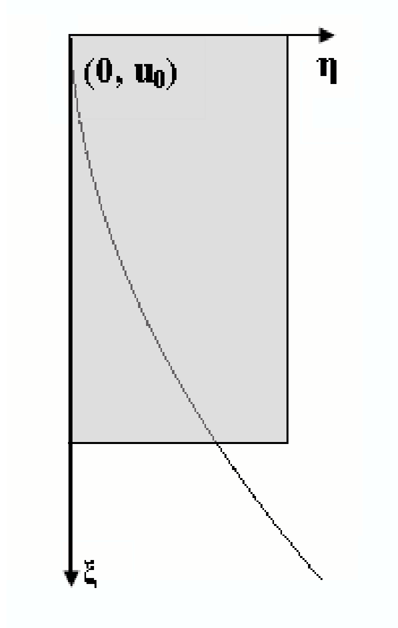

Рис. 2: Система координат.

линейности динамической системы на оси x, что u и v лежат на одной траектории (рис. 1).

Рассмотрим такое N, что выполнено равенство $u = f^N(v)$. Обозначим f^{-N} через F. Пусть далее $u = (0, u_0), v = (v_0, 0)$. Перед проведением дальнейших рассуждений дополнительно предположим, что $\lambda, \mu, u_0, v_0 > 0$.

Введем на множестве $U = (0; \eta_0] \times [u_0 - \xi; u_0)$ (множество, заштрихованное на рис. 2) отображение G, действующее из U в $\mathbf{R}^2$, по следующему закону. Обозначим через $G(z)$ первую точку последовательности $z, f(z), \ldots, f^k(z), \ldots$, у которой координата x больше или равна v_0.

Введем в окрестности точки u новые координаты: в качестве начала координат возьмем точку u, ось ξ направим вниз в направлении 0, а ось η направим вдоль исходной оси x (рис. 2).

Введем последовательности функций J_n, K_n по следующему закону:

$$J_n(\xi, \eta) = \eta \lambda^n, \qquad K_n(\xi, \eta) = (1/\mu^n)(u_0 - \xi). \tag{2}$$

Обозначим интервал $[v_0/\lambda^n; v_0/\lambda^{n-1})$ через I_n. При таком определении J_n и K_n и интервала I_n выполнено соотношение

$$G(\xi, \eta) = \left\{ (J_n(\xi, \eta), K_n(\xi, \eta)), \quad \text{где } \eta \in I_n \right\}. \tag{3}$$

Рассмотрим разбиение $\mathbf{R}_+$ на интервалы вида $I_m, \quad m \in \mathbf{Z}$. Далее, для каждого $\eta > 0$ обозначим через $n(\eta)$ единственное целое число такое, что выполнено включение $\eta \in I_{n(\eta)}$. Легко видеть, что $n(\eta)$ — монотонная функция. Перепишем (3), используя это обозначение:

$$G(\xi, \eta) = \left(J_{n(\eta)}(\xi, \eta), K_{n(\eta)}(\xi, \eta)\right).$$

Следует отметить, что $n(\eta)$ и $G(\xi, \eta)$ — разрывные функции.

Перед дальнейшими рассуждениями введем ряд стандартных обозначений (например, см. [6], том I):

$$a(x) \sim_{x \to x_0} b(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} a(x)/b(x) = 1,$$

$$a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n/b_n = 1.$$

Мы будем говорить, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a_0$, если существует такая константа $c > 0$, что в некоторой окрестности a_0 выполнены неравенства $|f(x)/g(x)| < c$ и будем говорить, что $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a_0$, если $f(x)/g(x) \to 0$ при $x \to a_0$.

3 Основные теоремы

Пусть функции P и Q таковы, что $F(\xi, \eta) = (P(\xi, \eta), Q(\xi, \eta))$. Выясним некоторые дополнительные свойства функций P и Q. Очевидно, что существует участок многообразия W^u, лежащий в $\overline{U}$ и касающийся оси ξ. Отображение F переводит этот участок в горизонтальный отрезок, следовательно, $Q'_\xi(0,0) = 0$. Поскольку F — диффеоморфизм, то якобиан

$$\begin{vmatrix} P'_\xi(0,0), P'_\eta(0,0) \\ Q'_\xi(0,0), Q'_\eta(0,0) \end{vmatrix}$$

не равен 0. Так как $Q'_\xi(0,0) = 0$, то отсюда следует, что

$$P'_\xi(0,0) \neq 0 \quad \text{и} \quad Q'_\eta(0,0) \neq 0. \tag{4}$$

Одним из результатов данной статьи является нахождение достаточных условий существования счетного семейства периодических движений системы Φ в окрестности точки u.

Теорема 1. *Предположим, что*

1. $\mu > \lambda > 0$.

2. $P'_\xi(0,0) > 0$ *и* $Q'_\eta(0,0) > 0$.

3. *Найдется такое* $l > 1$, *что* $Q \in \mathbf{C}^l$ *и при этом выполнены следующие соотношения:*

$$Q_\xi^{(l)}(0,0) < 0 \quad \text{и} \quad Q_\xi^{(m)}(0,0) = 0 \quad \text{при} \quad m < l.$$

Тогда при достаточно больших n *найдутся такие* $\eta_n \in \left[v_0/\lambda^n; v_0/\lambda^{n-1}\right)$ *и* $\xi_n > 0$, *что* $F(\xi_n, \eta_n) = G(\xi, \eta)$. *При этом* $\xi_n \to 0$.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 в сколь угодно малой окрестности точки и найдется периодическая точка.*

Замечание 2. *При четных* l *следствие 1 верно и без предположения 2 теоремы 1.*

Доказательство. Действительно, поскольку $\lambda, \mu > 0$, то якобиан отображения f в любой точке положителен. Следовательно, $P'_\xi(0,0)$ и $Q'_\eta(0,0)$ одного знака. В случае, если условие 2 не выполнено, то имеют место соотношения $P'_\xi(0,0) < 0$ и $Q'_\eta(0,0) < 0$. Рассмотрим динамическую систему, порожденную диффеоморфизмом f^2. Для нее будут выполнены все условия теоремы 1, а периодические точки этой системы будут являться периодическими точками исходной системы. □

Данная задача, разумеется, ранее уже исследовалась, и в [4] для описанного случая были получены необходимые и достаточные условия существования периодических точек в сколь угодно малой окрестности гомоклинической точки. Приведем этот результат в наших обозначениях:

Теорема 2. *Если* $F \in \mathbf{C}^1$ *и* $|\mu| > |\lambda|$, *то при достаточно малых* ε *в* ε*–окрестности точки и найдется периодическая точка тогда и только тогда, когда прообраз горизонтального отрезка* $L = (u_0 - \varepsilon; u_0 + \varepsilon) \times \{0\}$ *под действием отображения* F *обладает следующими свойствами:*

1. *Он содержит точки, не лежащие на оси* y.

2. *Если* $\lambda > 0$, *то прообраз содержит точки с положительными координатами* y.

Сравним результаты теорем 1 и 2. В настоящей работе мы ограничились рассмотрением случая $\lambda, \mu > 0$. Покажем, что при этих предположениях для четных l, полученный результат совпадает с результатом теоремы 2, а при нечетных l является его частным случаем. Верно следующее:

1. Условие 1 теоремы 1 является общим для этих двух теорем.
2. Согласно замечанию 2, при четных l условие 2 можно опустить.
3. Лемма 1 (сформулированная далее) показывает, что в условиях теоремы 1 выполнены условия теоремы 2.
4. Согласно замечанию 4, при четных l условие 3 теоремы 1 является необходимым для выполнения условий теоремы 2

Утверждения 1-4 в совокупности доказывают сформулированное утверждение.

Опишем основную идею доказательства теоремы 2, приведенного в [4]. Автор рассматривает отображение f^{N+n} в малой окрестности точки u. В этой окрестности автор строит прямоугольник вида $E = [\xi_1, \xi_2] \times \left[v_0/\lambda^n; v_0/\lambda^{(n-1)}\right]$. Для каждой точки x этого прямоугольника рассматривается вектор с началом в x и концом в $f^{N+n}(x)$. Нетрудно заметить, что построенное векторное поле является непрерывным. Рассматривая его поведение на границе E, автор доказывает, что в условиях теоремы оно направленно наружу. Отсюда следует, что хотя бы в одной точке внутри прямоугольника рассматриваемое векторное поле обращается в 0. Эта точка является неподвижной точкой отображения f^{N+n}, а следовательно, периодической точкой исходной системы.

Изучаемая нами задача исследовалась в [2] для случая касания первой степени, т.е. в наших обозначениях для случая $l = 2$. Авторы не делали предположения о линейности системы в окрестности неподвижной точки. Одним из полученных результатов является доказательство наличия счетного семейства периодических точек в окрестности гомоклинической точки. Ниже мы приведем схему этого доказательства в наших предположениях и обозначениях.

Рассмотрим малую окрестность точки u и такое ее разбиение ее на множества σ_n, которые проектируются на интервалы I_n В статье приводятся условия, при которых $F^{-1}A^n(\sigma_i) \bigcap \sigma_j \neq \varnothing$. Вместе с отображением $F^{-1}A^i : \sigma_i \to \sigma_j$ рассмотрим отображение $A^j : (\xi, \eta) \to (x, y)$. Записывая отображение $F^{-1}A^n$ в переменных (ξ, y), получим отображение $\tilde{F}$. Авторы доказывают, что отображение $\tilde{F}$ является сжимающим, а, следовательно, имеет неподвижную точку, которая очевидно будет периодической точкой исходной системы.

В описанных работах доказательства опирались в основном на топологические факты, что затрудняет дальнейшее исследование окрестности найденных периодических точек. В этом отношении техника [2] обладает существенно большими возможностями, чем техника [4], в частности с ее помощью авторы доказывают гиперболичность найденных точек. Однако вопрос о возможности конструктивного построения периодических точек и нахождения асимптотики их координат и инвариантных многообразий остается открытым.

Рассмотрим частный случай описанных динамических систем. Мы по-прежнему будем предполагать, что в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ система описывается линейным отображением (1) и u и v – такие точки нетрансверсального пересечения ее инвариантных многообразий, что $u = f^N(v)$. Сформулируем основной результат данной статьи.

Теорема 3. *Предположим, что $\mu > \lambda$ и в некоторой окрестности точки $(v_0, 0)$ отображение f^N имеет вид:*

$$f^N(v_0 + x, y) = (ax^2 + by + p_1(x, y), u_0 - cx + p_2(x, y)), \tag{5}$$

где $a, b, c > 0$ и функции p_1 и p_2 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} p_1(x, y) &= o(x^2 + |y|), \quad p_1 \in \mathbf{C}^2; \\ p_2(x, y) &= o(|x| + |y|), \quad p_2 \in \mathbf{C}^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда:

1. *Найдется такое $n_0 > 0$, что для всякого $n > n_0$ в окрестности точки $(v_0, 0)$ найдется седловая $(n + N)$–периодическая точка. При этом ее координаты $(v_0 + x_n, y_n)$ удовлетворяют соотношениям*

$$x_n \sim \sqrt{\frac{v_0}{a}} \frac{1}{\lambda^{n/2}}, \quad y_n \sim u_0 \frac{1}{\mu^n}. \tag{7}$$

2. *Найдется такое $n_1 > n_0$, что для любого $n > n_1$ устойчивое многообразие найденной периодической точки трансверсально пересекает неустойчивое многообразие точки $(0, 0)$.*

4 Доказательство Теоремы 1

Поскольку $P'_\xi(0, 0) > 0$, то найдутся такое число $\varepsilon > 0$ и такая окрестность точки $(0, 0)$, что $P'_\xi(\xi, \eta) > \varepsilon$ для точек этой окрестности. В дальнейшем будем рассматривать лишь эту окрестность. Опишем некоторые дополнительные свойства диффеоморфизма f.

Лемма 1. *В условиях теоремы 1 существуют положительное число* δ *и функция* $h(\eta)$*, заданная на промежутке* $(0,\delta)$*, удовлетворяющие следующим соотношениям:*

1. $Q(h(\eta),\eta)=0, \quad \eta\in(0,\delta)$.
2. $h(\eta)\to 0$ *при* $\eta\to 0$.
3. $h(\eta)>0$ *при* $\eta\in(0,\delta)$.

Замечание 3. *Точки* $(h(\eta),\eta)$ *принадлежат неустойчивому многообразию точки* $(0,0)$.

Доказательство. Из условия 3 теоремы 1 следует, что в окрестности точки $(0,0)$ функция Q представима в виде

$$Q(\xi,\eta)=-c_1\xi^l+c_2\eta+z_1(\xi,\eta), \quad \text{где} \quad c_1,c_2>0 \quad \text{и} \quad z_1(\xi,\eta)=o(\xi^l+\eta). \tag{8}$$

Применяя теорему о неявной функции к уравнению $w(x,y)=-c_1x+c_2y+z_1(x^{1/l},y)=0$, легко показать, что существует такая функция $h^l(\eta)$, что

$$h^l(\eta)=\frac{c_2}{c_1}\eta+z_2(\eta) \quad \text{и} \quad -c_1h^l(\eta)+c_2\eta+z_1(h(\eta),\eta)=0, \quad \text{где} \quad z_2(\eta)=o(\eta). \tag{9}$$

Обозначим $(c_2/c_1)^{1/l}$ через c_3. Из (9) следует равенство $h=c_3\eta^{1/l}+o(\eta^{1/l})$. Очевидно, что функция $h(\eta)$ удовлетворяет всем условиям леммы 1. $\square$

Замечание 4. *При четных* l *условие* $Q_\xi^{(l)}(0,0)<0$ *является необходимым для существования функции* $h(\eta)$*, удовлетворяющей первым двум условиям леммы.*

Доказательство. Действительно если $Q_\xi^{(l)}(0,0)>0$, то равенство (8) было бы выполнено, но при $c_1<0$. Это соотношение при $\eta>0$ и четных l влечет за собой неравенство $Q(\xi,\eta)>0$ при достаточно малых ξ и η. Следовательно, искомой функции $h(\eta)$ не существует. $\square$

Введем обозначение $r=(1/v_0)^{\ln\mu/\ln\lambda}$, которое будет использоваться на протяжении дальнейшего изложения.

Лемма 2. *Для любого* $\eta\in I_n$ *и* $\mu>1$ *выполняется двойное неравенство*

$$\frac{1}{\mu}\cdot r\cdot\eta^{\frac{\ln\mu}{\ln\lambda}}<\frac{1}{\mu^n}\le r\cdot\eta^{\frac{\ln\mu}{\ln\lambda}}. \tag{10}$$

Доказательство. По условию леммы выполнены неравенства

$$\frac{v_0}{\lambda^{n-1}} > \eta \geq \frac{v_0}{\lambda^n}.$$

Откуда немедленно следует, что

$$n \geq \frac{\ln(v_0/\eta)}{\ln\lambda} \quad \text{и} \quad n-1 < \frac{\ln(v_0/\eta)}{\ln\lambda}.$$

Перепишем эти неравенства в виде двойного неравенства относительно n:

$$\frac{\ln(v_0/\eta)}{\ln\lambda} + 1 > n \geq \frac{\ln(v_0/\eta)}{\ln\lambda}. \tag{11}$$

Из неравенства (11) следует, что

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{\mu^{\frac{\ln(v_0/\eta)}{\ln\lambda}}} < \frac{1}{\mu^n} \leq \frac{1}{\mu^{\frac{\ln(v_0/\eta)}{\ln\lambda}}}. \tag{12}$$

Проведя простые арифметические преобразования, легко доказать, что

$$r\cdot\eta^{\frac{\ln\mu}{\ln\lambda}}\cdot\mu^{\frac{\ln(v_0/\eta)}{\ln\lambda}} = 1.$$

Отсюда и из (12) следует неравенство

$$\frac{1}{\mu}\cdot r\cdot\eta^{\frac{\ln\mu}{\ln\lambda}} < \frac{1}{\mu^n} \leq r\cdot\eta^{\frac{\ln\mu}{\ln\lambda}},$$

которое доказывает утверждение леммы. □

Лемма 3. *При достаточно больших n для любого $\eta \in I_n$ найдется такое $\alpha(\eta)$, $\quad 0 < \alpha(\eta) < h(\eta)$, что $Q(\alpha(\eta),\eta) = K_n(\alpha(\eta),\eta)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $K_n(0,\eta)$. В силу определения (2) выполнено равенство $K_n(0,\eta) = a/\mu^n$. В силу леммы 2, $\frac{1}{\mu^n} \leq r\cdot\eta^{\frac{\ln\mu}{\ln\lambda}}$. Объединяя эти соотношения, получаем, что

$$K_n(0,\eta) \leq a\cdot r\cdot\eta^{\frac{\ln\mu}{\ln\lambda}}. \tag{13}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение в 0 функций $Q(0,\eta)$ и $K_n(0,\eta)$. Из условия $Q \in \mathbf{C}^1$ следует, что

$$Q(0,\eta) = Q'_\eta(0,0)\eta + o(\eta), \quad \text{где} \quad Q'_\eta(0,0) > 0.$$

Поскольку $\mu > \lambda$ и выполнено неравенство (13), то $K_n(0,\eta) = o(\eta)$. Объединяя эти два утверждения, получаем, что при достаточно малых η выполнено неравенство $Q(0,\eta) > K_{n(\eta)}(0,\eta)$. Отсюда немедленно следует, что при достаточно больших n и любом $\eta \in I_n$ выполнено неравенство

$$Q(0,\eta) > K_n(0,\eta). \tag{14}$$

Зафиксируем $\eta \in I_n$. По определению $h(\eta)$ выполнено соотношение

$$Q(h(\eta),\eta) = 0. \tag{15}$$

Так как по определению $K_n(h,\eta) = 1/\mu^n(u_0 - h)$, а $h < u_0$ при достаточно малых η, то выполнено неравенство

$$K_n(h(\eta),\eta) > 0 \tag{16}$$

В силу (14), (15) и (16),

$$Q(0,\eta) > K_n(0,\eta) \quad \text{и} \quad Q(h(\eta),\eta) < K_n(h(\eta),\eta). \tag{17}$$

Поскольку Q и K_n непрерывны, то найдется такое $\alpha = \alpha(\eta) \in (0, h(\eta))$, что

$$Q(\alpha(\eta),\eta) = K_n(\alpha(\eta),\eta). \tag{18}$$

Лемма 3 доказана. □

Далее докажем, что при достаточно больших n найденная функция $\alpha(\eta)$ непрерывна при $\eta \in I_n$. Для этого нам понадобится вспомогательная лемма.

Лемма 4. *Рассмотрим (ξ_k,η_k) — последовательность таких точек, что $(\xi_k,\eta_k) \to (0,0)$. Тогда в условиях теоремы 1 выполнены следующие утверждения.*

1. *Если для любого k выполнено равенство $Q(\xi_k,\eta_k) = K_{n(\eta_k)}(\xi_k,\eta_k)$, то найдется такое $c_1 > 0$, что $\xi_k \sim c_1 \cdot \eta_k^{1/l}$.*

2. *Если для некоторых $c_1, c_2 > 0$ выполнено соотношение*

$$c_1 \cdot \eta_k^{1/l} < \xi_k < c_2 \cdot \eta_k^{1/l},$$

то, начиная с некоторого k, выполнено неравенство

$$|Q'_\xi(\xi_k,\eta_k)| > \left| \frac{\partial K_{n(\eta_k)}}{\partial \xi}(\xi_k,\eta_k) \right|.$$

Доказательство. Поскольку выполнено условие 3 теоремы 1, то раскладывая функции Q_ξ' и Q в ряды Тейлора, получаем соотношения

$$Q_\xi'(\xi_k,\eta_k)=ls\xi_k^{l-1}+O(\eta_k+\xi_k^l) \tag{19}$$

и

$$Q(\xi_k,\eta_k)=s\xi_k^l+d\eta_k+o(\eta_k+\xi_k^l). \tag{20}$$

Ввиду условий 2 и 3 теоремы 1, выполнены неравенства $d=Q_\eta'(0,0)>0$ и $s=\frac{1}{l!}Q_\xi^{(l)}(0,0)<0$. Записывая определение функции K_n в точке (ξ_k,η_k), получаем соотношение

$$K_{n(\eta_k)}(\xi_k,\eta_k)=\frac{1}{\mu^{n(\eta_k)}}(u_0-\xi_k).$$

Применяя к этому соотношению лемму 2 и замечая тот факт, что начиная с некоторого k выполнено неравенство $\xi_k<u_0/2$, получаем, что

$$K_{n(\eta_k)}(\xi_k,\eta_k)\in\left(\frac{u_0}{2}\frac{1}{\mu}r\eta_k^{\frac{\ln\mu}{\ln\lambda}};u_0r\eta_k^{\frac{\ln\mu}{\ln\lambda}}\right]. \tag{21}$$

Приступим к доказательству пункта 1 леммы 4. По условию выполнено равенство $Q(\xi_k,\eta_k)=K_{n(\eta_k)}(\xi_k,\eta_k)$. Объединяя его с соотношениями (20) и (21), получаем, что

$$s\xi_k^l+d\eta_k+o(\eta_k+\xi_k^l)\in\left(\frac{u_0}{2}\frac{1}{\mu}r\eta_k^{\frac{\ln\mu}{\ln\lambda}};u_0r\eta_k^{\frac{\ln\mu}{\ln\lambda}}\right].$$

Откуда немедленно следует, что $s\xi_k^l+d\eta_k+o(\eta_k+\xi_k^l)=O(\eta_k^{\frac{\ln\mu}{\ln\lambda}})$. Поскольку $\ln\mu/\ln\lambda>1$, то для выполнения этого равенства необходимо, чтобы $s\xi_k^l\sim-d\eta_k$, поэтому $\xi_k\sim c_1\eta_k^{1/l}$, где $c_1=\left(-\frac{d}{s}\right)^{1/l}>0$. Пункт 1 доказан.

Докажем пункт 2. Применяя к соотношению (19) условие пункта 2 леммы 4, легко показать, что найдутся такие константы c_3 и c_4 одного знака, что

$$c_3\eta_k^{\frac{l-1}{l}}<Q_\xi'(\xi_k,\eta_k)<c_4\eta_k^{\frac{l-1}{l}}. \tag{22}$$

При этом знак c_3 и c_4 совпадает со знаком s. Продифференцировав функцию K_n по ξ (см. (2)), получим, что

$$\frac{\partial K_{n(\eta_k)}}{\partial\xi}(\xi_k,\eta_k)=-\frac{1}{\mu^{n(\eta_k)}}. \tag{23}$$

Из (23) в силу леммы 2 легко следует, что

$$\left|\frac{\partial K_{n(\eta_k)}}{\partial\xi}(\xi_k,\eta_k)\right|<r\eta_k^{\ln\mu/\ln\lambda}. \tag{24}$$

Объединяя это соотношение с (22) и учитывая, что $\ln \mu / \ln \lambda > (l-1)/l$, мы, видим, что

$$|Q'_\xi(\xi_k, \eta_k)| > \left| \frac{\partial K_{n(\eta_k)}}{\partial \xi}(\xi_k, \eta_k) \right|$$

начиная с некоторого k. □

Теперь докажем единственность функции $\alpha(\eta)$, найденной в лемме 3.

Лемма 5. *Найдется такое n_0, что для всякого $n > n_0$ и $\eta \in I_n$ существует единственное такое $\xi \in (0, h(\eta))$, что $Q(\xi, \eta) = K_{n(\eta)}(\xi, \eta)$.*

Доказательство. Существование такого $\xi = \alpha(\eta)$, удовлетворяющего условиям леммы, было доказано в лемме 3. Докажем единственность. Предположим противное. Тогда найдутся такие последовательности η_k, ξ_{1k} и ξ_{2k}, что

$$h(\eta_k) > \xi_{1k} > \xi_{2k} > 0 \tag{25}$$

и

$$Q(\xi_{1k}, \eta_k) = K_{n(\eta_k)}(\xi_{1k}, \eta_k), \quad Q(\xi_{2k}, \eta_k) = K_{n(\eta_k)}(\xi_{2k}, \eta_k). \tag{26}$$

Из (25) очевидно следует, что $\xi_{1k}, \xi_{2k} \to 0$, так как $h(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$. Эти два утверждения обеспечивают выполнение условий пункта 1 леммы 4 . Отсюда следует, что

$$\xi_{1k} \sim c_1 \eta_k^{1/l}, \quad \xi_{2k} \sim c_2 \eta_k^{1/l}, \quad \text{где} \quad c_1, c_2 > 0. \tag{27}$$

Применяя теорему Ролля ([6], том 1, стр. 225) к функции $Q(\cdot, \eta_k) - K_{n(\eta_k)}(\cdot, \eta_k)$ найдем такую последовательность ξ_{3k}, что выполнены следующие соотношения:

$$\xi_{1k} > \xi_{3k} > \xi_{2k} \quad \text{и} \quad Q'(\xi_{3k}, \eta_k) = K'_{n(\eta_k)}(\xi_{3k}, \eta_k). \tag{28}$$

Отсюда немедленно следует, что для достаточно больших n, выполнено неравенство $2c_1 \eta_k^{1/l} > \xi_{3k} > \frac{c_2}{2} \eta_k^{1/l}$, что обеспечивает выполнение условий пункта 2 леммы 4, а следовательно, начиная с некоторого k, выполнено $|Q'_\xi(\xi_3 k, \eta_k)| > |K'_{n(\eta_k)}(\xi_{3k}, \eta_k)|$. Это неравенство противоречит соотношениям (28). □

Докажем непрерывность и дифференцируемость функции $\alpha(\eta)$ на I_n для достаточно больших n.

Лемма 6. *Найдется такое число n_0, что при $n > n_0$ функция $\xi_n^*(\eta) = \alpha(\eta)|_{I_n}$ непрерывна и дифференцируема на I_n.*

Доказательство. Докажем, что найдется такое n_0, что при $n > n_0$ для любого $\eta_0 \in I_n$ к уравнению $Q(\xi, \eta) = K_n(\xi, \eta)$ в точке $(\alpha(\eta_0), \eta_0)$ применима теорема о неявной функции относительно переменной ξ. Функции Q и K_n дифференцируемы, поэтому достаточно проверить, что при $n > n_0$ и $\eta \in I_n$ выполнено соотношение $Q'_\xi(\alpha(\eta), \eta) \neq K'_{n(\eta)_\xi}(\alpha(\eta), \eta)$. Предположим противное. Тогда найдутся такие последовательности $\xi_k,\ \eta_k \to\ 0$, что

$$Q(\xi_k, \eta_k) = K_{n(\eta_k)}(\xi_k, \eta_k) \quad \text{и} \quad Q'_\xi(\xi_k, \eta_k) = K'_{n(\eta_k)_\xi}(\xi_k, \eta_k). \tag{29}$$

Эти соотношения влекут выполнение условий пункта 1 леммы 4, откуда следует, что $\xi_k \sim c_1\eta_k^{1/l}$ при некотором $c_1 > 0$. Следовательно, к последовательности (ξ_k, η_k) применим пункт 2 леммы 4. Отсюда следует, что начиная с некоторого k выполнено неравенство $|Q'_\xi(\xi_k, \eta_k)| > |K'_{n(\eta_k)_\xi}(\xi_k, \eta_k)|$. Полученное соотношение противоречит (29). Следовательно, найдется такое n_0, что при $n > n_0$ и $\eta_0 \in I_n$ к уравнению $Q(\xi, \eta) = K_n(\xi, \eta)$ применима теорема о неявной функции в точке $(\alpha(\eta_0), \eta_0)$. Значит, найдется такая непрерывно дифференцируемая функция β, определенная на интервале $(\eta_0 - \zeta, \eta_0 + \zeta)$, что

$$Q(\beta(\eta), \eta) = K_{n(\eta)}(\beta(\eta), \eta) \quad \text{и} \quad \beta(\eta_0) = \alpha(\eta_0).$$

По лемме 5 функция $\alpha(\eta)$ определена однозначно, поэтому

$$\beta|_{(\eta_0-\zeta,\eta_0+\zeta)} = \alpha|_{(\eta_0-\zeta,\eta_0+\zeta)}.$$

Функция β непрерывна и дифференцируема в точке η_0, а значит функция α тоже непрерывна и дифференцируема в точке η_0. $\square$

Теперь, когда доказаны существование и непрерывность функции $\alpha(\eta)$, нам достаточно доказать, что найдется такое n_0, что для всякого $n > n_0$ найдется такое $\eta \in I_n$, что $P(\alpha(\eta), \eta) = J_n(\alpha(\eta), \eta)$. Перед доказательством этого факта сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма 7. *Начиная с некоторого n для любого $\eta \in I_n$ выполнено неравенство $P(\alpha(\eta), \eta) > v_0$.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение $P(\xi, \eta) = v_0$. Поскольку $P(0, 0) = v_0$ и $P'_\xi(0, 0) \neq 0$, то это уравнение задает неявную функцию $\vartheta(\eta)$ такую, что $P(\vartheta(\eta), \eta) = v_0$. При этом $\vartheta'(\eta) = -\frac{P'_\eta(0,0)}{P'_\xi(0,0)}$. Отсюда немедленно следует, что $\vartheta(\eta) \sim c_1\eta$, где $c_1 = -\frac{P'_\eta(0,0)}{P'_\xi(0,0)}$. Докажем, что $\alpha(\eta) > \vartheta(\eta)$. Раскладывая Q по формуле Тейлора, получаем, что

$$Q(\vartheta(\eta), \eta) = s\vartheta^l(\eta) + Q'_\eta(0, 0)\eta + o(|\eta| + |\vartheta^l(\eta)|)$$

Поскольку $\vartheta(\eta) \sim c_1\eta$, то $s \cdot \vartheta^{l}(\eta) = o(\eta)$, поэтому

$$Q(\vartheta(\eta), \eta) = Q'_{\eta}(0,0)\eta + o(\eta). \tag{30}$$

По определению K_n выполнено равенство $K_{n(\eta)}(\vartheta(\eta), \eta) = \frac{1}{\mu^{n(\eta)}}(u_0 - \vartheta(\eta))$. Применяя к его правой части лемму 2, получаем неравенство

$$K_{n(\eta)}(\vartheta(\eta), \eta) < r\eta^{\ln\mu/\ln\lambda}. \tag{31}$$

Поскольку $\ln\mu/\ln\lambda > 1$, то из соотношений (30) и (31) следует, что

$$Q(\vartheta(\eta), \eta) > K_{n(\eta)}(\vartheta(\eta), \eta).$$

Если $\vartheta(\eta) > 0$, то проводя рассуждения, аналогичные доказательству Леммы 3, получим, что $\alpha(\eta) > \vartheta(\eta)$. Если же $\vartheta(\eta) \le 0$, то выполнены неравенства $\alpha(\eta) > 0 \ge \vartheta(\eta)$. Далее, поскольку $P'_{\xi}(\xi, \eta) > \varepsilon$, то функция $P(\xi, \eta)$ возрастает по ξ, а значит выполнено соотношение $P(\alpha(\eta), \eta) > P(\vartheta(\eta), \eta) = v_0$. □

Лемма 8. *Найдется такое n_0, что при $n > n_0$ существует такое $\eta \in I_n$, что $P(\alpha(\eta), \eta) = J_n(\alpha(\eta), \eta)$.*

Доказательство. Как было доказано в лемме 3, при $\eta \to 0$ выполнены соотношения $\alpha(\eta) < h(\eta)$ и $h(\eta) \to 0$. Отсюда немедленно следует, что $\alpha(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$. Вспоминая определение J_n, нетрудно получить соотношения

$$J_{n(\eta)}(\alpha(\eta), \eta) \to v_0\lambda \quad \text{при} \quad \eta \to \frac{v_0}{\lambda^{n-1}} - 0$$

и

$$J_{n(\eta)}(\alpha(\eta), \eta) \to v_0 \quad \text{при} \quad \eta \to \frac{v_0}{\lambda^{n}} + 0$$

Поэтому при достаточно больших n

$$J_{n(\eta)}(\xi(\eta), \eta) > P(\xi(\eta), \eta) \quad \text{при} \quad \eta \to \frac{v_0}{\lambda^{n-1}} - 0. \tag{32}$$

По лемме 7, $P(\alpha(\eta), \eta) > v_0$. В частности, это соотношение выполнено при $\eta = v_0/\lambda^n$, а следовательно, $P(\alpha(\eta), \eta) > v_0 = J_n(\alpha(\eta), \eta)$. Объединяя это соотношение с неравенством (32) и применяя к ним теорему о промежуточном значении, получим, что на промежутке $(v_0/\lambda^n; v_0/\lambda^{n-1})$ найдется такое η, что выполнено равенство $P(\alpha(\eta), \eta) = J_n(\alpha(\eta), \eta)$. □

Существование таких $\eta_n \in I_n$ и $\xi_n > 0$, что $F(\xi_n, \eta_n) = G(\xi_n, \eta_n)$, является тривиальным следсвием лемм 1-8. Из леммы 3 следует, что ξ_n и η_n могут быть выбраны удовлетворяющими неравенству $0 < \xi_n < h(\eta_n)$. Поскольку выполнены соотношения

1. $\eta_n \to 0$,
2. $h(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$,

то $\xi_n \to 0$, что завершает доказательство теоремы.

5 Доказательство Теоремы 3

5.1 Теорема Ченцовой

Прежде чем мы приступим к доказательству теоремы 3, напомним и обобщим теорему Ченцовой [8], используемую в дальнейшем. Данный раздел напрямую не связан с изучаемой задачей и обозначения, используемые в нем никак не связаны с введенными ранее.

Теорема 4. *Пусть P — диффеоморфизм плоскости в себя. Предположим, что:*

1. *z_0 — гиперболическая седловая неподвижная точка диффеоморфизма P, $L = DP(z_0)$ – ее дифференциал в точке z_0;*
2. *γ_1, γ_2 — собственные числа матрицы L, $\gamma_2 \in (0,1), \gamma_1 > 1$, а матрица L имеет диагональный вид;*
3. *существует такая постоянная K, что для любых $x, y \in \mathbf{R}^2$ справедливо неравенство*

$$||L_x - L_y|| \leq K|x-y|, \quad \textit{где} \quad L_x = DP(x).$$

Введем числа $T = \frac{\gamma_1^2(\gamma_1-1)}{4K}$, $c^* = \frac{2K}{\gamma_1(\gamma_1-1)}$. Тогда при $|t| < T$ уравнение неустойчивой сепаратрисы точки z_0 имеет вид

$$U(t) = z_0 + tU + h(t), \tag{33}$$

где U — собственный вектор единичной длины, соответствующий собственному числу γ_1, при этом

$$|h(t)| < \frac{1}{2}c^*t^2, \quad |h'(t)| < c^*|t|. \tag{34}$$

Рассмотрим диффеоморфизм V плоскости в себя. Предположим, что z_0 — его неподвижная точка. Пусть $B = DV(z_0)$ — не диагональная матрица. Предположим, что собственные числа γ_1, γ_2 матрицы B таковы, что $\gamma_1 > 1$, $\gamma_2 \in (0,1)$, а соответствующие им собственные вектора суть (v_1, v_2) и (u_1, u_2). Обозначим матрицу $\begin{pmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \end{pmatrix}$ через S, а ее определитель через E, тогда как известно

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S^{-1} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} u_2 & -u_1 \\ -v_2 & v_1 \end{pmatrix}.$$

Перейдем в новую систему координат при помощи линейной замены с матрицей перехода S. При этом отображение V перейдет в отображение $W = S^{-1}V(Sx)$.

Обозначим $L_x = DW(x)$ и $l_x = DV(x)$. Тогда $L_x = S^{-1}l_xS$. Пусть число K таково что

$$||L_x - L_y|| = ||S^{-1}(l_x - l_y)S|| \leq K|x - y|. \tag{35}$$

Тогда, согласно теореме 4 неустойчивое многообразие диффеоморфизма W в точке z_0 представимо в виде

$$U(t) = z_0 + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h(t), \tag{36}$$

где $|t| < T$ и $h(t)$ удовлетворяет неравенству (34).

Таким образом в исходной системе координат неустойчивое многообразие диффеоморфизма V представимо в виде

$$U(t) = z_0 + t\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + Sh(t), \tag{37}$$

где

$$|h(t)| < \frac{1}{2}c^*t^2, \quad |h'(t)| < c^*t, \quad t \in [0, T]. \tag{38}$$

Замечание 5. *Варьируя вектор (u_1, u_2) (домножая его на константу), мы можем изменять матрицу S и величину K, тем самым изменяя оценки на T и c^*. Таким образом, можно регулировать соотношение между длиной промежутка аппроксимации неустойчивого многообразия и ее точностью.*

5.2 Дополнительные обозначения

Для дальнейших рассуждений нам потребуются некоторые свойства отображения, обратного к f^N. Исходя из соотношений (5) и (6), в некоторой окрестности точки u отображение f^{-N} может быть представлено в следующем виде:

$$f^{-N}(\tilde{x},\tilde{y}) = (v_0+\tilde{a}(u_0-\tilde{y})+\tilde{p}_1(\tilde{x},u_0-\tilde{y});\, \tilde{b}(\tilde{x}-\tilde{c}(u_0-\tilde{y})^2)+\tilde{p}_2(\tilde{x},u_0-\tilde{y})), \quad (39)$$

где $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ обозначают координаты в окрестности точки u по осям x и y соответственно,

$$\tilde{a} = 1/c, \quad \tilde{b} = 1/b, \quad \tilde{c} = a/c^2, \quad (40)$$

и функции $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$ удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} &\tilde{p}_1(\tilde{x},\tilde{y}) = o(|\tilde{x}|+|\tilde{y}|), \quad \tilde{p}_1 \in \mathbf{C}^2; \\ &\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x}(\tilde{x},\tilde{y}) = o(1), \quad \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y}) = o(1) \\ &\tilde{p}_2(\tilde{x},\tilde{y}) = o(|\tilde{x}|+\tilde{y}^2), \quad \tilde{p}_2 \in \mathbf{C}^2 \\ &\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x}(\tilde{x},\tilde{y}) = o(1), \quad \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y}) = o(|x|+|y|). \end{aligned} \quad (41)$$

При этом будут выполнены следующие соотношения:

$$a = \tilde{c}/\tilde{a}^2, \quad b = 1/\tilde{b}, \quad c = 1/\tilde{a}. \quad (42)$$

5.3 Гиперболичность периодических точек

Докажем первый пункт теоремы 3. Нетрудно убедиться, что в условиях теоремы динамическая система удовлетворяет условиям теоремы 1. Следовательно в сколь угодно малой окрестности точки v для достаточно больших n найдется $(n+N)$-периодическая точка. Докажем, что найдется такое n_0, что для любого $n > n_0$ эта точка является седловой гиперболической.

Доказательство. Пусть (v_0+x_n, y_n) — периодическая точка отображения f периода $n+N$. Тогда выполнено соотношение

$$A^n f^N(v_0+x_n,y_n) = (v_0+x_n,y_n).$$

Перепишем это уравнение, подставив определения отображений A и f^N ((1) и (5) соответственно):

$$\begin{cases} v_0 + x_n = \lambda^n(ax_n^2 + by_n + p_1(x_n,y_n)), \\ y_n = \frac{1}{\mu^n}(u_0 - cx_n + p_2(x_n,y_n)). \end{cases} \quad (43)$$

Исходя из этих уравнений, выясним асимптотику x_n с ростом n. Подставляя y_n из второго уравнения системы (43) в первое, получаем соотношение

$$v_0+x_n=\lambda^n(ax_n^2+b\frac{1}{\mu^n}(u_0-cx_n+p_2(x_n,y_n)))+p_1(x_n,\frac{1}{\mu^n}(u_0-cx_n+p_2(x_n,y_n))). \tag{44}$$

Из теоремы 1 следует, что $x_n\to 0$ и $y_n\to 0$. Отсюда и из неравенства $\mu>\lambda$ следует, что выполняются соотношения

$$\frac{1}{\mu^n}(u_0-cx_n+p_2(x_n,y_n))=o(1),$$

$$\frac{\lambda^n}{\mu^n}(u_0-cx_n+p_2(x_n,y_n))=o(1).$$

По свойству (6) функции p_1 выполнено соотношение

$$p_1(x_n,\frac{1}{\mu^n}(u_0-cx_n+p_2(x_n,y_n)))=o(x_n^2+|\frac{1}{\mu^n}(u_0-cx_n+p_2(x_n,y_n))|).$$

Из равенства (44) и полученных соотношений следует эквивалентность

$$x_n\sim\pm\sqrt{\frac{v_0}{a\lambda^n}}=\pm\sqrt{\frac{v_0\tilde{a}^2}{\tilde{c}\lambda^n}}. \tag{45}$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся два соотношения, следующие из (43):

$$\begin{aligned} y_n&=\frac{1}{\mu^n}(u_0-\frac{1}{\tilde{a}}x_n+p_2(x_n,y_n)),\\ u_0-\mu^n y_n&=\frac{1}{\tilde{a}}x_n+p_2(x_n,y_n). \end{aligned} \tag{46}$$

Точка (v_0+x_n,y_n) периодична с периодом $n+N$. Для доказательства того, что периодическая точка является седловой гиперболической, достаточно показать, что дифференциал отображения A^nf^N имеет два собственных числа, одно из которых по модулю меньше единицы, а второе больше. Найдем дифференциал отображения A^nf^N в точке (v_0+x_n,y_n):

$$DA^nf^N(v_0+x_n,y_n)=\begin{pmatrix} \lambda^n(2ax_n+\frac{\partial p_1}{\partial x}(x_n,y_n)) & \lambda^n(b+\frac{\partial p_1}{\partial y}(x_n,y_n)) \\ \frac{1}{\mu^n}(-c+\frac{\partial p_2}{\partial x}(x_n,y_n)) & \frac{1}{\mu^n}\frac{\partial p_2}{\partial y}(x_n,y_n) \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Собственные числа полученной матрицы являются корнями уравнения

$$\left(\lambda^n(2ax_n+\frac{\partial p_1}{\partial x})-s\right)\left(\frac{1}{\mu^n}\frac{\partial p_2}{\partial y}-s\right)-\frac{\lambda^n}{\mu^n}\left(b+\frac{\partial p_1}{\partial y}\right)\left(-c+\frac{\partial p_2}{\partial x}\right)=0. \quad (48)$$

Обозначим левую часть этого равенства через $P(s)$. Для того, чтобы уравнение (48) имело два корня, один из которых по модулю больше 1, а второй меньше, необходимо и достаточно, чтобы $P(-1)P(1)<0$. Несложные преобразования показывают, что это неравенство равносильно

$$\left(1+\frac{\lambda^n}{\mu^n}(2ax_n+\frac{\partial p_1}{\partial x})\frac{\partial p_2}{\partial y}-\frac{\lambda^n}{\mu^n}(b+\frac{\partial p_1}{\partial y})(-c+\frac{\partial p_2}{\partial x})\right)^2<$$
$$\left(\lambda^n(2ax_n+\frac{\partial p_1}{\partial x})+\frac{1}{\mu^n}\frac{\partial p_2}{\partial y}\right)^2. \quad (49)$$

Докажем, что неравенство (49) выполнено начиная с некоторого n. Действительно, поскольку $\mu>\lambda$, то левая часть неравенства стремится к 1. Правая же часть эквивалентна своему главному члену $(2a\lambda^n x_n)^2$. Из формулы (45) легко получить, что

$$(2a\lambda^n x_n)^2\sim 4av_0\lambda^n\to\infty. \quad (50)$$

Из этих утверждений следует что неравенство (49) выполено для достаточно больших n. Тогда дифференциал отображения A^nf^N имеет два собственных числа, одно из которых по модулю больше 1, а второе меньше. Отсюда немедленно следует, что (v_0+x_n,y_n) – седловая гиперболическая точка. Вместе с соотношениями (45) и (46) это доказывает первую часть Теоремы 3. □

5.4 Образ неустойчивого многообразия

Рассмотрим участок W^u, касающийся W^s в точке u. В достаточно малой окрестности точки u он является образом отрезка $(v_0+\tau,0)$, где $\tau\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, под действием отображения f^N, т.е. имеет вид

$$(a\tau^2+p_1(\tau,0),u_0-c\tau+p_2(\tau,0))=(\frac{\tilde c}{\tilde a^2}\tau^2+p_1(\tau,0),u_0-\frac{1}{\tilde a}\tau+p_2(\tau,0)).$$

Обозначим эту кривую через ψ. Для достаточного малого δ зададим неявно функцию $\tau(y)$ на промежутке $(u_0-\delta,u_0+\delta)$, таким образом, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$u_0-\frac{1}{\tilde a}\tau(y)+p_2(\tau(y),0)=y. \quad (51)$$

Из этого соотношения немедленно следует, что

$$\tau(y) = \tilde{a}(u_0 - y) + o(u_0 - y). \tag{52}$$

Точка (x, y), лежащая в малой окрестности точки u принадлежит кривой ψ тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$x = \frac{\tilde{c}}{\tilde{a}^2}\tau^2(y) + p_1(\tau(y), 0).$$

Из соотношения (51) несложно следует, что полученное равенство равносильно равенству

$$x = \tilde{c}((u_0 - y) + p_2(\tau(y), 0))^2 + p_1(\tau(y), 0).$$

Введем функцию

$$\chi(x, y) = x - \tilde{c}((u_0 - y) + p_2(\tau(y), 0))^2 + p_1(\tau(y), 0). \tag{53}$$

Тогда уравнение $\chi(x, y) = 0$ описывает кривую ψ в окрестности точки u. Из соотношений (52) и условий (6) следует, что функция $\chi(x, y)$ может быть представлена в виде

$$\chi(x, y) = x - \tilde{c}(u_0 - y)^2 + p_\chi(u_0 - y), \quad \text{где}$$
$$p_\chi(u_0 - y) = o((u_0 - y)^2) \quad \text{и} \quad p_\chi \in \mathbf{C}^2. \tag{54}$$

Найдем касательные вектора полученной кривой. Хорошо известно, что касательная перпендикулярна градиенту кривой. В нашем случае это означает, что касательный вектор параллелен вектору

$$v_u = \left(-\frac{\partial\chi(x, y)}{\partial y}; \frac{\partial\chi(x, y)}{\partial x}\right). \tag{55}$$

Пусть $v_u = (v_{u_1}, v_{u_2})$. Дифференцируя $\chi(x, y)$, получаем, что выполнены соотношения:

$$v_{u_1} = -2\tilde{c}(u_0 - y) + \frac{\partial p_\chi}{\partial y}(u_0 - y) \sim -2\tilde{c}(u_0 - y)$$

$$v_{u_2} = 1$$

Из соотношения (53) следует, что для точек, лежащих на участке неустойчивого многообразия, описываемого уравнением $\chi(x, y) = 0$, выполнены соотношения $u_0 - y \sim \pm\sqrt{\frac{x}{\tilde{c}}}$. Таким образом, касательный вектор параллелен (v_{u_1}, v_{u_2}), где

$$v_{u_1} \sim \pm 2\sqrt{\tilde{c}x} \quad \text{и} \quad v_{u_2} = 1. \tag{56}$$

5.5 Свойства обратного отображения.

Из утверждений раздела 5.3 следует, что точка $(v_0 + x_n, y_n)$ является неподвижной точкой отображения $A^n f^N$. Для дальнейших рассуждений нам понадобится асимптотическое поведение собственных чисел и собственных векторов отображения $H = f^{-N} A^{-n}$, обратного к $A^n f^N$. Исходя из соотношений (2) и (43), выпишем явный вид отображения H:

$$H(v_0+x,y) = \Big(\tilde{a}(u_0 - \mu^n y + \tilde{p}_1(\frac{1}{\lambda^n}(v_0+x), u_0 - \mu^n y)),$$
$$\tilde{b}(\frac{1}{\lambda^n}(v_0+x) - \tilde{c}(u_0-\mu^n y)^2 + \tilde{p}_1(\frac{1}{\lambda^n}(v_0+x), u_0 - \mu^n y))\Big). \quad (57)$$

Найдем собственные числа и собственные вектора матрицы DH в точке $(v_0 + x_n, y_n)$. Дифференцируя соотношение (57), получаем

$$DH = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{1}{\lambda^n}\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x}(\frac{1}{\lambda^n}(v_0+x_n), u_0 - \mu^n y_n)),\\
d_2 &= -\tilde{a}\mu^n - \mu^n \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial y}(\frac{1}{\lambda^n}(v_0+x_n), u_0 - \mu^n y_n)),\\
d_3 &= \frac{\tilde{b}}{\lambda^n} + \frac{1}{\lambda^n}\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x}(\frac{1}{\lambda^n}(v_0+x_n), u_0 - \mu^n y_n)),\\
d_4 &= 2\tilde{b}\tilde{c}\mu^n(u_0 - \mu^n y_n) + \mu^n \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial y}(\frac{1}{\lambda^n}(v_0+x_n), u_0 - \mu^n y_n)),
\end{aligned}$$

Из (41), (45), (46) нетрудно получить следующие соотношения:

$$d_1 = o(1/\lambda^n),\ d_2 \sim -\tilde{a}\mu^n,\ d_3 \sim \tilde{b}/\lambda^n,\ d_4 \sim 2\tilde{b}\tilde{c}\mu^n(u_0-\mu^n y_n) \sim 2\tilde{b}\sqrt{\tilde{c}v_0}\frac{\mu^n}{\lambda^{n/2}}, \quad (58)$$

$$d_1 = o(d_4), \quad d_2 d_3 = o(d_4^2) \quad \text{и} \quad d_1 d_4 = o(d_2 d_3) \quad (59)$$

Несложные алгебраические выкладки показывают, что собственные числа матрицы DH равны

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(d_1 + d_4 + \sqrt{(d_1+d_4)^2 - 4(d_1 d_4 - d_2 d_3)}), \quad (60)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2}(d_1 + d_4 - \sqrt{(d_1+d_4)^2 - 4(d_1 d_4 - d_2 d_3)}), \quad (61)$$

а собственные вектора соответственно равны

$$(1;\ \frac{d_4 - d_1 + \sqrt{(d_4 - d_1)^2 + 4d_2 d_3}}{2d_2}) = (1;\ v_2), \tag{62}$$

$$(1;\ \frac{d_4 - d_1 - \sqrt{(d_4 - d_1)^2 + 4d_2 d_3}}{2d_2}) = (1;\ u_2). \tag{63}$$

Ввиду соотношений (58) и (59) асимптотическое поведение собственных чисел и собственных векторов является следующим:

$$\eta_1 \sim d_4 \sim 2\tilde{b}\tilde{c}\mu^n \frac{1}{\tilde{a}} x_n \sim c_{\eta_1} \frac{\mu^n}{\lambda^{n/2}}, \tag{64}$$

$$\eta_2 \sim \frac{d_2 d_3 - d_1 d_4}{d_1 + d_4} \sim \frac{\tilde{a}^2}{2\lambda^n x_n} \sim c_{\eta_2} \frac{1}{\lambda^{n/2}}, \tag{65}$$

$$v_2 \sim -\frac{d_4}{d_2} \sim -c_{v_2} \frac{1}{\lambda^{n/2}}, \tag{66}$$

$$u_2 \sim -\frac{d_3}{d_4} \sim -c_{u_2} \frac{1}{\mu^n \lambda^{n/2}}. \tag{67}$$

5.6 Устойчивое многообразие периодической точки

Устойчивое многообразие периодической точки исходной системы совпадает с неустойчивым многообразием той же точки под действием отображения H. Применим к отображению H обобщение теоремы Ченцовой. В качестве собственных векторов возьмем $(1, v_2)$ и $(1, u_2)$, определенные в (62) и (63). При таком выборе собственных векторов выполнены соотношения:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v_2 & u_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S^{-1} = \frac{1}{(u_2 - v_2)} \begin{pmatrix} u_2 & -1 \\ -v_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственное дифференцирование функции H показывает, что для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2), лежащих в окрестности точки v, выполнено соотношение:

$$DH \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - DH \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta d_1 & \Delta d_2 \\ \Delta d_3 & \Delta d_4 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \tag{68}$$

$$\Delta d_1 = \frac{1}{\lambda^n} (\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x} (\frac{1}{\lambda^n}(v_0 + x_1); u_0 - \mu^n y_1) - \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x} (\frac{1}{\lambda^n}(v_0 + x_2); u_0 - \mu^n y_2)), \tag{69}$$

$$\Delta d_2 = -\mu^n (\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial y} (\frac{1}{\lambda^n}(v_0 + x_1); u_0 - \mu^n y_1) - \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial y} (\frac{1}{\lambda^n}(v_0 + x_2); u_0 - \mu^n y_2)), \tag{70}$$

$$\Delta d_3 = \frac{1}{\lambda^n}(\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x}(\frac{1}{\lambda^n}(v_0+x_1);u_0-\mu^n y_1) - \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x}(\frac{1}{\lambda^n}(v_0+x_2);u_0-\mu^n y_2)), \quad (71)$$

$$\Delta d_4 = 2bc\mu^{2n}(y_1-y_2)+ \mu^n(\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial y}(\frac{1}{\lambda^n}(v_0+x_1);u_0-\mu^n y_1) - \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial y}(\frac{1}{\lambda^n}(v_0+x_2);u_0-\mu^n y_2)). \quad (72)$$

Найдем оценку для константы K из условий теоремы Ченцовой. Для этого нам необходимо оценить $S^{-1}(DH(x_1,y_1)-DH(x_2,y_2))S$. Несложные алгебраические выкладки показывают, что

$$S^{-1}\left(DH\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} - DH\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)S = \frac{1}{(u_2-v_2)}\begin{pmatrix}u_2 & -1\\-v_2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta d_1 & \Delta d_2\\ \Delta d_3 & \Delta d_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ v_2 & u_2\end{pmatrix} =$$
$$\frac{1}{(u_2-v_2)}\left(\Delta d_1\begin{pmatrix}u_2 & u_2\\-v_2 & -v_2\end{pmatrix} + \Delta d_2\begin{pmatrix}u_2v_2 & u_2^2\\-v_2^2 & -v_2u_2\end{pmatrix} + \Delta d_3\begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} + \Delta d_4\begin{pmatrix}1 & 1\\v_2 & u_2\end{pmatrix}\right).$$

Из соотношений (62) и (63) нетрудно получить, что $u_2/v_2 \to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда следует, что при достаточно больших n выполнена цепочка неравенств

$$\left|S^{-1}\left(DH\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} - DH\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)S\right| \le \frac{2}{v_2}(|\Delta d_1 v_2| + |\Delta d_2 v_2^2| + |\Delta d_3| + |\Delta d_4 v_2|) \le 2(|\Delta d_1| + |\Delta d_2 v_2| + |\Delta d_3/v_2| + |\Delta d_4|). \quad (73)$$

Из соотношений (41) следуют неравенства

$$|\Delta d_1| < c_{d_1}\left(\frac{1}{\lambda^{2n}}|x_1-x_2| + \frac{\mu^n}{\lambda^n}|y_1-y_2|\right),$$

$$|\Delta d_2| < c_{d_2}\mu^n\left(\frac{1}{\lambda^n}|x_1-x_2| + \mu^n|y_1-y_2|\right),$$

$$|\Delta d_3| < c_{d_3}\frac{1}{\lambda^n}\left(\frac{1}{\lambda^n}|x_1-x_2| + \mu^n|y_1-y_2|\right),$$

$$|\Delta d_4| < 2bc\mu^{2n}|y_1 - y_2| + c_{d_4}\mu^n \left(\frac{1}{\lambda^n}|x_1 - x_2| + \mu^n|y_1 - y_2|\right),$$

где константы $c_{d_1}, c_{d_2}, c_{d_3}, c_{d_4} > 0$ не зависят от n. Из этих неравенств и соотношения (62) следует, что

$$\left|S^{-1}\left(DH\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} - DH\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)S\right| < c_K\mu^{2n}\left|\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right|. \qquad (74)$$

Из этого неравенства следует, что для отображения H в соотношении (35) можно взять $K = c_K\mu^{2n}$.

В силу соотношений (37) и (38) локально неустойчивое многообразие точки $(v_0 + x_n, y_n)$ задается равенством

$$u(t) = \begin{pmatrix}v_0 + x_n\\y_n\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\v_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 1\\v_2 & u_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1(t)\\h_2(t)\end{pmatrix} \quad \text{при} \quad |t| < T, \qquad (75)$$

где

$$|h_1(t)|, |h_2(t)| < 1/2c^*t^2, \quad |h_1'(t)|, |h_2'(t)| < c^*t, \qquad (76)$$

$$T = \frac{\eta_1^2(\eta_1 - 1)}{4K} \quad \text{и} \quad c^* = \frac{2K}{\eta_1(\eta_1 - 1)}. \qquad (77)$$

Нетрудные вычисления показывают асимптотическое поведение T и c^* при $n \to \infty$:

$$T = \frac{\eta_1^2(\eta_1 - 1)}{4K} \sim \frac{\eta_1^3}{16abc\mu^{2n}} \sim c_T\frac{\mu^n}{\lambda^{3/2n}} \quad, \qquad (78)$$

$$c^* = \frac{2K}{\eta_1(\eta_1 - 1)} \sim \frac{8abc\mu^{2n}}{\eta_1^2} \sim c_c\lambda^n \qquad (79)$$

для некоторых c_T и c_c.

Равенство (75) при $|t| < T$ можно записать в виде

$$u(t) = \begin{pmatrix}v_0 + x_n\\y_n\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\v_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}h_1(t) + h_2(t)\\v_2h_1(t) + u_2h_2(t)\end{pmatrix}. \qquad (80)$$

Введем функции $\tilde{h}_1(t) = h_1(t) + h_2(t)$ и $\tilde{h}_2(t) = h_1(t) + \frac{u_2}{v_2}h_2(t)$, тогда при $|t| < T$ будет выполнено соотношение

$$u(t) = \begin{pmatrix}v_0 + x_n\\y_n\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\v_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\tilde{h}_1(t)\\v_2\tilde{h}_2(t)\end{pmatrix} \qquad (81)$$

и неравенства

$$|\tilde{h}_1(t)|, |\tilde{h}_2(t)| < c^*t^2 \quad \text{и} \quad |\tilde{h}_1'(t)|, |\tilde{h}_2'(t)| < 2c^*t. \qquad (82)$$

5.7 Пересечение многообразий

Докажем вторую часть Теоремы 3.

Доказательство. Рассмотрим $A^{-n}u(t)$ — образ устойчивого многообразия точки (v_0+x_n, y_n) под действием отображения A^{-n}. Для доказательства наличия пересечения устойчивого многообразия точки (v_0+x_n, y_n) и неустойчивого многообразия точки $(0,0)$ достаточно найти такие значения $t_1, t_2 \in (-T, T)$, что $\chi(A^{-n}u(t_1))$ и $\chi(A^{-n}u(t_2))$ имеют различные знаки.

Найдем $\chi(x+\Delta x, y+\Delta y)-\chi(x,y)$. Несложные алгебраические выкладки показывают, что

$$\chi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \chi(x,y) =$$
$$(x+\Delta x)-\tilde{c}(u_0-(y+\Delta y))^2-(x-\tilde{c}(u_0-y)^2)+p_\chi(u_0-(y+\Delta y))-p_\chi(u_0-y) =$$
$$\Delta x - \tilde{c}((u_0-(y+\Delta y))^2-(u_0-y)^2)+p_\chi(u_0-(y+\Delta y))-p_\chi(u_0-y) =$$
$$\Delta x + \tilde{c}\Delta y(2(u_0-y)-\Delta y)+p_\chi(u_0-(y+\Delta y))-p_\chi(u_0-y).$$

Выпишем итоговое равенство:

$$\chi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \chi(x,y) = \Delta x + \tilde{c}\Delta y(2(u_0-y)-\Delta y)+ p_\chi(u_0-(y+\Delta y))-p_\chi(u_0-y). \quad (83)$$

Из условий (54) на p_χ следует, что при $(u_0-y), \Delta y \to 0$ выполнено соотношение

$$p_\chi(u_0-(y+\Delta y))-p_\chi(u_0-y) = o(|\Delta y|(|(u_0-y)|+|\Delta y|)). \quad (84)$$

Рассмотрим $t_2=0$. Заметим, что $u(0)=(v_0+x_n, y_n)$. Поскольку (v_0+x_n, y_n) — $(n+N)$-периодическая точка, то выполнены соотношения

$$A^{-n}(v_0+x_n, y_n) = f^N(v_0+x_n, y_n) = (\frac{\tilde{c}}{\tilde{a}^2}x_n^2+\frac{1}{\tilde{b}}y_n+p_1(x_n,y_n), u_0-\frac{1}{\tilde{a}}x_n+p_2(x_n,y_n)).$$

Подставим в равенство (83) следующие значения $x, y, \Delta x, \Delta y$:

$$(x,y) = f^N(v_0+x_n, 0) = (\frac{\tilde{c}}{\tilde{a}^2}x_n^2+p_1(x_n,0), u_0-\frac{1}{\tilde{a}}x_n+p_2(x_n,0)),$$

$$(\Delta x, \Delta y) = f^N(x_n,y_n)-f^N(x_n,0) = (\frac{1}{\tilde{b}}y_n+p_1(x_n,y_n)-p_1(x_n,0), p_2(x_n,y_n)-p_2(x_n,0)).$$

В результате данной подстановки получим равенство

$$\chi(f^N(x_n,y_n))-\chi(f^N(x_n,0))=\frac{1}{\tilde{b}}y_n+p_1(x_n,y_n)-p_1(x_n,0)+$$
$$(p_2(x_n,y_n)-p_2(x_n,0))(2\frac{1}{\tilde{a}}x_n-2p_2(x_n,y_n)+p_2(x_n,0))+$$
$$p_\chi(u_0-(y+\Delta y))-p_\chi(u_0-y). \quad (85)$$

Из этого равенства и свойств (54) и (6) функций p_1,p_2,p_χ следует соотношение

$$\chi(f^N(v_0+x_n,y_n))-\chi(f^N(x_n,0))=\frac{1}{\tilde{b}}y_n+o(y_n). \quad (86)$$

Несложно убедиться, что $\chi(f^N(x_n,0))=0$. Поскольку $\tilde{b},y_n>0$, то из соотношения (86) следует, что для достаточно больших n выполнена цепочка соотношений

$$\chi(A^{-n}u(0))=\chi(f^N(v_0+x_n,y_n))=\frac{1}{\tilde{b}}y_n+o(y_n)>0. \quad (87)$$

Рассмотрим $t_1=-e/\mu^n$, где $e>\frac{2}{c_{v_2}}\sqrt{\frac{v_0}{a}}$. Поскольку в условиях теоремы $1/\mu<\mu/\lambda^{3/2}$, то в силу соотношений (78) для достаточно больших n выполнено неравенство $|t_1|<|T|$. Докажем, что для выбранного значения t_1 выполнено неравенство $\chi(A^{-n}u(t_1))<0$. Из соотношения (81) следует равенство

$$A^{-n}u(t_1)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda^n}(v_0+x_n)\\ \mu^n y_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda^n}t_1\\ \mu^n t_1 v_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda^n}\tilde{h}_1(t_1)\\ \mu^n v_2\tilde{h}_2(t_1)\end{pmatrix}.$$

Применим соотношения (83) и (84) к нижеследующим $x,y,\Delta x,\Delta y$:

$$(x,y)=(\frac{1}{\lambda^n}(v_0+x_n),\mu^n y_n)=f^N(x_n,y_n)=A^{-n}u(0),$$

$$(\Delta x,\Delta y)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda^n}t_1\\ \mu^n t_1 v_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda^n}\tilde{h}_1(t_1)\\ \mu^n v_2\tilde{h}_2(t_1)\end{pmatrix}.$$

В результате данной подстановки получим равенство:

$$\chi(x+\Delta x,y+\Delta y)=\chi(A^{-n}u(0))+\frac{1}{\lambda^n}(t_1+\tilde{h}_1(t_1))+$$
$$\tilde{c}\mu^n v_2(t_1+\tilde{h}_2(t_1))(2(u_0-\mu^n y_n)-\mu^n v_2(t_1+\tilde{h}_2(t_1)))+$$
$$o(|\mu^n v_2(t_1+\tilde{h}_2(t_1))|(2|u_0-\mu^n y_n|+|\mu^n v_2(t_1+\tilde{h}_2(t_1)))|)),$$

где $\tilde{h}_1$ и $\tilde{h}_2$ удовлетворяют неравенству (75).

Из условия теоремы следует, что $\frac{1}{\mu} > \lambda\frac{1}{\mu^2}$. Отсюда и из соотношения (79) немедленно получаем, что

$$\frac{\tilde{h}_1(t_1)}{t_1} \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{\tilde{h}_2(t_1)}{t_1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{88}$$

Из этих соотношений и из (66), (45), (46) несложно получить следующие соотношения:

$$\mu^n v_2(t_1 + \tilde{h}_2(t_1)) \sim ec_{v_2}\frac{1}{\lambda^{n/2}}, \tag{89}$$

$$u_0 - \mu^n y_n \sim \sqrt{v_0/\tilde{c}}\frac{1}{\lambda^{n/2}}.$$

Из выбора e следует соотношение

$$2(u_0 - \mu^n y_n) - \mu^n v_2(t_1 + \tilde{h}_2(t_1)) \sim -c_e\frac{1}{\lambda^{n/2}} \tag{90}$$

для некоторого $c_e > 0$. Объединяя полученное соотношение с (66) и (89), получаем эквивалентность

$$\tilde{c}\mu^n v_2(t_1 + \tilde{h}_2(t_1))(2(u_0 - \mu^n y_n) - \mu^n v_2(t_1 + \tilde{h}_2(t_1))) \sim \\ - ec_{v_2}\frac{1}{\lambda^{n/2}}c_e\frac{1}{\lambda^{n/2}} \sim \frac{C}{\lambda^n}, \quad \text{где} \quad C < 0. \tag{91}$$

Из соотношений (87), (91) и выбора t_1 несложно следует, что главным асимптотическим членом выражения (85) является третий член, эквивалентный C/λ^n. Это доказывает неравенство $\chi(u(t_1)) < 0$. Из этого соотношения и неравенства (86) следует, что на промежутке $(t_1, 0)$ найдется такое t, что $\chi(u(t)) = 0$.

Теперь, когда доказано наличие пересечения устойчивого многообразия точки $A^{-n}(v_0 + x_n, y_n)$ и неустойчивого многообразия точки $(0,0)$, мы докажем, что это пересечение трансверсально. Для этого достаточно показать, что в точке пересечения касательные вектора данных кривых не параллельны.

Касательный вектор к неустойчивому многообразию точки $(0,0)$ был найден ранее — см. формулу (58). Найдем касательный вектор к устойчивому многообразию точки $A^{-n}(v_0 + x_n, y_n)$. Дифференцируя соотношение (81), получим равенство

$$A^{-n}u'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^n}(1 + \tilde{h}_1{}'(t)) \\ \mu^n(v_2(1 + \tilde{h}_2{}'(t))) \end{pmatrix}. \tag{92}$$

Таким образом, нам достаточно доказать, что выполнено соотношение

$$\frac{1+\tilde{h_1}'(t)}{\lambda^n\mu^n v_2(1+\tilde{h_2}'(t))} \neq \frac{v_{u_1}}{v_{u_2}}. \tag{93}$$

Докажем, что при достаточно больших n и при $t_1 < t < 0$ выполнено неравенство

$$\frac{1+\tilde{h_1}'(t)}{1+\tilde{h_2}'(t)} < \left|v_2\frac{v_{u_1}}{v_{u_2}}\mu^n\lambda^n\right|. \tag{94}$$

Действительно, из соотношения (82) следует, что $|\tilde{h_1}'| = o(1)$ и $|\tilde{h_2}'| = o(1)$. Таким образом,

$$\frac{1+\tilde{h_1}'(t)}{1+\tilde{h_2}'(t)} = 1 + o(1). \tag{95}$$

Найдем оценку на координату x точки пересечения многообразий. Из (81) следует, что

$$x = \frac{1}{\lambda^n}(v_0 + x_n + t + \tilde{h_1}(t)).$$

Из этого соотношения и оценок (82) следует, что

$$x = v_0/\lambda^n + o(1/\lambda^n).$$

Исходя из (66) и (63) запишем асимптотическое поведение правой части соотношения (94):

$$\left|v_2\frac{v_{u_1}}{v_{u_2}}\lambda^n\mu^n\right| \sim \left|v_2 2\sqrt{\tilde{c}x}\lambda^n\mu^n\right| \sim \left|c_{v_2}\frac{1}{\lambda^{n/2}}2\sqrt{\tilde{c}\frac{v_0}{\lambda^n}}\lambda^n\mu^n\right| \sim c_u\mu^n \tag{96}$$

при некотором c_u.

Из соотношений (95) и (96) следует неравенство (94), что доказывает трансверсальность пересечения многообразий. Теорема доказана.

□

Список литературы

[1] Х.В. Брур, Ф.Дюмортье, С. ван Стрин, Ф. Такенс. *Структуры в динамике. Конечномерные детерминированные системы.* Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[2] Н.К. Гаврилов, Л.П. Шильников. *О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой.* Мат. Сб., 1972, т. 88, с. 475-492.

[3] С.В. Гонченко, Д.В. Тураев, Л.П. Шильников *Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром.* Труды Математического института РАН имени В.А. Стеклова, 1997, т.216, с. 76-125.

[4] Б.Ф. Иванов. *К вопросу о существовании замкнутых траекторий в окрестности гомоклинической кривой.* Дифф. уравнения, N3 1979, том XV, с. 548-550.

[5] Ю.С. Ильяшенко, Вейгу Ли. *Нелокальные бифуркации.* МЦНМО-ЧеРо, М., 1999.

[6] Г.М. Фихтенгольц. *Курс интегрального и дифференциального исчисления.* С-Пб, Лань, 1997.

[7] Ф. Хартман. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М., Мир, 1970., 720 стр.

[8] Ченцова Н.Н. *Проверка трансверсального пересечения сепаратрис с помощью ЭВМ.* Препринт N8. М., Институт прикладной математики, 1979.