ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2013
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Новые книги

Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления

А. В. Пантелеев, К. А. Рыбаков, И. Л. Сотскова

В книге изложены методы анализа многомерных нелинейных непрерывных стохастических систем управления с фиксированной и случайной структурой, основанные на спектральной форме математического описания и ориентированные на применение современных высокопроизводительных вычислительных систем. Она предназначена для специалистов и инженеров, интересующихся современными задачами теории управления и методами их решения, а также для студентов старших курсов и аспирантов технических вузов и университетов.

Первое издание было опубликовано* издательством «Вузовская книга». В настоящем втором издании исправлены замеченные неточности.

*Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2006. – 392 с. (ISBN 5-9502-0187-6)

А.В. ПАНТЕЛЕЕВ, К.А. РЫБАКОВ, И.Л. СОТСКОВА

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

> Всякая точная наука основывается
> на приблизительности.
>
> Бертран Рассел

> Вы не сможете пересечь море,
> просто стоя и вглядываясь в воду.
> Не тратьте время на напрасные желания.
>
> Тагор

Книга предназначена для студентов технических вузов, специализирующихся в области математической теории управления. Предполагается, что читатель владеет основными понятиями линейной алгебры, математического и функционального анализа, теории вероятностей и теории случайных процессов.

Представленный материал обобщает и систематизирует результаты научных исследований, выполненных авторами на кафедре математической кибернетики факультета прикладной математики и физики Московского авиационного института (государственного технического университета).

Изложение построено по единой схеме, включающей постановку задачи, методику ее решения, подробный анализ типовых примеров и задачи для самостоятельного решения, в том числе зависящие от параметра n – номера студента по списку группы.

Вместе с учебными пособиями [8, 9, 28, 38, 39, 40, 43, 44] книга продолжает единую серию «Прикладная математика в примерах и задачах» и может быть использована при чтении спецкурсов, ориентированных на изучение современных методов анализа и синтеза стохастических систем управления, а также для самостоятельного изучения изложенных методов, так как содержит весь необходимый теоретический материал и большое количество примеров.

В книге применяется математический аппарат многомерных матриц. Для их представления используется табличная (блочно-иерархическая) форма записи. Этот материал может представлять интерес для широкого круга читателей при изучении спецглав линейной алгебры.

Посвящается профессору
Виктору Владимировичу Семенову

ВВЕДЕНИЕ

В книге рассматривается задача анализа нелинейных непрерывных стохастических систем управления, математические модели которых описываются стохастическими дифференциальными уравнениями.

Сначала изложены методы анализа **систем управления с фиксированной структурой**. При этом предполагается, что при заданном законе управления, случайных начальных условиях, определяемых некоторой плотностью вероятности, система подвержена случайному внешнему воздействию (рис. 1). Требуется решить **задачу анализа выходных процессов**, т.е. найти закон изменения плотности вероятности вектора состояния, эволюция которой описывается уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова [27, 31, 46, 63, 83, 93].

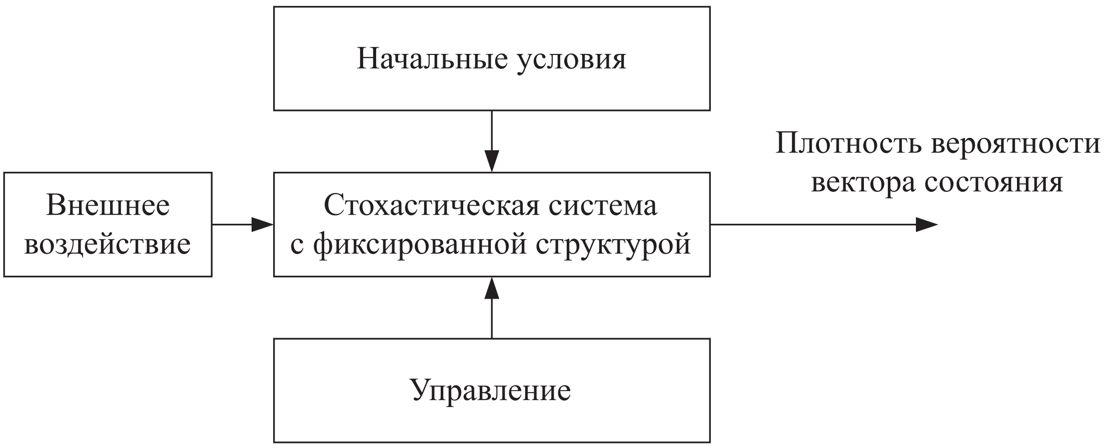

Рис. 1

Известно, что аналитическое решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова может быть найдено только в исключительных случаях.

Для приближенного решения могут использоваться методы гауссовской аппроксимации [46, 83], ортогонального разложения [23, 46, 87], методы с применением семиинвариантов и квазимоментов [46, 63]. Эти методы позволяют перейти от уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова к системе обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно большой размерности, численное интегрирование которой требует значительных временны́х затрат.

Другой подход основан на использовании сеточных методов [28], поскольку уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова является уравнением в частных производных второго порядка параболического типа. Однако применимость подобных методов, как правило, ограничена сравнительно небольшой размерностью вектора состояния. Существуют и другие методы решения, они достаточно подробно описаны в [16, 31, 46, 89, 95, 96].

В данной книге описан иной подход, основанный на **спектральной форме математического описания** систем управления.

Спектральный метод анализа и синтеза линейных детерминированных и стохастических систем управления был разработан в конце 60-х годов В.В. Семеновым [58, 59, 66], а затем обобщен на нелинейные системы [65].

В основе спектрального метода лежит представление сигналов совокупностью коэффициентов разложения их в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций, заданной в общем случае на нестационарном отрезке. Базовыми понятиями метода являются нестационарные спектральные характеристики (спектральные характеристики функций), нестационарные спектральные плотности (спектральные характеристики математического ожидания и ковариационной функции случайного процесса) и нестационарные передаточные функции (спектральные характеристики линейных операторов). Теория спектрального метода и ее приложения нашли свое отражение в монографиях [34, 70, 71, 72, 73] и учебных пособиях [39, 64].

Дальнейшее развитие спектрального метода связано с решением задачи анализа стохастических систем с фиксированной структурой. В работе [60] введено понятие обобщенной характеристической функции – нестационарной спектральной характеристики плотности вероятности вектора состояния стохастической системы, однако для получения уравнения обобщенной характеристической функции как спектрального аналога уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова спектральное преобразование применялось только по координатам вектора состояния, и, таким образом, уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова сводилось к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Аналогичный подход был применен для синтеза оптимального управления нелинейными стохастическими системами [61]. В работах [74, 75] для вывода уравнения обобщенной характеристической функции спектральное преобразование применялось и по координатам вектора состояния, и по переменной времени, что позволило свести уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова к линейному алгебраическому тензорному уравнению и получить решение в явном виде, а в [94] приведено обоснование данного метода и вывод как дифференциального, так и алгебраического уравнения обобщенной характеристической функции.

Использование спектральной формы математического описания позволяет формализовать процесс решения задачи анализа при различных областях изменения времени и координат вектора состояния [76]. Так, в случае ограниченных областей изменения времени и координат вектора состояния используется алгоритмическое обеспечение спектрального метода для нестационарных конечных отрезков [80, 64, 71, 72, 73]. В случае неограниченных областей предлагается использовать обобщенные полиномы и функции Лагерра, ортогональные на полубесконечном промежутке, а также полиномы и функции Эрмита, ортогональные на бесконечном интервале.

В данной книге приведены полученные авторами [51] алгоритмы расчета спектральных характеристик операторов дифференцирования, интегрирования и умножения (нестационарных передаточных функций дифференцирующего, интегрирующего и усилительного звеньев соответственно), а также спектральных характеристик множительного звена (трехмерных нестационарных передаточных функций множительного звена), определенных относительно системы обобщенных полиномов и функций Лагерра, полиномов и функций Эрмита для решения различных прикладных задач теории управления с использованием спектральной формы математического описания систем в случае полубесконечных или бесконечных промежутков изменения времени и координат вектора состояния.

Следует отметить, что спектральный метод является более универсальным по сравнению с другими методами, основанными на ортогональных разложениях, поскольку соотношения для решения задачи анализа спектральным методом, во-первых, представляют собой линейные алгебраические уравнения, а во-вторых, они инвариантны к выбору базисных систем и их свойствам.

Развитием задачи анализа систем с фиксированной структурой является задача анализа нелинейных непрерывных **систем управления со случайной структурой**, или **стохастических мультиструктурных систем**.

Примерами систем со случайной структурой могут служить системы управления сближением летательных аппаратов [85], системы поиска и захвата информационного сигнала в задачах навигации и управления полетом летательных аппаратов [24], системы комбинированного наведения на цель [26], а также системы управления с возможными нарушениями и отказами [68, 90].

Причины, приводящие к изменению структуры системы, могут иметь различный характер, например, выход из строя одной из подсистем, перерывы при поступлении информации в контуре управления [35], адаптация к условиям внешней среды [85], скачкообразно изменяющиеся помехи [15], являющиеся результатом естественных или искусственных внешних воздействий, превышение координатами вектора состояния заданных пороговых значений [23] и т.д.

Область применения систем со случайной структурой не исчерпывается задачами управления летательными аппаратами, эти системы являются математическими моделями мультирежимных систем автоматического управления, для которых характерно скачкообразное изменение отдельных параметров или структуры, т.е. совокупности функциональных элементов и характера связей между ними [21].

Модель стохастической системы со случайной структурой имеет конечное число структур, переключение между которыми происходит в случайные моменты времени. Прежде всего, следует отметить, что переход между структурами в стохастической системе может происходить не только при достижении координатами вектора состояния заданной поверхности переключения (такой тип переключения называется сосредоточенным переходом), но и при любом значении координат вектора состояния с вероятностью, зависящей в общем случае от времени и текущего значения этих координат (распределенный переход). В последнем случае номер структуры определяется значением некоторого условного марковского процесса с конечным числом состояний, задаваемого интенсивностями переходов между структурами [36, 26]. В каждый момент времени система может иметь ту или иную структуру с некоторой вероятностью (вероятностью активности структуры).

В этих системах предполагается, что при заданном законе управления, случайных начальных условиях и заданном характере смены структуры система подвержена случайному внешнему воздействию. Требуется решить **задачу анализа выходных процессов**, т.е. найти закон изменения плотности вероятности вектора состояния каждой структуры и вероятности активности структур (рис. 2).

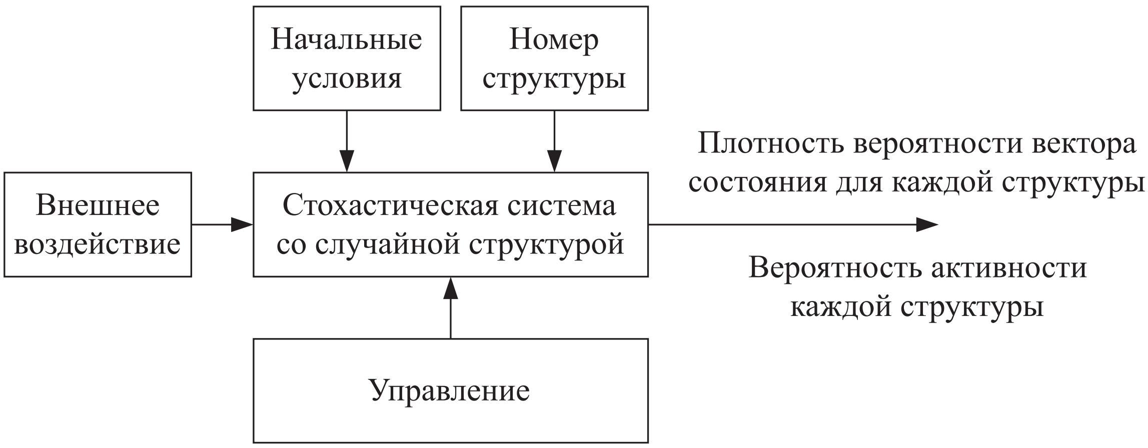

Рис. 2

Можно выделить два основных направления вероятностного анализа стохастических систем со случайной структурой. Первое направление, берущее начало в работах [67, 68], связано с определением моментных характеристик вектора состояния динамической системы с возможными нарушениями, например, в задачах теории надежности. А второе, более общее, заключается в нахождении плотности вероятности вектора состояния как наиболее полной вероятностной характеристики. В основе второго подхода лежит модель систем с поглощением и восстановлением реализаций случайного процесса, позволяющая с единых позиций рассматривать задачи анализа, синтеза и фильтрации стохастических систем управления со случайной структурой как при распределенных, так и при сосредоточенных переходах [4, 24, 25, 26], а также стохастических логико-динамических систем [5]. В связи с этим второй подход представляется предпочтительнее с точки зрения решения различных прикладных задач теории управления.

Для нахождения плотности вероятности вектора состояния системы управления со случайной структурой необходимо интегрировать систему обобщенных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова [4, 5, 24, 25, 26, 85]. Методы анализа систем со случайной структурой, основанные на интегрировании этих уравнений, аналогичны методам анализа стохастических систем с фиксированной структурой и, следовательно, обладают всеми их достоинствами и недостатками. Аналитические методы применимы лишь в исключительных случаях. Основное распространение получили методы, в основе которых лежит представление неизвестной плотности вероятности в виде ряда по ортогональным функциям (метод ортогонального разложения [23], методы анализа с использованием семиинвариантов и квазимоментов [85]).

В качестве альтернативы обобщенным уравнениям Фоккера – Планка – Колмогорова можно свести задачу анализа к решению обобщенных интегро-дифференциальных уравнений Пугачева [23, 26], неизвестными в которых являются характеристические функции вектора состояния. Данный метод удобно применять в случае негладких локальных статистических характеристик вектора состояния – коэффициентов сноса и диффузии. Уравнения Пугачева имеют меньший порядок, тем не менее, аналитические методы решения к ним в общем случае не применимы.

Другой подход основан на численном интегрировании обобщенных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова с использованием методов, разработанных для классических уравнений [28, 83, 88]. Для определения плотности вероятности вектора состояния также можно применять метод статистического моделирования [1, 2], но для достижения приемлемой точности требуется значительный объем вычислений.

В настоящей книге излагается новый подход к решению задачи анализа систем со случайной структурой, основанный на формализме спектрального метода [71, 72, 73, 74, 75, 76, 94], позволяющий перейти от системы уравнений в частных производных (обобщенных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова) к системе линейных неоднородных алгебраических уравнений и получить решение в явном виде.

Применение спектрального метода базируется на использовании операций с многомерными матрицами. К сожалению, этот материал, как правило, не включается в учебные программы большинства технических вузов [8]. Поэтому авторы решили восполнить этот пробел.

Первая глава книги посвящена определению многомерных матриц, операциям с многомерными матрицами, а также основам спектральной формы математического описания систем управления.

Во второй главе рассмотрено применение спектрального метода для анализа стохастических систем с фиксированной структурой. Получен спектральный аналог уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова и изложена методика решения задачи. Ее применение проиллюстрировано на модельных примерах и прикладной задаче анализа следящей системы управления.

В третьей главе изложен спектральный метод анализа систем со случайной структурой. Получен спектральный аналог обобщенных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова и сформирована методика решения задачи. В качестве примеров решены прикладные задачи анализа системы поиска и захвата информационного сигнала и анализа движения малого искусственного спутника, находящегося под действием гравитационного и управляющего моментов.

Все численные расчеты, приведенные в книге, выполнены с помощью специализированного программного обеспечения Spectrum [47], предназначенного для решения задач анализа и синтеза систем управления различных классов с использованием спектральной формы математического описания.

ГЛАВА 1
СПЕКТРАЛЬНАЯ ФОРМА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

1.1. БАЗИСНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

1.1.1. Базисные системы для представления функций времени

Введем понятие нестационарного отрезка времени. Пусть независимые переменные времени t и τ имеют общее начало отсчета t_0; переменная t обозначает текущее время, а τ является параметром, определяющим границы промежутка времени, которому принадлежит t.

Для представления функций времени удобно использовать:

а) конечные отрезки времени;

б) полубесконечные промежутки времени.

Конечный отрезок $T = [a(\tau), b(\tau)]$ времени t назовем **нестационарным**, если хотя бы один конец этого отрезка является функцией времени τ, и **стационарным**, если оба конца отрезка неподвижны, т.е. $a(\tau) = \text{const}$, $b(\tau) = \text{const}$.

Функции $a(\tau)$ и $b(\tau)$ служат характеристиками нестационарного отрезка времени. Нестационарный отрезок можно описывать также его длиной $\theta(\tau) = b(\tau) - a(\tau)$ и одной из функций $a(\tau)$ или $b(\tau)$, т.е. задавать отрезок в форме $b(\tau) - \theta(\tau) \leqslant t \leqslant b(\tau)$ или $a(\tau) \leqslant t \leqslant a(\tau) + \theta(\tau)$. В общем случае нестационарный отрезок $[a(\tau), b(\tau)]$ очерчивает полосу на плоскости $t_0 \tau t$, заключенную между кривыми $t = a(\tau)$ и $t = b(\tau)$. Проекция $T = [a(\tau'), b(\tau')]$ сечения этой полосы прямой $\tau = \tau'$ на ось t представляет собой мгновенное положение нестационарного отрезка при фиксированном τ (рис. 1.1).

В качестве примеров нестационарных отрезков можно привести отрезок с подвижным правым концом $[0, \tau]$ и скользящий отрезок переменной длины $[\tau - \theta(\tau), \tau]$. Примером стационарного отрезка может служить отрезок $[0, \theta]$, где число θ задано, а также полубесконечный промежуток $[0, +\infty)$.

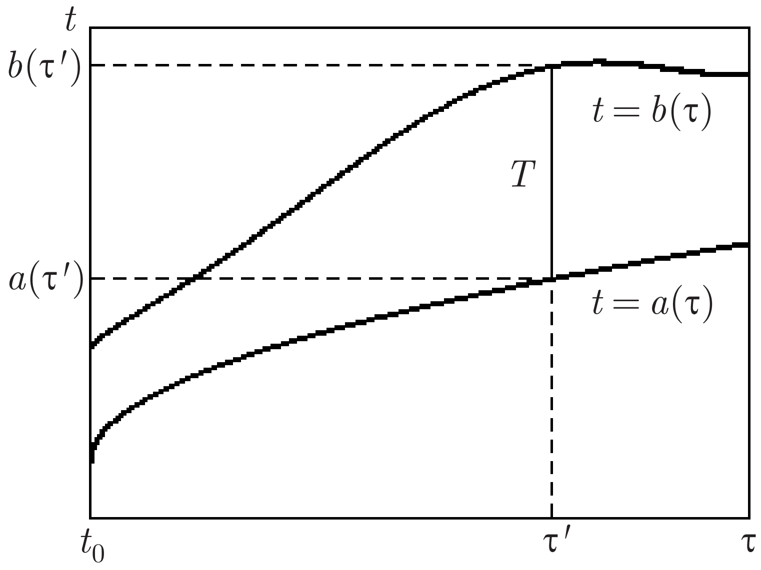

Рис. 1.1. Нестационарный отрезок времени

Обозначим через $L_2(T;\, \nu(t))$ пространство комплекснозначных функций времени $h(t)$ таких, что

$$\|h(t)\|_{L_2(T;\, \nu(t))} = \left\{ \int_T \nu(t)\, |h(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

где $\nu(t) \geqslant 0$ – весовая функция. **Скалярное произведение** в пространстве $L_2(T;\, \nu(t))$ определяется формулой [30]

$$\big(f(t), g(t)\big)_{L_2(T;\, \nu(t))} = \int_T \nu(t)\, f^*(t)\, g(t)\, dt, \tag{1.1}$$

где $f(t)$ и $g(t)$ – элементы пространства $L_2(T;\, \nu(t))$, $f^*(t)$ – комплекснозначная сопряженная функция.

Замечание 1.1. Далее в обозначении функциональных пространств и примерах базисных систем не будем указывать весовую функцию, если она тождественно равна единице, т.е. $L_2(T;\, 1) = L_2(T)$.

Система в общем случае комплекснозначных функций $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$, определенных на нестационарном отрезке T, называется **ортонормированной** на T с весом $\nu(t)$, если при любом фиксированном τ справедливо равенство

$$\big(q(i,t), q(j,t)\big)_{L_2(T;\, \nu(t))} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$i, j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где i, j – номера функций в системе. Полная ортонормированная система функций называется **базисом** пространства $L_2(T;\, \nu(t))$, или **базисной системой**.

Замечание 1.2. В общем случае функции $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ и $\nu(t)$ зависят не только от времени t, но и от параметра τ, однако эта зависимость для упрощения записи явно не указана.

Приведем ***примеры базисных систем для представления функций времени***.

1. **Нестационарные полиномы Лежандра**, ортонормированные на нестационарном скользящем отрезке $T = [\tau - \theta, \tau]$ постоянной длины θ, определяются следующим соотношением:

$$\hat{P}(i,t) = \\ = \sqrt{\frac{2i+1}{\theta}} \sum_{m=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \sum_{k=0}^{i-2m} \frac{(-1)^{i-m-k}}{2^{i-k}} C_i^m C_{2i-2m}^i C_{i-2m}^{i-2m-k} \frac{(2\tau-\theta)^{i-2m-k}}{\theta^{i-2m}} t^k, \quad (1.3)$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots, \quad \tau - \theta \leqslant t \leqslant \tau,$$

где выражение $\left[\frac{i}{2}\right]$ означает целую часть числа $\frac{i}{2}$. Первые четыре члена этой системы приведены ниже:

$$\hat{P}(0,t) = \sqrt{\frac{1}{\theta}},$$
$$\hat{P}(1,t) = \sqrt{\frac{3}{\theta}} \left(\frac{2}{\theta} t - \frac{2\tau}{\theta} + 1 \right),$$
$$\hat{P}(2,t) = \sqrt{\frac{5}{\theta}} \left(\frac{6}{\theta^2} t^2 - \frac{6(2\tau-\theta)}{\theta^2} t + \frac{3(2\tau-\theta)^2}{2\theta^2} - \frac{1}{2} \right),$$
$$\hat{P}(3,t) = \sqrt{\frac{7}{\theta}} \left(\frac{20}{\theta^3} t^3 - \frac{30(2\tau-\theta)}{\theta^3} t^2 + \left(\frac{15(2\tau-\theta)^2}{\theta^3} - \frac{3}{\theta} \right) t - \right. \\ \left. - \frac{5(2\tau-\theta)^3}{2\theta^3} + \frac{3(2\tau-\theta)}{2\theta} \right).$$

Формулы для нестационарных полиномов Лежандра, ортонормированных на нестационарном отрезке $T = [0, \tau]$ с подвижным правым концом (рис. 1.2), имеют вид

$$\hat{P}(i,t) = \sqrt{\frac{2i+1}{\tau}} \sum_{k=0}^{i} l_{ik} \frac{t^k}{\tau^k}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \quad (1.4)$$

где $l_{ik} = (-1)^{i-k} C_{i+k}^i C_i^{i-k}$.

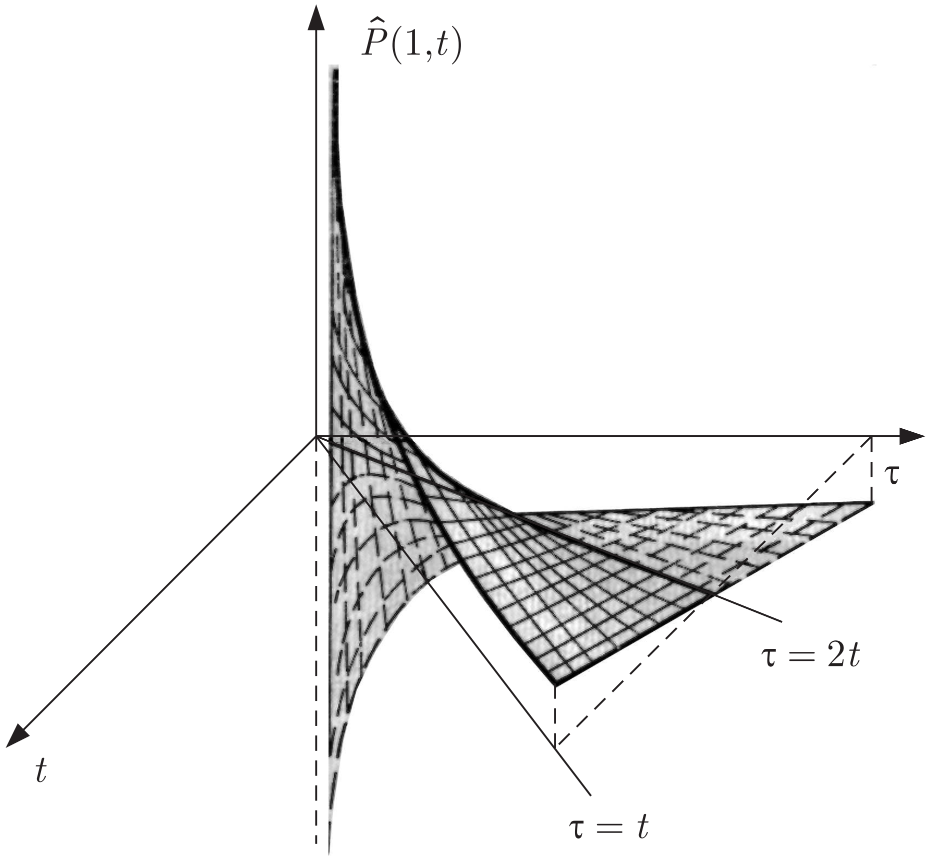

Рис. 1.2. Нестационарный полином Лежандра $\hat{P}(1,t)$, заданный на $[0,\tau]$

Тогда

$$\hat{P}(0,t) = \sqrt{\frac{1}{\tau}}, \quad \hat{P}(1,t) = \sqrt{\frac{3}{\tau}}\left(\frac{2}{\tau}t - 1\right),$$
$$\hat{P}(2,t) = \sqrt{\frac{5}{\tau}}\left(\frac{6}{\tau^2}t^2 - \frac{6}{\tau}t + 1\right),$$
$$\hat{P}(3,t) = \sqrt{\frac{7}{\tau}}\left(\frac{20}{\tau^3}t^3 - \frac{30}{\tau^2}t^2 + \frac{12}{\tau}t - 1\right), \quad \ldots .$$

2. Система **нестационарных косинусоид**, ортонормированных на нестационарном отрезке $T = [0,\tau]$:

$$\hat{C}(i,t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\tau}}, \ i = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\tau}} \cos\frac{i\pi t}{\tau}, \ i = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{1.5}$$

$0 \leqslant t \leqslant \tau,$

т.е.

$$\hat{C}(0,t)=\sqrt{\frac{1}{\tau}}, \qquad \hat{C}(1,t)=\sqrt{\frac{2}{\tau}}\cos\frac{\pi t}{\tau},$$

$$\hat{C}(2,t)=\sqrt{\frac{2}{\tau}}\cos\frac{2\pi t}{\tau}, \qquad \hat{C}(3,t)=\sqrt{\frac{2}{\tau}}\cos\frac{3\pi t}{\tau}, \quad \ldots .$$

3. Система **нестационарных комплексных экспоненциальных функций**, заданных на нестационарном отрезке $T=[0,\tau]$:

$$\hat{F}(i,t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{\tau}}\mathrm{e}^{j\frac{i\pi}{\tau}t},\ i=2k,\\ \sqrt{\dfrac{1}{\tau}}\mathrm{e}^{-j\frac{(i+1)\pi}{\tau}t},\ i=2k+1,\end{cases} \tag{1.6}$$

$$i,k=0,1,2,\ldots, \quad j=\sqrt{-1}, \quad 0\leqslant t\leqslant\tau,$$

т.е.

$$\hat{F}(0,t)=\sqrt{\frac{1}{\tau}}, \qquad \hat{F}(1,t)=\sqrt{\frac{1}{\tau}}\,\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\tau}t},$$

$$\hat{F}(2,t)=\sqrt{\frac{1}{\tau}}\,\mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{\tau}t}, \qquad \hat{F}(3,t)=\sqrt{\frac{1}{\tau}}\,\mathrm{e}^{-j\frac{4\pi}{\tau}t},$$

$$\hat{F}(4,t)=\sqrt{\frac{1}{\tau}}\,\mathrm{e}^{j\frac{4\pi}{\tau}t}, \qquad \ldots .$$

4. Система **нестационарных функций Уолша**, ортонормированных на нестационарном отрезке $[0,\tau]$:

$$\hat{\Omega}(i,t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{\tau}},\ i=0,\\ \sqrt{\dfrac{1}{\tau}}\prod\limits_{\{k:\ a_k=1\}} r(k,t),\ i=1,2,\ldots,\end{cases} \tag{1.7}$$

$$0\leqslant t\leqslant\tau,$$

где a_k – коэффициенты в двоичном представлении числа i, а именно:

$$i=a_1 2^0+a_2 2^1+a_3 2^2+\ldots+a_k 2^{k-1}+$$
$$+\ldots+a_{m+1}2^m=(a_{m+1}\ldots a_k\ldots a_3 a_2 a_1)_2\,, \tag{1.8}$$

$m=[\log_2 i]$ – наибольшая степень в двоичном представлении числа i, $a_k\in\{0,1\}$, а $r(k,t)$ – функция Радемахера, заданная выражением

$$r(k,t)=\operatorname{sign}\left(\sin\frac{2^k\pi t}{\tau}\right), \quad k=1,2,3,\ldots . \tag{1.9}$$

Функция Уолша $\hat{\Omega}(i,t)$ представляет собой произведение функций $r(k,t)$ с номерами k, для которых $a_k = 1$ в разложении (1.8), и множителя $\sqrt{1/\tau}$.

Поясним это на примере. Пусть $i = 11$, тогда $i = (1011)_2$ в двоичном представлении, т.е. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$ и, следовательно,

$$\hat{\Omega}(11,t) = \sqrt{\frac{1}{\tau}}\, r(1,t)\, r(2,t)\, r(4,t).$$

Таким образом, первые четыре члена этой системы имеют вид

$$\hat{\Omega}(0,t) = \sqrt{\frac{1}{\tau}}, \qquad \hat{\Omega}(1,t) = \sqrt{\frac{1}{\tau}}\, r(1,t),$$
$$\hat{\Omega}(2,t) = \sqrt{\frac{1}{\tau}}\, r(2,t), \qquad \hat{\Omega}(3,t) = \sqrt{\frac{1}{\tau}}\, r(1,t)\, r(2,t),$$

где

$$r(1,t) = \operatorname{sign}\left(\sin\frac{2\pi t}{\tau}\right), \quad r(2,t) = \operatorname{sign}\left(\sin\frac{4\pi t}{\tau}\right).$$

5. **Полиномы Лагерра**, заданные формулами

$$\hat{L}(i,t) = \sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^{i-k} C_i^k t^k}{k!}, \qquad (1.10)$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots, \quad 0 \leqslant t < +\infty,$$

образуют полную ортонормированную систему функций на полубесконечном промежутке $T = [0, +\infty)$ с весом $\nu(t) = \mathrm{e}^{-t}$, при этом интеграл в (1.1) понимается как несобственный.

Первые четыре полинома Лагерра записываются следующим образом:

$$\hat{L}(0,t) = 1, \qquad \hat{L}(1,t) = t - 1,$$
$$\hat{L}(2,t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 1, \qquad \hat{L}(3,t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t - 1.$$

6. Система **функций Лагерра**

$$\hat{\Psi}(i,t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \hat{L}(i,t), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \quad 0 \leqslant t < +\infty, \qquad (1.11)$$

также является полной и ортонормированной на полубесконечном промежутке $T = [0, +\infty)$, но с весом $\nu(t) \equiv 1$, так как для всех $i, j = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо равенство

$$\big(\hat{L}(i,t), \hat{L}(j,t)\big)_{L_2([0,+\infty);\, \mathrm{e}^{-t})} = \big(\hat{\Psi}(i,t), \hat{\Psi}(j,t)\big)_{L_2([0,+\infty))}.$$

Первые четыре функции Лагерра имеют вид

$$\hat{\Psi}(0,t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}, \qquad \hat{\Psi}(1,t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\,(t-1)\,,$$

$$\hat{\Psi}(2,t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{2}t^2 - 2t + 1\right), \qquad \hat{\Psi}(3,t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t - 1\right).$$

Графики этих функций при $0 \leqslant t \leqslant 4$ изображены на рис. 1.3.

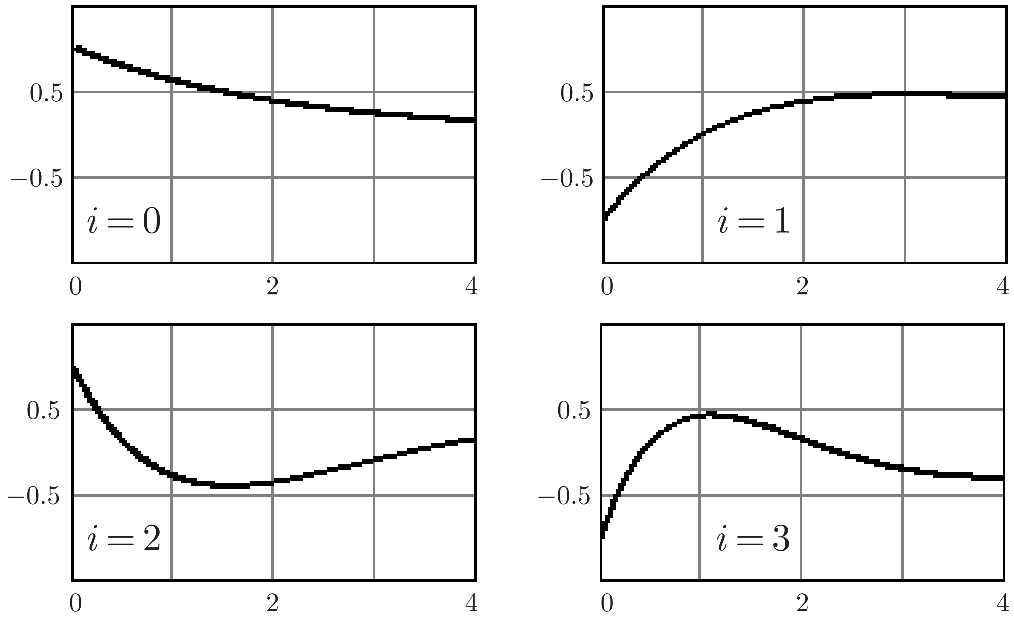

Рис. 1.3. Функции Лагерра ($i = 0, 1, 2, 3$)

Задача представления функции времени в виде ряда

Предположим, что имеются:
а) функция времени $h(t)$, принадлежащая пространству $L_2(T;\, \nu(t))$;
б) базисная система функций $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T;\, \nu(t))$.

Требуется представить функцию $h(t)$ в виде ряда по функциям базисной системы.

Утверждение 1.1. *Пусть система функций $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2(T;\, \nu(t))$. Тогда любую функцию $h(t) \in L_2(T;\, \nu(t))$ можно представить в виде ряда по функциям этой системы* [45]:

$$h(t) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot q(i,t), \quad t \in T, \tag{1.12}$$

где

$$h_i = \big(q(i,t), h(t)\big)_{L_2(T;\, \nu(t))}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots\ . \tag{1.13}$$

Числа h_i называются **коэффициентами разложения** функции $h(t)$.

Таким образом, решение задачи представления функции времени $h(t) \in L_2(T; \nu(t))$ в виде ряда по функциям заданной базисной системы состоит в определении коэффициентов разложения h_i и использовании (1.12).

Промежуток времени, на котором справедливо представление (1.12), зависит от параметра τ (рис. 1.4). При $\tau = \tau_1$ получаем $T = [a(\tau_1), b(\tau_1)]$, а при $\tau = \tau_2$ – промежуток $T = [a(\tau_2), b(\tau_2)]$.

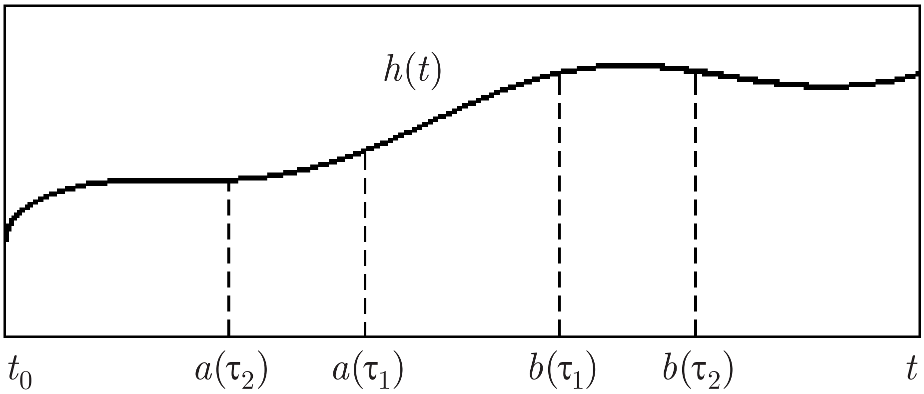

Рис. 1.4. График функции времени $h(t)$

Пример 1.1. Представить функцию $h(t) = t^3$ в виде ряда по нестационарным полиномам Лежандра (1.4) на нестационарном отрезке $T = [0, \tau]$.

□ Воспользуемся формулой (1.13) для нахождения коэффициентов разложения:

$$h_0 = \int_0^\tau t^3 \hat{P}(0,t)\,dt = \int_0^\tau t^3 \sqrt{\frac{1}{\tau}}\,dt = \frac{\tau^3\sqrt{\tau}}{4},$$

$$h_1 = \int_0^\tau t^3 \hat{P}(1,t)\,dt = \int_0^\tau t^3 \sqrt{\frac{3}{\tau}}\left(\frac{2}{\tau}t - 1\right)dt = \frac{3\tau^3\sqrt{3\tau}}{20},$$

$$h_2 = \int_0^\tau t^3 \hat{P}(2,t)\,dt = \int_0^\tau t^3 \sqrt{\frac{5}{\tau}}\left(\frac{6}{\tau^2}t^2 - \frac{6}{\tau}t + 1\right)dt = \frac{\tau^3\sqrt{5\tau}}{20},$$

$$h_3 = \int_0^\tau t^3 \hat{P}(3,t)\,dt = \int_0^\tau t^3 \sqrt{\frac{7}{\tau}}\left(\frac{20}{\tau^3}t^3 - \frac{30}{\tau^2}t^2 + \frac{12}{\tau}t - 1\right)dt = \frac{\tau^3\sqrt{7\tau}}{140},$$

$$h_i = \int_0^\tau t^3 \hat{P}(i,t)\,dt = 0, \quad i = 4, 5, 6, \ldots\ .$$

Следовательно, искомое представление функции $h(t) = t^3$ имеет вид

$$h(t) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot \hat{P}(i,t) = \frac{\tau^3\sqrt{\tau}}{4}\hat{P}(0,t) + \frac{3\tau^3\sqrt{3\tau}}{20}\hat{P}(1,t) + \\ + \frac{\tau^3\sqrt{5\tau}}{20}\hat{P}(2,t) + \frac{\tau^3\sqrt{7\tau}}{140}\hat{P}(3,t), \quad t \in [0,\tau]. \quad \blacksquare$$

1.1.2. Базисные системы для представления функций вектора состояния

Одномерный случай. Для представления функций одной переменной может быть использован:

а) конечный отрезок;

б) бесконечный интервал.

Пусть множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, причем Ω может быть как конечным отрезком $[a,b]$, так и бесконечным интервалом $(-\infty,+\infty)$.

Обозначим через $L_2(\Omega;\, \rho(x))$ пространство комплекснозначных функций $h(x)$ таких, что

$$\|h(x)\|_{L_2(\Omega;\,\rho(x))} = \left\{ \int\limits_{\Omega} \rho(x)\,|h(x)|^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \tag{1.14}$$

где $\rho(x) \geqslant 0$ – весовая функция. **Скалярное произведение** в пространстве $L_2(\Omega;\, \rho(x))$ определяется следующей формулой [30]:

$$\big(f(x), g(x)\big)_{L_2(\Omega;\,\rho(x))} = \int\limits_{\Omega} \rho(x)\,f^*(x)\,g(x)\,dx, \tag{1.15}$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат пространству $L_2(\Omega;\, \rho(x))$, $f^*(x)$ – комплекснозначная сопряженная функция.

З а м е ч а н и е 1.3. В обозначении пространства $L_2(\Omega;\, \rho(x))$ будем опускать весовую функцию, если она тождественно равна единице, т.е. $L_2(\Omega;\, 1) = L_2(\Omega)$.

Система в общем случае комплекснозначных функций $\{p(i,x)\}_{i=0}^{\infty}$, определенных на множестве Ω, называется **ортонормированной** на Ω с весом $\rho(x)$, если справедливо равенство

$$\big(p(i,x), p(j,x)\big)_{L_2(\Omega;\,\rho(x))} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{1.16}$$

$$i,j = 0,1,2,\ldots,$$

где i, j – номера функций в системе. Полная ортонормированная система функций называется **базисом** пространства $L_2(\Omega;\, \rho(x))$, или **базисной системой**.

Для конечных отрезков в качестве базиса пространства $L_2(\Omega;\, \rho(x))$ можно использовать:

а) системы функций (1.3)–(1.7), зафиксировав значение τ и, следовательно, отрезок $[a(\tau), b(\tau)]$, а также формально произведя замену t на x;

б) иную систему функций, ортонормированную на множестве Ω.

Рассмотрим ***примеры базисных систем для представления функций одной переменной*** x, заданных на конечных и бесконечных промежутках.

1. **Полиномы Лежандра**, ортонормированные на произвольном конечном отрезке $\Omega = [a, b]$:

$$\hat{P}(i, x) = \\ = \sqrt{\frac{2i+1}{b-a}} \sum_{m=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \sum_{k=0}^{i-2m} \frac{(-1)^{i-m-k}}{2^{i-k}} C_i^m C_{2i-2m}^i C_{i-2m}^{i-2m-k} \frac{(b+a)^{i-2m-k}}{(b-a)^{i-2m}} x^k, \quad (1.17)$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

В частном случае при $a = 0$ и $b = 1$ четыре первых полинома Лежандра имеют вид

$$\hat{P}(0, x) = 1,$$
$$\hat{P}(1, x) = \sqrt{3}\,(2x - 1),$$
$$\hat{P}(2, x) = \sqrt{5}\,(6x^2 - 6x + 1),$$
$$\hat{P}(3, x) = \sqrt{7}\,(20x^3 - 30x^2 + 12x - 1).$$

Графики этих функций изображены на рис. 1.5.

2. Система **тригонометрических функций**, ортонормированная на отрезке $\Omega = [-a, a]$, имеет вид

$$\hat{S}(i, x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{2a}}, \ i = 0, \\ \sqrt{\dfrac{1}{a}} \cos \dfrac{i\pi}{2a} x, \ i = 2k, \\ \sqrt{\dfrac{1}{a}} \sin \dfrac{(i+1)\pi}{2a} x, \ i = 2k - 1, \end{cases} \quad (1.18)$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \quad -a \leqslant x \leqslant a,$$

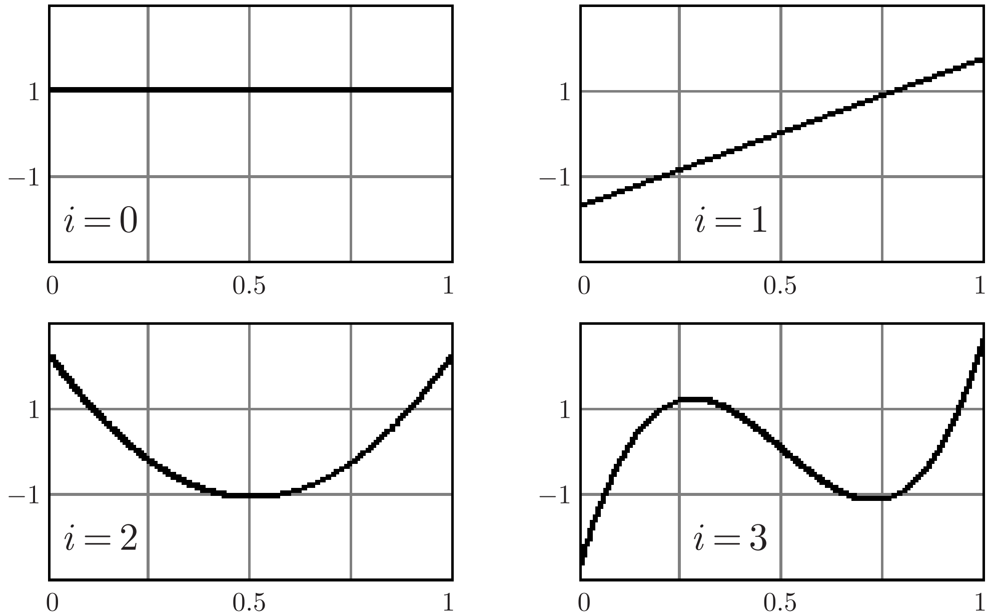

Рис. 1.5. Полиномы Лежандра на отрезке $[0,1]$ $(i = 0,1,2,3)$

т.е.

$$\hat{S}(0,x) = \sqrt{\frac{1}{2a}}, \qquad \hat{S}(1,x) = \sqrt{\frac{1}{a}}\sin\frac{\pi x}{a},$$
$$\hat{S}(2,x) = \sqrt{\frac{1}{a}}\cos\frac{\pi x}{a}, \qquad \hat{S}(3,x) = \sqrt{\frac{1}{a}}\sin\frac{2\pi x}{a},$$
$$\hat{S}(4,x) = \sqrt{\frac{1}{a}}\cos\frac{2\pi x}{a}, \qquad \ldots .$$

Графики тригонометрических функций при $a = 1$ приведены на рис. 1.6.

3. Система **функций Уолша**, ортонормированная на отрезке $\Omega = [0,1]$:

$$\hat{\Omega}(i,x) = \begin{cases} 1, \ i = 0, \\ \prod\limits_{\{k\colon\ a_k = 1\}} r(k,x), \ i = 1,2,\ldots, \end{cases} \tag{1.19}$$
$$i = 0,1,2,\ldots, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где функция $r(k,x) = \operatorname{sign}\left(\sin 2^k \pi x\right)$, $k = 1,2,3,\ldots$, называется функцией Радемахера, а числа a_k определяются так же, как и для нестационарных функций Уолша (1.7), следовательно,

$$\hat{\Omega}(0,x) = 1, \qquad \hat{\Omega}(1,x) = r(1,x),$$
$$\hat{\Omega}(2,x) = r(2,x), \qquad \hat{\Omega}(3,x) = r(1,x)r(2,x), \qquad \ldots,$$

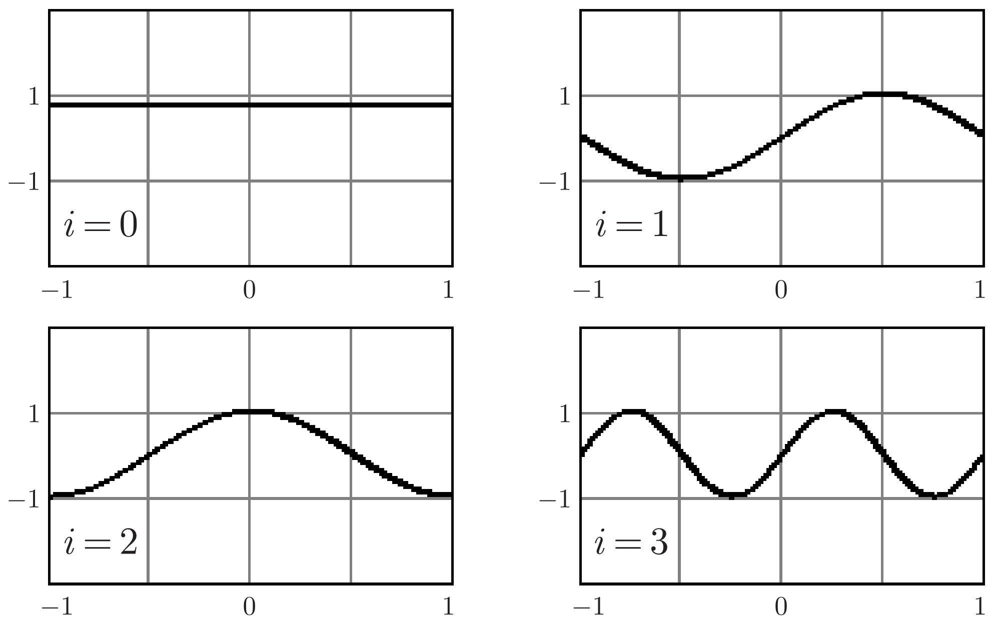

Рис. 1.6. Тригонометрические функции на отрезке $[-1,1]$ $(i=0,1,2,3)$

где

$$r(1,x) = \mathrm{sign}(\sin 2\pi x),$$

$$r(2,x) = \mathrm{sign}(\sin 4\pi x).$$

Графики функций Уолша изображены на рис. 1.7.

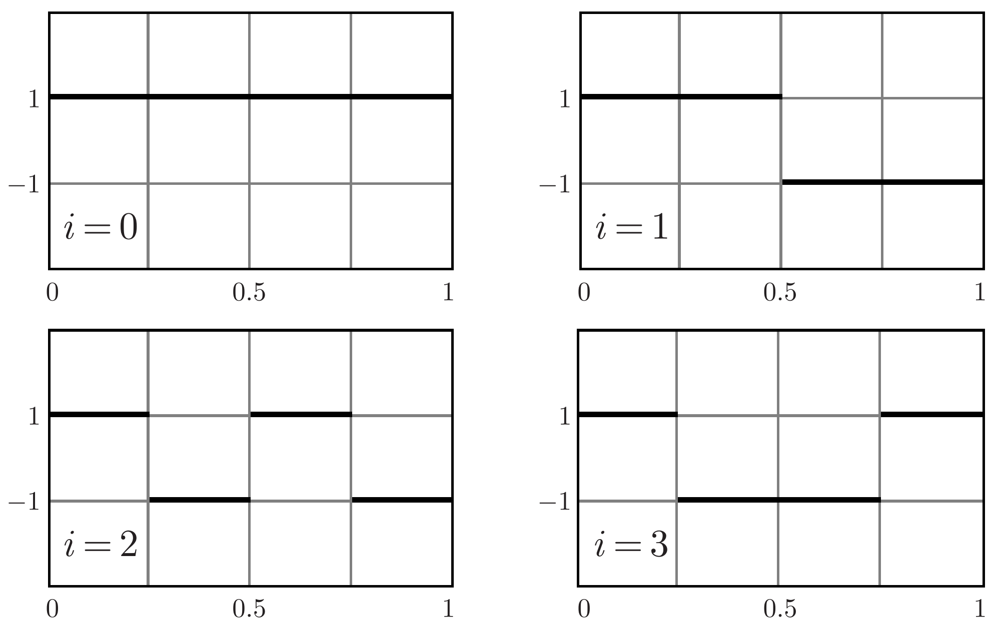

Рис. 1.7. Функции Уолша на отрезке $[0,1]$ $(i=0,1,2,3)$

4. **Полиномы Эрмита** задаются следующим образом:

$$\hat{H}(i,x) = \sqrt{\frac{i!}{2^i\sqrt{\pi}}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2x)^{i-2k}}{k!\,(i-2k)!}, \tag{1.20}$$

$$i = 0,1,2,\ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Известно [7], что полиномы $\hat{H}(i,x)$ образуют полную ортонормированную систему на бесконечном интервале $\Omega = (-\infty,+\infty)$ с весом $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, при этом интеграл в (1.15) понимается как несобственный. Выпишем первые четыре полинома Эрмита:

$$\hat{H}(0,x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}, \qquad \hat{H}(1,x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt[4]{\pi}},$$

$$\hat{H}(2,x) = \frac{\sqrt{2}\left(2x^2-1\right)}{2\sqrt[4]{\pi}}, \qquad \hat{H}(3,x) = \frac{\sqrt{3}\left(2x^3-3x\right)}{3\sqrt[4]{\pi}}.$$

5. Система **функций Эрмита**

$$\hat{\Phi}(i,x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\hat{H}(i,x), \quad i = 0,1,2,\ldots, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{1.21}$$

где $\hat{H}(i,x)$ – полиномы Эрмита (1.20), является полной и ортонормированной на бесконечном интервале $\Omega = (-\infty,+\infty)$ с весом $\rho(x) \equiv 1$, поскольку

$$\left(\hat{H}(i,x), \hat{H}(j,x)\right)_{L_2((-\infty,+\infty);\,\mathrm{e}^{-x^2})} = \left(\hat{\Phi}(i,x), \hat{\Phi}(j,x)\right)_{L_2((-\infty,+\infty))},$$

$$i,j = 0,1,2,\ldots\ .$$

Первые четыре функции Эрмита имеют вид

$$\hat{\Phi}(0,x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \hat{\Phi}(1,x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt[4]{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$\hat{\Phi}(2,x) = \frac{\sqrt{2}\left(2x^2-1\right)}{2\sqrt[4]{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \hat{\Phi}(3,x) = \frac{\sqrt{3}\left(2x^3-3x\right)}{3\sqrt[4]{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

а их графики при $-4 \leqslant x \leqslant 4$ приведены на рис. 1.8.

Многомерный случай. Рассмотрим задачу представления функций многих переменных. Пусть множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n, \tag{1.22}$$

а $x = [x_1 \ \ x_2 \ \ \ldots \ \ x_n]^{\mathrm{T}}$, где $x_1 \in \Omega_1$, $x_2 \in \Omega_2$, $\ldots$, $x_n \in \Omega_n$, причем множество Ω_l является либо конечным отрезком, либо бесконечным интервалом, $l = 1,2,\ldots,n$.

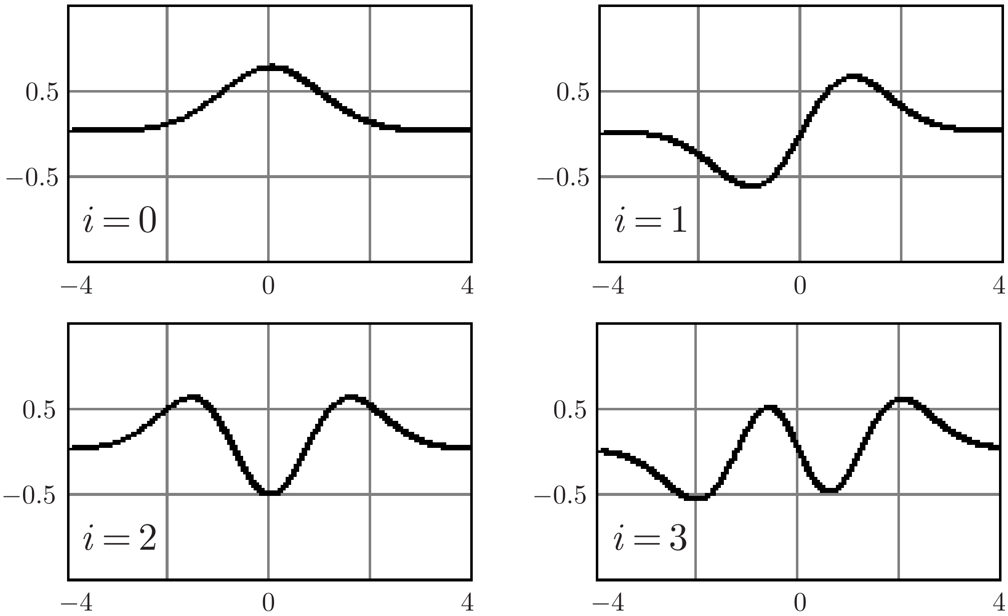

Рис. 1.8. Функции Эрмита ($i = 0, 1, 2, 3$)

Пусть $L_2(\Omega;\, \rho(x))$ – пространство комплекснозначных функций вектора состояния, квадратично интегрируемых с весом $\rho(x)$ (см. (1.14)), со **скалярным произведением**, задаваемым формулой (1.15), которая в координатной форме принимает вид

$$\begin{gathered}\big(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)_{L_2(\Omega_1\times\Omega_2\times\ldots\times\Omega_n;\, \rho(x_1,x_2,\ldots,x_n))} = \\ = \int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_2}\ldots\int\limits_{\Omega_n} \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) \times \\ \times g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,\end{gathered}$$

где $\rho(x) = \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$ – весовая функция, $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – функции многих переменных из пространства $L_2(\Omega;\, \rho(x))$, $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – комплекснозначная сопряженная функция.

Система функций $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ называется **ортонормированной**, если

$$\begin{gathered}\big(p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x), p(j_1, j_2, \ldots, j_n, x)\big)_{L_2(\Omega;\, \rho(x))} = \\ = \begin{cases} 1, & i_1 = j_1,\ i_2 = j_2,\ \ldots,\ i_n = j_n, \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \\ i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_n = 0, 1, 2, \ldots \ .\end{gathered}$$

Полная ортонормированная система функций называется **базисом** пространства $L_2(\Omega;\, \rho(x))$, или **базисной системой**.

Утверждение 1.2. *Если* $\{p_l(i_l,x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$ *– полная ортонормированная система функций в пространстве* $L_2(\Omega_l;\rho_l(x_l))$, $l=1,2,\ldots,n$, *и* $\rho(x)=\rho_1(x_1)\rho_2(x_2)\ldots\rho_n(x_n)$, *то система* $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, *порожденная всевозможными произведениями функций* $p_l(i_l,x_l)$, *т.е.*

$$p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)=p_1(i_1,x_1)\cdot p_2(i_2,x_2)\cdots p_n(i_n,x_n), \tag{1.23}$$

образует базис пространства $L_2(\Omega;\rho(x))$ *[45].*

Приведем ***примеры базисных систем для представления функций многих переменных***.

1. Система функций $\{\hat{H}(i_1,x_1)\hat{S}(i_2,x_2)\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$, где $\hat{H}(i_1,x_1)$ – полиномы Эрмита (1.20), а $\hat{S}(i_2,x_2)$ – тригонометрические функции (1.18), определенная на множестве $\Omega=(-\infty,+\infty)\times[-a,a]$ (рис. 1.9), является полной и ортонормированной в пространстве $L_2(\Omega;\mathrm{e}^{-x_1^2})$.

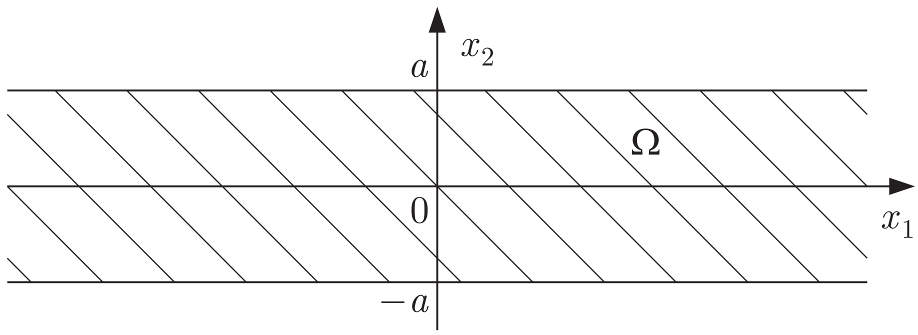

Рис. 1.9. Множество $\Omega=(-\infty,+\infty)\times[-a,a]$

2. Для представления функций n-мерного вектора состояния, определенных на пространстве $\mathbb{R}^n$, можно использовать систему функций

$$\{\hat{\Phi}(i_1,x_1)\hat{\Phi}(i_2,x_2)\ldots\hat{\Phi}(i_n,x_n)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty},$$

где $\hat{\Phi}(i_l,x_l)$ – функции Эрмита (1.20), $l=1,2,\ldots,n$. Эта система образует базис пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что существуют базисные системы, функции которых нельзя в общем случае представить формулой (1.23). Например, в пространстве $\mathbb{R}^n$ такой системой будут полиномы Эрмита n-мерного векторного аргумента [7, 46]. Для таких базисных систем представление (1.22) не является обязательным условием.

Задача представления функции вектора состояния в виде ряда

Предположим, что имеются:

а) функция $h(x)$ вектора состояния, принадлежащая пространству $L_2(\Omega;\rho(x))$;

б) базисная система функций $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\Omega; \rho(x))$.

Требуется представить функцию $h(x)$ в виде ряда по функциям базисной системы.

Утверждение 1.3. *Пусть система функций*

$$\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n=0}^{\infty}$$

является базисом пространства $L_2(\Omega; \rho(x))$. Тогда любую функцию $h(x) \in \in L_2(\Omega; \rho(x))$ можно представить в виде ряда по функциям этой системы [45]:

$$h(x) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{i_n=0}^{\infty} h_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x), \quad x \in \Omega, \tag{1.24}$$

*где **коэффициенты разложения** $h_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ вычисляются по формуле*

$$h_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \big(p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x), h(x)\big)_{L_2(\Omega; \rho(x))}, \tag{1.25}$$
$$i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Таким образом, решение задачи представления функции вектора состояния $h(x) \in L_2(\Omega; \rho(x))$ в виде ряда по функциям заданной базисной системы состоит в вычислении коэффициентов разложения $h_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ и использовании (1.24). Заметим, что решение задачи представления функции одной переменной в виде ряда, очевидно, получается при $n = 1$.

Пример 1.2. Представить функцию двух переменных $h(x_1, x_2) = x_1 x_2$, заданную на множестве $\Omega = (-\infty, +\infty) \times [-a, a]$, в виде ряда по функциям базисной системы $\{\hat{H}(i_1, x_1)\hat{S}(i_2, x_2)\}_{i_1, i_2=0}^{\infty}$.

□ Применим правило вычисления коэффициентов разложения (1.25):

$$h_{i_1 i_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-x_1^2} x_1 x_2 \hat{H}(i_1, x_1) \hat{S}(i_2, x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x_1^2} x_1 \hat{H}(i_1, x_1)\, dx_1 \int_{-a}^{a} x_2 \hat{S}(i_2, x_2)\, dx_2 = a_{i_1} \cdot b_{i_2},$$
$$i_1, i_2 = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$a_{i_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x_1^2} x_1 \hat{H}(i_1, x_1)\, dx_1 = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[4]{\pi}}{\sqrt{2}}, & i_1 = 1, \\ 0, & i_1 \neq 1, \end{cases}$$

$$b_{i_2} = \int\limits_{-a}^{a} x_2 \hat{S}(i_2, x_2)\, dx_2 = \begin{cases} 0, \ i_2 = 0 \text{ или } i_2 = 2k, \\ -\dfrac{4a\sqrt{a}(-1)^{\frac{i_2+1}{2}}}{\pi(i_2+1)}, \ i_2 = 2k-1, \end{cases}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Получив выражения для коэффициентов разложения, можно записать функцию $h(x_1, x_2)$ в виде ряда (1.24):

$$h(x_1, x_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} h_{i_1 i_2} \cdot \hat{H}(i_1, x_1) \cdot \hat{S}(i_2, x_2) =$$

$$= -\frac{a\sqrt{2a}\sqrt[4]{\pi}}{\pi} \hat{H}(1, x_1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \hat{S}(2k-1, x_2),$$

$$-\infty < x_1 < +\infty, \quad -a \leqslant x_2 \leqslant a. \quad \blacksquare$$

1.1.3. Базисные системы для представления функций времени и вектора состояния

Рассмотрим задачу представления функции времени t и вектора состояния x, где $(t, x) \in Q_T = T \times \Omega$. Предполагается, что T – в общем случае нестационарный отрезок времени (см. разд. 1.1.1), а $\Omega = \Omega_1 \times \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n \subseteq \mathbb{R}^n$ (см. разд. 1.1.2).

Будем обозначать через $L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$ пространство комплекснозначных функций времени и вектора состояния $h(t, x)$ таких, что

$$\|h(t, x)\|_{L_2(Q_T;\, \nu(t)\rho(x))} = \left\{ \int\limits_T \int\limits_\Omega \nu(t)\rho(x)\, |h(t, x)|^2\, dt\, dx \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

где $\nu(t)\rho(x)$ – весовая функция, причем $\nu(t) \geqslant 0$ и $\rho(x) \geqslant 0$. **Скалярное произведение** в пространстве $L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$ задается выражением [30]

$$\big(f(t, x), g(t, x)\big)_{L_2(Q_T;\, \nu(t)\rho(x))} = \int\limits_T \int\limits_\Omega \nu(t)\rho(x)\, f^*(t, x)\, g(t, x)\, dt\, dx, \qquad (1.26)$$

или в координатной форме

$$\big(f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), g(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)_{L_2(T\times\Omega_1\times\ldots\times\Omega_n;\, \nu(t)\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n))} =$$

$$= \int\limits_T \int\limits_{\Omega_1} \int\limits_{\Omega_2} \ldots \int\limits_{\Omega_n} \nu(t)\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, f^*(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \times$$

$$\times\, g(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dt\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

где $f(t,x) = f(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $g(t,x) = g(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – элементы пространства $L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))$, $f^*(t,x) = f^*(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – комплекснозначная сопряженная функция.

Замечание 1.4. Как и для пространств $L_2(T;\,\nu(t))$ и $L_2(\Omega;\,\rho(x))$, не будем указывать весовую функцию в обозначении $L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))$, если $\nu(t)\equiv 1$ и $\rho(x)\equiv 1$. В этом случае вместо $L_2(Q_T;\,1)$ будем использовать обозначение $L_2(Q_T)$.

Система в общем случае комплекснозначных функций

$$\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty},$$

определенных на множестве Q_T, называется **ортонормированной** на Q_T с весом $\nu(t)\rho(x)$, если справедливо равенство

$$\begin{gathered}\big(e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),e(j_0,j_1,\ldots,j_n,t,x)\big)_{L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))} =\\ = \begin{cases} 1, & i_0=j_0,\ i_1=j_1,\ \ldots,\ i_n=j_n,\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}\\ i_0,i_1,\ldots,i_n,j_0,j_1,\ldots,j_n = 0,1,2,\ldots\ .\end{gathered}$$

Полная ортонормированная система функций называется **базисом** пространства $L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))$, или **базисной системой**.

Утверждение 1.4. *Пусть* $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ *– базисная система пространства* $L_2(T;\,\nu(t))$, $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ *– базисная система пространства* $L_2(\Omega;\,\rho(x))$. *Тогда система функций*

$$\{e(i_0,i_1,i_2,\ldots,i_n,t,x) = q(i_0,t)\cdot p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_0,i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty} \tag{1.27}$$

является базисом пространства $L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))$ [45].

Замечание 1.5. Из утверждений 1.2 и 1.4 следует, что если система функций $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2(T;\,\nu(t))$, а системы $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$, …, $\{p_n(i_n,x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$ представляют собой базисы пространств $L_2(\Omega_1;\,\rho_1(x_1))$, …, $L_2(\Omega_n;\,\rho_n(x_n))$ соответственно, то система функций

$$\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x) = q(i_0,t)\cdot p_1(i_1,x_1)\cdots p_n(i_n,x_n)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$$

образует базис пространства $L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))$, где $\rho(x)=\rho_1(x_1)\ldots\rho_n(x_n)$.

Приведем несколько ***примеров базисных систем для представления функций времени и вектора состояния***.

1. Пусть $T=[0,+\infty)$, $\Omega=[-a,a]$, $Q_T = T\times\Omega$. Тогда в качестве базиса пространства $L_2(Q_T)$ удобно взять систему функций $\{\hat\Psi(i_0,t)\,\hat S(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$, где $\hat\Psi(i_0,t)$ – функции Лагерра (1.11), а $\hat S(i_1,x)$ – тригонометрические функции (1.18).

2. Система функций $\{\hat{\Omega}(i_0,t)\,\hat{H}(i_1,x_1)\,\hat{H}(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$, заданная на множестве $Q_T=[0,\tau]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=[0,\tau]\times\mathbb{R}^2$, где $\hat{\Omega}(i_0,t)$ – нестационарные функции Уолша (1.7), а $\hat{H}(i_1,x_1)$ и $\hat{H}(i_2,x_2)$ – полиномы Эрмита (1.20), образует базис пространства $L_2(Q_T;\,\mathrm{e}^{-x_1^2-x_2^2})$.

3. Систему функций $\{\hat{P}(i_0,t)\,\hat{H}(i_1,x_1)\,\hat{S}(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$ можно выбрать в качестве базиса пространства $L_2(Q_T;\,\mathrm{e}^{-x_1^2})$, где $Q_T=[0,\tau]\times(-\infty,+\infty)\times$ $\times[-a,a]$. Здесь $\hat{P}(i_0,t)$ – нестационарные полиномы Лежандра (1.4), $\hat{H}(i_1,x_1)$ – полиномы Эрмита (1.20), $\hat{S}(i_2,x_2)$ – тригонометрические функции (1.18).

Задача представления функции времени и вектора состояния

Предположим, что имеются:

а) функция $h(t,x)$ времени и вектора состояния, принадлежащая пространству $L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))$;

б) базисная система функций $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))$.

Требуется представить функцию $h(t,x)$ в виде ряда по функциям базисной системы.

Утверждение 1.5. *Пусть система функций*

$$\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$$

является базисом пространства $L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))$. *Тогда любую функцию* $h(t,x)\in L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))$ *можно представить в виде ряда по функциям этой системы* [45]:

$$h(t,x)=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}h_{i_0 i_1\ldots i_n}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x), \qquad (1.28)$$
$$(t,x)\in Q_T,$$

где ***коэффициенты разложения*** $h_{i_0 i_1\ldots i_n}$ *вычисляются следующим образом*:

$$h_{i_0 i_1\ldots i_n}=\big(e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),h(t,x)\big)_{L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))}, \qquad (1.29)$$
$$i_0,i_1,\ldots,i_n=0,1,2,\ldots\ .$$

Решение задачи представления функции времени и вектора состояния $h(t,x)\in L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))$ в виде ряда по функциям заданной базисной системы заключается в определении коэффициентов разложения $h_{i_0 i_1\ldots i_n}$ и использовании (1.28).

Пример 1.3. Представить функцию $h(t, x_1, x_2) = t^3 x_1 x_2$, заданную на множестве $Q_T = [0, \tau] \times (-\infty, +\infty) \times [-a, a]$, в виде ряда по функциям базисной системы $\{\hat{P}(i_0, t)\hat{H}(i_1, x_1)\hat{S}(i_2, x_2)\}_{i_0, i_1, i_2 = 0}^{\infty}$.

□ Применяя (1.29), получаем

$$h_{i_0 i_1 i_2} = \int_0^\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-x_1^2} t^3 x_1 x_2 \hat{P}(i_0, t)\hat{H}(i_1, x_1)\hat{S}(i_2, x_2)\, dt\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_0^\tau t^3 \hat{P}(i_0, t)\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x_1^2} x_1 \hat{H}(i_1, x_1)\, dx_1 \int_{-a}^{a} x_2 \hat{S}(i_2, x_2)\, dx_2 =$$

$$= c_{i_0} \cdot a_{i_1} \cdot b_{i_2}, \quad i_0, i_1, i_2 = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$c_{i_0} = \int_0^\tau t^3 \hat{P}(i_0, t)\, dt = \begin{cases} \dfrac{\tau^3\sqrt{\tau}}{4}, \ i_0 = 0, \\ \dfrac{3\tau^3\sqrt{3\tau}}{20}, \ i_0 = 1, \\ \dfrac{\tau^3\sqrt{5\tau}}{20}, \ i_0 = 2, \\ \dfrac{\tau^3\sqrt{7\tau}}{140}, \ i_0 = 3, \\ 0, \ i_0 = 4, 5, 6, \ldots, \end{cases}$$

что следует из примера 1.1, а коэффициенты

$$a_{i_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x_1^2} x_1 \hat{H}(i_1, x_1)\, dx_1 \quad \text{и} \quad b_{i_2} = \int_{-a}^{a} x_2 \hat{S}(i_2, x_2)\, dx_2$$

были получены в ходе решения примера 1.2. Следовательно, искомое представление (1.28) функции $h(t, x_1, x_2)$ имеет вид

$$h(t, x_1, x_2) = \sum_{i_0=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} h_{i_0 i_1 i_2} \cdot \hat{P}(i_0, t) \cdot \hat{H}(i_1, x_1) \cdot \hat{S}(i_2, x_2) =$$

$$= -\frac{a\sqrt{2a}\sqrt[4]{\pi}}{\pi} \left(\frac{\tau^3\sqrt{\tau}}{4}\hat{P}(0, t) + \frac{3\tau^3\sqrt{3\tau}}{20}\hat{P}(1, t) + \frac{\tau^3\sqrt{5\tau}}{20}\hat{P}(2, t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\tau^3\sqrt{7\tau}}{140}\hat{P}(3, t) \right) \hat{H}(1, x_1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \hat{S}(2k - 1, x_2),$$

$$0 \leqslant t \leqslant \tau, \quad -\infty < x_1 < +\infty, \quad -a \leqslant x_2 \leqslant a. \quad \blacksquare$$

1.2. МНОГОМЕРНЫЕ МАТРИЦЫ

1.2.1. Основные определения

При решении задачи представления функции вектора состояния или функции времени и вектора состояния коэффициенты разложения характеризуются несколькими индексами (см. разд. 1.1.2 и 1.1.3). Для описания подобных элементов удобно использовать математический аппарат многомерных матриц [18, 69].

Пусть m_1 и m_2 – заданные натуральные числа, $M = m_1 + m_2$. Каждый из индексов $i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2}$ пробегает бесконечный ряд целых неотрицательных чисел, т.е.

$$i_1 = 0, 1, 2, \ldots, \quad i_2 = 0, 1, 2, \ldots, \quad \ldots, \quad i_{m_1} = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$j_1 = 0, 1, 2, \ldots, \quad j_2 = 0, 1, 2, \ldots, \quad \ldots, \quad j_{m_2} = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Упорядоченная совокупность в общем случае комплексных чисел $a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}}$ называется **многомерной матрицей размерности** M, имеющей m_1 **строчных** и m_2 **столбцовых** индексов, и обозначается $A(m_1, m_2)$ или $(a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$, т.е. первые m_1 индексов являются строчными, а остальные – столбцовыми. Числа $a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}}$ называются **элементами** многомерной матрицы размерности M (M-**мерной матрицы**).

Разделение множества индексов на строчные и столбцовые позволяет задать **структуру** многомерной матрицы. Например, упорядоченную совокупность чисел a_0, a_1, a_2, ... можно интерпретировать как матрицу-столбец, тогда в принятых обозначениях имеем

$$A(1, 0) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix},$$

т.е. $m_1 = 1$, $m_2 = 0$, $M = 1$, $i_{m_1} = i = 0, 1, 2, \ldots$ Эту же совокупность чисел можно рассматривать как матрицу-строку, и тогда

$$A(0, 1) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots \end{bmatrix},$$

т.е. $m_1 = 0$, $m_2 = 1$, $M = 1$, $j_{m_2} = j = 0, 1, 2, \ldots$.

Двумерная матрица, имеющая один строчный и один столбцовый индекс, обозначается $A(1,1)$ и представляется в виде прямоугольной таблицы чисел:

$$A(1,1) = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{1.30}$$

где элемент a_{ij} находится на пересечении i-й строки и j-го столбца. Здесь i – строчный, а j – столбцовый индекс; $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $M = 2$, $i_{m_1} = i = 0, 1, 2, \dots$ и $j_{m_2} = j = 0, 1, 2, \dots$.

Матрицу вида $A(0,0)$ следует понимать как число.

Если элементы многомерной матрицы $A(m_1, m_2)$ являются функциями, то эту зависимость целесообразно указывать в обозначении матрицы, отделяя аргумент функций от количества строчных и столбцовых индексов точкой с запятой, например, $A(m_1, m_2; t)$ или $A(m_1, m_2; x)$.

Будем говорить, что матрицы $A(m_1, m_2)$ и $B(m_3, m_4)$ имеют одинаковую структуру, если у них одно и то же число строчных и столбцовых индексов, т.е. $m_1 = m_3$ и $m_2 = m_4$.

Многомерные матрицы одинаковой структуры

$$A(m_1, m_2) = \left(a_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}}\right) \quad \text{и} \quad B(m_1, m_2) = \left(b_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}}\right)$$

называются **равными**, если соответствующие элементы этих матриц равны, т.е. равенство

$$A(m_1, m_2) = B(m_1, m_2)$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$a_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}} = b_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}}$$

при любых значениях индексов $i_1, i_2, \dots, i_{m_1}, j_1, j_2, \dots, j_{m_2}$.

Многомерная матрица $A(m_1, m_2)$, у которой количество строчных и столбцовых индексов совпадает, т.е. $m_1 = m_2$, называется **гиперквадратной**. Например, двумерная матрица $A(1,1)$, четырехмерная матрица $A(2,2)$ и $2m$-мерная матрица $A(m,m)$ являются гиперквадратными.

Многомерная матрица $A(m_1, m_2)$ называется **гиперстрочной**, если все ее индексы являются столбцовыми, т.е. $m_1 = 0$, и **гиперстолбцовой**, если все ее индексы строчные, т.е. $m_2 = 0$. Гиперстолбцовые матрицы также называют **гиперстолбцами**.

Примерами гиперстрочных матриц могут служить матрица-строка $A(0,1)$, двумерная матрица $A(0,2)$, m-мерная матрица $A(0,m)$. Матрица-столбец $A(1,0)$, двумерная матрица $A(2,0)$ и m-мерная матрица $A(m,0)$ являются гиперстолбцовыми матрицами (гиперстолбцами).

Введем понятие сечений многомерных матриц. Упорядоченная совокупность элементов многомерной матрицы $A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ при фиксированном значении одного из индексов $i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2}$ называется **простым** (**однократным**) **сечением**, а упорядоченная совокупность элементов при фиксированном значении каких-либо двух индексов из множества $\{i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2}\}$ называется **двукратным сечением**.

Таким же образом определяются сечения любой кратности k. Заметим, что любое простое сечение M-мерной матрицы в свою очередь является $(M-1)$-мерной матрицей, двукратное сечение образует $(M-2)$-мерную матрицу. Сечение кратности k представляет собой $(M-k)$-мерную матрицу, $1 \leqslant k \leqslant M$.

Например, для двумерной матрицы (1.30) при фиксированном индексе i простыми сечениями будут матрицы-строки

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \ldots \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & \ldots \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} a_{20} & a_{21} & a_{22} & \ldots \end{bmatrix},$$
$$\ldots,$$

а при фиксированном индексе j – матрицы-столбцы

$$\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{02} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \ldots .$$

Двукратными сечениями матрицы (1.30) будут ее элементы a_{ij} для любых значений индексов i и j.

1.2.2. Табличная форма представления многомерных матриц

Удобной формой представления многомерных матриц является **табличная** (**блочно-иерархическая**) **запись**, представляющая собой блоки и подблоки, иерархически вложенные друг в друга. Иерархия блоков согласована с индексами таким образом, что наиболее крупным блокам соответствуют первый строчный и первый столбцовый индексы. Следующим по порядку строчному и столбцовому индексам соответствуют подблоки и так далее вплоть до элементов матрицы [18]. Блоки и подблоки образуются с помощью простых или двукратных сечений.

Приведем ***примеры табличного представления многомерных матриц***.

1. Четырехмерная гиперквадратная матрица $A(2,2) = \left(a_{i_1 i_2 j_1 j_2}\right)$ записывается следующим образом:

$$A(2,2) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0000} & a_{0001} & a_{0002} & \cdots \\ a_{0100} & a_{0101} & a_{0102} & \cdots \\ a_{0200} & a_{0201} & a_{0202} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{0010} & a_{0011} & a_{0012} & \cdots \\ a_{0110} & a_{0111} & a_{0112} & \cdots \\ a_{0210} & a_{0211} & a_{0212} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \cdots \\ \begin{bmatrix} a_{1000} & a_{1001} & a_{1002} & \cdots \\ a_{1100} & a_{1101} & a_{1102} & \cdots \\ a_{1200} & a_{1201} & a_{1202} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{1010} & a_{1011} & a_{1012} & \cdots \\ a_{1110} & a_{1111} & a_{1112} & \cdots \\ a_{1210} & a_{1211} & a_{1212} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где каждый блок вида

$$\begin{bmatrix} a_{i_1 0 j_1 0} & a_{i_1 0 j_1 1} & a_{i_1 0 j_1 2} & \cdots \\ a_{i_1 1 j_1 0} & a_{i_1 1 j_1 1} & a_{i_1 1 j_1 2} & \cdots \\ a_{i_1 2 j_1 0} & a_{i_1 2 j_1 1} & a_{i_1 2 j_1 2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

является двукратным сечением матрицы $A(2,2)$ при фиксированных значениях индексов i_1 и j_1, а элементы $a_{i_1 i_2 j_1 j_2}$ внутри блока определяются индексами i_2 и j_2.

2. Двумерная гиперстолбцовая матрица $A(2,0) = \left(a_{i_1 i_2}\right)$ представляется в виде

$$A(2,0) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Первый индекс i_1 указывает номер блока, а второй индекс i_2 – позицию элемента $a_{i_1 i_2}$ в этом блоке. В данном случае блоками являются матрицы-столбцы.

3. Трехмерная гиперстолбцовая матрица $A(3,0) = \big(a_{i_1 i_2 i_3}\big)$:

$$A(3,0) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{000} \\ a_{001} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{010} \\ a_{011} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{100} \\ a_{101} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{110} \\ a_{111} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Значение индекса i_1 определяет блок верхнего уровня, который является двумерной гиперстолбцовой матрицей, индекс i_2 указывает на номер подблока в блоке с номером i_1, а индекс i_3 соответствует позиции элемента $a_{i_1 i_2 i_3}$ внутри подблока.

4. Двумерная гиперстрочная матрица $A(0,2) = \big(a_{j_1 j_2}\big)$:

$$A(0,2) = \Big[\big[\, a_{00}\; a_{01}\; a_{02}\; \ldots \big] \big[\, a_{10}\; a_{11}\; a_{12}\; \ldots \big] \big[\, a_{20}\; a_{21}\; a_{22}\; \ldots \big]\; \ldots \Big].$$

Размещение элементов в двумерной гиперстрочной матрице аналогично размещению элементов в двумерной гиперстолбцовой матрице, а именно первый индекс j_1 указывает номер блока, а второй индекс j_2 – позицию элемента $a_{j_1 j_2}$ в блоке с номером j_1.

5. Трехмерная гиперстрочная матрица $A(0,3) = \big(a_{j_1 j_2 j_3}\big)$:

$$\begin{aligned} A(0,3) &= \\ &= \Big[\Big[\big[a_{000}\, a_{001}\, a_{002}\, \ldots \big] \big[a_{010}\, a_{011}\, a_{012}\, \ldots \big] \big[a_{020}\, a_{021}\, a_{022}\, \ldots \big] \ldots \Big] \\ &\quad \Big[\big[a_{100}\, a_{101}\, a_{102}\, \ldots \big] \big[a_{110}\, a_{111}\, a_{112}\, \ldots \big] \big[a_{120}\, a_{121}\, a_{122}\, \ldots \big] \ldots \Big] \\ &\quad \Big[\big[a_{200}\, a_{201}\, a_{202}\, \ldots \big] \big[a_{210}\, a_{211}\, a_{212}\, \ldots \big] \big[a_{220}\, a_{221}\, a_{222}\, \ldots \big] \ldots \Big] \ldots \Big]. \end{aligned}$$

Запись элементов в трехмерной гиперстрочной матрице проводится так же, как для трехмерной гиперстолбцовой, различие лишь в том, что блоками гиперстолбцовой матрицы являются гиперстолбцы, а блоками гиперстрочной матрицы – гиперстрочные матрицы меньшей размерности.

6. Трехмерная матрица $A(1,2) = \big(a_{ij_1j_2}\big)$:

$$A(1,2) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{000} & a_{001} & a_{002} & \dots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{010} & a_{011} & a_{012} & \dots \end{bmatrix} & \dots \\ \begin{bmatrix} a_{100} & a_{101} & a_{102} & \dots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{110} & a_{111} & a_{112} & \dots \end{bmatrix} & \dots \\ \begin{bmatrix} a_{200} & a_{201} & a_{202} & \dots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{210} & a_{211} & a_{212} & \dots \end{bmatrix} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

В трехмерной матрице $A(1,2)$ блоками являются матрицы-строки, позиция которых определяется значением индексов i и j_1. Индекс j_2 задает положение элемента $a_{ij_1j_2}$ внутри блока.

Пример 1.4. Представить четырехмерную гиперквадратную матрицу $A(2,2) = (a_{i_1i_2j_1j_2})$, элементы которой заданы выражением

$$a_{i_1i_2j_1j_2} = \begin{cases} \dfrac{i_1+i_2+1}{2^{j_1+j_2}}, & i_1 \leqslant j_1 \text{ и } i_2 \leqslant j_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

в табличной форме.

☐ По правилу представления четырехмерной гиперквадратной матрицы получаем

$$A(2,2) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{0+0+1}{2^{0+0}} & \frac{0+0+1}{2^{0+1}} & \dots \\ 0 & \frac{0+1+1}{2^{0+1}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{0+0+1}{2^{1+0}} & \frac{0+0+1}{2^{1+1}} & \dots \\ 0 & \frac{0+1+1}{2^{1+1}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1+0+1}{2^{1+0}} & \frac{1+0+1}{2^{1+1}} & \dots \\ 0 & \frac{1+1+1}{2^{1+1}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots \\ 0 & \frac{3}{4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Здесь индексы i_1, j_1 определяют номер блока, а индексы i_2, j_2 – позицию элемента в блоке. ■

Пример 1.5. Представить двумерную гиперстрочную матрицу $A(0,2) = (a_{j_1 j_2})$, элементы которой задаются формулой

$$a_{j_1 j_2} = \frac{2^{j_1}}{(j_2+1)!},$$

в табличной форме.

□ Воспользуемся правилом представления многомерных матриц. Тогда гиперстрочная матрица $A(0,2)$ записывается в виде

$$A(0,2) =$$
$$= \left[\left[\frac{2^0}{1!} \;\; \frac{2^0}{2!} \;\; \frac{2^0}{3!} \;\; \dots \right] \left[\frac{2^1}{1!} \;\; \frac{2^1}{2!} \;\; \frac{2^1}{3!} \;\; \dots \right] \left[\frac{2^2}{1!} \;\; \frac{2^2}{2!} \;\; \frac{2^2}{3!} \;\; \dots \right] \dots \right] =$$
$$= \left[\left[1 \;\; \frac{1}{2} \;\; \frac{1}{6} \;\; \dots \right] \left[2 \;\; 1 \;\; \frac{1}{3} \;\; \dots \right] \left[4 \;\; 2 \;\; \frac{2}{3} \;\; \dots \right] \dots \right]. \quad ■$$

1.2.3. Операции над многомерными матрицами

Определим основные операции над многомерными матрицами и приведем их свойства.

Сложение матриц

Многомерная матрица $C(m_1, m_2) = (c_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}})$ называется **суммой** двух многомерных матриц $A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}})$ и $B(m_1, m_2) = (b_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}})$, если каждый элемент матрицы $C(m_1, m_2)$ является суммой соответствующих элементов матриц $A(m_1, m_2)$ и $B(m_1, m_2)$, т.е.

$$C(m_1, m_2) = A(m_1, m_2) + B(m_1, m_2),$$

если справедливо равенство

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}} = a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}} + b_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}},$$
$$i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2} = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Операция нахождения суммы называется **сложением** многомерных матриц.

Свойства сложения многомерных матриц:

1) $A(m_1, m_2) + B(m_1, m_2) = B(m_1, m_2) + A(m_1, m_2)$;

2) $\big(A(m_1, m_2) + B(m_1, m_2)\big) + C(m_1, m_2) =$
$= A(m_1, m_2) + \big(B(m_1, m_2) + C(m_1, m_2)\big)$.

Многомерная матрица $\mathcal{O}(m_1, m_2) = (\mathcal{O}_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**. Нетрудно видеть, что для произвольной многомерной матрицы $A(m_1, m_2)$ верно соотношение

$$A(m_1, m_2) + \mathcal{O}(m_1, m_2) = A(m_1, m_2).$$

Пример 1.6. Найти сумму двумерных гиперстрочных матриц

$$A(0,2) = \Big[\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \end{bmatrix} \ldots\Big]$$

и

$$B(0,2) = \Big[\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & \ldots \end{bmatrix} \ldots\Big].$$

□ По определению каждый элемент суммы матриц $A(0,2)$ и $B(0,2)$ равен сумме соответствующих элементов этих матриц, поэтому

$$A(0,2) + B(0,2) = \Big[\begin{bmatrix} 1+1 & 2+1 & 3+1 & 4+1 & \ldots \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2+2 & 3+2 & 4+2 & 5+2 & \ldots \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3+3 & 4+3 & 5+3 & 6+3 & \ldots \end{bmatrix} \ldots\Big] =$$
$$= \Big[\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots \end{bmatrix} \ldots\Big]. \ \blacksquare$$

Умножение матрицы на число

Многомерная матрица $B(m_1, m_2) = (b_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \cdots j_{m_2}})$ называется **произведением многомерной матрицы** $A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \cdots j_{m_2}})$ **на число** $\alpha \in \mathbb{C}$, если каждый элемент матрицы $B(m_1, m_2)$ представляет собой произведение числа α на соответствующий элемент матрицы $A(m_1, m_2)$, т.е.

$$B(m_1, m_2) = \alpha A(m_1, m_2) = A(m_1, m_2)\alpha,$$

если справедливо равенство

$$b_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \cdots j_{m_2}} = \alpha \cdot a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \cdots j_{m_2}},$$
$$i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2} = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Операция нахождения произведения матрицы на число называется **умножением многомерной матрицы на число**.

Свойства умножения многомерных матриц на число:

1) $\alpha\big(A(m_1, m_2) + B(m_1, m_2)\big) = \alpha A(m_1, m_2) + \alpha B(m_1, m_2)$;

2) $(\alpha + \beta)A(m_1, m_2) = \alpha A(m_1, m_2) + \beta A(m_1, m_2)$;

3) $\alpha\big(\beta A(m_1, m_2)\big) = (\alpha\beta)A(m_1, m_2)$.

Пример 1.7. Найти произведение двумерной гиперстрочной матрицы

$$A(0,2) = \Big[\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \end{bmatrix} \ \ldots \Big]$$

на число $\alpha = \frac{1}{3}$.

□ Из определения следует, что каждый элемент матрицы $\alpha A(0,2)$ равен произведению α на соответствующий элемент матрицы $A(0,2)$, следовательно,

$$\alpha A(0,2) = \Bigg[\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\cdot 1 & \frac{1}{3}\cdot 2 & \frac{1}{3}\cdot 3 & \frac{1}{3}\cdot 4 & \ldots \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\cdot 2 & \frac{1}{3}\cdot 3 & \frac{1}{3}\cdot 4 & \frac{1}{3}\cdot 5 & \ldots \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\cdot 3 & \frac{1}{3}\cdot 4 & \frac{1}{3}\cdot 5 & \frac{1}{3}\cdot 6 & \ldots \end{bmatrix} \ \ldots \Bigg] =$$
$$= \Bigg[\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 & \ldots \end{bmatrix} \ \ldots \Bigg]. \quad \blacksquare$$

Вычитание матриц

Обозначим через $-A(m_1, m_2)$ многомерную матрицу $(-1)A(m_1, m_2)$, которая называется **противоположной** для многомерной матрицы $A(m_1, m_2)$. Тогда под **разностью** многомерных матриц $A(m_1, m_2)$ и $B(m_1, m_2)$ будем понимать выражение

$$A(m_1, m_2) - B(m_1, m_2) = A(m_1, m_2) + \big(-B(m_1, m_2)\big),$$

т.е. сумму многомерной матрицы $A(m_1, m_2)$ и противоположной для многомерной матрицы $B(m_1, m_2)$.

Операция нахождения разности называется **вычитанием** многомерных матриц.

Свойства вычитания многомерных матриц:

1) $(-\alpha)A(m_1, m_2) = -\alpha A(m_1, m_2)$;

2) $-\big(A(m_1, m_2) + B(m_1, m_2)\big) = -A(m_1, m_2) - B(m_1, m_2)$;

3) $-\big(-A(m_1, m_2)\big) = A(m_1, m_2)$.

Заметим, что сумма и разность определены только для многомерных матриц одинаковой структуры.

Умножение матриц

В общем случае произведение многомерных матриц можно определить неединственным образом. Известно [69], что число всевозможных произведений многомерных матриц $A(m_1, m_2)$ и $B(m_3, m_4)$ выражается формулой

$$\sum_{\lambda+\mu=0}^{M} \frac{M_1!}{\lambda!\mu!(M_1-\lambda-\mu)!} \cdot \frac{M_2!}{\lambda!\mu!(M_2-\lambda-\mu)!},$$

где $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $M_1 = m_1 + m_2$ – размерность матрицы $A(m_1, m_2)$, $M_2 = m_3 + m_4$ – размерность матрицы $B(m_3, m_4)$, $M = \min(M_1, M_2)$. Однако в дальнейшем будем использовать произведения только двух типов.

Произведением многомерных матриц вида

$$A(m_1, m_3) = \big(a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} k_1 k_2 \ldots k_{m_3}}\big) \quad \text{и} \quad B(m_3, m_2) = \big(b_{k_1 k_2 \ldots k_{m_3} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}}\big)$$

называется многомерная матрица $C(m_1, m_2) = (c_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$, если

$$\begin{gathered} c_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}} = \\ = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_{m_3}=0}^{\infty} a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} k_1 k_2 \ldots k_{m_3}} \cdot b_{k_1 k_2 \ldots k_{m_3} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}}, \\ i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2} = 0, 1, 2, \ldots \,. \end{gathered} \tag{1.31}$$

Операция нахождения произведения называется **умножением** многомерных матриц и обозначается следующим образом:

$$C(m_1, m_2) = A(m_1, m_3) \cdot B(m_3, m_2).$$

Такое произведение называется $(0, m_3)$-свернутым, при этом индексы $k_1, k_2, \ldots, k_{m_3}$ называются кэлиевыми, а индексы $i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}$ и $j_1, j_2, \ldots, j_{m_2}$ – свободными [69].

В качестве примера рассмотрим умножение четырехмерной гиперквадратной матрицы $A(2,2) = (a_{i_1 i_2 k_1 k_2})$ и двумерной гиперстолбцовой матрицы $B(2,0) = (b_{k_1 k_2})$:

$$A(2,2) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0000} & a_{0001} & \cdots \\ a_{0100} & a_{0101} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{0010} & a_{0011} & \cdots \\ a_{0110} & a_{0111} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \cdots \\ \begin{bmatrix} a_{1000} & a_{1001} & \cdots \\ a_{1100} & a_{1101} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{1010} & a_{1011} & \cdots \\ a_{1110} & a_{1111} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$B(2,0) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{00} \\ b_{01} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{11} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Результатом умножения будет двумерная гиперстолбцовая матрица $C(2,0) = (c_{i_1 i_2})$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{i_1 i_2} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} a_{i_1 i_2 k_1 k_2} \cdot b_{k_1 k_2},$$

$$i_1, i_2 = 0, 1, 2, \ldots,$$

т.е.

$$C(2,0) = A(2,2)\cdot B(2,0) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty} a_{00k_1k_2}\cdot b_{k_1k_2} \\ \sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty} a_{01k_1k_2}\cdot b_{k_1k_2} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty} a_{10k_1k_2}\cdot b_{k_1k_2} \\ \sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty} a_{11k_1k_2}\cdot b_{k_1k_2} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \vdots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0000}\cdot b_{00} + a_{0001}\cdot b_{01} + \ldots + a_{0010}\cdot b_{10} + a_{0011}\cdot b_{11} + \ldots \\ a_{0100}\cdot b_{00} + a_{0101}\cdot b_{01} + \ldots + a_{0110}\cdot b_{10} + a_{0111}\cdot b_{11} + \ldots \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{1000}\cdot b_{00} + a_{1001}\cdot b_{01} + \ldots + a_{1010}\cdot b_{10} + a_{1011}\cdot b_{11} + \ldots \\ a_{1100}\cdot b_{00} + a_{1101}\cdot b_{01} + \ldots + a_{1110}\cdot b_{10} + a_{1111}\cdot b_{11} + \ldots \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Замечание 1.6. В отличие от многомерных матриц с конечным числом элементов [69], произведение бесконечных многомерных матриц может быть не определено, так как сумма (1.31) может расходиться.

Пример 1.8. Найти произведение четырехмерной гиперквадратной матрицы

$$A(2,2) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ 2 & 3 & 4 & \ldots \\ 3 & 4 & 5 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & \ldots \\ 3 & 4 & 5 & \ldots \\ 4 & 5 & 6 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \ldots \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & \ldots \\ 3 & 4 & 5 & \ldots \\ 4 & 5 & 6 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & \ldots \\ 4 & 5 & 6 & \ldots \\ 5 & 6 & 7 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

и двумерной гиперстолбцовой матрицы

$$B(2,0) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \vdots \end{bmatrix},$$

у которой только элементы b_{00}, b_{01}, b_{10} и b_{11} отличны от нуля.

□ Из общей формулы умножения четырехмерной гиперквадратной матрицы и двумерной гиперстолбцовой матрицы, приведенной выше, имеем

$$C(2,0) = A(2,2) \cdot B(2,0) =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2 \\ 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 1 + 4\cdot 2 + 5\cdot 2 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 1 + 4\cdot 2 + 5\cdot 2 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 1 + 5\cdot 2 + 6\cdot 2 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 19 \\ 25 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 19 \\ 25 \\ 31 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Гиперквадратная матрица $E(m,m)$ называется **единичной**, если для любой гиперквадратной матрицы $A(m,m)$ такой же структуры справедливо равенство

$$A(m,m) \cdot E(m,m) = E(m,m) \cdot A(m,m) = A(m,m).$$

Приведем ***примеры единичных матриц***.

1. Двумерная единичная матрица $E(1,1) = (e_{ij})$:

$$E(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

т.е.

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

при всех $i, j = 0, 1, 2, \dots$.

2. Четырехмерная единичная матрица $E(2,2) = (e_{i_1 i_2 j_1 j_2})$:

$$E(2,2) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

т.е.

$$e_{i_1 i_2 j_1 j_2} = \begin{cases} 1, & i_1 = j_1 \text{ и } i_2 = j_2, \\ 0, & i_1 \neq j_1 \text{ или } i_2 \neq j_2 \end{cases}$$

при всех $i_1, i_2, j_1, j_2 = 0, 1, 2, \dots$.

Блоки, стоящие на главной диагонали матрицы $E(2,2)$, являются двумерными единичными матрицами $E(1,1)$, а остальные блоки представляют собой двумерные нулевые матрицы $\mathcal{O}(1,1)$.

Определим произведение многомерных матриц вида

$$A(m,2m) = \left(a_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_m k_1 k_2 \dots k_m}\right) \quad \text{и} \quad B(m,0) = \left(b_{k_1 k_2 \dots k_m}\right),$$

при котором производится свертка [69] по всем индексам гиперстолбцовой матрицы $B(m,0)$, т.е. многомерная матрица $C(m,m) = (c_{i_1 i_2 \ldots i_m j_1 j_2 \ldots j_m})$ называется **произведением** матриц вида $A(m,2m)$ и $B(m,0)$, если

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_m j_1 j_2 \ldots j_m} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_m=0}^{\infty} a_{i_1 i_2 \ldots i_m j_1 j_2 \ldots j_m k_1 k_2 \ldots k_m} \cdot b_{k_1 k_2 \ldots k_m}, \tag{1.32}$$

$$i_1, i_2, \ldots, i_m, j_1, j_2, \ldots, j_m = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Умножение матриц такого вида будем обозначать знаком $\odot$, т.е.

$$C(m,m) = A(m,2m) \odot B(m,0).$$

Пример 1.9. Найти произведение трехмерной матрицы

$$A(1,2) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \cdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \cdots \end{bmatrix} & \cdots \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{2}{4} & \frac{2}{6} & \cdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \cdots \end{bmatrix} & \cdots \\ \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{6} & \cdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{3}{3} & \frac{3}{5} & \frac{3}{7} & \cdots \end{bmatrix} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

и матрицы-столбца

$$B(1,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix},$$

у которой только элементы b_1 и b_2 не равны нулю.

□ Для данного примера формула (1.32) преобразуется к виду

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ijk} \cdot b_k, \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots,$$

следовательно,

$$C(1,1) = A(1,2) \odot B(1,0) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 & \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{5}\cdot 2 & \cdots \\ \frac{2}{2}\cdot 1 + \frac{2}{4}\cdot 2 & \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{2}{5}\cdot 2 & \cdots \\ \frac{3}{2}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot 2 & \frac{3}{3}\cdot 1 + \frac{3}{5}\cdot 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{11}{15} & \cdots \\ 2 & \frac{22}{15} & \cdots \\ 3 & \frac{33}{15} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Тензорным произведением многомерных матриц

$$A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}}) \quad \text{и} \quad B(m_3, m_4) = (b_{k_1 k_2 \ldots k_{m_3} l_1 l_2 \ldots l_{m_4}})$$

называется многомерная матрица

$$C(m_1 + m_3, m_2 + m_4) = (c_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} k_1 k_2 \ldots k_{m_3} j_1 j_2 \ldots j_{m_2} l_1 l_2 \ldots l_{m_4}}),$$

если

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} k_1 k_2 \ldots k_{m_3} j_1 j_2 \ldots j_{m_2} l_1 l_2 \ldots l_{m_4}} = a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}} \cdot b_{k_1 k_2 \ldots k_{m_3} l_1 l_2 \ldots l_{m_4}},$$

$$i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, k_1, k_2, \ldots, k_{m_3}, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2}, l_1, l_2, \ldots, l_{m_4} = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Операция нахождения тензорного произведения называется **тензорным умножением** многомерных матриц и обозначается знаком $\otimes$, т.е.

$$C(m_1 + m_3, m_2 + m_4) = A(m_1, m_2) \otimes B(m_3, m_4).$$

У многомерной матрицы $C(m_1 + m_3, m_2 + m_4)$ индексы $i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}$, $k_1, k_2, \ldots, k_{m_3}$ являются строчными, а $j_1, j_2, \ldots, j_{m_2}$, $l_1, l_2, \ldots, l_{m_4}$ – столбцовыми, т.е. при тензорном умножении число строчных (столбцовых) индексов многомерной матрицы $C(m_1 + m_3, m_2 + m_4)$ равно сумме числа строчных (столбцовых) индексов матриц $A(m_1, m_2)$ и $B(m_3, m_4)$.

Нетрудно показать, что $2m$-мерная единичная матрица $E(m, m)$ определяется формулой

$$E(m, m) = \underbrace{E(1, 1) \otimes E(1, 1) \otimes \ldots \otimes E(1, 1)}_{m \text{ сомножителей}}. \tag{1.33}$$

В частности, справедливы следующие равенства:

$$E(1, 1) \otimes E(1, 1) = E(2, 2),$$
$$E(1, 1) \otimes E(1, 1) \otimes E(1, 1) = E(3, 3),$$
$$E(1, 1) \otimes E(2, 2) = E(2, 2) \otimes E(1, 1) = E(3, 3).$$

Рассмотрим, например, тензорное умножение двух матриц-строк $A(0, 1) = (a_{j_1})$ и $B(0, 1) = (b_{j_2})$:

$$A(0, 1) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots \end{bmatrix},$$
$$B(0, 1) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \ldots \end{bmatrix}.$$

По определению тензорного произведения результатом будет двумерная гиперстрочная матрица $C(0,2) = (c_{j_1 j_2})$:

$$C(0,2) = A(0,1) \otimes B(0,1),$$

где

$$c_{j_1 j_2} = a_{j_1} \cdot b_{j_2}, \quad j_1, j_2 = 0, 1, 2, \ldots,$$

т.е.

$$C(0,2) = \Bigg[\begin{bmatrix} a_0 \cdot b_0 & a_0 \cdot b_1 & a_0 \cdot b_2 & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \cdot b_0 & a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \cdot b_0 & a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & \ldots \end{bmatrix} \ldots \Bigg].$$

Пример 1.10. Найти тензорное произведение матриц-строк

$$A(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \end{bmatrix}$$

и

$$B(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \ldots \end{bmatrix}.$$

□ Выше было получено тензорное произведение двух матриц-строк в общем виде. Подставляя числовые значения, получаем искомое выражение:

$$A(0,1) \otimes B(0,1) = \Bigg[\begin{bmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot \frac{1}{2} & 1 \cdot \frac{1}{3} & 1 \cdot \frac{1}{4} & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot \frac{1}{2} & 2 \cdot \frac{1}{3} & 2 \cdot \frac{1}{4} & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot \frac{1}{2} & 3 \cdot \frac{1}{3} & 3 \cdot \frac{1}{4} & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot \frac{1}{2} & 4 \cdot \frac{1}{3} & 4 \cdot \frac{1}{4} & \ldots \end{bmatrix} \ldots \Bigg] =$$

$$= \Bigg[\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{4} & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & \frac{4}{3} & 1 & \ldots \end{bmatrix} \ldots \Bigg]. \quad \blacksquare$$

Пример 1.11. Найти тензорное произведение двумерной матрицы

$$A(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots \\ 3 & 4 & 5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

и двумерной единичной матрицы

$$E(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

☐ Используя определение тензорного произведения многомерных матриц, получаем

$$A(1,1) \otimes E(1,1) = \begin{bmatrix} 1 \cdot E(1,1) & 2 \cdot E(1,1) & 3 \cdot E(1,1) & \dots \\ 2 \cdot E(1,1) & 3 \cdot E(1,1) & 4 \cdot E(1,1) & \dots \\ 3 \cdot E(1,1) & 4 \cdot E(1,1) & 5 \cdot E(1,1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Для сравнения поменяем порядок множителей, тогда

$$E(1,1) \otimes A(1,1) = \begin{bmatrix} 1 \cdot A(1,1) & 0 \cdot A(1,1) & 0 \cdot A(1,1) & \dots \\ 0 \cdot A(1,1) & 1 \cdot A(1,1) & 0 \cdot A(1,1) & \dots \\ 0 \cdot A(1,1) & 0 \cdot A(1,1) & 1 \cdot A(1,1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots \\ 3 & 4 & 5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots \\ 3 & 4 & 5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots \\ 3 & 4 & 5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Как видно из полученных результатов, операция тензорного умножения не является коммутативной, т.е. $A(1,1) \otimes E(1,1) \neq E(1,1) \otimes A(1,1)$. ■

Приведем основные *свойства умножения* и *тензорного умножения многомерных матриц*.

1) $\big(A(m_1,m_2) + B(m_1,m_2)\big) \cdot C(m_2,m_3) =$

$= A(m_1,m_2) \cdot C(m_2,m_3) + B(m_1,m_2) \cdot C(m_2,m_3);$

2) $A(m_1,m_2) \cdot \big(B(m_2,m_3) + C(m_2,m_3)\big) =$

$= A(m_1,m_2) \cdot B(m_2,m_3) + A(m_1,m_2) \cdot C(m_2,m_3);$

3) $\big(A(m_1,m_2) \cdot B(m_2,m_3)\big) \cdot C(m_3,m_4) =$

$= A(m_1,m_2) \cdot \big(B(m_2,m_3) \cdot C(m_3,m_4)\big);$

4) $\big(A(m_1,m_2) \otimes B(m_3,m_4)\big) \otimes C(m_5,m_6) =$

$= A(m_1,m_2) \otimes \big(B(m_3,m_4) \otimes C(m_5,m_6)\big);$

5) $\big(A(m_1,m_2)+B(m_1,m_2)\big)\otimes C(m_3,m_4)=$

$=A(m_1,m_2)\otimes C(m_3,m_4)+B(m_1,m_2)\otimes C(m_3,m_4)$;

6) $A(m_1,m_2)\otimes\big(B(m_3,m_4)+C(m_3,m_4)\big)=$

$=A(m_1,m_2)\otimes B(m_3,m_4)+A(m_1,m_2)\otimes C(m_3,m_4)$;

7) $\big(A(m_1,m_2)\otimes B(m_3,m_4)\big)\cdot\big(C(m_2,m_5)\otimes D(m_4,m_6)\big)=$

$=\big(A(m_1,m_2)\cdot C(m_2,m_5)\big)\otimes\big(B(m_3,m_4)\cdot D(m_4,m_6)\big)$.

Следует подчеркнуть [32], что некоторые из указанных свойств могут не выполняться вследствие замечания 1.6, однако в дальнейшем предполагается, что таких ситуаций не возникает.

Для гиперквадратной матрицы $A(m,m)$, если существует произведение $A(m,m)\cdot A(m,m)\cdots A(m,m)$ (см. замечание 1.6), можно говорить о целой неотрицательной **степени матрицы**, определяя последовательно

$$\begin{aligned}
A^0(m,m)&=E(m,m),\\
A^1(m,m)&=A(m,m),\\
A^2(m,m)&=A(m,m)\cdot A(m,m),\\
A^3(m,m)&=A^2(m,m)\cdot A(m,m),\\
&\dots,\\
A^l(m,m)&=A^{l-1}(m,m)\cdot A(m,m),\\
&\dots,
\end{aligned}$$

где $l\in\mathbb{N}$.

Обращение и транспонирование матриц

Гиперквадратная матрица $A^{-1}(m,m)$ называется **обратной** для гиперквадратной матрицы $A(m,m)$, если справедливы равенства

$$A^{-1}(m,m)\cdot A(m,m)=E(m,m), \tag{1.34}$$

$$A(m,m)\cdot A^{-1}(m,m)=E(m,m). \tag{1.35}$$

Если выполняется только равенство (1.34) (равенство (1.35)), то $A^{-1}(m,m)$ называется **левосторонней** (**правосторонней**) **обратной матрицей**.

Вопросы, связанные с определением и способами нахождения обратных бесконечных матриц, изложены в [12, 32].

Для многомерной матрицы $A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ **транспонированной матрицей** называется матрица

$$A^{\mathrm{T}}(m_2, m_1) = \left(a_{j_1 j_2 \ldots j_{m_2} i_1 i_2 \ldots i_{m_1}}\right).$$

Соответствующая операция называется **транспонированием**.

Пусть элементы многомерной матрицы $A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ являются комплексными числами. Тогда матрица

$$A^{*}(m_2, m_1) = \left(a^{*}_{j_1 j_2 \ldots j_{m_2} i_1 i_2 \ldots i_{m_1}}\right),$$

полученная из исходной путем транспонирования и замены каждого элемента комплексным сопряженным, называется **сопряженной**.

В качестве примера найдем транспонированную матрицу для трехмерной матрицы $A(1,2) = (a_{ij_1j_2})$ (см. разд. 1.2.2). Пусть $B(2,1) = [A(1,2)]^{\mathrm{T}}$, тогда по определению

$$b_{j_1j_2i} = a_{ij_1j_2}, \quad i, j_1, j_2 = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $b_{j_1j_2i}$ – элементы матрицы $B(2,1)$. Табличное представление трехмерной матрицы $B(2,1) = (b_{j_1j_2i})$ имеет вид

$$B(2,1) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{000} \\ b_{010} \\ b_{020} \\ \vdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{001} \\ b_{011} \\ b_{021} \\ \vdots \end{bmatrix} & \cdots \\ \begin{bmatrix} b_{100} \\ b_{110} \\ b_{120} \\ \vdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{101} \\ b_{111} \\ b_{121} \\ \vdots \end{bmatrix} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{000} \\ a_{001} \\ a_{002} \\ \vdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{100} \\ a_{101} \\ a_{102} \\ \vdots \end{bmatrix} & \cdots \\ \begin{bmatrix} a_{010} \\ a_{011} \\ a_{012} \\ \vdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{110} \\ a_{111} \\ a_{112} \\ \vdots \end{bmatrix} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

При транспонировании многомерной матрицы транспонированию подлежит блочная структура и все ее блоки.

Пример 1.12. Найти транспонированную матрицу для трехмерной матрицы

$$A(1,2) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \cdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \cdots \end{bmatrix} & \cdots \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{2}{4} & \frac{2}{6} & \cdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \cdots \end{bmatrix} & \cdots \\ \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{6} & \cdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{3}{3} & \frac{3}{5} & \frac{3}{7} & \cdots \end{bmatrix} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

□ Используя общую формулу транспонирования трехмерных матриц, получаем выражение для матрицы $[A(1,2)]^{\mathrm{T}}$:

$$B(2,1) = [A(1,2)]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ \vdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{2}{2} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{2}{6} \\ \vdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{6} \\ \vdots \end{bmatrix} & \dots \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{7} \\ \vdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{7} \\ \vdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{3}{3} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{7} \\ \vdots \end{bmatrix} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Замечание 1.7. В дальнейшем будем записывать гиперстолбцовые матрицы как транспонированные гиперстрочные. Например, вместо записи

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

будем использовать запись

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Двумерную гиперстолбцовую матрицу

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

будем представлять в виде транспонированной двумерной гиперстрочной матрицы

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots \end{bmatrix} & \dots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

и так для гиперстолбцовых матриц любой размерности.

Свойства обратных, *транспонированных* и *сопряженных многомерных матриц*:

1) $\left[A^{\mathrm{T}}(m_2,m_1)\right]^{\mathrm{T}} = A(m_1,m_2)$;

2) $\left[A(m_1,m_2)+B(m_1,m_2)\right]^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(m_2,m_1)+B^{\mathrm{T}}(m_2,m_1)$;

3) $\left[A(m_1,m_2)\cdot B(m_2,m_3)\right]^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}(m_3,m_2)\cdot A^{\mathrm{T}}(m_2,m_1)$;

4) $\left[A(m_1,m_2)\otimes B(m_3,m_4)\right]^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(m_2,m_1)\otimes B^{\mathrm{T}}(m_4,m_3)$;

5) $E^{\mathrm{T}}(m,m) = E(m,m)$;

6) $\left[A^{*}(m_2,m_1)\right]^{*} = A(m_1,m_2)$;

7) $\left[A(m_1,m_2)+B(m_1,m_2)\right]^{*} = A^{*}(m_2,m_1)+B^{*}(m_2,m_1)$;

8) $\left[A(m_1,m_2)\cdot B(m_2,m_3)\right]^{*} = B^{*}(m_3,m_2)\cdot A^{*}(m_2,m_1)$;

9) $\left[A(m_1,m_2)\otimes B(m_3,m_4)\right]^{*} = A^{*}(m_2,m_1)\otimes B^{*}(m_4,m_3)$;

10) $E^{*}(m,m) = E(m,m)$;

11) $\left[A^{-1}(m,m)\right]^{-1} = A(m,m)$;

12) $\left[A^{-1}(m,m)\right]^{\mathrm{T}} = \left[A^{\mathrm{T}}(m,m)\right]^{-1}$;

13) $\left[A^{-1}(m,m)\right]^{*} = \left[A^{*}(m,m)\right]^{-1}$;

14) $\left[A(m,m)\cdot B(m,m)\right]^{-1} = B^{-1}(m,m)\cdot A^{-1}(m,m)$;

15) $\left[A(m_1,m_1)\otimes B(m_2,m_2)\right]^{-1} = A^{-1}(m_1,m_1)\otimes B^{-1}(m_2,m_2)$;

16) $E^{-1}(m,m) = E(m,m)$.

Специальные операции

Агрегатированием называется представление упорядоченной совокупности многомерных матриц одинаковой структуры в виде многомерной матрицы более высокой размерности. Поясним это на следующем примере. Пусть

$$\left\{A_{kl}(m_1,m_2) = \left(a^{kl}_{i_1 i_2\ldots i_{m_1} j_1 j_2\cdots j_{m_2}}\right)\right\}_{k,l=0}^{\infty}$$

– система многомерных матриц одинаковой структуры. Образуем многомерную матрицу $B(m_1+1,m_2+1) = (b_{i_0 i_1 i_2\ldots i_{m_1} j_0 j_1 j_2\cdots j_{m_2}})$ таким образом, что

$$b_{i_0 i_1 i_2\ldots i_{m_1} j_0 j_1 j_2\cdots j_{m_2}} = a^{i_0 j_0}_{i_1 i_2\ldots i_{m_1} j_1 j_2\cdots j_{m_2}},$$

$$i_0, i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, j_0, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2} = 0,1,2,\ldots,$$

т.е. индексы k и l, задающие матрицу $A_{kl}(m_1,m_2)$, ставятся на первые позиции в списке строчных и столбцовых индексов матрицы $B(m_1+1,m_2+1)$

соответственно. Таким образом, индексы k и l определяют номер блока в матрице $B(m_1+1, m_2+1)$:

$$B(m_1+1, m_2+1) = \begin{bmatrix} A_{00}(m_1,m_2) & A_{01}(m_1,m_2) & A_{02}(m_1,m_2) & \dots \\ A_{10}(m_1,m_2) & A_{11}(m_1,m_2) & A_{12}(m_1,m_2) & \dots \\ A_{20}(m_1,m_2) & A_{21}(m_1,m_2) & A_{22}(m_1,m_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Пример 1.13. Представить систему двумерных матриц

$$\big\{A_{kl}(1,1) = (k+l)\cdot E(1,1)\big\}_{k,l=0}^{\infty}$$

в виде четырехмерной гиперквадратной матрицы.

□ Двумерные матрицы $A_{kl}(1,1)$, образующие систему, имеют одинаковую структуру:

$$A_{00}(1,1) = (0+0)\cdot E(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$A_{01}(1,1) = (0+1)\cdot E(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$A_{02}(1,1) = (0+2)\cdot E(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

. . . .

$$A_{10}(1,1) = (1+0)\cdot E(1,1) = A_{01}(1,1),$$

$$A_{11}(1,1) = (1+1)\cdot E(1,1) = A_{02}(1,1),$$

$$A_{12}(1,1) = (1+2)\cdot E(1,1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

. . . .

$$A_{20}(1,1) = (2+0)\cdot E(1,1) = A_{02}(1,1),$$

$$A_{21}(1,1) = (2+1)\cdot E(1,1) = A_{12}(1,1) \quad \text{и т.д.}$$

Тогда полученные блоки формируют матрицу $B(2,2)$, являющуюся результатом агрегатирования системы матриц $\{A_{kl}(1,1)\}_{k,l=0}^{\infty}$:

$$B(2,2) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Операция, обратная агрегатированию, называется **декомпозицией**. Декомпозиция заключается в представлении многомерной матрицы в виде сечений при фиксированных строчных или столбцовых индексах, стоящих на первых позициях в соответствующих списках.

Например, результатом декомпозиции двумерной гиперстрочной матрицы

$$A(0,2) = \\ = \Big[\big[\, a_{00} \;\; a_{01} \;\; a_{02} \;\; \dots \,\big] \big[\, a_{10} \;\; a_{11} \;\; a_{12} \;\; \dots \,\big] \big[\, a_{20} \;\; a_{21} \;\; a_{22} \;\; \dots \,\big] \;\; \dots \Big]$$

будут матрицы-строки

$$A_0(0,1) = \big[\, a_{00} \;\; a_{01} \;\; a_{02} \;\; \dots \,\big], \quad A_1(0,1) = \big[\, a_{10} \;\; a_{11} \;\; a_{12} \;\; \dots \,\big],$$
$$A_2(0,1) = \big[\, a_{20} \;\; a_{21} \;\; a_{22} \;\; \dots \,\big] \quad \text{и т.д.}$$

1.3. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИЙ

1.3.1. Спектральные характеристики функций времени

В разд. 1.1.1 была сформулирована задача представления функции времени $h(t) \in L_2(T; \nu(t))$ в виде ряда по базисным функциям, заданным на нестационарном отрезке T. Коэффициенты разложения (1.13) однозначно задают функцию $h(t)$, следовательно, упорядоченную совокупность этих коэффициентов можно рассматривать как характеристику функции $h(t)$.

Матрица-столбец $H(1,0) = (h_i)$, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения функции $h(t) \in L_2(T; \nu(t))$ в ряд по функциям базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T; \nu(t))$, называется **нестационарной спектральной характеристикой функции времени** $h(t)$, а элементы h_i – **координатами нестационарной спектральной характеристики**.

Отображение, ставящее в соответствие функции $h(t)$ ее нестационарную спектральную характеристику $H(1,0)$, называется **спектральным преобразованием** функции $h(t)$ и обозначается $\mathbb{S}$, т.е.

$$\mathbb{S}\,[h(t)] = H(1,0) = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \tag{1.36}$$

где

$$h_i = \big(q(i,t), h(t)\big)_{L_2(T;\,\nu(t))}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \ . \tag{1.37}$$

Обратный переход от нестационарной спектральной характеристики к соответствующей функции времени осуществляется по **формуле обращения**

$$h(t) = \mathbb{S}^{-1}\,[H(1,0)] = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot q(i,t), \quad t \in T. \tag{1.38}$$

З а м е ч а н и е 1.8. Известно [6, 29, 30, 45], что коэффициенты разложения (1.37) удовлетворяют условию

$$\sum_{i=0}^{\infty} |h_i|^2 < \infty.$$

Пространство матриц-столбцов $H(1,0)$, для которых справедливо это условие, будем обозначать через $l_2(1)$.

Спектральное преобразование (1.36) является взаимно однозначным и устанавливает изоморфизм пространств $L_2(T; \nu(t))$ и $l_2(1)$.

Пример 1.14. Найти нестационарную спектральную характеристику функции $h(t) = t^3$ относительно нестационарных полиномов Лежандра (1.4), заданных на нестационарном отрезке $T = [0, \tau]$.

□ В примере 1.1 решалась задача представления этой функции в виде ряда по нестационарным полиномам Лежандра и были найдены коэффициенты разложения:

$$h_0 = \frac{\tau^3\sqrt{\tau}}{4}, \quad h_1 = \frac{3\tau^3\sqrt{3\tau}}{20}, \quad h_2 = \frac{\tau^3\sqrt{5\tau}}{20}, \quad h_3 = \frac{\tau^3\sqrt{7\tau}}{140},$$
$$h_i = 0, \quad i = 4, 5, 6, \ldots,$$

поэтому можно сразу записать нестационарную спектральную характеристику:

$$H(1,0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\tau^3\sqrt{\tau}}{4} & \dfrac{3\tau^3\sqrt{3\tau}}{20} & \dfrac{\tau^3\sqrt{5\tau}}{20} & \dfrac{\tau^3\sqrt{7\tau}}{140} & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} =$$
$$= \tau^3\sqrt{\tau} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4} & \dfrac{3\sqrt{3}}{20} & \dfrac{\sqrt{5}}{20} & \dfrac{\sqrt{7}}{140} & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Проверим найденное решение, применяя для этого формулу обращения (1.38):

$$h(t) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot \hat{P}(i,t) = \frac{\tau^3\sqrt{\tau}}{4}\hat{P}(0,t) + \frac{3\tau^3\sqrt{3\tau}}{20}\hat{P}(1,t) +$$
$$+ \frac{\tau^3\sqrt{5\tau}}{20}\hat{P}(2,t) + \frac{\tau^3\sqrt{7\tau}}{140}\hat{P}(3,t).$$

Подставляя выражения для первых четырех нестационарных полиномов Лежандра и раскрывая скобки, получаем $h(t) = t^3$. ■

Пример 1.15. Найти нестационарную спектральную характеристику функции $h(t) = \mathrm{e}^t$ относительно нестационарных комплексных экспоненциальных функций (1.6), заданных на стационарном отрезке $T = [0, 1]$.

□ По определению (1.37) с учетом формулы (1.1) при $\nu(t) \equiv 1$ и выражения (1.6) при $\tau = 1$ получаем

$$h_i = \int_0^1 \mathrm{e}^t \hat{F}^*(i,t)\,dt = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{-i\pi t j}\,dt, \ i = 2k, \\ \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{(i+1)\pi t j}\,dt, \ i = 2k+1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(\mathrm{e}-1)(1+i\pi j)}{1+i^2\pi^2}, & i = 2k, \\ \dfrac{(\mathrm{e}-1)(1-(i+1)\pi j)}{1+(i+1)^2\pi^2}, & i = 2k+1, \end{cases}$$
$$i, k = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = \sqrt{-1},$$

т.е.

$$h_0 = \mathrm{e} - 1, \qquad h_1 = \frac{(\mathrm{e}-1)(1-2\pi j)}{1+4\pi^2},$$
$$h_2 = \frac{(\mathrm{e}-1)(1+2\pi j)}{1+4\pi^2}, \qquad h_3 = \frac{(\mathrm{e}-1)(1-4\pi j)}{1+16\pi^2},$$
$$h_4 = \frac{(\mathrm{e}-1)(1+4\pi j)}{1+16\pi^2}, \qquad \ldots\, .$$

По найденным коэффициентам разложения запишем нестационарную спектральную характеристику функции $h(t)$:

$$H(1,0) = \Bigg[\mathrm{e}-1 \quad \frac{(\mathrm{e}-1)(1-2\pi j)}{1+4\pi^2} \quad \frac{(\mathrm{e}-1)(1+2\pi j)}{1+4\pi^2}$$
$$\frac{(\mathrm{e}-1)(1-4\pi j)}{1+16\pi^2} \quad \frac{(\mathrm{e}-1)(1+4\pi j)}{1+16\pi^2} \quad \ldots \Bigg]^{\mathrm{T}} =$$
$$= (\mathrm{e}-1)\cdot \left[\begin{array}{cccccc} 1 & \dfrac{1-2\pi j}{1+4\pi^2} & \dfrac{1+2\pi j}{1+4\pi^2} & \dfrac{1-4\pi j}{1+16\pi^2} & \dfrac{1+4\pi j}{1+16\pi^2} & \ldots \end{array}\right]^{\mathrm{T}}. \quad \blacksquare$$

Понятие нестационарной спектральной характеристики распространяется на обобщенные функции, например, δ-функцию и ее производные, при этом формально применяется формула (1.37).

Например, найдем координаты нестационарной спектральной характеристики функции $\delta(t-t')$ относительно базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$:

$$\Delta_i = \big(q(i,t), \delta(t-t')\big)_{L_2(T;\,\nu(t))} = \int\limits_T \nu(t)\, q^*(i,t)\,\delta(t-t')\,dt,$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $q^*(i,t)$ – комплексная сопряженная функция, t' – момент приложения δ-функции, $t' \in T$. Учитывая определение δ-функции [29, 45], получаем, что

$$\Delta_i = \nu(t')\cdot q^*(i,t'), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.39}$$

следовательно,

$$\Delta(1,0) = \left[\begin{array}{cccc} \nu(t')\cdot q^*(0,t') & \nu(t')\cdot q^*(1,t') & \nu(t')\cdot q^*(2,t') & \ldots \end{array}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Матрица-столбец $\Delta(1,0)$ называется **нестационарной спектральной характеристикой δ-функции**, определенной относительно базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$, и представляет собой обобщенную функцию в спектральной области [73].

Замечание 1.9. Здесь и в дальнейшем будем предполагать, что весовая функция $\nu(t)$ достаточно регулярна, т.е. $\nu(t)$ непрерывна в точке $t = t'$ и $\nu(t') \neq 0$, иначе вместо $\nu(t)$ в (1.39) нужно использовать регуляризацию весовой функции [64].

Следует также отметить, что для нестационарной спектральной характеристики $\Delta(1,0)$ ряд в правой части формулы (1.38) в обычном смысле является расходящимся, однако его можно рассматривать как сходящийся к обобщенной функции $\delta(t-t')$ [45, 73].

Пример 1.16. Определить нестационарную спектральную характеристику функции $\delta(t)$ относительно нестационарных функций Уолша (1.7), заданных на нестационарном отрезке $T = [0, \tau]$.

□ Заметим, что для любого номера $i = 0, 1, 2, \ldots$ функция Уолша $\hat{\Omega}(i,0) = \sqrt{\frac{1}{\tau}}$, весовая функция $\nu(t) \equiv 1$. Тогда из (1.39) следует, что

$$\Delta_i = \sqrt{\frac{1}{\tau}}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

поэтому

$$\Delta(1,0) = \sqrt{\frac{1}{\tau}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \quad \blacksquare$$

Укажем некоторые *свойства спектрального преобразования.*

1. **Линейность.**

Нестационарная спектральная характеристика линейной комбинации функций времени является линейной комбинацией их нестационарных спектральных характеристик, т.е.

$$\mathbb{S}\left[\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot h_k(t)\right] = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \mathbb{S}\left[h_k(t)\right],$$

где α_k – произвольные комплексные числа, $m \in \mathbb{N}$.

2. **Начальное значение функции времени.**

Чтобы найти значение функции $h(t)$ в начальный момент времени t_0 по известной нестационарной спектральной характеристике $H(1,0)$, подставим t_0 в формулу обращения (1.38), тогда

$$h(t_0) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot q(i, t_0).$$

Аналогично определяется значение функции времени для любого другого момента $t \in T$.

1.3.2. Спектральные характеристики функций вектора состояния

Понятие спектральных характеристик легко распространяется на функции вектора состояния. Пусть вектор x принадлежит множеству $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (см. разд. 1.1.2), а система функций $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2(\Omega; \rho(x))$.

Гиперстолбец $H(n, 0) = (h_{i_1 i_2 \ldots i_n})$, элементы которого представляют собой коэффициенты разложения функции $h(x) \in L_2(\Omega; \rho(x))$ в ряд по функциям базисной системы $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$, называется **спектральной характеристикой функции вектора состояния** $h(x)$, а элементы $h_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ – **координатами спектральной характеристики**.

Отображение, ставящее в соответствие функции $h(x)$ ее спектральную характеристику $H(n, 0)$, называется **спектральным преобразованием** функции $h(x)$ и обозначается $\mathbb{S}$, т.е.

$$\mathbb{S}\,[h(x)] = H(n, 0), \tag{1.40}$$

где

$$h_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \big(p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x), h(x)\big)_{L_2(\Omega; \rho(x))}, \ i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1.41}$$

Обратный переход от спектральной характеристики к соответствующей функции вектора состояния осуществляется по **формуле обращения**

$$\begin{aligned} h(x) &= \mathbb{S}^{-1}\,[H(n, 0)] = \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{i_n=0}^{\infty} h_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Замечание 1.10.

1. В данном случае спектральное преобразование устанавливает изоморфизм пространств $L_2(\Omega; \rho(x))$ и $l_2(n)$, где $l_2(n)$ представляет собой множество гиперстолбцов $H(n, 0)$ таких, что

$$\sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{i_n=0}^{\infty} |h_{i_1 i_2 \ldots i_n}|^2 < \infty.$$

2. Спектральное преобразование функций вектора состояния обладает свойством линейности, т.е. спектральная характеристика линейной комбинации функций вектора состояния является линейной комбинацией их спектральных характеристик:

$$\mathbb{S}\left[\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot h_k(x)\right] = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \mathbb{S}\,[h_k(x)],$$

где α_k – произвольные комплексные числа, $m \in \mathbb{N}$.

Пример 1.17. Найти спектральную характеристику функции одной переменной $h(x) = x^2$ относительно полиномов Лежандра (1.17), заданных на отрезке $\Omega = [0, 1]$.

☐ Воспользуемся формулой (1.41):

$$h_0 = \int\limits_0^1 x^2 \hat{P}(0, x)\, dx = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$h_1 = \int\limits_0^1 x^2 \hat{P}(1, x)\, dx = \int\limits_0^1 x^2 \sqrt{3}\,(2x - 1)\, dx = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$h_2 = \int\limits_0^1 x^2 \hat{P}(2, x)\, dx = \int\limits_0^1 x^2 \sqrt{5}\,\big(6x^2 - 6x + 1\big)\, dx = \frac{\sqrt{5}}{30},$$

$$h_i = 0, \quad i = 3, 4, 5, \ldots,$$

следовательно, искомая спектральная характеристика имеет вид

$$H(1, 0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{5}}{30} & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Проверим найденное решение. По формуле обращения (1.42) получаем

$$h(x) = \mathbb{S}^{-1}\,[H(1, 0)] = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot \hat{P}(i, x) =$$
$$= \frac{1}{3}\hat{P}(0, x) + \frac{\sqrt{3}}{6}\hat{P}(1, x) + \frac{\sqrt{5}}{30}\hat{P}(2, x) = x^2. \quad \blacksquare$$

Пример 1.18. Найти спектральную характеристику функции двух переменных $h(x_1, x_2) = x_1 x_2$, заданной на множестве

$$\Omega = (-\infty, +\infty) \times [-a, a],$$

относительно системы функций $\{\hat{H}(i_1, x_1)\hat{S}(i_2, x_2)\}_{i_1, i_2 = 0}^{\infty}$.

☐ Коэффициенты разложения функции $h(x_1, x_2) = x_1 x_2$ по функциям базисной системы $\{\hat{H}(i_1, x_1)\hat{S}(i_2, x_2)\}_{i_1, i_2 = 0}^{\infty}$ были получены в ходе решения примера 1.2:

$$h_{i_1 i_2} = a_{i_1} \cdot b_{i_2},$$

$$i_1, i_2 = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$a_{i_1} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[4]{\pi}}{\sqrt{2}}, \ i_1 = 1, \\ 0, \ i_1 \neq 1, \end{cases} \qquad b_{i_2} = \begin{cases} 0, \ i_2 = 0 \text{ или } i_2 = 2k, \\ -\dfrac{4a\sqrt{a}(-1)^{\frac{i_2+1}{2}}}{\pi(i_2+1)}, \ i_2 = 2k-1, \end{cases}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Таким образом,

$$h_{00} = 0, \quad h_{01} = 0, \quad h_{02} = 0, \quad h_{03} = 0, \quad \ldots,$$

$$h_{0i_2} = 0, \quad i_2 = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$h_{10} = 0, \quad h_{11} = \frac{a\sqrt{2a}\sqrt[4]{\pi}}{\pi}, \quad h_{12} = 0, \quad h_{13} = -\frac{a\sqrt{2a}\sqrt[4]{\pi}}{2\pi}, \quad \ldots,$$

$$h_{1i_2} = \begin{cases} 0, \ i_2 = 0 \text{ или } i_2 = 2k, \\ -\dfrac{2a\sqrt{2a}\sqrt[4]{\pi}(-1)^{\frac{i_2+1}{2}}}{\pi(i_2+1)}, \ i_2 = 2k-1, \end{cases} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$h_{20} = 0, \quad h_{21} = 0, \quad h_{22} = 0, \quad h_{23} = 0, \quad \ldots,$$

$$h_{2i_2} = 0, \quad i_2 = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$h_{i_1 i_2} = 0, \quad i_1 = 3, 4, 5, \ldots, \quad i_2 = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Поскольку все коэффициенты разложения найдены, можно записать искомую спектральную характеристику функции $h(x_1, x_2) = x_1 x_2$ (см. разд. 1.2.2):

$$H(2,0) = \Bigg[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{a\sqrt{2a}\sqrt[4]{\pi}}{\pi} & 0 & -\dfrac{a\sqrt{2a}\sqrt[4]{\pi}}{2\pi} & 0 & \dfrac{a\sqrt{2a}\sqrt[4]{\pi}}{3\pi} & \ldots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix} \ \ldots \Bigg]^{\mathrm{T}} . \quad \blacksquare$$

Сформулируем утверждение о представлении спектральных характеристик функций вектора состояния.

Утверждение 1.6. *Пусть функции базисной системы*

$$\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$$

порождаются всевозможными произведениями функций $\{p_1(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$, $\{p_2(i_2, x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$, $\ldots$, $\{p_n(i_n, x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$, *которые в свою очередь образуют базисы пространств* $L_2(\Omega_1; \rho_1(x_1))$, $L_2(\Omega_2; \rho_2(x_2))$, $\ldots$, $L_2(\Omega_n; \rho_n(x_n))$ *соответственно (см. (1.23)),* $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$, $\rho(x) = \rho_1(x_1)\rho_2(x_2)\ldots\rho_n(x_n)$. *Пусть также функцию вектора состояния* $h(x) \in L_2(\Omega; \rho(x))$ *можно представить в виде произведения*

$$h(x) = h_1(x_1) \cdot h_2(x_2) \cdots h_n(x_n),$$

причем $h_l(x_l) \in L_2(\Omega_l; \rho_l(x_l))$, $l = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда спектральную характеристику функции* $h(x)$, *определенную относительно базисной системы* $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, *можно представить в виде тензорного произведения*

$$H(n, 0) = H_1(1, 0) \otimes H_2(1, 0) \otimes \ldots \otimes H_n(1, 0), \tag{1.43}$$

где $H_l(1, 0)$ *– спектральная характеристика функции* $h_l(x_l)$, *определенная относительно базисной системы* $\{p_l(i_l, x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$, $l = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Запишем формулу для вычисления координат спектральной характеристики функции $h(x)$:

$$h_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \int\limits_{\Omega} \rho(x) p^*(i_1, i_2, \ldots, i_n, x) h(x)\, dx.$$

По условию все подынтегральные функции представляются в виде произведения, следовательно,

$$\begin{aligned} &h_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \\ &= \int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_2} \ldots \int\limits_{\Omega_n} \rho_1(x_1)\rho_2(x_2)\ldots\rho_n(x_n) p_1^*(i_1, x_1) p_2^*(i_2, x_2) \ldots p_n^*(i_n, x_n) \times \\ &\quad \times h_1(x_1) h_2(x_2) \ldots h_n(x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \\ &= \int\limits_{\Omega_1} \rho_1(x_1) p_1^*(i_1, x_1) h_1(x_1)\, dx_1 \cdot \int\limits_{\Omega_2} \rho_2(x_2) p_2^*(i_2, x_2) h_2(x_2)\, dx_2 \times \ldots \times \\ &\quad \times \int\limits_{\Omega_n} \rho_n(x_n) p_n^*(i_n, x_n) h_n(x_n)\, dx_n = h_{i_1}^1 \cdot h_{i_2}^2 \cdots h_{i_n}^n, \end{aligned}$$

где величины

$$h_{i_l}^l = \int\limits_{\Omega_l} \rho_l(x_l) p_l^*(i_l, x_l) h_l(x_l)\, dx_l$$

представляют собой координаты спектральной характеристики функции $h_l(x_l)$, определенной относительно базисной системы $\{p_l(i_l, x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$, $l = 1, 2, \ldots, n$. Тогда с учетом правила тензорного умножения многомерных матриц (см. разд. 1.2.3) следует (1.43). ◀

Пример 1.19. Найти спектральную характеристику функции двух переменных $h(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$, заданной на множестве $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, относительно системы функций $\{\hat{P}(i_1, x_1)\,\hat{P}(i_2, x_2)\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$, где $\hat{P}(i_1, x_1)$ и $\hat{P}(i_2, x_2)$ – полиномы Лежандра (1.17).

□ Так как функция $h(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ представляется в виде произведения функций $h_1(x_1) = x_1^2$ и $h_2(x_2) = x_2^2$, из утверждения 1.6 следует, что спектральную характеристику функции $h(x_1, x_2)$ можно найти по формуле

$$H(2,0) = H_1(1,0) \otimes H_2(1,0),$$

где $H_1(1,0)$ и $H_2(1,0)$ – спектральные характеристики функций $h_1(x_1)$ и $h_2(x_2)$ соответственно, определенные относительно полиномов Лежандра. Из примера 1.17 следует, что

$$H_1(1,0) = H_2(1,0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{5}}{30} & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

тогда

$$H(2,0) = H_1(1,0) \otimes H_2(1,0) =$$

$$= \Bigg[\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{30} & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{5}}{30} & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{30}\cdot\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{5}}{30}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{5}}{30}\cdot\frac{\sqrt{5}}{30} & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix} \; \ldots \Bigg]^{\mathrm{T}} =$$

$$
= \left[\begin{matrix} \left[\begin{matrix} \frac{1}{9} & \frac{\sqrt{3}}{18} & \frac{\sqrt{5}}{90} & 0 & 0 & \ldots \end{matrix} \right] \\ \left[\begin{matrix} \frac{\sqrt{3}}{18} & \frac{1}{12} & \frac{\sqrt{15}}{180} & 0 & 0 & \ldots \end{matrix} \right] \\ \left[\begin{matrix} \frac{\sqrt{5}}{90} & \frac{\sqrt{15}}{180} & \frac{1}{180} & 0 & 0 & \ldots \end{matrix} \right] \\ \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{matrix} \right] & \ldots \end{matrix} \right]^{\mathrm{T}}. \qquad \blacksquare
$$

1.3.3. Спектральные характеристики функций времени и вектора состояния

Введем понятие нестационарной спектральной характеристики функции времени и вектора состояния. Пусть $(t, x) \in Q_T$, где $t \in T$, T – нестационарный отрезок времени, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (см. разд. 1.1.3). Система функций

$$
\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}
$$

образует базис пространства $L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$.

Гиперстолбец $H(n+1, 0) = (h_{i_0 i_1 \ldots i_n})$, элементы которого представляют собой коэффициенты разложения функции $h(t, x) \in L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$ в ряд по функциям базисной системы $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$, называется **нестационарной спектральной характеристикой функции времени и вектора состояния** $h(t, x)$, т.е.

$$
\mathbb{S}\,[h(t, x)] = H(n+1, 0), \tag{1.44}
$$

где

$$
h_{i_0 i_1 \ldots i_n} = \big(e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x), h(t, x)\big)_{L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))}, \tag{1.45}
$$
$$
i_0, i_1, \ldots, i_n = 0, 1, 2, \ldots\ .
$$

Так же, как и в случае функций времени и функций вектора состояния, $\mathbb{S}$ обозначает **спектральное преобразование**, которое ставит в соответствие функции $h(t, x)$ ее нестационарную спектральную характеристику $H(n+1, 0)$, а элементы $h_{i_0 i_1 \ldots i_n}$ называются **координатами нестационарной спектральной характеристики**.

Обратный переход от нестационарной спектральной характеристики осуществляется по **формуле обращения**

$$h(t,x) = \mathbb{S}^{-1}\left[H(n+1,0)\right] = \\ = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty} h_{i_0 i_1 \ldots i_n}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x), \quad (1.46) \\ (t,x)\in Q_T.$$

З а м е ч а н и е 1.11.

1. Спектральное преобразование функций времени и вектора состояния устанавливает изоморфизм пространств $L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$ и $l_2(n+1)$, где $l_2(n+1)$ – пространство всех гиперстолбцов $H(n+1,0)$ таких, что

$$\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}|h_{i_0 i_1\ldots i_n}|^2 < \infty.$$

2. Спектральное преобразование функций времени и вектора состояния является линейным, т.е. нестационарная спектральная характеристика линейной комбинации функций времени и вектора состояния является линейной комбинацией их нестационарных спектральных характеристик:

$$\mathbb{S}\left[\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\cdot h_k(t,x)\right] = \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\cdot\mathbb{S}\left[h_k(t,x)\right],$$

где α_k – произвольные комплексные числа, $m\in\mathbb{N}$.

Пример 1.20. Найти нестационарную спектральную характеристику функции $h(t,x)=1$, заданной на множестве $Q_T=[0,+\infty)\times[0,1]$, относительно системы функций $\{\hat{L}(i_0,t)\hat{\Omega}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$, где $\hat{L}(i_0,t)$ – полиномы Лагерра (1.10), $\hat{\Omega}(i_1,x)$ – функции Уолша (1.19).

☐ По определению

$$h_{i_0 i_1} = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-t}\hat{L}(i_0,t)\hat{\Omega}(i_1,x)\,dt\,dx = \\ = \int\limits_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\hat{L}(i_0,t)\,dt\int\limits_0^1\hat{\Omega}(i_1,x)\,dx.$$

Нетрудно показать, что $h_{i_0 i_1} = 1$ только в том случае, когда $i_0 = i_1 = 0$, иначе $h_{i_0 i_1} = 0$, так как

$$\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\hat{L}(i_0, t)\,dt = \begin{cases} 1, & i_0 = 0, \\ 0, & i_0 \neq 0, \end{cases} \qquad \int\limits_0^1 \hat{\Omega}(i_1, x)\,dx = \begin{cases} 1, & i_1 = 0, \\ 0, & i_1 \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, искомая нестационарная спектральная характеристика представляется в виде

$$H(2,0) = \Big[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix} \ \ldots \Big]^{\mathrm{T}}.$$

Проверим найденное решение. Применив формулу обращения (1.46), получим

$$h(t,x) = \hat{L}(0,t)\hat{\Omega}(0,x) = 1. \quad \blacksquare$$

Сформулируем утверждение о представлении нестационарных спектральных характеристик функций времени и вектора состояния.

Утверждение 1.7. *Пусть система функций* $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ *образует базис пространства* $L_2(T; \nu(t))$, *а система* $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$ *является базисом пространства* $L_2(\Omega; \rho(x))$. *Пусть также функцию* $h(t,x) \in L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$ *можно представить в виде произведения*

$$h(t,x) = h_0(t) \cdot \tilde{h}(x),$$

где $h_0(t) \in L_2(T; \nu(t))$, $\tilde{h}(x) \in L_2(\Omega; \rho(x))$. *Тогда нестационарную спектральную характеристику функции* $h(t,x)$, *определенную относительно базисной системы*

$$\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x) = q(i_0,t) \cdot p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty},$$

можно представить в виде

$$H(n+1, 0) = H_0(1,0) \otimes \tilde{H}(n,0), \tag{1.47}$$

где $H_0(1,0)$ – *нестационарная спектральная характеристика функции* $h_0(t)$, *определенная относительно базисной системы* $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$; $\tilde{H}(n,0)$ – *спектральная характеристика функции* $\tilde{h}(x)$, *определенная относительно базисной системы* $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством утверждения 1.6.

Пример 1.21. Найти нестационарную спектральную характеристику функции $h(t, x_1, x_2) = t^3 x_1 x_2$, заданной на множестве

$$Q_T = [0, \tau] \times (-\infty, +\infty) \times [-a, a],$$

относительно базисной системы

$$\{\hat{P}(i_0, t)\,\hat{H}(i_1, x_1)\,\hat{S}(i_2, x_2)\}_{i_0, i_1, i_2 = 0}^{\infty}.$$

□ Функцию $h(t, x_1, x_2)$ можно представить в виде произведения

$$h(t, x_1, x_2) = h_0(t) \cdot \tilde{h}(x_1, x_2),$$

где $h_0(t) = t^3$, $\tilde{h}(x_1, x_2) = x_1 x_2$, поэтому из утверждения 1.7 следует, что нестационарная спектральная характеристика функции $h(t, x_1, x_2)$ является тензорным произведением нестационарной спектральной характеристики $H_0(1,0)$ функции $h_0(t)$, определенной относительно системы нестационарных полиномов Лежандра $\{\hat{P}(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, и спектральной характеристики $\tilde{H}(2,0)$ функции $\tilde{h}(x_1, x_2)$, определенной относительно базисной системы $\{\hat{H}(i_1, x_1)\,\hat{S}(i_2, x_2)\}_{i_1, i_2 = 0}^{\infty}$:

$$H(3,0) = H_0(1,0) \otimes \tilde{H}(2,0),$$

где

$$H_0(1,0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\tau^3\sqrt{\tau}}{4} & \dfrac{3\tau^3\sqrt{3\tau}}{20} & \dfrac{\tau^3\sqrt{5\tau}}{20} & \dfrac{\tau^3\sqrt{7\tau}}{140} & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

и

$$\tilde{H}(2,0) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{a\sqrt{2a}\sqrt[4]{\pi}}{\pi} & 0 & -\dfrac{a\sqrt{2a}\sqrt[4]{\pi}}{2\pi} & 0 & \dfrac{a\sqrt{2a}\sqrt[4]{\pi}}{3\pi} & \ldots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix} & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

что следует из примеров 1.14 и 1.18 соответственно.

Тогда

$$
H(3,0) = H_0(1,0) \otimes \tilde{H}(2,0) =
$$

$$
= \left[\begin{matrix}
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{a\tau^3\sqrt{2a\tau}\sqrt[4]{\pi}}{4\pi} & 0 & -\dfrac{a\tau^3\sqrt{2a\tau}\sqrt[4]{\pi}}{8\pi} & \dots \end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} & \dots
\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{3a\tau^3\sqrt{6a\tau}\sqrt[4]{\pi}}{20\pi} & 0 & -\dfrac{3a\tau^3\sqrt{6a\tau}\sqrt[4]{\pi}}{40\pi} & \dots \end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} & \dots
\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{a\tau^3\sqrt{10a\tau}\sqrt[4]{\pi}}{20\pi} & 0 & -\dfrac{a\tau^3\sqrt{10a\tau}\sqrt[4]{\pi}}{40\pi} & \dots \end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} & \dots
\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{a\tau^3\sqrt{14a\tau}\sqrt[4]{\pi}}{140\pi} & 0 & -\dfrac{a\tau^3\sqrt{14a\tau}\sqrt[4]{\pi}}{280\pi} & \dots \end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} & \dots
\end{bmatrix}
\end{matrix}\right.
$$

$$\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & \dots\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & \dots\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & \dots\end{bmatrix} & \dots\end{matrix}\right] \dots \Bigg]^{\mathrm{T}}. \quad \blacksquare$$

Установим связь между нестационарной спектральной характеристикой функции времени и вектора состояния и спектральной характеристикой этой функции при фиксированном значении переменной времени t, причем будем предполагать, что функции базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n = 0}^{\infty}$ пространства $L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$ порождаются всевозможными произведениями функций базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T; \nu(t))$ и функций базисной системы $\{p(i_1, i_2, \dots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \dots, i_n = 0}^{\infty}$ пространства $L_2(\Omega; \rho(x))$ (см. условие утверждения 1.7).

Теорема 1.1. *Пусть функция* $h(t, x) \in L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$ *такая, что* $h(t', x) = h'(x) \in L_2(\Omega; \rho(x))$, $t' \in T$; $H(n+1, 0)$ – *нестационарная спектральная характеристика функции* $h(t, x)$, *определенная относительно базисной системы* $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n = 0}^{\infty}$; $H'(n, 0)$ – *спектральная характеристика функции* $h'(x)$, *определенная относительно базисной системы* $\{p(i_1, i_2, \dots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \dots, i_n = 0}^{\infty}$; $q(0, 1; t')$ – *матрица-строка, элементы которой представляют собой значения функций базисной системы* $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ *пространства* $L_2(T; \nu(t))$ *в точке* $t = t'$, *т.е.*

$$q(0, 1; t) = \begin{bmatrix} q(0, t) & q(1, t) & q(2, t) & \dots \end{bmatrix}.$$

Тогда спектральные характеристики $H(n+1, 0)$ *и* $H'(n, 0)$ *связаны соотношением*

$$\big(q(0, 1; t') \otimes E(n, n)\big) \cdot H(n+1, 0) = H'(n, 0). \tag{1.48}$$

Доказательство.

Представим функцию $h(t, x)$ при фиксированном x в виде ряда по функциям базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.1.1):

$$h(t, x) = \sum_{i_0=0}^{\infty} h_{i_0}(x) \cdot q(i_0, t),$$

где $h_{i_0}(x) = \big(q(i_0, t), h(t, x)\big)_{L_2(T; \nu(t))}$ – коэффициенты разложения.

Тогда при $t = t'$ получаем

$$h(t', x) = h'(x) = \sum_{i_0=0}^{\infty} h_{i_0}(x) \cdot q(i_0, t').$$

По определению спектральных характеристик функций вектора состояния (см. разд. 1.3.2) координаты $h'_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ спектральной характеристики $H'(n,0)$ задаются соотношением

$$h'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \big(p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x), h'(x)\big)_{L_2(\Omega;\, \rho(x))},$$

т.е.

$$\begin{aligned} h'_{i_1 i_2 \ldots i_n} &= \\ &= \left(p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x), \sum_{i_0=0}^{\infty} h_{i_0}(x) \cdot q(i_0, t')\right)_{L_2(\Omega;\, \rho(x))} = \\ &= \sum_{i_0=0}^{\infty} q(i_0, t') \cdot \big(p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x), h_{i_0}(x)\big)_{L_2(\Omega;\, \rho(x))} = \\ &= \sum_{i_0=0}^{\infty} q(i_0, t') \cdot h_{i_0 i_1 \ldots i_n}, \end{aligned}$$

где $h_{i_0 i_1 \ldots i_n}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $H(n+1,0)$. Полученное выражение можно переписать следующим образом:

$$h'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_{j_0=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{j_n=0}^{\infty} \tilde{q}_{i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n} \cdot h_{j_0 j_1 \ldots j_n},$$

где упорядоченная совокупность чисел

$$\tilde{q}_{i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n} = \begin{cases} q(j_0, t'),\ i_1 = j_1,\ \ldots,\ i_n = j_n, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

образует многомерную матрицу $\tilde{Q}(n, n+1)$.

Из определения тензорного произведения многомерных матриц (см. разд. 1.2.3) следует, что

$$\tilde{Q}(n, n+1) = q(0, 1; t') \otimes E(n, n),$$

а по правилу умножения многомерных матриц

$$H'(n, 0) = \tilde{Q}(n, n+1) \cdot H(n+1, 0).$$

Отсюда следует (1.48). ◀

1.4. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1.4.1. Основные определения

Линейные операторы в пространстве функций времени

Введем понятие спектральных характеристик линейных операторов. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор, определенный на пространстве $L_2(T;\nu(t))$, $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ – базис этого пространства (см. разд. 1.1.1).

Квадратная матрица $A(1,1)=(a_{ij})$, элементы которой определяются формулой

$$a_{ij}=\big(q(i,t),\mathcal{A}q(j,t)\big)_{L_2(T;\,\nu(t))},\quad i,j=0,1,2,\ldots,\tag{1.49}$$

называется **нестационарной спектральной характеристикой оператора $\mathcal{A}$**.

Так же, как и в случае спектральных характеристик функций, отображение, ставящее в соответствие линейному оператору его нестационарную спектральную характеристику, называется **спектральным преобразованием** и обозначается $\mathbb{S}$, т.е.

$$\mathbb{S}\,[\mathcal{A}]=A(1,1).$$

Теорема 1.2. *Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор, определенный на пространстве $L_2(T;\nu(t))$; $h(t)\in L_2(T;\nu(t))$ – функция времени; $A(1,1)$ и $H(1,0)$ – нестационарные спектральные характеристики оператора $\mathcal{A}$ и функции времени $h(t)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда*

$$\mathbb{S}\,[\mathcal{A}h(t)]=A(1,1)\cdot H(1,0),$$

т.е. нестационарная спектральная характеристика образа функции $h(t)$ равна произведению нестационарной спектральной характеристики оператора $\mathcal{A}$ и нестационарной спектральной характеристики функции $h(t)$.

Доказательство. Обозначим через $w(t)$ образ функции $h(t)$, т.е.

$$w(t)=\mathcal{A}h(t).$$

Представим функцию $h(t)$ в виде ряда по функциям базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T;\nu(t))$ и воспользуемся свойством линейности оператора $\mathcal{A}$:

$$w(t)=\mathcal{A}\sum_{j=0}^{\infty}h_j\cdot q(j,t)=\sum_{j=0}^{\infty}h_j\cdot\mathcal{A}q(j,t).$$

Найдем коэффициенты разложения функции $w(t)$ по функциям базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$. Для этого воспользуемся формулой (1.13):

$$w_i = \big(q(i,t), w(t)\big)_{L_2(T;\,\nu(t))} = \left(q(i,t), \sum_{j=0}^{\infty} h_j \cdot \mathcal{A} q(j,t)\right)_{L_2(T;\,\nu(t))},$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Учитывая свойство линейности скалярного произведения по каждому сомножителю, получаем

$$w_i = \sum_{j=0}^{\infty} \big(q(i,t), \mathcal{A} q(j,t)\big)_{L_2(T;\,\nu(t))} \cdot h_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \cdot h_j,$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Тогда по определению произведения матриц (см. разд. 1.2.3) справедливо равенство

$$W(1,0) = A(1,1) \cdot H(1,0),$$

где $W(1,0)$ – нестационарная спектральная характеристика функции $w(t)$, следовательно, $\mathbb{S}\left[\mathcal{A}h(t)\right] = A(1,1) \cdot H(1,0)$. ◄

Приведем *свойства спектрального преобразования линейных операторов, определенных на пространстве* $L_2(T;\,\nu(t))$.

1. **Спектральное преобразование тождественного оператора.**

Нестационарная спектральная характеристика тождественного оператора $\mathcal{I}$ представляет собой двумерную единичную матрицу:

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{I}\right] = E(1,1).$$

Действительно, воспользуемся определением спектральных характеристик линейных операторов. Тогда элементы I_{ij} нестационарной спектральной характеристики $I(1,1)$ тождественного оператора $\mathcal{I}$ определяются соотношением

$$I_{ij} = \big(q(i,t), \mathcal{I} q(j,t)\big)_{L_2(T;\,\nu(t))}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots,$$

но по определению тождественного оператора для произвольной функции времени $h(t)$ из пространства $L_2(T;\,\nu(t))$ верно равенство

$$\mathcal{I}h(t) = h(t),$$

следовательно,

$$I_{ij} = \big(q(i,t), q(j,t)\big)_{L_2(T;\,\nu(t))}.$$

Таким образом, с учетом свойства ортонормированности базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.1.1) получаем

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

т.е. нестационарная спектральная характеристика $I(1,1)$ представляет собой двумерную единичную матрицу $E(1,1)$.

2. **Спектральное преобразование композиции операторов.**

Нестационарная спектральная характеристика композиции линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ равна произведению их нестационарных спектральных характеристик:

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{A} \circ \mathcal{B}\right] = \mathbb{S}\left[\mathcal{A}\right] \cdot \mathbb{S}\left[\mathcal{B}\right] = A(1,1) \cdot B(1,1),$$

где $A(1,1) = \mathbb{S}[\mathcal{A}]$, $B(1,1) = \mathbb{S}[\mathcal{B}]$.

Напомним [8], что композицией операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется оператор $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, определяемый равенством

$$(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})\, h(t) = \mathcal{A}\left[\mathcal{B} h(t)\right].$$

Рассмотрим выражение $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})h(t)$, где $h(t)$ – элемент пространства $L_2(T;\, \nu(t))$. По теореме 1.2

$$\mathbb{S}\left[(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})\, h(t)\right] = C(1,1) \cdot H(1,0),$$

где $C(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора $\mathcal{C} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, определенная относительно базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$, а $H(1,0)$ – нестационарная спектральная характеристика функции времени $h(t)$, определенная относительно той же базисной системы (см. разд. 1.3.1). В то же время

$$\mathbb{S}\left[(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})\, h(t)\right] = \mathbb{S}\left[\mathcal{A}\left[\mathcal{B} h(t)\right]\right] = A(1,1) \cdot \mathbb{S}\left[\mathcal{B} h(t)\right] =$$
$$= A(1,1) \cdot B(1,1) \cdot H(1,0),$$

следовательно, $C(1,1) = A(1,1) \cdot B(1,1)$.

3. **Спектральное преобразование обратного оператора.**

Предположим, что для линейного оператора $\mathcal{A}$ существует обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$. Тогда нестационарная спектральная характеристика обратного оператора равна обратной нестационарной спектральной характеристике оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{A}^{-1}\right] = A^{-1}(1,1),$$

где $A(1,1) = \mathbb{S}[\mathcal{A}]$.

Докажем это свойство. Пусть $h_2(t) = \mathcal{A}h_1(t)$, где $h_1(t)$ и $h_2(t)$ – элементы пространства $L_2(T; \nu(t))$, тогда по определению обратного оператора $h_1(t) = \mathcal{A}^{-1}h_2(t)$.

По теореме 1.2 получаем, что

$$H_2(1,0) = A(1,1) \cdot H_1(1,0)$$

и

$$H_1(1,0) = B(1,1) \cdot H_2(1,0),$$

где $H_1(1,0)$ и $H_2(1,0)$ – нестационарные спектральные характеристики функций $h_1(t)$ и $h_2(t)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.1); $B(1,1)$ – спектральная характеристика оператора $\mathcal{A}^{-1}$, определенная относительно той же базисной системы. Следовательно,

$$H_2(1,0) = A(1,1) \cdot B(1,1) \cdot H_2(1,0)$$

и

$$H_1(1,0) = B(1,1) \cdot A(1,1) \cdot H_1(1,0),$$

т.е.

$$A(1,1) \cdot B(1,1) = E(1,1),$$

$$B(1,1) \cdot A(1,1) = E(1,1).$$

Таким образом, по определению обратной матрицы (см. разд. 1.2.3) получаем, что $B(1,1) = A^{-1}(1,1)$.

Линейные операторы в пространстве функций вектора состояния

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор, определенный на пространстве $L_2(\Omega; \rho(x))$, а $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$ – базис этого пространства (см. разд. 1.1.2).

Гиперквадратная матрица $A(n,n) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_n j_1 j_2 \ldots j_n})$, элементы которой определяются формулой

$$\begin{aligned} &a_{i_1 i_2 \ldots i_n j_1 j_2 \ldots j_n} = \\ &\quad = \big(p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x), \mathcal{A}p(j_1, j_2, \ldots, j_n, x)\big)_{L_2(\Omega;\, \rho(x))}, \\ &i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{1.50}$$

называется **спектральной характеристикой оператора** $\mathcal{A}$, т.е.

$$\mathbb{S}\,[\mathcal{A}] = A(n,n).$$

Теорема 1.3. *Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор, определенный на пространстве $L_2(\Omega;\, \rho(x))$; $h(x) \in L_2(\Omega;\, \rho(x))$ – функция вектора состояния; $A(n,n)$ и $H(n,0)$ – спектральные характеристики оператора $\mathcal{A}$ и функции $h(x)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$. Тогда*

$$\mathbb{S}\,[\mathcal{A}h(x)] = A(n,n)\cdot H(n,0),$$

т.е. спектральная характеристика образа функции $h(x)$ равна произведению спектральной характеристики оператора $\mathcal{A}$ и спектральной характеристики функции $h(x)$.

Приведем *свойства спектрального преобразования линейных операторов, определенных на пространстве* $L_2(\Omega;\, \rho(x))$.

1. **Спектральное преобразование тождественного оператора.**

Спектральная характеристика тождественного оператора $\mathcal{I}$ представляет собой $2n$-мерную единичную матрицу:

$$\mathbb{S}\,[\mathcal{I}] = E(n,n).$$

2. **Спектральное преобразование композиции операторов.**

Спектральная характеристика композиции линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ равна произведению их спектральных характеристик:

$$\mathbb{S}\,[\mathcal{A}\circ\mathcal{B}] = \mathbb{S}\,[\mathcal{A}]\cdot\mathbb{S}\,[\mathcal{B}] = A(n,n)\cdot B(n,n),$$

где $A(n,n) = \mathbb{S}\,[\mathcal{A}]$, $B(n,n) = \mathbb{S}\,[\mathcal{B}]$.

3. **Спектральное преобразование обратного оператора.**

Предположим, что для линейного оператора $\mathcal{A}$ существует обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$. Тогда спектральная характеристика обратного оператора равна обратной спектральной характеристике оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{A}^{-1}\right] = A^{-1}(n,n),$$

где $A(n,n) = \mathbb{S}\,[\mathcal{A}]$.

Теорема 1.3 и свойства спектрального преобразования линейных операторов, определенных на пространстве $L_2(\Omega;\, \rho(x))$, доказываются аналогично теореме 1.2 и соответствующим свойствам спектрального преобразования линейных операторов, определенных на пространстве $L_2(T;\, \nu(t))$.

Линейные операторы в пространстве функций времени и вектора состояния

Перейдем к описанию операторов, заданных на пространстве функций времени и вектора состояния. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор, определенный на пространстве $L_2(Q_T;\, \nu(t)\rho(x))$, а $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ – базис этого пространства (см. разд. 1.1.3), $Q_T = T\times\Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Гиперквадратная матрица $A(n+1,n+1) = (a_{i_0 i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n})$, элементы которой определяются формулой

$$\begin{aligned} a_{i_0 i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n} &= \\ &= \big(e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x), \mathcal{A} e(j_0, j_1, \ldots, j_n, t, x)\big)_{L_2(Q_T;\, \nu(t)\rho(x))}, \qquad (1.51) \\ i_0, i_1, \ldots, i_n, j_0, j_1, \ldots, j_n &= 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

называется **нестационарной спектральной характеристикой оператора** $\mathcal{A}$, т.е. $\mathbb{S}[\mathcal{A}] = A(n+1,n+1)$.

Теорема 1.4. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– линейный оператор, определенный на пространстве* $L_2(Q_T;\, \nu(t)\rho(x))$; $h(t,x) \in L_2(Q_T;\, \nu(t)\rho(x))$ *– функция времени и вектора состояния;* $A(n+1,n+1)$ *и* $H(n+1,0)$ *– нестационарные спектральные характеристики оператора* $\mathcal{A}$ *и функции* $h(t,x)$ *соответственно, определенные относительно базисной системы* $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$. *Тогда*

$$\mathbb{S}[\mathcal{A} h(t,x)] = A(n+1,n+1) \cdot H(n+1,0),$$

т.е. нестационарная спектральная характеристика образа функции $h(t,x)$ *равна произведению нестационарной спектральной характеристики оператора* $\mathcal{A}$ *и нестационарной спектральной характеристики функции* $h(t,x)$.

Приведем *свойства спектрального преобразования линейных операторов, определенных на пространстве* $L_2(Q_T;\, \nu(t)\rho(x))$.

1. **Спектральное преобразование тождественного оператора.**

Нестационарная спектральная характеристика тождественного оператора $\mathcal{I}$ представляет собой единичную матрицу размерности $2(n+1)$:

$$\mathbb{S}[\mathcal{I}] = E(n+1,n+1).$$

2. **Спектральное преобразование композиции операторов.**

Нестационарная спектральная характеристика композиции линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ равна произведению их нестационарных спектральных характеристик:

$$\mathbb{S}[\mathcal{A} \circ \mathcal{B}] = \mathbb{S}[\mathcal{A}] \cdot \mathbb{S}[\mathcal{B}] = A(n+1,n+1) \cdot B(n+1,n+1),$$

где $A(n+1,n+1) = \mathbb{S}[\mathcal{A}]$, $B(n+1,n+1) = \mathbb{S}[\mathcal{B}]$.

3. **Спектральное преобразование обратного оператора.**

Предположим, что для линейного оператора $\mathcal{A}$ существует обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$. Тогда нестационарная спектральная характеристика обратного оператора равна обратной нестационарной спектральной характеристике оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{A}^{-1}\right] = A^{-1}(n+1,n+1),$$

где $A(n+1,n+1) = \mathbb{S}[\mathcal{A}]$.

Теорема 1.4 и свойства спектрального преобразования линейных операторов, определенных на пространстве $L_2(Q_T;\, \nu(t)\rho(x))$, доказываются аналогично теореме 1.2 и соответствующим свойствам спектрального преобразования линейных операторов, определенных на пространстве $L_2(T;\, \nu(t))$.

Сформулируем *критерии ограниченности и компактности линейных операторов* в спектральной области.

Утверждение 1.8 (необходимое условие ограниченности). *Пусть $\mathcal{A}$ – линейный ограниченный оператор, определенный на пространстве $L_2(Q_T;\, \nu(t)\rho(x))$; $A(n+1, n+1) = (a_{i_0 i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n})$ – его нестационарная спектральная характеристика. Тогда*

$$\sup_{i_0, i_1, \ldots, i_n} \sum_{j_0=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{j_n=0}^{\infty} |a_{i_0 i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n}|^2 < \infty,$$

$$\sup_{j_0, j_1, \ldots, j_n} \sum_{i_0=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{i_n=0}^{\infty} |a_{i_0 i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n}|^2 < \infty.$$

Утверждение 1.9 (критерий ограниченности оператора). *Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор, определенный на пространстве $L_2(Q_T;\, \nu(t)\rho(x))$; $A(n+1, n+1) = (a_{i_0 i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n})$ – его нестационарная спектральная характеристика. Тогда для ограниченности оператора $\mathcal{A}$ необходимо и достаточно, чтобы для любой пары последовательностей $\alpha_{i_0 i_1 \ldots i_n}$, $\beta_{j_0 j_1 \ldots j_n}$ и любого $m \in \mathbb{N}$ существовала константа $M > 0$, что*

$$\left| \sum_{i_0=0}^{m} \sum_{i_1=0}^{m} \ldots \sum_{i_n=0}^{m} \sum_{j_0=0}^{m} \sum_{j_1=0}^{m} \ldots \sum_{j_n=0}^{m} \beta_{j_0 j_1 \ldots j_n} \cdot a_{i_0 i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n} \cdot \alpha_{i_0 i_1 \ldots i_n} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant M \left(\sum_{i_0=0}^{m} \sum_{i_1=0}^{m} \ldots \sum_{i_n=0}^{m} |\alpha_{i_0 i_1 \ldots i_n}|^2 \right) \left(\sum_{j_0=0}^{m} \sum_{j_1=0}^{m} \ldots \sum_{j_n=0}^{m} |\beta_{j_0 j_1 \ldots j_n}|^2 \right).$$

Утверждение 1.10 (необходимое условие компактности). *Пусть $\mathcal{A}$ – линейный компактный оператор, определенный на пространстве $L_2(Q_T;\, \nu(t)\rho(x))$; $A(n+1, n+1) = (a_{i_0 i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n})$ – его нестационарная спектральная характеристика. Тогда*

$$\lim_{i_0, i_1, \ldots, i_n \to \infty} \sum_{j_0=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{j_n=0}^{\infty} |a_{i_0 i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n}|^2 = 0,$$

$$\lim_{j_0, j_1, \ldots, j_n \to \infty} \sum_{i_0=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{i_n=0}^{\infty} |a_{i_0 i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n}|^2 = 0.$$

Доказательства этих утверждений приведены в [6].

1.4.2. Спектральные характеристики операторов умножения

Операторы умножения в пространстве функций времени

Пусть $a(t)$ – локально интегрируемая функция на нестационарном отрезке T, $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ – базис пространства $L_2(T;\nu(t))$. **Оператор умножения** на функцию $a(t)$ задается следующим образом:

$$\mathcal{A}h(t) = a(t)\,h(t),$$

где $h(t) \in L_2(T;\nu(t))$.

Квадратная матрица $A(1,1) = (a_{ij})$, элементы которой определяются формулой

$$a_{ij} = \big(q(i,t), a(t)\cdot q(j,t)\big)_{L_2(T;\,\nu(t))}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots, \tag{1.52}$$

называется **нестационарной спектральной характеристикой оператора умножения** на функцию $a(t)$, т.е.

$$\mathbb{S}\,[\mathcal{A}] = A(1,1).$$

Приведем *свойства спектрального преобразования операторов умножения, определенных на пространстве* $L_2(T;\nu(t))$.

1. Нестационарная спектральная характеристика оператора умножения является эрмитовой (самосопряженной) матрицей, т.е. $A(1,1) = A^*(1,1)$ (см. разд. 1.2.3). В случае, если все функции базисной системы принимают вещественные значения, матрица $A(1,1)$ является симметрической, т.е. $A(1,1) = A^{\mathrm{T}}(1,1)$.

2. Нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на константу $\alpha \in \mathbb{R}$ равна произведению этой константы на двумерную единичную матрицу:

$$\mathbb{S}\,[\mathcal{A}] = \alpha E(1,1),$$

где $\mathcal{A}h(t) = \alpha h(t)$, $h(t) \in L_2(T;\nu(t))$.

3. Нестационарная спектральная характеристика произведения функций времени $h_1(t)\cdot h_2(t)$ равна произведению нестационарной спектральной характеристики $H_1(1,1)$ оператора умножения на функцию $h_1(t)$ и нестационарной спектральной характеристики $H_2(1,0)$ функции $h_2(t)$, т.е.

$$\mathbb{S}\,[h_1(t)\cdot h_2(t)] = H_1(1,1)\cdot H_2(1,0).$$

Доказательство этих свойств можно найти, например, в [71].

Для вычисления нестационарной спектральной характеристики оператора умножения на функцию $a(t) \in L_2(T;\nu(t))$ по известной нестационарной спектральной характеристике этой функции необходимо ввести понятие спектральной характеристики множительного звена (рис. 1.10) [71].

Рис. 1.10. Множительное звено

Нестационарной спектральной характеристикой множительного звена называется трехмерная матрица $V(1,2) = (v_{ijk})$, элементы которой задаются выражением

$$v_{ijk} = \big(q(i,t), q(j,t) \cdot q(k,t)\big)_{L_2(T;\,\nu(t))}, \quad i,j,k = 0,1,2,\ldots, \tag{1.53}$$

т.е. каждое сечение матрицы $V(1,2)$ при фиксированном значении индекса k представляет собой нестационарную спектральную характеристику оператора умножения на базисную функцию $q(k,t)$.

Утверждение 1.11. *Пусть* $A(1,1)$ – *нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию* $a(t) \in L_2(T;\nu(t))$, $A(1,0)$ – *нестационарная спектральная характеристика функции* $a(t)$, $V(1,2)$ – *нестационарная спектральная характеристика множительного звена. Нестационарные спектральные характеристики* $A(1,1)$, $A(1,0)$ *и* $V(1,2)$ *определены относительно базисной системы* $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$. *Тогда нестационарные спектральные характеристики* $A(1,1)$ *и* $A(1,0)$ *связаны следующим соотношением* [71]:

$$A(1,1) = V(1,2) \odot A(1,0).$$

Таким образом, с помощью нестационарной спектральной характеристики множительного звена может быть установлена связь между нестационарными спектральными характеристиками функций $h_1(t)$, $h_2(t)$ и их произведения $h_1(t) \cdot h_2(t)$ (см. рис. 1.10), т.е.

$$\mathbb{S}\left[h_1(t) \cdot h_2(t)\right] = \big(\underbrace{V(1,2) \odot H_1(1,0)}_{H_1(1,1)}\big) \cdot H_2(1,0),$$

где $H_1(1,0)$ и $H_2(1,0)$ – нестационарные спектральные характеристики функций $h_1(t)$ и $h_2(t)$ соответственно, а $H_1(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $h_1(t)$.

Приведем ***примеры нестационарных спектральных характеристик*** $A(1,1)$ ***оператора умножения на функцию*** $a(t) = t$, определенных относительно различных базисных систем, заданных на нестационарном отрезке времени (см. разд. 1.1.1).

1. Нестационарные полиномы Лежандра (1.4):

$$A(1,1)=\tau\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2\sqrt{15}} & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{2}{2\sqrt{15}} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{35}} & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{35}} & \frac{1}{2} & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_{m-1,m} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{m,m-1} & c_{mm} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{mm}=\frac{1}{2},\quad c_{m-1,m}=c_{m,m-1}=\frac{m}{2\sqrt{4m^2-1}},$$
$$c_{m-k,m}=c_{m,m-k}=0,$$
$$m=0,1,2,\ldots,\quad k=2,3,4,\ldots,m.$$

2. Нестационарные косинусоиды (1.5):

$$A(1,1)=\tau\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{9\pi^2} & \ldots & c_{0m} & \ldots \\ -\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} & \frac{1}{2} & -\frac{20}{9\pi^2} & 0 & \ldots & c_{1m} & \ldots \\ 0 & -\frac{20}{9\pi^2} & \frac{1}{2} & -\frac{52}{25\pi^2} & \ldots & c_{2m} & \ldots \\ -\frac{2\sqrt{2}}{9\pi^2} & 0 & -\frac{52}{25\pi^2} & \frac{1}{2} & \ldots & c_{3m} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \ldots & c_{mm} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{0m}=c_{m0}=\frac{\sqrt{2}((-1)^m-1)}{m^2\pi^2},\quad c_{mm}=\frac{1}{2},$$
$$c_{m-k,m}=c_{m,m-k}=\frac{2(m^2+(m-k)^2)((-1)^k-1)}{k^2(k-2m)^2\pi^2},$$
$$m=0,1,2,\ldots,\quad k=1,2,3,\ldots,m.$$

3. Нестационарные комплексные экспоненциальные функции (1.6):

$$A(1,1) = \tau \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{j}{2\pi} & -\frac{j}{2\pi} & \frac{j}{4\pi} & \dots & c_{0k} & \dots \\ -\frac{j}{2\pi} & \frac{1}{2} & -\frac{j}{4\pi} & \frac{j}{2\pi} & \dots & c_{1k} & \dots \\ \frac{j}{2\pi} & \frac{j}{4\pi} & \frac{1}{2} & \frac{j}{6\pi} & \dots & c_{2k} & \dots \\ -\frac{j}{4\pi} & -\frac{j}{2\pi} & -\frac{j}{6\pi} & \frac{1}{2} & \dots & c_{3k} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mk} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{mm} = \frac{1}{2}, \quad c_{mk} = \frac{j}{2\pi\left((-1)^m\left[\frac{m+1}{2}\right] - (-1)^k\left[\frac{k+1}{2}\right]\right)},$$

$$m, k = 0, 1, 2, \dots, \quad m \neq k, \quad j = \sqrt{-1}.$$

4. Нестационарные функции Уолша (1.7):

$$A(1,1) = \tau \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & \dots & c_{0l} & \dots \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{8} & \dots & c_{1l} & \dots \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \dots & c_{2l} & \dots \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \dots & c_{3l} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{k0} & c_{k1} & c_{k2} & c_{k3} & \dots & c_{kl} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{kl} = \begin{cases} \frac{1}{2}, \ k = l, \\ -\frac{1}{2^{m+2}}, \ k \oplus l = 2^m, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$m, k, l = 0, 1, 2, \dots \ .$$

Здесь выражение $k \oplus l$ означает поразрядное сложение по модулю 2 чисел k и l, записанных в двоичном представлении. Суть данной операции заключается в следующем. Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_{m_k+1}$ и $l_1, l_2, \ldots, l_{m_l+1}$ – коэффициенты в двоичном представлении чисел k и l соответственно, т.е.

$$k = k_1 2^0 + k_2 2^1 + k_3 2^2 + \ldots + k_{m_k+1} 2^{m_k} = \left(k_{m_k+1} \ldots k_3 k_2 k_1\right)_2,$$
$$l = l_1 2^0 + l_2 2^1 + l_3 2^2 + \ldots + l_{m_l+1} 2^{m_l} = \left(l_{m_l+1} \ldots l_3\, l_2\, l_1\right)_2,$$

где $m_k = [\log_2 k]$, $m_l = [\log_2 l]$. Не ограничивая общности, предположим, что $m_k \geqslant m_l$, в противном случае нужно применить свойство коммутативности операции $\oplus$, т.е. $k \oplus l = l \oplus k$. Пусть также коэффициенты l_{m_l+2}, l_{m_l+3}, $\ldots$ равны нулю. Тогда если

$$s = s_1 2^0 + s_2 2^1 + s_3 2^2 + \ldots + s_{m_k+1} 2^{m_k} = \left(s_{m_k+1} \ldots s_3 s_2 s_1\right)_2,$$

где

$$s_i = k_i + l_i \ (\mathrm{mod}\ 2), \quad i = 1, 2, \ldots, m_k + 1,$$

то $s = k \oplus l$.

Напомним правило сложения по модулю 2:

$$1 + 1 \ (\mathrm{mod}\ 2) = 0, \quad 1 + 0 \ (\mathrm{mod}\ 2) = 1,$$
$$0 + 1 \ (\mathrm{mod}\ 2) = 1, \quad 0 + 0 \ (\mathrm{mod}\ 2) = 0.$$

Например, найдем значение выражения $11 \oplus 5$. В двоичном представлении $11 = (1011)_2$ и $5 = (0101)_2$, т.е. $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0$, $k_4 = 1$, $l_1 = 1$, $l_2 = 0$, $l_3 = 1$, $l_4 = 0$, поэтому $s_1 = k_1 + l_1 \ (\mathrm{mod}\ 2) = 0$, $s_2 = k_2 + l_2 \ (\mathrm{mod}\ 2) = 1$, $s_3 = k_3 + l_3 \ (\mathrm{mod}\ 2) = 1$, $s_4 = k_4 + l_4 \ (\mathrm{mod}\ 2) = 1$, следовательно, $s = (1110)_2 = 14$.

5. Полиномы Лагерра (1.10) и функции Лагерра (1.11):

$$A(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 3 & 7 & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_{m-1,m} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{m,m-1} & c_{mm} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{mm} = 2m + 1, \quad c_{m-1,m} = c_{m,m-1} = m, \quad c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0,$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 2, 3, 4, \ldots, m.$$

Примеры нестационарных спектральных характеристик $V(1,2)$ ***множительного звена***, определенных относительно различных базисных систем, приведены в [51, 71, 73].

Пример 1.22. Найти нестационарную спектральную характеристику оператора умножения на функцию $a(t) = \cos t$ относительно нестационарных косинусоид (1.5), заданных на стационарном отрезке $T = [0, \pi]$.

☐ Элементы a_{ij} нестационарной спектральной характеристики $A(1,1)$ оператора умножения на функцию $a(t) = \cos t$ вычисляются по формуле (1.52), которая для данного примера имеет вид

$$a_{ij} = \int_0^{\pi} \cos t\, \hat{C}(i,t)\hat{C}(j,t)\, dt.$$

При $i = 0$ с учетом ортонормированности базисной системы (1.5) получаем

$$a_{0j} = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_0^{\pi} \cos t\, \hat{C}(j,t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos t\, \hat{C}(j,t)\, dt,$$

но в то же время

$$\hat{C}(1,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos t,$$

следовательно,

$$a_{0j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \hat{C}(1,t)\hat{C}(j,t)\, dt = \frac{\delta_{1j}}{\sqrt{2}},$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

что следует из (1.2).

Пусть теперь $i = 1, 2, 3, \ldots$, тогда

$$a_{ij} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \cos t \cos it\, \hat{C}(j,t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \big(\cos(i-1)t + \cos(i+1)t\big)\, \hat{C}(j,t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \cos(i-1)t\, \hat{C}(j,t)\, dt + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \cos(i+1)t\, \hat{C}(j,t)\, dt =$$

$$= \frac{\alpha_i}{2}\int\limits_0^{\pi} \hat{C}(i-1,t)\hat{C}(j,t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \hat{C}(i+1,t)\hat{C}(j,t)\,dt =$$

$$= \frac{\alpha_i \delta_{i-1,j}}{2} + \frac{\delta_{i+1,j}}{2},$$

где

$$\alpha_i = \begin{cases} \sqrt{2}, \ i = 1, \\ 1, \ i = 2, 3, 4, \dots \ . \end{cases}$$

По найденным выражениям для элементов a_{ij} получаем искомую нестационарную спектральную характеристику оператора умножения на функцию $a(t) = \cos t$:

$$A(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_{m-1,m} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{m,m-1} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{m-1,m} = c_{m,m-1} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \ m = 1, \\ \dfrac{1}{2}, \ m = 2, 3, 4, \dots, \end{cases}$$

$$c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0,$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 2, 3, \dots, m. \quad \blacksquare$$

Пример 1.23. Найти нестационарную спектральную характеристику функции $w(t) = t^4$ относительно нестационарных полиномов Лежандра (1.4), заданных на нестационарном отрезке $T = [0, \tau]$.

□ Поскольку $w(t) = t \cdot t^3$, воспользуемся свойством спектрального преобразования произведения функций времени. Тогда нестационарная спектральная характеристика $W(1,0)$ функции $w(t)$ равна произведению нестационарной спектральной характеристики $A(1,1)$ оператора умножения на функцию $a(t) = t$ (см. примеры нестационарных спектральных характеристик оператора умножения на функцию $a(t) = t$) и нестационарной спектральной характеристики $H(1,0)$ функции $h(t) = t^3$ (см. пример 1.14), определенных относительно нестационарных полиномов Лежандра:

$$W(1,0) = A(1,1) \cdot H(1,0) =$$

$$= \tau \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2\sqrt{15}} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{2}{2\sqrt{15}} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{35}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{35}} & \frac{1}{2} & \frac{4}{2\sqrt{63}} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{2\sqrt{63}} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2\sqrt{99}} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2\sqrt{99}} & \frac{1}{2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \tau^3\sqrt{\tau} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3\sqrt{3}}{20} \\ \frac{\sqrt{5}}{20} \\ \frac{\sqrt{7}}{140} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} =$$

$$= \tau^4\sqrt{\tau} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{20} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{20} + \frac{2}{2\sqrt{15}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{20} \\ \frac{2}{2\sqrt{15}}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{20} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{20} + \frac{3}{2\sqrt{35}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{140} \\ \frac{3}{2\sqrt{35}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{20} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{140} \\ \frac{4}{2\sqrt{63}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{140} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \tau^4\sqrt{\tau} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2\sqrt{3}}{15} \\ \frac{2\sqrt{5}}{35} \\ \frac{\sqrt{7}}{70} \\ \frac{\sqrt{9}}{630} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix},$$

т.е.

$$w_0 = \frac{\tau^4\sqrt{\tau}}{5}, \quad w_1 = \frac{2\tau^4\sqrt{3\tau}}{15}, \quad w_2 = \frac{2\tau^4\sqrt{5\tau}}{35}, \quad w_3 = \frac{\tau^4\sqrt{7\tau}}{70},$$
$$w_4 = \frac{\tau^4\sqrt{9\tau}}{630}, \quad w_i = 0, \quad i = 5, 6, 7, \dots .$$

Проверим найденное решение. Применяя формулу обращения (1.38), получаем

$$w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \cdot \hat{P}(i,t) = \frac{\tau^4\sqrt{\tau}}{5}\hat{P}(0,t) + \frac{2\tau^4\sqrt{3\tau}}{15}\hat{P}(1,t) +$$
$$+ \frac{2\tau^4\sqrt{5\tau}}{35}\hat{P}(2,t) + \frac{\tau^4\sqrt{7\tau}}{70}\hat{P}(3,t) + \frac{\tau^4\sqrt{9\tau}}{630}\hat{P}(4,t) = t^4. \quad \blacksquare$$

Операторы умножения в пространстве функций вектора состояния

Рассмотрим операторы умножения, определенные на пространстве $L_2(\Omega; \rho(x))$. Линейный оператор $\mathcal{A}$ называется **оператором умножения** на функцию $a(x)$, если для всех функций $h(x) \in L_2(\Omega; \rho(x))$ справедливо равенство $\mathcal{A}h(x) = a(x)h(x)$, где $a(x)$ – локально интегрируемая функция на множестве $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$.

Пусть $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ – базис пространства $L_2(\Omega; \rho(x))$, тогда гиперквадратная матрица $A(n,n) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_n j_1 j_2 \ldots j_n})$, элементы которой определяются формулой

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_n j_1 j_2 \ldots j_n} = \big(p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x), a(x) \cdot p(j_1, j_2, \ldots, j_n, x)\big)_{L_2(\Omega; \rho(x))}, \quad (1.54)$$

$$i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_n = 0, 1, 2, \ldots,$$

называется **спектральной характеристикой оператора умножения** на функцию $a(x)$, т.е.

$$\mathbb{S}\,[\mathcal{A}] = A(n,n).$$

Приведем *свойства спектрального преобразования операторов умножения, определенных на пространстве* $L_2(\Omega; \rho(x))$.

1. Спектральная характеристика оператора умножения является эрмитовой матрицей, т.е. $A(n,n) = A^*(n,n)$. В случае, если все функции базисной системы принимают вещественные значения, то матрица $A(n,n)$ является симметрической, т.е. $A(n,n) = A^{\mathrm{T}}(n,n)$.

2. Спектральная характеристика оператора умножения на константу $\alpha \in \mathbb{R}$ равна произведению этой константы на $2n$-мерную единичную матрицу:

$$\mathbb{S}\,[\mathcal{A}] = \alpha E(n,n),$$

где $\mathcal{A}h(x) = \alpha h(x)$, $h(x) \in L_2(\Omega; \rho(x))$.

3. Спектральная характеристика произведения функций вектора состояния $h_1(x) \cdot h_2(x)$ равна произведению спектральной характеристики $H_1(n,n)$ оператора умножения на функцию $h_1(x)$ и спектральной характеристики $H_2(n,0)$ функции $h_2(x)$, т.е.

$$\mathbb{S}\,[h_1(x) \cdot h_2(x)] = H_1(n,n) \cdot H_2(n,0).$$

Для доказательства свойства 1 достаточно записать формулу, по которой вычисляются элементы спектральной характеристики $A(n,n)$, и воспользоваться определением сопряженной матрицы (см. разд. 1.2.3). Свойство 2 следует из определения спектральных характеристик операторов умножения с учетом ортонормированности базисной системы $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$. Свойство 3 является следствием теоремы 1.3.

Как и в предыдущем подразделе, определим **спектральную характеристику множительного звена**, которая в данном случае представляет собой $3n$-мерную матрицу $V(n,2n) = (v_{i_1 i_2 \ldots i_n j_1 j_2 \ldots j_n k_1 k_2 \ldots k_n})$, где

$$\begin{aligned} &v_{i_1 i_2 \ldots i_n j_1 j_2 \ldots j_n k_1 k_2 \ldots k_n} = \\ &\quad = \big(p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x), p(j_1, j_2, \ldots, j_n, x) \cdot p(k_1, k_2, \ldots, k_n, x)\big)_{L_2(\Omega;\,\rho(x))}, \quad (1.55) \\ &i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_n, k_1, k_2, \ldots, k_n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Утверждение 1.12. *Пусть $A(n,n)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a(x) \in L_2(\Omega; \rho(x))$, $A(n,0)$ – спектральная характеристика функции $a(x)$, $V(n,2n)$ – спектральная характеристика множительного звена. Спектральные характеристики $A(n,n)$, $A(n,0)$ и $V(n,2n)$ определены относительно базисной системы $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$. Тогда спектральные характеристики $A(n,n)$ и $A(n,0)$ связаны соотношением*

$$A(n,n) = V(n,2n) \odot A(n,0).$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству утверждения 1.11.

Приведем ***примеры спектральных характеристик*** $A(1,1)$ ***оператора умножения на функцию одной переменной*** $a(x) = x$, определенных относительно различных базисных систем, заданных на конечных отрезках или бесконечном интервале (см. разд. 1.1.2).

1. Полиномы Лежандра (1.17), заданные на отрезке $\Omega = [0, a]$:

$$A(1,1) = a \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2\sqrt{15}} & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{2}{2\sqrt{15}} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{35}} & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{35}} & \frac{1}{2} & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_{m-1,m} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{m,m-1} & c_{mm} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{mm} = \frac{1}{2}, \quad c_{m-1,m} = c_{m,m-1} = \frac{m}{2\sqrt{4m^2-1}}, \quad c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0,$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 2, 3, 4, \ldots, m.$$

2. Тригонометрические функции (1.18):

$$A(1,1) = a \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{\pi} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} & \dots & c_{0m} & \dots \\ \frac{\sqrt{2}}{\pi} & 0 & -\frac{1}{2\pi} & 0 & \dots & c_{1m} & \dots \\ 0 & -\frac{1}{2\pi} & 0 & \frac{4}{3\pi} & \dots & c_{2m} & \dots \\ -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} & 0 & \frac{4}{3\pi} & 0 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{0k} = c_{k0} = \frac{2\sqrt{2}(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{(k+1)\pi},$$

$$c_{k-1,k} = c_{k,k-1} = \frac{(-1)^{k+1} + k}{k\pi},$$

$$c_{l-1,l} = c_{l,l-1} = \frac{(-1)^{l+1}}{l\pi},$$

$$c_{k-s,k} = c_{k,k-s} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{\frac{2k-s-1}{2}}}{2k-s+1} + \frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{s+1}\right),$$

$$c_{l-v,l} = c_{l,l-v} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{\frac{2l-v-1}{2}}}{2l-v+1} - \frac{(-1)^{\frac{-v-1}{2}}}{v-1}\right),$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 2m+1, \quad l = 2m+2,$$

$$s = 3, 5, 7, \dots, k-2, \quad v = 3, 5, 7, \dots, l-1.$$

3. Функции Уолша (1.19):

$$A(1,1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & \dots & c_{0l} & \dots \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{8} & \dots & c_{1l} & \dots \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \dots & c_{2l} & \dots \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \dots & c_{3l} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{k0} & c_{k1} & c_{k2} & c_{k3} & \dots & c_{kl} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{kl} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, \ k = l, \\ -\dfrac{1}{2^{m+2}}, \ k \oplus l = 2^m, \\ 0 \ \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

$m, k, l = 0, 1, 2, \dots,$

$\oplus$ – операция поразрядного сложения

по модулю 2 (см. предыдущий подраздел).

4. Полиномы Эрмита (1.20) и функции Эрмита (1.21):

$$A(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_{m-1,m} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{m,m-1} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{m-1,m} = c_{m,m-1} = \sqrt{\frac{m}{2}}, \quad c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0,$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 2, 3, \dots, m.$$

Примеры спектральных характеристик $V(1,2)$ ***множительного звена***, определенных относительно различных базисных систем, приведены в [51, 71, 73].

Сформулируем утверждение о представлении спектральных характеристик оператора умножения.

Утверждение 1.13. *Пусть функции базисной системы*

$$\{p(i_1, i_2, \dots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \dots, i_n = 0}^{\infty}$$

порождаются всевозможными произведениями функций $\{p_1(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$, $\{p_2(i_2, x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$, $\dots$, $\{p_n(i_n, x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$, *образующих базисные системы про-*

странств $L_2(\Omega_1; \rho_1(x_1))$, $L_2(\Omega_2; \rho_2(x_2))$, $\ldots$, $L_2(\Omega_n; \rho_n(x_n))$ *соответственно (см.* (1.23)), $\rho(x) = \rho_1(x_1)\rho_2(x_2)\ldots\rho_n(x_n)$. *Пусть также функцию* $a(x)$ *можно представить в виде произведения*

$$a(x) = a_1(x_1) \cdot a_2(x_2) \cdots a_n(x_n),$$

причем $a_l(x_l)$ *– локально интегрируемая функция на множестве* Ω_l, *где* $l = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда спектральную характеристику оператора умножения на функцию* $a(x)$, *определенную относительно базисной системы* $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, *можно представить в виде тензорного произведения*

$$A(n, n) = A_1(1, 1) \otimes A_2(1, 1) \otimes \ldots \otimes A_n(1, 1), \tag{1.56}$$

где $A_l(1, 1)$ *– спектральная характеристика оператора умножения на функцию* $a_l(x_l)$, *определенная относительно базисной системы* $\{p_l(i_l, x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$, $l = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. По определению элементы спектральной характеристики оператора умножения на функцию $a(x)$ вычисляются по формуле

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_n j_1 j_2 \ldots j_n} = \int\limits_{\Omega} \rho(x)\, a(x)\, p^*(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\, p(j_1, j_2, \ldots, j_n, x)\, dx,$$
$$i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_n = 0, 1, 2, \ldots,$$

а так как все подынтегральные функции представляются в виде произведения, то

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_n j_1 j_2 \ldots j_n} =$$
$$= \int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_2} \ldots \int\limits_{\Omega_n} \rho_1(x_1)\rho_2(x_2)\ldots\rho_n(x_n)\, a_1(x_1)\, a_2(x_2)\ldots a_n(x_n) \times$$
$$\times\, p_1^*(i_1, x_1)\, p_2^*(i_2, x_2)\ldots p_n^*(i_n, x_n)\, p_1(j_1, x_1)\, p_2(j_2, x_2)\ldots p_n(j_n, x_n) \times$$
$$\times\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \int\limits_{\Omega_1} \rho_1(x_1)\, a_1(x_1)\, p_1^*(i_1, x_1)\, p_1(j_1, x_1)\, dx_1 \times$$
$$\times \int\limits_{\Omega_2} \rho_2(x_2)\, a_2(x_2)\, p_2^*(i_2, x_2)\, p_2(j_2, x_2)\, dx_2 \times \ldots \times$$
$$\times \int\limits_{\Omega_n} \rho_n(x_n)\, a_n(x_n)\, p_n^*(i_n, x_n)\, p_n(j_n, x_n)\, dx_n =$$
$$= a^1_{i_1 j_1} \cdot a^2_{i_2 j_2} \cdots a^n_{i_n j_n},$$

где величины

$$a^l_{i_l j_l} = \int\limits_{\Omega_l} \rho_l(x_l) a_l(x_l) p^*_l(i_l, x_l) p_l(j_l, x_l)\, dx_l$$

являются элементами спектральной характеристики $A_l(1,1)$ оператора умножения на функцию $a_l(x_l)$, определенной относительно базисной системы $\{p_l(i_l, x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$, $l = 1, 2, \ldots, n$. Учитывая правило тензорного умножения многомерных матриц (см. разд. 1.2.3), получаем (1.56). ◀

Замечание 1.12. Если выполнены условия утверждения 1.13, то спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$, представляется в виде тензорного произведения

$$V(n, 2n) = V_1(1,2) \otimes V_2(1,2) \otimes \ldots \otimes V_n(1,2),$$

где $V_l(1,2) = (v^l_{i_l j_l k_l})$ – спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно базисной системы $\{p_l(i_l, x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$, $l = 1, 2, \ldots, n$:

$$v^l_{i_l j_l k_l} = \big(p_l(i_l, x_l), p_l(j_l, x_l) \cdot p_l(k_l, x_l)\big)_{L_2(\Omega_l; \rho_l(x_l))},$$
$$i_l, j_l, k_l = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Пример 1.24. Найти спектральную характеристику оператора умножения на функцию $a(x_1, x_2) = x_1 x_2$ относительно базисной системы функций Эрмита $\{\hat\Phi(i_1, x_1)\hat\Phi(i_2, x_2)\}_{i_1, i_2 = 0}^{\infty}$.

□ Согласно утверждению 1.13, искомая спектральная характеристика $A(2,2)$ представляется в виде тензорного произведения спектральных характеристик $A_1(1,1)$ и $A_2(1,1)$ операторов умножения на функции $a_1(x_1) = x_1$ и $a_2(x_2) = x_2$ соответственно, определенных относительно функций Эрмита (1.21), поэтому

$$A(2,2) = A_1(1,1) \otimes A_2(1,1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \ldots \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \ldots \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \ldots \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \ldots \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \ldots \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \ldots \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} =$$

$$
= \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\
\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\
\vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix},
$$

т.е. элементы матрицы $A(2,2)$ определяются следующими выражениями:

$$
\begin{gathered}
a_{m_1-1,m_2-1,m_1,m_2} = a_{m_1,m_2-1,m_1-1,m_2} = \\
= a_{m_1-1,m_2,m_1,m_2-1} = a_{m_1,m_2,m_1-1,m_2-1} = \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{2}, \\
a_{m_1-k_1,m_2-k_2,m_1,m_2} = a_{m_1,m_2-k_2,m_1-k_1,m_2} = \\
= a_{m_1-k_1,m_2,m_1,m_2-k_2} = a_{m_1,m_2,m_1-k_1,m_2-k_2} = 0, \\
m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots, \\
k_1 = 0, 2, 3, \dots, m_1, \quad k_2 = 0, 2, 3, \dots, m_2. \quad \blacksquare
\end{gathered}
$$

Операторы умножения в пространстве функций времени и вектора состояния

Перейдем к определению спектральных характеристик операторов умножения, заданных на пространстве $L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$. Линейный оператор $\mathcal{A}$ называется **оператором умножения** на функцию $a(t,x)$, если для любой функции $h(t,x) \in L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$ справедливо выражение $\mathcal{A}h(t,x) = a(t,x)h(t,x)$, где $a(t,x)$ – локально интегрируемая функция на множестве $Q_T = T \times \Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Пусть $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$ – базисная система пространства $L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$. Тогда гиперквадратная матрица

$$A(n+1, n+1) = (a_{i_0 i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n}),$$

элементы которой определяются формулой

$$\begin{aligned} &a_{i_0 i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n} = \\ &\quad = \big(e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x), a(t, x) \cdot e(j_0, j_1, \ldots, j_n, t, x)\big)_{L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))}, \\ &i_0, i_1, \ldots, i_n, j_0, j_1, \ldots, j_n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{1.57}$$

называется **нестационарной спектральной характеристикой оператора умножения** на функцию $a(t, x)$, т.е.

$$\mathbb{S}\,[\mathcal{A}] = A(n+1, n+1).$$

Свойства спектрального преобразования операторов умножения, определенных на пространстве $L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$, такие же, как и в случае операторов умножения, определенных на пространствах $L_2(T; \nu(t))$ и $L_2(\Omega; \rho(x))$.

1. Нестационарная спектральная характеристика оператора умножения является эрмитовой матрицей, т.е. $A(n+1, n+1) = A^*(n+1, n+1)$. В случае, если все функции базисной системы принимают вещественные значения, то матрица $A(n+1, n+1)$ является симметрической, т.е. $A(n+1, n+1) = A^{\mathrm{T}}(n+1, n+1)$.

2. Нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на константу $\alpha \in \mathbb{R}$ равна произведению этой константы на единичную матрицу размерности $2(n+1)$:

$$\mathbb{S}\,[\mathcal{A}] = \alpha E(n+1, n+1),$$

где $\mathcal{A}h(t, x) = \alpha h(t, x)$, $h(t, x) \in L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$.

3. Нестационарная спектральная характеристика произведения функций времени и вектора состояния $h_1(t, x) \cdot h_2(t, x)$ равна произведению нестационарной спектральной характеристики $H_1(n+1, n+1)$ оператора умножения на функцию $h_1(t, x)$ и нестационарной спектральной характеристики $H_2(n+1, 0)$ функции $h_2(t, x)$, т.е.

$$\mathbb{S}\,[h_1(t, x) \cdot h_2(t, x)] = H_1(n+1, n+1) \cdot H_2(n+1, 0).$$

Доказательство этих свойств аналогично доказательству свойств спектрального преобразования операторов умножения, определенных на пространстве $L_2(\Omega; \rho(x))$ (см. предыдущий подраздел).

Матрица $V(n+1,2n+2) = (v_{i_0 i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n k_0 k_1 \ldots k_n})$ размерности $3(n+1)$, элементы которой вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} v_{i_0 i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n k_0 k_1 \ldots k_n} &= \big(e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x), \\ &\quad e(j_0, j_1, \ldots, j_n, t, x) \cdot e(k_0, k_1, \ldots, k_n, t, x)\big)_{L_2(Q_T;\, \nu(t)\rho(x))}, \qquad (1.58) \\ i_0, i_1, \ldots, i_n, j_0, &j_1, \ldots, j_n, k_0, k_1, \ldots, k_n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

называется **нестационарной спектральной характеристикой множительного звена** и служит для перехода от нестационарной спектральной характеристики функции времени и вектора состояния к соответствующей нестационарной спектральной характеристике оператора умножения.

Утверждение 1.14. *Пусть $A(n+1, n+1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a(t,x) \in L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$, $A(n+1, 0)$ – нестационарная спектральная характеристика этой функции, $V(n+1, 2n+2)$ – нестационарная спектральная характеристика множительного звена. Нестационарные спектральные характеристики $A(n+1,n+1)$, $A(n+1,0)$ и $V(n+1,2n+2)$ определены относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$. Тогда нестационарные спектральные характеристики $A(n+1,n+1)$ и $A(n+1,0)$ связаны соотношением*

$$A(n+1, n+1) = V(n+1, 2n+2) \odot A(n+1, 0).$$

Доказательство проводится аналогично доказательству утверждения 1.11.

Утверждение 1.15. *Пусть система функций $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2(T; \nu(t))$, а система $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2(\Omega; \rho(x))$. Пусть также функцию $a(t,x)$ можно представить в виде произведения $a(t,x) = a_0(t) \cdot \tilde{a}(x)$, где $a_0(t)$ и $\tilde{a}(x)$ – локально интегрируемые функции на множествах T и Ω соответственно. Тогда нестационарную спектральную характеристику оператора умножения на функцию $a(t,x)$, определенную относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x) = q(i_0, t) \cdot p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$, можно представить следующим образом:*

$$A(n+1, n+1) = A_0(1,1) \otimes \tilde{A}(n,n),$$

где $A_0(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_0(t)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, $\tilde{A}(n,n)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\tilde{a}(x)$, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$.

Доказательство проводится так же, как и доказательство утверждения 1.13.

Замечание 1.13. Если выполнены условия утверждения 1.15, то нестационарную спектральную характеристику множительного звена, определенную относительно базисной системы

$$\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty},$$

можно представить в виде

$$V(n+1, 2n+2) = V_0(1,2) \otimes \tilde{V}(n, 2n),$$

где $V_0(1,2)$ – нестационарная спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, $\tilde{V}(n,2n)$ – спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$.

Пример 1.25. Найти нестационарную спектральную характеристику оператора умножения на функцию $a(t,x) = \cos t$ относительно базисной системы $\{\hat{C}(i_0,t)\hat{\Omega}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$, заданной на множестве $Q_T = [0, \pi] \times [0,1]$.

□ Из утверждения 1.15 следует, что нестационарная спектральная характеристика $A(2,2)$ оператора умножения на функцию $a(t,x) = \cos t$ представляется в виде тензорного произведения нестационарной спектральной характеристики $A_0(1,1)$ оператора умножения на функцию $a_0(t) = \cos t$, определенной относительно нестационарных косинусоид (1.5), заданных на стационарном отрезке $T = [0, \pi]$ (см. пример 1.22), и спектральной характеристики $\tilde{A}(1,1)$ оператора умножения на функцию $\tilde{a}(x) \equiv 1$, определенной относительно функций Уолша (1.19), заданных на отрезке $\Omega = [0,1]$.

Согласно свойству 2 спектрального преобразования операторов умножения, определенных на пространстве функций вектора состояния (см. предыдущий подраздел), спектральная характеристика $\tilde{A}(1,1)$ представляет собой единичную матрицу $E(1,1)$, следовательно, нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a(t,x) = \cos t = a_0(t) \cdot \tilde{a}(x)$ имеет вид

$$A(2,2) = A_0(1,1) \otimes \tilde{A}(1,1) = A_0(1,1) \otimes E(1,1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где элементы матрицы $A(2,2)$ определяются формулой

$$a_{m-k,i,m,j} = a_{m,i,m-k,j} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ i = j,\ k = 1,\ m = 1, \\ \dfrac{1}{2},\ i = j,\ k = 1,\ m = 2, 3, 4, \dots, \\ 0 \ \ \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$i, j, m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m. \quad \blacksquare$$

1.4.3. Спектральные характеристики операторов дифференцирования

Операторы дифференцирования в пространстве функций времени

Пусть $\mathcal{D}_t$ – **оператор дифференцирования**, определенный на пространстве $L_2(T; \nu(t))$:

$$\mathcal{D}_t h(t) = \frac{dh(t)}{dt},$$

где $h(t) \in L_2(T; \nu(t))$, а система функций $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2(T; \nu(t))$. Воспользуемся определением (1.49) при $\mathcal{A} = \mathcal{D}_t$.

Квадратная матрица $\mathcal{P}(1,1) = (\mathcal{P}_{ij})$, элементы которой определяются формулой

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(q(i,t), \frac{dq(j,t)}{dt} \right)_{L_2(T;\nu(t))}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots, \tag{1.59}$$

называется **нестационарной спектральной характеристикой оператора дифференцирования**, т.е.

$$\mathbb{S}[\mathcal{D}_t] = \mathcal{P}(1,1).$$

Известно [71], что нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования не позволяет учитывать значение функции в начальный момент времени t_0 (на левом конце промежутка T). Рассмотрим функцию, которая удовлетворяет условию $h(t_0+0) = h_0$, изображенную на рис. 1.11.

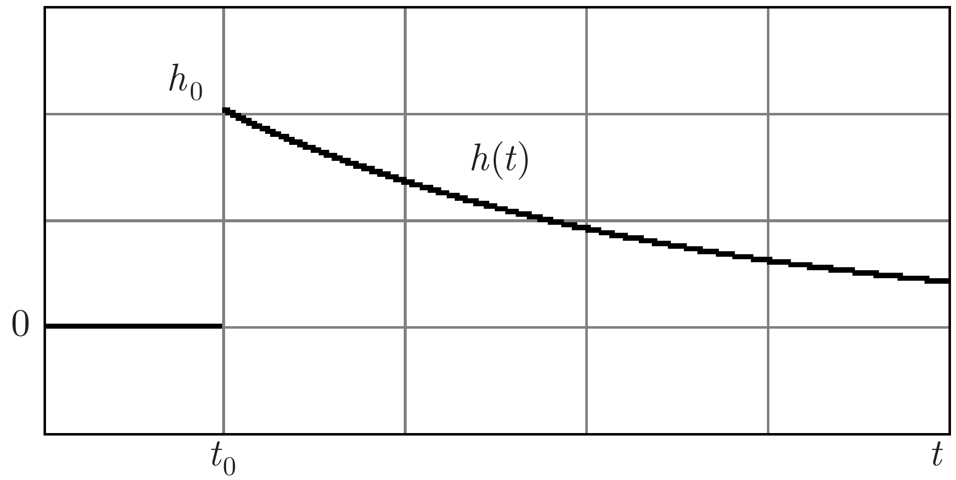

Рис. 1.11. График функции $h(t)$, имеющей разрыв первого рода в начальной точке t_0

Найдем производную этой функции:

$$\frac{d}{dt}\big[h(t)1(t-t_0)\big] = \frac{dh(t)}{dt}1(t-t_0) + h(t)\frac{d1(t-t_0)}{dt} =$$

$$= \frac{dh(t)}{dt}1(t-t_0) + h(t)\delta(t-t_0), \tag{1.60}$$

где $1(t-t_0)$ – единичная ступенчатая функция [39]:

$$1(t-t_0) = \begin{cases} 1, & t > t_0, \\ 0, & t \leqslant t_0, \end{cases}$$

а $\delta(t-t_0)$ – δ-функция [29, 45], определенная выражением

$$\int\limits_T h(t)\delta(t-t_0)\,dt = h(t_0+0), \tag{1.61}$$

в котором $h(t)$ – элемент пространства $L_2(T;\,\nu(t))$.

Замечание 1.14. В дальнейшем для упрощения записи вместо выражения $h(t_0+0)$ будем использовать $h(t_0)$.

Производная в (1.60) понимается в обобщенном смысле [29, 33, 45], а соответствующий оператор дифференцирования задается соотношением

$$\tilde{\mathcal{D}}_t h(t) = \frac{dh(t)}{dt} + \delta(t-t_0)\,h(t)$$

и называется **оператором дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени**.

Таким образом, оператор $\tilde{\mathcal{D}}_t$ вводится для дифференцирования функций времени с учетом их значения в начальный момент.

Нестационарной спектральной характеристикой оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени называется нестационарная спектральная характеристика оператора $\tilde{\mathcal{D}}_t$, т.е. такая квадратная матрица $P(1,1) = (P_{ij})$, что

$$P_{ij} = \left(q(i,t), \frac{dq(j,t)}{dt}\right)_{L_2(T;\,\nu(t))} + \nu(t_0)\,q^*(i,t_0)\,q(j,t_0), \tag{1.62}$$
$$i,j = 0,1,2,\ldots\ .$$

Полученное соотношение следует из (1.49) при $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{D}}_t$:

$$\begin{aligned}
P_{ij} &= \left(q(i,t), \frac{dq(j,t)}{dt} + \delta(t-t_0)\,q(j,t)\right)_{L_2(T;\,\nu(t))} = \\
&\left(q(i,t), \frac{dq(j,t)}{dt}\right)_{L_2(T;\,\nu(t))} + \big(q(i,t), \delta(t-t_0)\,q(j,t)\big)_{L_2(T;\,\nu(t))} = \\
&= \left(q(i,t), \frac{dq(j,t)}{dt}\right)_{L_2(T;\,\nu(t))} + \int\limits_T \nu(t)\,q^*(i,t)\,q(j,t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \\
&= \left(q(i,t), \frac{dq(j,t)}{dt}\right)_{L_2(T;\,\nu(t))} + \nu(t_0)\,q^*(i,t_0)\,q(j,t_0),
\end{aligned}$$

где $q^*(i,t_0)$ – комплексное сопряженное число.

Далее будем обозначать через $q(0,1;t)$ матрицу-строку, элементами которой являются значения функций базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ в точке t:

$$q(0,1;t) = \big[\; q(0,t) \;\; q(1,t) \;\; q(2,t) \;\; \ldots \;\big].$$

Тогда сопряженная матрица по отношению к $q(0,1;t)$ представляется в виде матрицы-столбца, которую обозначим через $q(1,0;t)$:

$$q(1,0;t) = q^*(0,1;t) = \begin{bmatrix} q^*(0,t) & q^*(1,t) & q^*(2,t) & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

где $q^*(i,t)$ – комплексная сопряженная функция, $i = 0,1,2,\ldots$.

Утверждение 1.16. *Нестационарные спектральные характеристики $\mathcal{P}(1,1)$ и $P(1,1)$ операторов дифференцирования $\mathcal{D}_t$ и $\tilde{\mathcal{D}}_t$ соответственно связаны соотношением*

$$\mathcal{P}(1,1) = P(1,1) - \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\cdot q(0,1;t_0). \tag{1.63}$$

Доказательство непосредственно следует из определения нестационарных спектральных характеристик операторов дифференцирования и правила умножения матриц (см. разд. 1.2.3).

Утверждение 1.17. *Пусть $T = [t_0, t_1]$ – конечный стационарный отрезок времени, $L(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\frac{d\ln\nu(t)}{dt}$, тогда*

$$\mathcal{P}(1,1) = -P^*(1,1) - L(1,1) + \nu(t_1)\cdot q(1,0;t_1)\cdot q(0,1;t_1), \tag{1.64}$$

где $P^*(1,1)$ – сопряженная матрица.

Доказательство. Запишем формулу (1.59), используя (1.1):

$$\mathcal{P}_{ij} = \int_{t_0}^{t_1} \nu(t)\, q^*(i,t)\, \frac{dq(j,t)}{dt}\, dt,$$

а затем применим правило интегрирования по частям:

$$\mathcal{P}_{ij} = \nu(t_1)q^*(i,t_1)q(j,t_1) - \nu(t_0)q^*(i,t_0)q(j,t_0) -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \nu(t)\,\frac{dq^*(i,t)}{dt}\,q(j,t)\,dt - \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\nu(t)\,\frac{1}{\nu(t)}}_{1}\,\frac{d\nu(t)}{dt}\,q^*(i,t)\,q(j,t)\,dt.$$

Далее воспользуемся правилом нахождения сопряженной матрицы (см. разд. 1.2.3), т.е.

$$\mathcal{P}^*_{ji} = \int_{t_0}^{t_1} \nu(t)\,\frac{dq^*(i,t)}{dt}\,q(j,t)\,dt,$$

и определением нестационарной спектральной характеристики $L(1,1) = (L_{ij})$ оператора умножения на функцию времени $\frac{1}{\nu(t)} \cdot \frac{d\nu(t)}{dt} = \frac{d\ln\nu(t)}{dt}$ (см. разд. 1.4.2):

$$L_{ij} = \int_{t_0}^{t_1} \nu(t) \frac{1}{\nu(t)} \frac{d\nu(t)}{dt} q^*(i,t) q(j,t)\, dt.$$

Следовательно,

$$\mathcal{P}_{ij} = \underbrace{-\mathcal{P}^*_{ji} - \nu(t_0) q^*(i,t_0) q(j,t_0)}_{-P^*_{ji}} - L_{ij} + \nu(t_1) q^*(i,t_1) q(j,t_1) =$$

$$= -P^*_{ji} - L_{ij} + \nu(t_1) q^*(i,t_1) q(j,t_1),$$

где P^*_{ji} и $\mathcal{P}^*_{ji}$ – комплексные сопряженные числа для P_{ji} и $\mathcal{P}_{ji}$ соответственно. Учитывая полученное выражение и правила сложения, вычитания и умножения матриц, получаем (1.64). ◄

Замечание 1.15. Рассмотрим несколько случаев, которые аналогичны утверждению 1.17.

1. Если $T = [t_0, +\infty)$, то

$$\mathcal{P}(1,1) = -P^*(1,1) - L(1,1).$$

2. Если $T = [t_0, t_1]$ и $\nu(t) \equiv 1$, то

$$\mathcal{P}(1,1) = -P^*(1,1) + q(1,0;t_1) \cdot q(0,1;t_1).$$

3. Если $T = [t_0, +\infty)$ и $\nu(t) \equiv 1$, то

$$\mathcal{P}(1,1) = -P^*(1,1).$$

Для доказательства пункта 1 достаточно указать, что если $T = [t_0, +\infty)$, то

$$\lim_{t\to+\infty} \nu(t) q^*(i,t) q(j,t) = 0,$$

так как интеграл в (1.2) с учетом (1.1) является сходящимся.

Доказательство пунктов 2 и 3 опирается на тот факт, что при $\nu(t) \equiv 1$ справедливо равенство $\frac{d\ln\nu(t)}{dt} = 0$ и, следовательно,

$$L(1,1) = \mathcal{O}(1,1),$$

где $\mathcal{O}(1,1)$ – двумерная нулевая матрица (см. разд. 1.2.3).

В случае, если функции базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ вещественнозначные, сопряженная матрица $P^*(1,1)$ совпадает с транспонированной матрицей $P^{\mathrm{T}}(1,1)$.

Приведем *свойства спектрального преобразования операторов дифференцирования*.

1. **Дифференцирование функций времени без учета начальных условий.**

Нестационарная спектральная характеристика производной функции $h(t)$ равна произведению нестационарной спектральной характеристики $\mathcal{P}(1,1)$ оператора дифференцирования $\mathcal{D}_t$ и нестационарной спектральной характеристики $H(1,0)$ функции $h(t)$:

$$\mathbb{S}\left[\frac{dh(t)}{dt}\right] = \mathcal{P}(1,1)\cdot H(1,0).$$

2. **Дифференцирование функций времени при заданных начальных условиях.**

Нестационарная спектральная характеристика производной функции $h(t)$ при условии, что $h(t_0) = h_0$, определяется следующим образом:

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{dh(t)}{dt}\right|_{h(t_0)=h_0}\right] = P(1,1)\cdot H(1,0) - h_0\cdot \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0).$$

3. **Дифференцирование функций времени при заданных конечных условиях.**

Пусть $T = [t_0, t_1]$ – конечный стационарный отрезок времени. Тогда нестационарная спектральная характеристика производной функции $h(t)$ при условии, что $h(t_1) = h_1$, определяется соотношением

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{dh(t)}{dt}\right|_{h(t_1)=h_1}\right] = -P^*(1,1)\cdot H(1,0) - \\ - L(1,1)\cdot H(1,0) + h_1\cdot \nu(t_1)\cdot q(1,0;t_1).$$

Если $T = [t_0, +\infty)$, то на основании замечания 1.15 можно сделать вывод о том, что

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{dh(t)}{dt}\right|_{h(t_1)=h_1}\right] = -P^*(1,1)\cdot H(1,0) - \\ - L(1,1)\cdot H(1,0) = \mathcal{P}(1,1)\cdot H(1,0).$$

Свойство 1 непосредственно следует из теоремы 1.2, свойства 2 и 3 следуют из утверждений 1.16 и 1.17 соответственно, а также правила умножения матриц (см. разд. 1.2.3) и свойства начальных значений функций времени (см. разд. 1.3.1).

Действительно, рассмотрим произведение $\mathcal{P}(1,1) \cdot H(1,0)$. Используя утверждение 1.16, можно записать, что

$$\mathcal{P}(1,1) \cdot H(1,0) = \big(P(1,1) - \nu(t_0) \cdot q(1,0;t_0) \cdot q(0,1;t_0)\big) \cdot H(1,0) =$$
$$= P(1,1) \cdot H(1,0) - \nu(t_0) \cdot q(1,0;t_0) \cdot q(0,1;t_0) \cdot H(1,0).$$

По правилу умножения матриц и правилу вычисления значений функций времени по известной нестационарной спектральной характеристике получаем

$$q(0,1;t_0) \cdot H(1,0) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{h}_i \cdot q(i,t_0) = h(t_0) = h_0,$$

где $\tilde{h}_i$ – координаты спектральной характеристики $H(1,0)$ (см. разд. 1.3.1). Тогда

$$\mathcal{P}(1,1) \cdot H(1,0) = P(1,1) \cdot H(1,0) - h_0 \cdot \nu(t_0) \cdot q(1,0;t_0).$$

Отсюда следует справедливость свойства 2. Свойство 3 доказывается аналогично.

В таблице 1.1 даны свойства нестационарных спектральных характеристик производных функций времени при заданных начальных или конечных условиях для частного случая $\nu(t) \equiv 1$, поскольку, как правило, при решении задач достаточно использовать базисные системы, заданные на стационарном отрезке или полубесконечном промежутке, с весовой функцией, тождественно равной единице.

Таблица 1.1. Нестационарные спектральные характеристики производных функции времени при заданных начальных или конечных условиях и $\nu(t) \equiv 1$

	$T = [t_0, t_1]$	$T = [t_0, +\infty)$
$\mathbb{S}\left[\left.\frac{dh(t)}{dt}\right\|_{h(t_0)=0}\right]$	$P(1,1) \cdot H(1,0)$	$P(1,1) \cdot H(1,0)$
$\mathbb{S}\left[\left.\frac{dh(t)}{dt}\right\|_{h(t_0)=h_0}\right]$	$P(1,1) \cdot H(1,0) -$ $- h_0 \cdot q(1,0;t_0)$	$P(1,1) \cdot H(1,0) -$ $- h_0 \cdot q(1,0;t_0)$
$\mathbb{S}\left[\left.\frac{dh(t)}{dt}\right\|_{h(t_1)=0}\right]$	$-P^*(1,1) \cdot H(1,0)$	$\mathcal{P}(1,1) \cdot H(1,0)$
$\mathbb{S}\left[\left.\frac{dh(t)}{dt}\right\|_{h(t_1)=h_1}\right]$	$-P^*(1,1) \cdot H(1,0) +$ $+ h_1 \cdot q(1,0;t_1)$	—

Приведем ***примеры нестационарных спектральных характеристик*** $P(1,1)$ ***оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени***, определенных относительно различных базисных систем (см. разд. 1.1.1).

1. Нестационарные полиномы Лежандра (1.4):

$$P(1,1) = \frac{1}{\tau} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} & \ldots & c_{0m} & \ldots \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{15} & \sqrt{21} & \ldots & c_{1m} & \ldots \\ \sqrt{5} & -\sqrt{15} & 5 & \sqrt{35} & \ldots & c_{2m} & \ldots \\ -\sqrt{7} & \sqrt{21} & -\sqrt{35} & 7 & \ldots & c_{3m} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \ldots & c_{mm} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{m-k,m} = \sqrt{(2m-2k+1)(2m+1)},$$

$$c_{m,m-k} = (-1)^k \sqrt{(2m+1)(2m-2k+1)},$$

$$m = 0,1,2,\ldots, \quad k = 0,1,2,\ldots,m.$$

2. Нестационарные косинусоиды (1.5):

$$P(1,1) = \frac{1}{\tau} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \ldots & c_{0m} & \ldots \\ \sqrt{2} & 2 & -\frac{10}{3} & 2 & \ldots & c_{1m} & \ldots \\ \sqrt{2} & \frac{10}{3} & 2 & -\frac{26}{5} & \ldots & c_{2m} & \ldots \\ \sqrt{2} & 2 & \frac{26}{5} & 2 & \ldots & c_{3m} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \ldots & c_{mm} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = 1, \quad c_{0m} = (-1)^m\sqrt{2}, \quad c_{m0} = \sqrt{2}, \quad c_{mm} = 2,$$

$$c_{m-k,m} = \frac{2\left((m-k)^2 - (-1)^k m^2\right)}{(m-k)^2 - m^2}, \quad c_{m,m-k} = \frac{2\left((-1)^k(m-k)^2 - m^2\right)}{(m-k)^2 - m^2},$$

$$m = 1,2,3,\ldots, \quad k = 1,2,3,\ldots,m-1.$$

3. Нестационарные комплексные экспоненциальные функции (1.6):

$$P(1,1) = \frac{1}{\tau} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & c_{0m} & \dots \\ 1 & 1-2\pi j & 1 & 1 & \dots & c_{1m} & \dots \\ 1 & 1 & 1+2\pi j & 1 & \dots & c_{2m} & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1-4\pi j & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{mm} = 1 + (-1)^m 2\pi j \left[\frac{m+1}{2}\right], \quad c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 1,$$
$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m, \quad j = \sqrt{-1}.$$

4. Нестационарные функции Уолша (1.7):

$$P(1,1) = \frac{1}{\tau} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & \dots & c_{0m} & \dots \\ 1 & 3 & -1 & -3 & \dots & c_{1m} & \dots \\ 1 & -1 & 7 & 1 & \dots & c_{2m} & \dots \\ 1 & 3 & -1 & 5 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = 1, \quad c_{2^m+l,k} = c_{lk}, \quad c_{k,2^m+l} = -c_{kl}, \quad c_{2^m+k,2^m+k} = 2^{m+2} - c_{kk},$$
$$c_{2^m+k,2^m+l} = -c_{kl}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, 2^m - 1.$$

5. Полиномы Лагерра (1.10):

$$P(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{mm} = 1, \quad c_{m-k,m} = 0, \quad c_{m,m-k} = (-1)^k,$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

6. Функции Лагерра (1.11):

$$P(1,1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \ldots & c_{mm} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{mm} = \frac{1}{2}, \quad c_{m-k,m} = 0, \quad c_{m,m-k} = (-1)^k,$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Пример 1.26. Найти нестационарную спектральную характеристику производной функции $h(t) = t^3$ с учетом нулевых начальных условий относительно нестационарных полиномов Лежандра (1.4), заданных на нестационарном отрезке $T = [0, \tau]$.

□ По свойству спектрального преобразования производных функций времени при нулевых начальных условиях нестационарная спектральная характеристика $W(1,0)$ функции $w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$ равна произведению нестационарной спектральной характеристики $P(1,1)$ оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени и нестационарной спектральной характеристики $H(1,0)$ функции $h(t)$ (см. пример 1.14), определенных относительно нестационарных полиномов Лежандра:

$$W(1,0) = P(1,1) \cdot H(1,0) =$$
$$= \frac{1}{\tau} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} & \sqrt{9} & \ldots \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{15} & \sqrt{21} & \sqrt{27} & \ldots \\ \sqrt{5} & -\sqrt{15} & 5 & \sqrt{35} & \sqrt{45} & \ldots \\ -\sqrt{7} & \sqrt{21} & -\sqrt{35} & 7 & \sqrt{63} & \ldots \\ \sqrt{9} & -\sqrt{27} & \sqrt{45} & -\sqrt{63} & 9 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \tau^3\sqrt{\tau} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3\sqrt{3}}{20} \\ \frac{\sqrt{5}}{20} \\ \frac{\sqrt{7}}{140} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} =$$

$$= \tau^2\sqrt{\tau}\cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \sqrt{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{20} + \sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{20} + \sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{140} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} + 3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{20} + \sqrt{15}\cdot\frac{\sqrt{5}}{20} + \sqrt{21}\cdot\frac{\sqrt{7}}{140} \\ \frac{\sqrt{5}}{4} - \sqrt{15}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{20} + 5\cdot\frac{\sqrt{5}}{20} + \sqrt{35}\cdot\frac{\sqrt{7}}{140} \\ -\frac{\sqrt{7}}{4} + \sqrt{21}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{20} - \sqrt{35}\cdot\frac{\sqrt{5}}{20} + 7\cdot\frac{\sqrt{7}}{140} \\ \frac{\sqrt{9}}{4} - \sqrt{27}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{20} + \sqrt{45}\cdot\frac{\sqrt{5}}{20} - \sqrt{63}\cdot\frac{\sqrt{7}}{140} \\ \vdots \end{bmatrix} = \tau^2\sqrt{\tau}\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix},$$

т.е.

$$w_0 = \tau^2\sqrt{\tau}, \quad w_1 = \frac{\tau^2\sqrt{3\tau}}{2}, \quad w_2 = \frac{\tau^2\sqrt{5\tau}}{10},$$
$$w_i = 0, \quad i = 3, 4, 5, \ldots\ .$$

Проверим найденное решение. По формуле обращения (1.38) получаем

$$w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \cdot \hat{P}(i,t) =$$
$$= \tau^2\sqrt{\tau}\,\hat{P}(0,t) + \frac{\tau^2\sqrt{3\tau}}{2}\hat{P}(1,t) + \frac{\tau^2\sqrt{5\tau}}{10}\hat{P}(2,t) = 3t^2. \quad \blacksquare$$

Операторы дифференцирования в пространстве функций вектора состояния

Одномерный случай. Спектральная характеристика оператора дифференцирования в пространстве функций одной переменной x определяется таким же образом, как и нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования в пространстве функций времени. Пусть $\mathcal{D}_x$ – **оператор дифференцирования**, ставящий в соответствие функции одной переменной $h(x) \in L_2(\Omega;\rho(x))$ ее производную $\frac{dh(x)}{dx}$, $\{p(i,x)\}_{i=0}^{\infty}$ – базис пространства $L_2(\Omega;\rho(x))$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Тогда **спектральная характеристика оператора дифференцирования** задается следующим образом:

$$\mathbb{S}\,[\mathcal{D}_x] = \mathcal{P}(1,1) = (\mathcal{P}_{ij}),$$

где

$$\mathcal{P}_{ij} = \left(p(i,x), \frac{dp(j,x)}{dx}\right)_{L_2(\Omega;\rho(x))}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots\ . \tag{1.65}$$

Наряду с оператором $\mathcal{D}_x$ будем рассматривать **оператор дифференцирования второго порядка** $\mathcal{D}_{xx}$, ставящий в соответствие функции одной переменной $h(x) \in L_2(\Omega; \rho(x))$ ее вторую производную $\frac{d^2h(x)}{dx^2}$. По определению $\mathcal{D}_{xx} = \mathcal{D}_x \circ \mathcal{D}_x$, следовательно, **спектральная характеристика оператора дифференцирования второго порядка** определяется по свойству спектрального преобразования композиции линейных операторов (см. разд. 1.4.1):

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{xx}\right] = \mathbb{S}\left[\mathcal{D}_x \circ \mathcal{D}_x\right] = \mathbb{S}\left[\mathcal{D}_x\right] \cdot \mathbb{S}\left[\mathcal{D}_x\right] = \mathcal{P}(1,1) \cdot \mathcal{P}(1,1) = \mathcal{P}^2(1,1).$$

Заметим, что здесь и далее все производные будем понимать в обобщенном смысле [29, 33, 45].

Обозначим через $p(0,1;x)$ матрицу-строку, элементами которой являются значения базисных функций $\{p(i,x)\}_{i=0}^{\infty}$ в точке x, т.е.

$$p(0,1;x) = \begin{bmatrix} p(0,x) & p(1,x) & p(2,x) & \ldots \end{bmatrix}.$$

Сопряженная по отношению к $p(0,1;x)$ матрица представляется в виде

$$p(1,0;x) = p^*(0,1;x) = \begin{bmatrix} p^*(0,x) & p^*(1,x) & p^*(2,x) & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

где $p^*(i,x)$ – комплексная сопряженная функция, $i = 0,1,2,\ldots$.

Утверждение 1.18. *Пусть $\Omega = [a,b]$ – конечный отрезок, $L(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\frac{d\ln\rho(x)}{dx}$. Тогда*

$$\mathcal{P}(1,1) = -\mathcal{P}^*(1,1) - L(1,1) + \\ + \rho(b) \cdot p(1,0;b) \cdot p(0,1;b) - \rho(a) \cdot p(1,0;a) \cdot p(0,1;a), \quad (1.66)$$

где $\mathcal{P}^*(1,1)$ – сопряженная матрица.

Доказательство. Из определения спектральной характеристики оператора дифференцирования (1.65) и правила интегрирования по частям следует цепочка тождественных преобразований:

$$\mathcal{P}_{ij} = \int\limits_a^b \rho(x) p^*(i,x) \frac{dp(j,x)}{dx} dx = \rho(b) p^*(i,b) p(j,b) - \\ - \rho(a) p^*(i,a) p(j,a) - \int\limits_a^b \rho(x) \frac{dp^*(i,x)}{dx} p(j,x)\, dx - \\ - \int\limits_a^b \underbrace{\rho(x) \frac{1}{\rho(x)}}_{1} \frac{d\rho(x)}{dx} p^*(i,x) p(j,x)\, dx.$$

По определению сопряженной матрицы (см. разд. 1.2.3) получаем, что

$$\mathcal{P}^*_{ji} = \int\limits_a^b \rho(x)\,\frac{dp^*(i,x)}{dx}\,p(j,x)\,dx,$$

где $\mathcal{P}^*_{ji}$ – комплексное сопряженное число, а по определению спектральной характеристики $L(1,1) = (L_{ij})$ оператора умножения на функцию $\frac{1}{\rho(x)} \cdot \frac{d\rho(x)}{dx} = \frac{d\ln\rho(x)}{dx}$ имеем

$$L_{ij} = \int\limits_a^b \rho(x)\,\frac{1}{\rho(x)}\,\frac{d\rho(x)}{dx}\,p^*(i,x)\,p(j,x)\,dx.$$

Таким образом,

$$\mathcal{P}_{ij} = -\mathcal{P}^*_{ji} - L_{ij} + \rho(b)p^*(i,b)p(j,b) - \rho(a)p^*(i,a)p(j,a).$$

Следовательно, справедливо равенство (1.66). ◀

Замечание 1.16. Если множество Ω не ограничено или весовая функция $\rho(x)$ тождественно равна единице, формулу (1.66) можно упростить. Рассмотрим различные случаи.

1. Если $\Omega = (-\infty, +\infty)$, то

$$\mathcal{P}(1,1) = -\mathcal{P}^*(1,1) - L(1,1).$$

2. Если $\Omega = [a,b]$ и $\rho(x) \equiv 1$, то

$$\mathcal{P}(1,1) = -\mathcal{P}^*(1,1) + p(1,0;b)\cdot p(0,1;b) - p(1,0;a)\cdot p(0,1;a).$$

3. Если $\Omega = (-\infty, +\infty)$ и $\rho(x) \equiv 1$, то

$$\mathcal{P}(1,1) = -\mathcal{P}^*(1,1),$$

т.е. матрица $\mathcal{P}(1,1)$ является косоэрмитовой (альтернирующей).

Доказательство этих утверждений аналогично доказательству утверждения 1.18 с учетом того, что:

а) если $\Omega = (-\infty, +\infty)$, то

$$\lim_{x\to-\infty} \rho(x)p(i,x)p(j,x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \rho(x)p(i,x)p(j,x) = 0;$$

б) если $\rho(x) \equiv 1$, то $\frac{d\ln\rho(x)}{dx} = 0$ и, следовательно,

$$L(1,1) = \mathcal{O}(1,1),$$

где $\mathcal{O}(1,1)$ – двумерная нулевая матрица.

Если все функции базисной системы $\{p(i,x)\}_{i=0}^{\infty}$ вещественнозначные, то $\mathcal{P}^*(1,1) = \mathcal{P}^{\mathrm{T}}(1,1)$.

Утверждение 1.18 и замечание 1.16 дают возможность учитывать значение функции на границе множества Ω при дифференцировании.

В дальнейшем будем рассматривать два рода краевых условий:

а) заданы значения функции на границе (*условия первого рода*);

б) заданы значения первой производной функции на границе (*условия второго рода*).

Приведем *свойства спектрального преобразования операторов дифференцирования первого порядка.*

1. **Дифференцирование без учета краевых условий.**

Спектральная характеристика производной первого порядка функции $h(x)$ равна произведению спектральной характеристики $\mathcal{P}(1,1)$ оператора дифференцирования $\mathcal{D}_x$ и спектральной характеристики $H(1,0)$ функции $h(x)$:

$$\mathbb{S}\left[\frac{dh(x)}{dx}\right] = \mathcal{P}(1,1)\cdot H(1,0).$$

2. **Дифференцирование при заданных краевых условиях первого рода.**

Пусть $\Omega = [a,b]$. Спектральная характеристика производной первого порядка функции $h(x)$ при условии, что $h(a) = h_a$ и $h(b) = h_b$, определяется следующим образом:

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{dh(x)}{dx}\right|_{h(a)=h_a,\, h(b)=h_b}\right] = -\mathcal{P}^*(1,1)\cdot H(1,0) -$$
$$- L(1,1)\cdot H(1,0) + h_b\cdot \rho(b)\cdot p(1,0;b) - h_a\cdot\rho(a)\cdot p(1,0;a),$$

что следует из правила умножения матриц (см. разд. 1.2.3) и формулы обращения (1.42).

Если множество Ω представляет собой бесконечный интервал $(-\infty,+\infty)$, то, согласно замечанию 1.16, можно сделать вывод о том, что

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{dh(x)}{dx}\right|_{h(a)=h_a,\, h(b)=h_b}\right] = -\mathcal{P}^*(1,1)\cdot H(1,0) -$$
$$- L(1,1)\cdot H(1,0) = \mathcal{P}(1,1)\cdot H(1,0).$$

3. **Дифференцирование при заданных краевых условиях второго рода.**

Краевые условия второго рода $h'(a) = h'_a$ и $h'(b) = h'_b$ не влияют на результат спектрального преобразования производной первого порядка функции $h(x)$, поэтому

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{dh(x)}{dx}\right|_{h'(a)=h'_a,\, h'(b)=h'_b}\right] = \mathbb{S}\left[\frac{dh(x)}{dx}\right] = \mathcal{P}(1,1)\cdot H(1,0).$$

Доказательство свойств 1–3 аналогично доказательству свойств спектрального преобразования операторов дифференцирования по времени (см. предыдущий подраздел).

Из свойства спектрального преобразования композиции линейных операторов (см. разд. 1.4.1) следуют *свойства спектрального преобразования операторов дифференцирования второго порядка*:

1. **Дифференцирование без учета краевых условий.**

Спектральная характеристика производной второго порядка функции $h(x)$ равна произведению квадрата спектральной характеристики $\mathcal{P}(1,1)$ оператора дифференцирования $\mathcal{D}_x$ и спектральной характеристики $H(1,0)$ функции $h(x)$:

$$\mathbb{S}\left[\frac{d^2h(x)}{dx^2}\right] = \mathcal{P}^2(1,1)\cdot H(1,0).$$

2. **Дифференцирование при заданных краевых условиях первого рода.**

Пусть $\Omega = [a,b]$, тогда спектральная характеристика производной второго порядка функции $h(x)$ при условии, что $h(a) = h_a$ и $h(b) = h_b$, определяется следующим соотношением:

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{d^2h(x)}{dx^2}\right|_{h(a)=h_a,\,h(b)=h_b}\right] = -\mathcal{P}(1,1)\cdot\mathcal{P}^*(1,1)\cdot H(1,0) -$$
$$-\,\mathcal{P}(1,1)\cdot L(1,1)\cdot H(1,0) + h_b\cdot\rho(b)\cdot\mathcal{P}(1,1)\cdot p(1,0;b) -$$
$$-\,h_a\cdot\rho(a)\cdot\mathcal{P}(1,1)\cdot p(1,0;a),$$

так как с учетом свойства спектрального преобразования операторов дифференцирования первого порядка при заданных краевых условиях первого рода имеем

$$\mathcal{P}^2(1,1)\cdot H(1,0) = \mathcal{P}(1,1)\cdot\mathcal{P}(1,1)\cdot H(1,0) =$$
$$= \mathcal{P}(1,1)\cdot\big(\mathcal{P}^*(1,1)\cdot H(1,0) - L(1,1)\cdot H(1,0) +$$
$$+\,h_b\cdot\rho(b)\cdot p(1,0;b) - h_a\cdot\rho(a)\cdot p(1,0;a)\big).$$

3. **Дифференцирование при заданных краевых условиях второго рода.**

Пусть $\Omega = [a,b]$, тогда спектральная характеристика производной второго порядка функции $h(x)$ при условии, что $h'(a) = h'_a$ и $h'(b) = h'_b$, определяется соотношением

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{d^2h(x)}{dx^2}\right|_{h'(a)=h'_a,\,h'(b)=h'_b}\right] = -\mathcal{P}^*(1,1)\cdot\mathcal{P}(1,1)\cdot H(1,0) -$$

$$- L(1,1)\cdot\mathcal{P}(1,1)\cdot H(1,0) + h'_b\cdot\rho(b)\cdot p(1,0;b) - h'_a\cdot\rho(a)\cdot p(1,0;a).$$

Действительно, с учетом (1.66) будем иметь

$$\mathcal{P}^2(1,1)\cdot H(1,0) = \mathcal{P}(1,1)\cdot\mathcal{P}(1,1)\cdot H(1,0) = \big(-\mathcal{P}^*(1,1) - L(1,1) +$$
$$+ \rho(b)\cdot p(1,0;b)\cdot p(0,1;b) - \rho(a)\cdot p(1,0;a)\cdot p(0,1;a)\big)\cdot\mathcal{P}(1,1)\cdot H(1,0) =$$
$$= -\mathcal{P}^*(1,1)\cdot\mathcal{P}(1,1)\cdot H(1,0) - L(1,1)\cdot\mathcal{P}(1,1)\cdot H(1,0) +$$
$$+ \rho(b)\cdot p(1,0;b)\cdot p(0,1;b)\cdot\mathcal{P}(1,1)\cdot H(1,0) -$$
$$- \rho(a)\cdot p(1,0;a)\cdot p(0,1;a)\cdot\mathcal{P}(1,1)\cdot H(1,0).$$

Заметим, что $\mathcal{P}(1,1)\cdot H(1,0) = H'(1,0)$, где $H'(1,0)$ – спектральная характеристика функции $\frac{dh(x)}{dx}$. Тогда, используя правило умножения матриц (см. разд. 1.2.3) и формулу обращения спектральных характеристик (1.42), получаем

$$\rho(b)\cdot p(1,0;b)\cdot p(0,1;b)\cdot\mathcal{P}(1,1)\cdot H(1,0) =$$
$$= \rho(b)\cdot p(1,0;b)\cdot p(0,1;b)\cdot H'(1,0) =$$
$$= \rho(b)\cdot p(1,0;b)\cdot\left(\sum_{i=0}^{\infty} h'_i\cdot p(i,b)\right) =$$
$$= h'(b)\cdot\rho(b)\cdot p(1,0;b) = h'_b\cdot\rho(b)\cdot p(1,0;b),$$

где h'_i – координаты спектральной характеристики $H'(1,0)$.

Аналогично можно показать, что

$$\rho(a)\cdot p(1,0;a)\cdot p(0,1;a)\cdot\mathcal{P}(1,1)\cdot H(1,0) = h'_a\cdot\rho(a)\cdot p(1,0;a).$$

Таким образом, свойство 3 доказано.

Если множество Ω является бесконечным интервалом $(-\infty,+\infty)$ (см. замечание 1.16), то формально

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{d^2h(x)}{dx^2}\right|_{h(a)=h_a,\, h(b)=h_b}\right] = \mathbb{S}\left[\left.\frac{d^2h(x)}{dx^2}\right|_{h'(a)=h'_a,\, h'(b)=h'_b}\right] = \mathcal{P}^2(1,1)\cdot H(1,0),$$

т.е.

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{d^2h(x)}{dx^2}\right|_{h(a)=h_a,\, h(b)=h_b}\right] = \mathbb{S}\left[\left.\frac{d^2h(x)}{dx^2}\right|_{h'(a)=h'_a,\, h'(b)=h'_b}\right] = \mathbb{S}\left[\frac{d^2h(x)}{dx^2}\right].$$

Таблица 1.2. Спектральные характеристики производных функции одной переменной при нулевых краевых условиях и $\rho(x) \equiv 1$

	$\Omega = [a, b]$	$\Omega = (-\infty, +\infty)$
$\mathbb{S}\left[\left.\frac{dh(x)}{dx}\right\|_{h(a)=0, h(b)=0}\right]$	$-\mathcal{P}^*(1,1) \cdot H(1,0)$	$\mathcal{P}(1,1) \cdot H(1,0)$
$\mathbb{S}\left[\left.\frac{dh(x)}{dx}\right\|_{h'(a)=0, h'(b)=0}\right]$	$\mathcal{P}(1,1) \cdot H(1,0)$	$\mathcal{P}(1,1) \cdot H(1,0)$
$\mathbb{S}\left[\left.\frac{d^2h(x)}{dx^2}\right\|_{h(a)=0, h(b)=0}\right]$	$-\mathcal{P}(1,1) \cdot \mathcal{P}^*(1,1) \cdot H(1,0)$	$\mathcal{P}^2(1,1) \cdot H(1,0)$
$\mathbb{S}\left[\left.\frac{d^2h(x)}{dx^2}\right\|_{h'(a)=0, h'(b)=0}\right]$	$-\mathcal{P}^*(1,1) \cdot \mathcal{P}(1,1) \cdot H(1,0)$	$\mathcal{P}^2(1,1) \cdot H(1,0)$

Таблица 1.2 содержит свойства спектральных характеристик производных первого и второго порядков функций при нулевых краевых условиях для частного случая $\rho(x) \equiv 1$.

Приведем ***примеры спектральных характеристик*** $\mathcal{P}(1,1)$ ***оператора дифференцирования***, определенных относительно различных базисных систем (см. разд. 1.1.2).

1. Полиномы Лежандра (1.17), заданные на отрезке $\Omega = [0, a]$:

$$\mathcal{P}(1,1) = \frac{1}{a} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{7} & \dots & c_{0m} & \dots \\ 0 & 0 & 2\sqrt{15} & 0 & \dots & c_{1m} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{35} & \dots & c_{2m} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{m-k,m} = ((-1)^{k+1} + 1)\sqrt{(2m - 2k + 1)(2m + 1)},$$

$$c_{m,m-k} = 0,$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m.$$

2. Тригонометрические функции (1.18):

$$\mathcal{P}(1,1) = \frac{1}{a} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\pi & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \pi & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_{m-1,m} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{m,m-1} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{k-1,k} = -c_{k,k-1} = -\frac{k\pi}{2},$$
$$c_{ml} = 0 \quad \text{в остальных случаях,}$$
$$m, l = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 2m + 2.$$

3. Функции Уолша (1.19):

$$\mathcal{P}(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 & \ldots & c_{0m} & \ldots \\ 0 & 2 & -2 & -4 & \ldots & c_{1m} & \ldots \\ 0 & -2 & 6 & 0 & \ldots & c_{2m} & \ldots \\ 0 & 2 & -2 & 4 & \ldots & c_{3m} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \ldots & c_{mm} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = 0,$$
$$c_{2^m+l,k} = c_{lk}, \quad c_{k,2^m+l} = -c_{kl} - 2,$$
$$c_{2^m+k,2^m+k} = 2^{m+2} - c_{kk} - 2,$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots, \quad k, l = 0, 1, 2, \ldots, 2^m - 1.$$

4. Полиномы Эрмита (1.20):

$$\mathcal{P}(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_{m-1,m} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{m-1,m} = \sqrt{2m}, \quad c_{m,m-1} = c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0,$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 2, 3, \dots, m.$$

5. Функции Эрмита (1.21):

$$\mathcal{P}(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{4}}{2} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{\sqrt{4}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_{m-1,m} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{m,m-1} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{m-1,m} = -c_{m,m-1} = \frac{\sqrt{2m}}{2}, \quad c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0,$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 2, 3, \dots, m.$$

Пример 1.27. Найти нестационарную спектральную характеристику производной второго порядка функции $h(x) = x^2$ без учета краевых условий относительно нестационарных полиномов Лежандра (1.17), заданных на отрезке $\Omega = [0, 1]$.

□ По свойству спектрального преобразования производной второго порядка спектральная характеристика $W(1,0)$ функции $w(x) = \frac{d^2h(x)}{dx^2}$ равна произведению квадрата спектральной характеристики $\mathcal{P}(1,1)$ оператора дифференцирования $\mathcal{D}_x$, определенной относительно полиномов Лежандра, и спектральной характеристики $H(1,0)$ функции $h(x)$, также определенной относительно полиномов Лежандра (см. пример 1.17):

$$W(1,0) = \mathcal{P}^2(1,1) \cdot H(1,0) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{7} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2\sqrt{15} & 0 & 2\sqrt{27} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{35} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{63} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{7} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2\sqrt{15} & 0 & 2\sqrt{27} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{35} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{63} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{30} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12\sqrt{5} & 0 & 40\sqrt{9} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 20\sqrt{21} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 28\sqrt{45} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{30} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 12\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{30} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix},$$

т.е.

$$w_i = \begin{cases} 2, & i = 0, \\ 0, & i = 1, 2, 3, \dots . \end{cases}$$

Проверим полученный результат по формуле обращения (1.42):

$$w(x) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \cdot \hat{P}(i, x) = 2\hat{P}(0, x) = 2. \quad \blacksquare$$

Многомерный случай. Пусть $x = [x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n]^{\mathrm{T}} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, множество Ω представляется в виде $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$, причем $x_1 \in \Omega_1$, $x_2 \in \Omega_2$, …, $x_n \in \Omega_n$ (см. разд. 1.1.2).

Обозначим через $\mathcal{D}_{x_i}$ **оператор дифференцирования**, ставящий в соответствие функции многих переменных $h(x) \in L_2(\Omega; \rho(x))$ ее частную производную $\frac{\partial h(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$ – базис пространства $L_2(\Omega; \rho(x))$. **Спектральной характеристикой оператора дифференцирования** $\mathcal{D}_{x_i}$ называется $2n$-мерная матрица $\mathcal{P}_i(n, n) = (\mathcal{P}_{i\, i_1 i_2 \ldots i_n j_1 j_2 \ldots j_n})$, элементы которой вычисляются по формуле

$$\mathcal{P}_{i\, i_1 i_2 \ldots i_n j_1 j_2 \ldots j_n} = \left(p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x), \frac{\partial p(j_1, j_2, \ldots, j_n, x)}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega; \rho(x))},$$

$$i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_n = 0, 1, 2, \ldots,$$

т.е.

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_i}\right] = \mathcal{P}_i(n, n), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Для **оператора дифференцирования второго порядка** $\mathcal{D}_{x_i x_j}$, ставящего в соответствие функции многих переменных $h(x) \in L_2(\Omega; \rho(x))$ ее частную производную $\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_i \partial x_j}$, **спектральная характеристика** определяется по свойству спектрального преобразования композиции линейных операторов (см. разд. 1.4.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ij}(n, n) &= \mathbb{S}\big[\mathcal{D}_{x_i x_j}\big] = \mathbb{S}\big[\mathcal{D}_{x_i} \circ \mathcal{D}_{x_j}\big] = \\ &= \mathbb{S}\big[\mathcal{D}_{x_i}\big] \cdot \mathbb{S}\big[\mathcal{D}_{x_j}\big] = \mathcal{P}_i(n, n) \cdot \mathcal{P}_j(n, n), \\ & i, j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Из теоремы 1.3 следует, что:

а) спектральная характеристика частной производной функции $h(x)$ по координате x_i без учета краевых условий равна произведению спектральной характеристики $\mathcal{P}_i(n, n)$ оператора дифференцирования $\mathcal{D}_{x_i}$ и спектральной характеристики $H(n, 0)$ функции $h(x)$:

$$\mathbb{S}\left[\frac{\partial h(x)}{\partial x_i}\right] = \mathcal{P}_i(n, n) \cdot H(n, 0), \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

б) спектральная характеристика частной производной второго порядка функции $h(x)$ по координатам x_i и x_j без учета краевых условий равна произведению спектральной характеристики $\mathcal{P}_{ij}(n,n)$ оператора дифференцирования $\mathcal{D}_{x_i x_j}$ и спектральной характеристики $H(n,0)$ функции $h(x)$:

$$\mathbb{S}\left[\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right] = \mathcal{P}_{ij}(n,n)\cdot H(n,0),$$

$$i,j = 1,2,\ldots,n.$$

Далее будем предполагать, что функции базисной системы

$$\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$$

порождаются всевозможными произведениями функций $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$, $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$, …, $\{p_n(i_n,x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$, образующих базисные системы пространств $L_2(\Omega_1;\rho_1(x_1))$, $L_2(\Omega_2;\rho_2(x_2))$, …, $L_2(\Omega_n;\rho_n(x_n))$ соответственно (см. (1.23)), причем $\rho(x)=\rho_1(x_1)\rho_2(x_2)\ldots\rho_n(x_n)$. Тогда спектральные характеристики $\mathcal{P}_i(n,n)$ выражаются через спектральные характеристики $\mathcal{P}(1,1)$ операторов дифференцирования $\mathcal{D}_x$, определенные для одномерного случая, которые были рассмотрены выше:

$$\mathcal{P}_i(n,n) = E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i(1,1)\otimes\ldots\otimes E(1,1), \qquad (1.68)$$

$$i = 1,2,\ldots,n,$$

т.е. матрица $\mathcal{P}_i(n,n)$ равна тензорному произведению n сомножителей, из которых сомножитель с номером i равен $\mathcal{P}_i(1,1)$, а остальные представляют собой двумерные единичные матрицы $E(1,1)$.

Для $\mathcal{P}_{ij}(n,n)$ справедливо равенство, которое следует из (1.67) и свойств умножения многомерных матриц (см. разд. 1.2.3):

$$\mathcal{P}_{ij}(n,n) =$$

$$= \begin{cases} E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i^2(1,1)\otimes\ldots\otimes E(1,1), & i=j,\\ E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_j(1,1)\otimes\ldots\otimes E(1,1), & i\neq j,\end{cases} \qquad (1.69)$$

$$i,j = 1,2,\ldots,n.$$

Нетрудно заметить, что матрица $\mathcal{P}_{ij}(n,n)$ равна тензорному произведению n сомножителей, из которых в случае $i=j$ сомножитель с номером i равен $\mathcal{P}_i^2(1,1)$, а остальные представляют собой двумерные единичные матрицы $E(1,1)$. В случае $i\neq j$ сомножителями с номерами i и j являются матрицы $\mathcal{P}_i(1,1)$ и $\mathcal{P}_j(1,1)$ соответственно, а остальные сомножители – двумерные единичные матрицы $E(1,1)$.

В приведенных формулах матрица $\mathcal{P}_l(1,1)$ является спектральной характеристикой оператора дифференцирования, определенной относительно базисной системы $\{p_l(i_l,x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$, $l=1,2,\ldots,n$.

Например, для двумерного случая $(n=2)$ спектральные характеристики операторов дифференцирования первого и второго порядков без учета краевых условий, определенные относительно базисной системы $\{p_1(i_1,x_1)p_2(i_2,x_2)\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\Omega;\,\rho_1(x_1)\rho_2(x_2))$, где $\Omega=\Omega_1\times\times\,\Omega_2\subseteq\mathbb{R}^2$, имеют вид

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_1}\right] &= \mathcal{P}_1(2,2)=\mathcal{P}_1(1,1)\otimes E(1,1),\\
\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_2}\right] &= \mathcal{P}_2(2,2)=E(1,1)\otimes\mathcal{P}_2(1,1),\\
\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_1x_1}\right] &= \mathcal{P}_{11}(2,2)=\mathcal{P}_1^2(1,1)\otimes E(1,1),\\
\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_1x_2}\right] &= \mathcal{P}_{12}(2,2)=\mathcal{P}_1(1,1)\otimes\mathcal{P}_2(1,1),\\
\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_2x_1}\right] &= \mathcal{P}_{21}(2,2)=\mathcal{P}_1(1,1)\otimes\mathcal{P}_2(1,1),\\
\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_2x_2}\right] &= \mathcal{P}_{22}(2,2)=E(1,1)\otimes\mathcal{P}_2^2(1,1),
\end{aligned}
$$

где $\mathcal{P}_1(1,1)$ и $\mathcal{P}_2(1,1)$ – спектральные характеристики операторов дифференцирования, определенные относительно базисных систем $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ пространств $L_2(\Omega_1;\,\rho_1(x_1))$ и $L_2(\Omega_2;\,\rho_2(x_2))$ соответственно.

Замечание 1.17. Спектральные характеристики $\mathcal{P}_i(n,n)$ и $\mathcal{P}_{ij}(n,n)$ выражаются через спектральные характеристики операторов дифференцирования $\mathcal{P}(1,1)$, и поэтому не позволяют учитывать краевые условия (см. одномерный случай).

Пример 1.28. Найти спектральную характеристику оператора дифференцирования $\mathcal{D}_{x_2}$, заданного на пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$, без учета краевых условий относительно функций Эрмита $\{\hat{\Phi}(i_1,x_1)\hat{\Phi}(i_2,x_2)\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$.

☐ Спектральная характеристика $\mathcal{P}_2(2,2)$ оператора $\mathcal{D}_{x_2}$ представляется в виде тензорного произведения двумерной единичной матрицы $E(1,1)$ и спектральной характеристики $\mathcal{P}_2(1,1)$ оператора дифференцирования, определенной относительно функций Эрмита (1.21), следовательно,

$$
\mathcal{P}_2(2,2)=E(1,1)\otimes\mathcal{P}_2(1,1)=
$$

$$
=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\\
0 & 1 & 0 & 0 & \ldots\\
0 & 0 & 1 & 0 & \ldots\\
0 & 0 & 0 & 1 & \ldots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}\otimes
\begin{bmatrix}
0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \ldots\\
-\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{4}}{2} & 0 & \ldots\\
0 & -\frac{\sqrt{4}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \ldots\\
0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & \ldots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}=
$$

$$
= \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dots \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{4}}{2} & \dots \\ 0 & -\frac{\sqrt{4}}{2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dots \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{4}}{2} & \dots \\ 0 & -\frac{\sqrt{4}}{2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\
\vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}. \quad \blacksquare
$$

Свойства спектрального преобразования операторов дифференцирования первого и второго порядков, заданных на пространстве функций вектора состояния, следуют из (1.68), (1.69) и свойств спектрального преобразования операторов дифференцирования, определенных для одномерного случая. Приведем эти свойства при отсутствии краевых условий и при нулевых краевых условиях первого и второго родов.

1. $\mathbb{S}\left[\dfrac{\partial h(x)}{\partial x_i}\right] = \Big(E(1,1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}_i(1,1) \otimes \ldots \otimes E(1,1)\Big) \cdot H(n,0).$

2. $\mathbb{S}\left[\dfrac{\partial h(x)}{\partial x_i}\bigg|_{h(x)|_{\partial\Omega}=0}\right] =$
$$= \Big(E(1,1) \otimes \ldots \otimes \big(-\mathcal{P}_i^*(1,1) - L_i(1,1)\big) \otimes \ldots \otimes E(1,1)\Big) \cdot H(n,0).$$

3. $\mathbb{S}\left[\dfrac{\partial h(x)}{\partial x_i}\bigg|_{\nabla h(x)|_{\partial\Omega}=0}\right] =$
$$= \Big(E(1,1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}_i(1,1) \otimes \ldots \otimes E(1,1)\Big) \cdot H(n,0).$$

4. $\mathbb{S}\left[\dfrac{\partial^2 h(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right] =$
$$= \begin{cases} \Big(E(1,1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}_i^2(1,1) \otimes \ldots \otimes E(1,1)\Big) \cdot H(n,0), \ i = j, \\ \Big(E(1,1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}_i(1,1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}_j(1,1) \otimes \\ \quad \otimes \ldots \otimes E(1,1)\Big) \cdot H(n,0), \ i \neq j. \end{cases}$$

5. $$\mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{h(x)|_{\partial\Omega}=0}\right] =$$
$$= \begin{cases} \Big(E(1,1)\otimes\ldots\otimes\big(-\mathcal{P}_i(1,1)\cdot\mathcal{P}_i^*(1,1)-\mathcal{P}_i(1,1)\cdot L_i(1,1)\big)\otimes \\ \qquad \otimes\ldots\otimes E(1,1)\Big)\cdot H(n,0),\ i=j, \\ \Big(E(1,1)\otimes\ldots\otimes\big(-\mathcal{P}_i^*(1,1)-L_i(1,1)\big)\otimes \\ \qquad \otimes\ldots\otimes\big(-\mathcal{P}_j^*(1,1)-L_j(1,1)\big)\otimes \\ \qquad\quad \otimes\ldots\otimes E(1,1)\Big)\cdot H(n,0),\ i\neq j. \end{cases}$$

6. $$\mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\nabla h(x)|_{\partial\Omega}=0}\right] =$$
$$= \begin{cases} \Big(E(1,1)\otimes\ldots\otimes\big(-\mathcal{P}_i^*(1,1)\cdot\mathcal{P}_i(1,1)-L_i(1,1)\cdot\mathcal{P}_i(1,1)\big)\otimes \\ \qquad \otimes\ldots\otimes E(1,1)\Big)\cdot H(n,0),\ i=j, \\ \Big(E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_j(1,1)\otimes \\ \qquad \otimes\ldots\otimes E(1,1)\Big)\cdot H(n,0),\ i\neq j. \end{cases}$$

Здесь $L_l(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на логарифмическую производную $\frac{d\ln\rho_l(x_l)}{dx_l}$ весовой функции $\rho_l(x_l)$, определенная относительно базисной системы $\{p_l(i_l,x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$, $l=1,2,\ldots,n$; $\partial\Omega$ – граница множества Ω; $\nabla h(x)$ – градиент функции $h(x)$:

$$\nabla h(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

В некоторых случаях, например, при $\rho_l(x_l)\equiv 1$ или $\Omega=\mathbb{R}^n$, эти формулы упрощаются (см. табл. 1.2 и замечание 1.16), а именно:

а) если весовая функция $\rho_l(x_l)$ тождественно равна единице, то матрица $L_l(1,1)$ является нулевой;

б) если $\Omega=\mathbb{R}^n$, то независимо от рода краевых условий спектральные характеристики производных первого и второго порядков по координатам вектора состояния вычисляются следующим образом:

7. $$\mathbb{S}\left[\frac{\partial h(x)}{\partial x_i}\right] = \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial h(x)}{\partial x_i}\right|_{h(x)|_{\partial\Omega}=0}\right] = \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial h(x)}{\partial x_i}\right|_{\nabla h(x)|_{\partial\Omega}=0}\right] =$$
$$= \Big(E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i(1,1)\otimes\ldots\otimes E(1,1)\Big)\cdot H(n,0).$$

$$8.\ \mathbb{S}\left[\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right] = \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{h(x)|_{\partial\Omega}=0}\right] = \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\nabla h(x)|_{\partial\Omega}=0}\right] =$$

$$= \begin{cases} \Big(E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i^2(1,1)\otimes\ldots\otimes E(1,1)\Big)\cdot H(n,0),\ i=j, \\ \Big(E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_j(1,1)\otimes \\ \quad \otimes\ldots\otimes E(1,1)\Big)\cdot H(n,0),\ i\neq j. \end{cases}$$

Операторы дифференцирования в пространстве функций времени и вектора состояния

Перейдем к описанию операторов дифференцирования, заданных на пространстве функций времени и вектора состояния. Будем рассматривать **оператор $\tilde{\mathcal{D}}_t$ дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент** (см. определение оператора $\tilde{\mathcal{D}}_t$, заданного на пространстве функций времени):

$$\tilde{\mathcal{D}}_t h(t,x) = \frac{\partial h(t,x)}{\partial t} + \delta(t-t_0)h(t,x),$$

а также **операторы дифференцирования первого и второго порядков** по координатам вектора состояния:

$$\mathcal{D}_{x_i} h(t,x) = \frac{\partial h(t,x)}{\partial x_i}, \quad \mathcal{D}_{x_i x_j} h(t,x) = \frac{\partial^2 h(t,x)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n,$$

где $h(t,x)\in L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$, $Q_T = T\times\Omega$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$. Операторы, ставящие в соответствие функции $h(t,x)$ ее смешанные производные по времени и координатам вектора состояния, здесь не рассматриваются.

Нестационарные спектральные характеристики операторов дифференцирования $\tilde{\mathcal{D}}_t$ и $\mathcal{D}_{x_i}$, определенные относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$, вычисляются по определению нестационарных спектральных характеристик линейных операторов, заданных на пространстве функций времени и вектора состояния (см. разд. 1.4.1), и обозначаются $P(n+1,n+1) = (P_{i_0 i_1\ldots i_n j_0 j_1\ldots j_n})$ и $\mathcal{P}_i(n+1,n+1) = (\mathcal{P}_{i\, i_0 i_1\ldots i_n j_0 j_1\ldots j_n})$ соответственно:

$$P_{i_0 i_1\ldots i_n j_0 j_1\ldots j_n} =$$
$$= \left(e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x), \frac{\partial e(j_0,j_1,\ldots,j_n,t,x)}{\partial t}\right)_{L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))} +$$
$$+ \nu(t_0)\cdot\big(e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t_0,x), e(j_0,j_1,\ldots,j_n,t_0,x)\big)_{L_2(\Omega;\rho(x))},$$

$$\mathcal{P}_{i\,i_0 i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n} =$$
$$= \left(e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x), \frac{\partial e(j_0, j_1, \ldots, j_n, t, x)}{\partial x_i} \right)_{L_2(Q_T;\, \nu(t)\rho(x))},$$
$$i_0, i_1, \ldots, i_n, j_0, j_1, \ldots, j_n = 0, 1, 2, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования $\mathcal{D}_{x_i x_j}$ обозначается через $\mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1)$ и определяется по свойству спектрального преобразования композиции линейных операторов:

$$\mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1) = \mathbb{S}\big[\mathcal{D}_{x_i x_j}\big] = \mathbb{S}\big[\mathcal{D}_{x_i} \circ \mathcal{D}_{x_j}\big] =$$
$$= \mathbb{S}\big[\mathcal{D}_{x_i}\big] \cdot \mathbb{S}\big[\mathcal{D}_{x_j}\big] = \mathcal{P}_i(n+1, n+1) \cdot \mathcal{P}_j(n+1, n+1),$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Как и в случае операторов дифференцирования, заданных на пространстве функций времени или пространстве функций вектора состояния, все производные будем понимать в обобщенном смысле [29, 33, 45].

Таким образом, для пространства функций времени и вектора состояния рассматриваются следующие нестационарные спектральные характеристики операторов дифференцирования:

$$\mathbb{S}[\tilde{\mathcal{D}}_t] = P(n+1, n+1),$$
$$\mathbb{S}[\mathcal{D}_{x_i}] = \mathcal{P}_i(n+1, n+1),$$
$$\mathbb{S}[\mathcal{D}_{x_i x_j}] = \mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1),$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

при этом выполняются *свойства спектрального преобразования операторов дифференцирования*, которые следуют из теоремы 1.4:

$$\mathbb{S}\left[\left. \frac{\partial h(t,x)}{\partial t} \right|_{h(t_0,x)=0} \right] = P(n+1, n+1) \cdot H(n+1, 0),$$
$$\mathbb{S}\left[\frac{\partial h(t,x)}{\partial x_i} \right] = \mathcal{P}_i(n+1, n+1) \cdot H(n+1, 0),$$
$$\mathbb{S}\left[\frac{\partial^2 h(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} \right] = \mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1) \cdot H(n+1, 0),$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $H(n+1,0)$ – нестационарная спектральная характеристика функции времени и вектора состояния $h(t,x)$, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.3).

Для дальнейших рассуждений, как и в случае спектральных характеристик операторов дифференцирования, заданных на пространстве функций вектора состояния, будем полагать, что функции базисной системы пространства $L_2(Q_T;\, \nu(t)\rho(x))$ представляются в виде (1.27), т.е. в виде произведения функций базисных систем пространств $L_2(T;\, \nu(t))$ и $L_2(\Omega;\, \rho(x))$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&P(n+1,n+1) = P(1,1)\otimes E(n,n),\\
&\mathcal{P}_i(n+1,n+1) = E(1,1)\otimes \mathcal{P}_i(n,n),\\
&\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1) = E(1,1)\otimes \mathcal{P}_{ij}(n,n),\\
&i,j = 1,2,\ldots,n,
\end{aligned}
\tag{1.70}
$$

что следует из определения нестационарных спектральных характеристик $P(n+1,n+1)$, $\mathcal{P}_i(n+1,n+1)$ и $\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)$, свойства ортонормированности функций базисной системы (см. разд. 1.1.1 и 1.1.2) и правила тензорного умножения матриц (см. разд. 1.2.3).

В приведенных выражениях $P(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T;\, \nu(t))$, а $\mathcal{P}_i(n,n)$ и $\mathcal{P}_{ij}(n,n)$ – спектральные характеристики операторов дифференцирования первого и второго порядков по координатам вектора состояния, определенные относительно базиса $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\Omega;\, \rho(x))$ (см. предыдущий подраздел).

В качестве примера выпишем выражения для нестационарных спектральных характеристик операторов дифференцирования без учета краевых условий, заданных на пространстве $L_2(T\times\Omega;\, \nu(t)\rho(x))$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{S}[\tilde{\mathcal{D}}_t] = P(2,2) = P(1,1)\otimes E(1,1),\\
&\mathbb{S}\,[\mathcal{D}_x] = \mathcal{P}_1(2,2) = E(1,1)\otimes \mathcal{P}(1,1),\\
&\mathbb{S}\,[\mathcal{D}_{xx}] = \mathcal{P}_{11}(2,2) = E(1,1)\otimes \mathcal{P}^2(1,1),
\end{aligned}
$$

где $P(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T;\, \nu(t))$, $\mathcal{P}(1,1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\Omega;\, \rho(x))$.

Приведем *свойства спектрального преобразования операторов дифференцирования по времени при заданных начальных или конечных условиях*:

$$1.\ \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial h(t,x)}{\partial t}\right|_{h(t_0,x)=h_0(x)}\right] = \Big(P(1,1)\otimes E(n,n)\Big)\cdot H(n+1,0) - \\ - \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes H_0(n,0), \quad (1.71)$$

$$2.\ \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial h(t,x)}{\partial t}\right|_{h(t_1,x)=h_1(x)}\right] = \\ = \Big(\big(-P^*(1,1)-L(1,1)\big)\otimes E(n,n)\Big)\cdot H(n+1,0) + \\ + \nu(t_1)\cdot q(1,0;t_1)\otimes H_1(n,0), \quad (1.72)$$

где $H_0(n,0)$ и $H_1(n,0)$ – спектральные характеристики функций $h_0(x)$ и $h_1(x)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.2), а $L(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на логарифмическую производную $\frac{d\ln\nu(t)}{dt}$ весовой функции $\nu(t)$. Доказательство этих свойств опирается на теорему 1.1 и утверждения 1.16, 1.17.

Свойства спектрального преобразования операторов дифференцирования первого и второго порядков по координатам вектора состояния при различных краевых условиях следуют из (1.70) и свойств спектрального преобразования операторов дифференцирования, заданных на пространстве функций вектора состояния (см. предыдущий подраздел). В случае, если функции базисной системы пространства $L_2(\Omega;\rho(x))$ представляются в виде произведения (1.23), то

$$1.\ \mathbb{S}\left[\frac{\partial h(t,x)}{\partial x_i}\right] = \\ = \Big(E(1,1)\otimes \underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes \mathcal{P}_i(1,1)\otimes\ldots\otimes E(1,1)}_{n\ \text{сомножителей}}\Big)\cdot H(n+1,0). \quad (1.73)$$

$$2.\ \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial h(t,x)}{\partial x_i}\right|_{h(t,x)|_{\partial\Omega}=0}\right] = \\ = \Big(E(1,1)\otimes \underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes\big(-\mathcal{P}_i^*(1,1)-L_i(1,1)\big)\otimes\ldots\otimes E(1,1)}_{n\ \text{сомножителей}}\Big)\cdot \\ \cdot H(n+1,0). \quad (1.74)$$

$$3.\ \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial h(t,x)}{\partial x_i}\right|_{\nabla h(t,x)|_{\partial\Omega}=0}\right] = \\ = \Big(E(1,1)\otimes \underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i(1,1)\otimes\ldots\otimes E(1,1)}_{n\text{ сомножителей}}\Big)\cdot H(n+1,0). \tag{1.75}$$

$$4.\ \mathbb{S}\left[\frac{\partial^2 h(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}\right] = \\ = \begin{cases} \Big(E(1,1)\otimes \underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i^2(1,1)\otimes\ldots\otimes E(1,1)}_{n\text{ сомножителей}}\Big)\cdot \\ \quad \cdot H(n+1,0),\ i=j, \\ \Big(E(1,1)\otimes \underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_j(1,1)\otimes}_{n\text{ сомножителей}} \\ \quad \underline{\otimes\ldots\otimes E(1,1)}\Big)\cdot H(n+1,0),\ i\neq j. \end{cases} \tag{1.76}$$

$$5.\ \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial^2 h(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}\right|_{h(t,x)|_{\partial\Omega}=0}\right] = \\ = \begin{cases} \Big(E(1,1)\otimes \underline{E(1,1)\otimes\ldots\otimes} \\ \quad \underbrace{\otimes\big(-\mathcal{P}_i(1,1)\cdot\mathcal{P}_i^*(1,1)-\mathcal{P}_i(1,1)\cdot L_i(1,1)\big)\otimes}_{n\text{ сомножителей}} \\ \quad \underline{\otimes\ldots\otimes E(1,1)}\Big)\cdot H(n+1,0),\ i=j, \\ \Big(E(1,1)\otimes \underline{E(1,1)\otimes\ldots\otimes\big(-\mathcal{P}_i^*(1,1)-L_i(1,1)\big)\otimes} \\ \quad \underbrace{\otimes\ldots\otimes\big(-\mathcal{P}_j^*(1,1)-L_j(1,1)\big)\otimes\ldots\otimes E(1,1)}_{n\text{ сомножителей}}\Big)\cdot \\ \quad \cdot H(n+1,0),\ i\neq j. \end{cases} \tag{1.77}$$

$$6.\ \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial^2 h(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}\right|_{\nabla h(t,x)|_{\partial\Omega}=0}\right] = \\ = \begin{cases} \Big(E(1,1)\otimes \underline{E(1,1)\otimes\ldots\otimes} \\ \quad \underbrace{\otimes\big(-\mathcal{P}_i^*(1,1)\cdot\mathcal{P}_i(1,1)-L_i(1,1)\cdot\mathcal{P}_i(1,1)\big)\otimes}_{n\text{ сомножителей}} \\ \quad \underline{\otimes\ldots\otimes E(1,1)}\Big)\cdot H(n+1,0),\ i=j, \\ \Big(E(1,1)\otimes \underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_j(1,1)\otimes}_{n\text{ сомножителей}} \\ \quad \underline{\otimes\ldots\otimes E(1,1)}\Big)\cdot H(n+1,0),\ i\neq j. \end{cases} \tag{1.78}$$

Здесь $\mathcal{P}_l(1,1)$ и $L_l(1,1)$ – спектральные характеристики операторов дифференцирования и умножения на логарифмическую производную $\frac{d\ln\rho_l(x_l)}{dx_l}$ весовой функции $\rho_l(x_l)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{p_l(i_l,x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$, $l=1,2,\ldots,n$; $\partial\Omega$ – граница множества Ω; $\nabla h(t,x)$ – градиент функции $h(t,x)$ при фиксированном t:

$$\nabla h(t,x) = \left[\frac{\partial h(t,x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h(t,x)}{\partial x_2} \quad \ldots \quad \frac{\partial h(t,x)}{\partial x_n}\right].$$

Как и в случае операторов дифференцирования, определенных на пространстве функций вектора состояния (см. предыдущий подраздел), при $\rho_l(x_l)\equiv 1$ или $\Omega=\mathbb{R}^n$ полученные выражения существенно упрощаются (см. табл. 1.2 и замечание 1.16):

а) если весовая функция $\rho_l(x_l)$ тождественно равна единице, то матрица $L_l(1,1)$ является нулевой;

б) если $\Omega=\mathbb{R}^n$, то независимо от рода краевых условий спектральные характеристики производных первого и второго порядков по координатам вектора состояния вычисляются следующим образом:

$$7.\ \mathbb{S}\left[\frac{\partial h(t,x)}{\partial x_i}\right] = \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial h(t,x)}{\partial x_i}\right|_{h(t,x)|_{\partial\Omega}=0}\right] = \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial h(t,x)}{\partial x_i}\right|_{\nabla h(t,x)|_{\partial\Omega}=0}\right] =$$
$$= \Big(E(1,1)\otimes \underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i(1,1)\otimes\ldots\otimes E(1,1)}_{n\ \text{сомножителей}}\Big)\cdot H(n+1,0). \tag{1.79}$$

$$8.\ \mathbb{S}\left[\frac{\partial^2 h(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}\right] = \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial^2 h(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}\right|_{h(t,x)|_{\partial\Omega}=0}\right] = \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial^2 h(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}\right|_{\nabla h(t,x)|_{\partial\Omega}=0}\right] =$$
$$= \begin{cases} \Big(E(1,1)\otimes \underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i^2(1,1)\otimes\ldots\otimes E(1,1)}_{n\ \text{сомножителей}}\Big)\cdot \\ \quad \cdot H(n+1,0),\ \ i=j, \\ \Big(E(1,1)\otimes \underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_j(1,1)\otimes}_{n\ \text{сомножителей}} \\ \quad \underline{\otimes\ldots\otimes E(1,1)}\Big)\cdot H(n+1,0),\ \ i\neq j. \end{cases} \tag{1.80}$$

Пример 1.29. Записать общий вид нестационарных спектральных характеристик операторов дифференцирования второго порядка по координатам вектора состояния, заданных на пространстве $L_2(T\times\Omega_1\times\Omega_2)$, где $\Omega_1,\Omega_2\subset\mathbb{R}$, при нулевых краевых условиях первого рода и условии, что функции базисной системы пространства $L_2(T\times\Omega_1\times\Omega_2)$ представляются в виде произведения функций базисных систем пространств $L_2(T)$, $L_2(\Omega_1)$ и $L_2(\Omega_2)$.

☐ Пусть $\mathcal{P}_1(1,1)$ и $\mathcal{P}_2(1,1)$ – спектральные характеристики операторов дифференцирования, определенные относительно базисных систем пространств $L_2(\Omega_1)$ и $L_2(\Omega_2)$ соответственно. Так как весовые функции $\rho_1(x_1)$ и $\rho_2(x_2)$ этих пространств тождественно равны единице (см. замечание 1.3), спектральные характеристики $L_1(1,1)$ и $L_2(1,1)$ операторов умножения на функции $\frac{d\ln\rho_1(x_1)}{dx_1}$ и $\frac{d\ln\rho_2(x_2)}{dx_2}$ соответственно представляют собой двумерные нулевые матрицы, т.е.

$$L_1(1,1) = L_2(1,1) = \mathcal{O}(1,1).$$

Тогда, принимая во внимание свойство 5 спектрального преобразования операторов дифференцирования при заданных краевых условиях, получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_1x_1}\right] &= \mathcal{P}_{11}(3,3) = E(1,1)\otimes\big(-\mathcal{P}_1(1,1)\cdot\mathcal{P}_1^*(1,1)\big)\otimes E(1,1),\\
\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_1x_2}\right] &= \mathcal{P}_{12}(3,3) = E(1,1)\otimes\big(-\mathcal{P}_1^*(1,1)\big)\otimes\big(-\mathcal{P}_2^*(1,1)\big),\\
\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_2x_1}\right] &= \mathcal{P}_{21}(3,3) = E(1,1)\otimes\big(-\mathcal{P}_1^*(1,1)\big)\otimes\big(-\mathcal{P}_2^*(1,1)\big),\\
\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_2x_2}\right] &= \mathcal{P}_{22}(3,3) = E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes\big(-\mathcal{P}_2(1,1)\cdot\mathcal{P}_2^*(1,1)\big),
\end{aligned}$$

где $\mathcal{P}_1^*(1,1)$ и $\mathcal{P}_2^*(1,1)$ – сопряженные матрицы по отношению к $\mathcal{P}_1(1,1)$ и $\mathcal{P}_2(1,1)$ соответственно.

Нетрудно видеть, что спектральные характеристики операторов дифференцирования $\mathcal{D}_{x_1x_2}$ и $\mathcal{D}_{x_2x_1}$ второго порядка по координатам вектора состояния совпадают, т.е.

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_1x_2}\right] = \mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_2x_1}\right]. \quad \blacksquare$$

Пример 1.30. Записать общий вид нестационарных спектральных характеристик операторов дифференцирования первого порядка по координатам вектора состояния, заданных на пространстве $L_2(T\times\mathbb{R}^2)$, при нулевых краевых условиях первого рода и условии, что функции базисной системы пространства $L_2(T\times\mathbb{R}^2)$ представляются в виде произведения функций базисных систем пространств $L_2(T)$ и $L_2(\mathbb{R})$.

☐ Пусть $\mathcal{P}_1(1,1)$ и $\mathcal{P}_2(1,1)$ – спектральные характеристики операторов дифференцирования, определенные относительно базисных систем пространства $L_2(\mathbb{R})$, которые в общем случае могут быть различными.

Тогда, учитывая свойство 7 спектрального преобразования операторов дифференцирования при заданных краевых условиях ($\Omega = \mathbb{R}^2$), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_1}\right] &= \mathcal{P}_1(3,3) = E(1,1)\otimes\mathcal{P}_1(1,1)\otimes E(1,1),\\
\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_2}\right] &= \mathcal{P}_2(3,3) = E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes\mathcal{P}_2(1,1). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Пример 1.31. Найти нестационарную спектральную характеристику оператора дифференцирования $\tilde{\mathcal{D}}_t$, заданного на пространстве $L_2([0,\tau]\times\mathbb{R})$, относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0,t)\hat{\Phi}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$.

□ Нестационарная спектральная характеристика $P(2,2)$ оператора дифференцирования $\tilde{\mathcal{D}}_t$ на основании (1.70) представляется в виде тензорного произведения нестационарной спектральной характеристики $P(1,1)$ оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенной относительно системы нестационарных полиномов Лежандра (1.4), и двумерной единичной матрицы $E(1,1)$, т.е.

$$P(2,2) = P(1,1)\otimes E(1,1) =$$

$$= \frac{1}{\tau}\cdot\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} & \ldots \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{15} & \sqrt{21} & \ldots \\ \sqrt{5} & -\sqrt{15} & 5 & \sqrt{35} & \ldots \\ -\sqrt{7} & \sqrt{21} & -\sqrt{35} & 7 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\tau}\cdot\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \ldots \\ \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 3 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Пример 1.32. Найти нестационарную спектральную характеристику оператора дифференцирования $\mathcal{D}_x$, заданного на пространстве

$$L_2([0,\tau]\times[-a,a]),$$

при учете нулевых краевых условий первого рода относительно базисной системы $\{\hat{C}(i_0,t)\hat{S}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$.

☐ На основании (1.70) с учетом замечания 1.16 нестационарная спектральная характеристика $\mathcal{P}_1(2,2)$ оператора дифференцирования $\mathcal{D}_x$, заданного на пространстве $L_2([0,\tau]\times[-a,a])$, равна тензорному произведению двумерной единичной матрицы $E(1,1)$ и противоположной транспонированной матрицы по отношению к спектральной характеристике $\mathcal{P}(1,1)$ оператора дифференцирования $\mathcal{D}_x$, заданного на пространстве $L_2([-a,a])$, определенной относительно тригонометрических функций (1.18), так как тригонометрические функции принимают вещественные значения и, следовательно, $\mathcal{P}^*(1,1)=\mathcal{P}^{\mathrm{T}}(1,1)$:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{P}_1(2,2) = E(1,1)\otimes\big(-\mathcal{P}^{\mathrm{T}}(1,1)\big) = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \otimes \left(-\frac{1}{a}\cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\pi & 0 & \ldots \\ 0 & \pi & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \right) = \\
&= \frac{1}{a}\cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\pi & 0 & \ldots \\ 0 & \pi & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \right) = \\
&= \frac{1}{a}\cdot \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\pi & 0 & \ldots \\ 0 & \pi & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \ldots \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\pi & 0 & \ldots \\ 0 & \pi & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

1.4.4. Спектральные характеристики операторов интегрирования

Операторы интегрирования в пространстве функций времени

Перейдем к определению нестационарных спектральных характеристик операторов интегрирования. Пусть $\mathcal{D}_t^{-1}$ – **оператор интегрирования**, определенный на пространстве $L_2(T;\, \nu(t))$:

$$\mathcal{D}_t^{-1} h(t) = \int\limits_{t_0}^{t} h(\theta)\, d\theta,$$

где $h(t) \in L_2(T;\, \nu(t))$, а система функций $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2(T;\, \nu(t))$.

Квадратная матрица $P^{-1}(1,1) = (P_{ij}^{-1})$, элементы которой определяются формулой

$$P_{ij}^{-1} = \left(q(i,t), \int\limits_{t_0}^{t} q(j,\theta)\, d\theta \right)_{L_2(T;\, \nu(t))}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots, \tag{1.81}$$

называется **нестационарной спектральной характеристикой оператора интегрирования**, т.е.

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_t^{-1}\right] = P^{-1}(1,1).$$

Отметим важные *свойства спектрального преобразования операторов интегрирования*.

1. **Интегрирование функций времени.**

Нестационарная спектральная характеристика интеграла функции $h(t)$ равна произведению нестационарной спектральной характеристики $P^{-1}(1,1)$ оператора интегрирования $\mathcal{D}_t^{-1}$ и нестационарной спектральной характеристики $H(1,0)$ функции $h(t)$:

$$\mathbb{S}\left[\int\limits_{t_0}^{t} h(\theta)\, d\theta\right] = P^{-1}(1,1) \cdot H(1,0).$$

2. **Связь нестационарных спектральных характеристик операторов дифференцирования и интегрирования.**

Нестационарная спектральная характеристика $P^{-1}(1,1)$ оператора интегрирования $\mathcal{D}_t^{-1}$ является обратной матрицей для нестационарной спектральной характеристики $P(1,1)$ оператора дифференцирования $\tilde{\mathcal{D}}_t$ с учетом значения функции в начальный момент времени (см. разд. 1.4.3):

$$P(1,1) \cdot P^{-1}(1,1) = P^{-1}(1,1) \cdot P(1,1) = E(1,1).$$

Приведем ***примеры нестационарных спектральных характеристик*** $P^{-1}(1,1)$ ***оператора интегрирования***, определенных относительно различных базисных систем (см. разд. 1.1.1).

1. Нестационарные полиномы Лежандра (1.4):

$$P^{-1}(1,1) = \tau \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{35}} & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{35}} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_{m-1,m} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{m,m-1} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = \frac{1}{2}, \quad c_{m-1,m} = -c_{m,m-1} = -\frac{1}{2\sqrt{4m^2-1}}, \quad c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0,$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 0, 2, 3, \dots, m.$$

2. Нестационарные косинусоиды (1.5):

$$P^{-1}(1,1) = \tau \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{9\pi^2} & \dots & c_{0m} & \dots \\ -\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} & 0 & \frac{4}{3\pi^2} & 0 & \dots & c_{1m} & \dots \\ 0 & -\frac{4}{3\pi^2} & 0 & \frac{4}{5\pi^2} & \dots & c_{2m} & \dots \\ -\frac{2\sqrt{2}}{9\pi^2} & 0 & -\frac{4}{5\pi^2} & 0 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = \frac{1}{2}, \quad c_{0m} = -c_{m0} = \frac{\sqrt{2}(1-(-1)^m)}{m^2\pi^2}, \quad c_{mm} = 0,$$

$$c_{m-k,m} = -c_{m,m-k} = \frac{2(1-(-1)^k)}{k\,(2m-k)\,\pi^2},$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m-1.$$

3. Нестационарные комплексные экспоненциальные функции (1.6):

$$P^{-1}(1,1) = \tau \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{2\pi} & \frac{j}{2\pi} & -\frac{j}{4\pi} & \ldots & c_{0m} & \ldots \\ -\frac{j}{2\pi} & \frac{j}{2\pi} & 0 & 0 & \ldots & c_{1m} & \ldots \\ \frac{j}{2\pi} & 0 & -\frac{j}{2\pi} & 0 & \ldots & c_{2m} & \ldots \\ -\frac{j}{4\pi} & 0 & 0 & \frac{j}{4\pi} & \ldots & c_{3m} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \ldots & c_{mm} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} &c_{00} = \frac{1}{2}, \quad c_{0m} = c_{m0} = (-1)^m \frac{j}{2\left[\frac{m+1}{2}\right]\pi}, \\ &c_{mm} = (-1)^{m+1} \frac{j}{2\left[\frac{m+1}{2}\right]\pi}, \quad c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0, \\ &m = 1,2,3,\ldots, \quad k = 1,2,3,\ldots,m-1, \quad j = \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

4. Нестационарные функции Уолша (1.7):

$$P^{-1}(1,1) = \tau \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \ldots & c_{0m} & \ldots \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \ldots & c_{1m} & \ldots \\ -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{2m} & \ldots \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & \ldots & c_{3m} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \ldots & c_{mm} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} &c_{00} = \frac{1}{2}, \quad c_{k,2^m+k} = -c_{2^m+k,k} = \frac{1}{2^{m+2}}, \\ &c_{ml} = 0 \quad \text{в остальных случаях}, \\ &m,l = 0,1,2,\ldots, \quad k = 0,1,2,\ldots,2^m-1. \end{aligned}$$

5. Полиномы Лагерра (1.10):

$$P^{-1}(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{m,m-1} & c_{mm} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{mm} = c_{m,m-1} = 1, \quad c_{m-1,m} = c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0,$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 2, 3, 4, \ldots, m.$$

6. Функции Лагерра (1.11):

$$P^{-1}(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 4 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 4 & 4 & 2 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 4 & 4 & 4 & 2 & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \ldots & c_{mm} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{mm} = 2, \quad c_{m-k,m} = 0, \quad c_{m,m-k} = 4,$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Пример 1.33. Найти нестационарную спектральную характеристику функции

$$w(t) = \int\limits_0^t \theta^3 \, d\theta$$

относительно нестационарных полиномов Лежандра (1.4), заданных на нестационарном отрезке $T = [0, \tau]$.

☐ По свойству интегрирования функций времени в спектральной области нестационарная спектральная характеристика $W(1,0)$ функции $w(t)$ равна произведению нестационарной спектральной характеристики $P^{-1}(1,1)$ оператора интегрирования $\mathcal{D}_t^{-1}$ и нестационарной спектральной характеристики $H(1,0)$ функции $h(t) = t^3$ (см. пример 1.14), определенных относительно нестационарных полиномов Лежандра:

$$W(1,0) = P^{-1}(1,1) \cdot H(1,0) =$$

$$= \tau \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{35}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{35}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{63}} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{63}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{99}} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{99}} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \tau^3\sqrt{\tau} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3\sqrt{3}}{20} \\ \frac{\sqrt{5}}{20} \\ \frac{\sqrt{7}}{140} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} =$$

$$= \quad \tau^4\sqrt{\tau} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{20} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{15}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{20} \\ \frac{1}{2\sqrt{15}}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{20} - \frac{1}{2\sqrt{35}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{140} \\ \frac{1}{2\sqrt{35}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{20} \\ \frac{1}{2\sqrt{63}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{140} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \tau^4\sqrt{\tau} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{\sqrt{3}}{30} \\ \frac{\sqrt{5}}{70} \\ \frac{\sqrt{7}}{280} \\ \frac{\sqrt{9}}{2520} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix},$$

т.е.

$$w_0 = \frac{\tau^4\sqrt{\tau}}{20}, \quad w_1 = \frac{\tau^4\sqrt{3\tau}}{30}, \quad w_2 = \frac{\tau^4\sqrt{5\tau}}{70}, \quad w_3 = \frac{\tau^4\sqrt{7\tau}}{280},$$
$$w_4 = \frac{\tau^4\sqrt{9\tau}}{2520}, \quad w_i = 0, \quad i = 5, 6, 7, \dots\ .$$

Проверим полученный результат. Применим формулу обращения (1.38) с учетом (1.4):

$$w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \cdot \hat{P}(i,t) = \frac{\tau^4\sqrt{\tau}}{20}\hat{P}(0,t) + \frac{\tau^4\sqrt{3\tau}}{30}\hat{P}(1,t) +$$
$$+ \frac{\tau^4\sqrt{5\tau}}{70}\hat{P}(2,t) + \frac{\tau^4\sqrt{7\tau}}{280}\hat{P}(3,t) + \frac{\tau^4\sqrt{9\tau}}{2520}\hat{P}(4,t) = \frac{t^4}{4}. \quad \blacksquare$$

Операторы интегрирования в пространстве функций вектора состояния

Одномерный случай. Пусть $\mathcal{D}_x^{-1}$ – **оператор интегрирования**, определенный на пространстве $L_2(\Omega; \rho(x))$ функций одной переменной:

$$\mathcal{D}_x^{-1} h(x) = \int\limits_{x_0}^{x} h(\xi)\, d\xi,$$

где $h(x) \in L_2(\Omega; \rho(x))$, $x_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$, а система функций $\{p(i,x)\}_{i=0}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2(\Omega; \rho(x))$.

Квадратная матрица $P^{-1}(1,1) = (P_{ij}^{-1})$, элементы которой определяются формулой

$$P_{ij}^{-1} = \left(p(i,x), \int\limits_{x_0}^{x} p(j,\xi)\, d\xi \right)_{L_2(\Omega;\rho(x))}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots, \tag{1.82}$$

называется **спектральной характеристикой оператора интегрирования**, т.е.

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_x^{-1}\right] = P^{-1}(1,1).$$

Укажем основные *свойства спектрального преобразования операторов интегрирования.*

1. **Интегрирование функций одной переменной.**

Спектральная характеристика интеграла функции $h(x)$ равна произведению спектральной характеристики $P^{-1}(1,1)$ оператора интегрирования $\mathcal{D}_x^{-1}$ и спектральной характеристики $H(1,0)$ функции $h(x)$:

$$\mathbb{S}\left[\int\limits_{x_0}^{x} h(\xi)\, d\xi \right] = P^{-1}(1,1) \cdot H(1,0).$$

2. **Связь спектральных характеристик операторов дифференцирования и интегрирования.**

Спектральная характеристика $P^{-1}(1,1)$ оператора интегрирования $\mathcal{D}_x^{-1}$ является правосторонней обратной матрицей для спектральной характеристики $\mathcal{P}(1,1)$ оператора дифференцирования $\mathcal{D}_x$ (см. [64]):

$$\mathcal{P}(1,1) \cdot P^{-1}(1,1) = E(1,1).$$

В общем случае $P^{-1}(1,1) \cdot \mathcal{P}(1,1) \neq E(1,1)$.

Приведем ***примеры спектральных характеристик*** $P^{-1}(1,1)$ ***оператора интегрирования***, определенных относительно различных базисных систем (см. разд. 1.1.2), при условии $x_0 = 0$.

1. Полиномы Лежандра (1.17), заданные на отрезке $\Omega = [0, a]$:

$$P^{-1}(1,1) = a \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{35}} & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{35}} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_{m-1,m} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{m,m-1} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = \frac{1}{2}, \quad c_{m-1,m} = -c_{m,m-1} = -\frac{1}{2\sqrt{4m^2 - 1}}, \quad c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0,$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 0, 2, 3, \dots, m.$$

2. Тригонометрические функции (1.18):

$$P^{-1}(1,1) = a \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{\pi} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2\pi} & \dots & c_{0m} & \dots \\ \frac{\sqrt{2}}{\pi} & 0 & \frac{1}{\pi} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{\pi} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_{m-1,m} & \dots \\ c_{m0} & 0 & 0 & 0 & c_{m,m-1} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{0k} = \frac{2\sqrt{2}}{(k+1)\pi}, \quad c_{k0} = \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} 2\sqrt{2}}{(k+1)\pi}, \quad c_{l-1,l} = -c_{l,l-1} = \frac{2}{l\pi},$$

$$c_{ms} = 0 \quad \text{в остальных случаях},$$

$$m, s = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 2m+1, \quad l = 2m+2.$$

3. Функции Уолша (1.19):

$$P^{-1}(1,1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \dots & c_{0m} & \dots \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \dots & c_{1m} & \dots \\ -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{2m} & \dots \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = \frac{1}{2}, \quad c_{k,2^m+k} = -c_{2^m+k,k} = \frac{1}{2^{m+2}},$$

$$c_{ml} = 0 \quad \text{в остальных случаях,}$$

$$m, l = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2^m - 1.$$

4. Полиномы Эрмита (1.20):

$$P^{-1}(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \dots & c_{0m} & \dots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{4}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{m,m-1} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{0k} = \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} k!!}{\sqrt{2k!}}, \quad k!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots k, \quad c_{m-1,m} = \frac{1}{\sqrt{2m}},$$

$$c_{ml} = 0 \quad \text{в остальных случаях,}$$

$$m, l = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 2m + 1.$$

5. Функции Эрмита (1.21):

$$P^{-1}(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2}+2 & 0 & \frac{(-\sqrt{2}+1)\sqrt{6}}{3} & \dots & c_{0m} & \dots \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{1m} & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \frac{(-\sqrt{2}+1)\sqrt{3}}{3} & \dots & c_{2m} & \dots \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{k0} = \sqrt{\frac{2(k-1)!!}{k!!}},$$

$$k!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots k, \quad (k-1)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (k-1),$$

$$c_{l0} = 0,$$

$$c_{ms} = -\frac{\sqrt{2}\delta(m, s-1)}{\sqrt{s}} + \frac{2\beta(m, s-1)}{\sqrt{s}} + c_{m,s-2}\sqrt{\frac{s-1}{2s}},$$

$$\delta(m,s) = \begin{cases} 1, \ m = s, \\ 0, \ m \neq s, \end{cases}$$

$$\beta(m,s) = \begin{cases} (-1)^s \sqrt{\dfrac{(m-1)!!(s-1)!!}{m!!\, s!!}}, \ m \text{ и } s - \text{четные}, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$m!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots m, \quad s!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots s, \quad 0!! = (-1)!! = 1,$$

$$(m-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (m-1), \quad (s-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (s-1),$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 2m+1, \quad l = 2m.$$

Пример 1.34. Найти спектральную характеристику оператора интегрирования $\mathcal{D}_x^{-1}$, заданного на пространстве $L_2([-a,a])$, относительно тригонометрических функций (1.18) при условии, что $x_0 = -\gamma \in [-a,a]$, т.е.

$$\mathcal{D}_x^{-1} h(x) = \int\limits_{-\gamma}^{x} h(\xi)\, d\xi.$$

□ Соотношение (1.82) для определения элементов P_{ij}^{-1} спектральной характеристики $P^{-1}(1,1)$ оператора интегрирования в данном случае записывается следующим образом:

$$P_{ij}^{-1} = \int\limits_{-a}^{a} \hat{S}(i,x)\left[\int\limits_{-\gamma}^{x} \hat{S}(j,\xi)\,d\xi\right]dx,$$
$$i,j = 0,1,2,\ldots$$

Найдем сначала внутренний интеграл:

$$\int\limits_{-\gamma}^{x} \hat{S}(j,\xi)\,d\xi = \begin{cases} \int\limits_{-\gamma}^{x} \sqrt{\dfrac{1}{2a}}\,d\xi, \ j=0, \\ \int\limits_{-\gamma}^{x} \sqrt{\dfrac{1}{a}}\cos\dfrac{j\pi}{2a}\xi\,d\xi, \ j=2s, \\ \int\limits_{-\gamma}^{x} \sqrt{\dfrac{1}{a}}\sin\dfrac{(j+1)\pi}{2a}\xi\,d\xi, \ j=2s-1, \end{cases}$$
$$j=0,1,2,\ldots, \quad s=1,2,3,\ldots,$$

т.е.

$$\int\limits_{-\gamma}^{x} \hat{S}(j,\xi)\,d\xi = \begin{cases} \dfrac{x+\gamma}{\sqrt{2a}}, \ j=0, \\ \dfrac{2\sqrt{a}}{j\pi}\left(\sin\dfrac{j\pi}{2a}x + \sin\dfrac{j\pi}{2a}\gamma\right), \ j=2s, \\ \dfrac{2\sqrt{a}}{(j+1)\pi}\left(\cos\dfrac{(j+1)\pi}{2a}\gamma - \cos\dfrac{(j+1)\pi}{2a}x\right), \ j=2s-1. \end{cases}$$

Положим $k=1,2,3,\ldots$ и перейдем к вычислению элементов P_{ij}^{-1}, рассматривая все возможные варианты, а именно:

1) $i=j=0$:

$$P_{00}^{-1} = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{\frac{1}{2a}}\frac{x+\gamma}{\sqrt{2a}}\,dx = \gamma;$$

2) $i=0$, $j=2s$:

$$P_{0j}^{-1} = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{\frac{1}{2a}}\frac{2\sqrt{a}}{j\pi}\left(\sin\frac{j\pi}{2a}x + \sin\frac{j\pi}{2a}\gamma\right)dx = \frac{2\sqrt{2}a}{j\pi}\sin\frac{j\pi}{2a}\gamma;$$

3) $i = 0$, $j = 2s - 1$:

$$P_{0j}^{-1} = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{\frac{1}{2a}} \frac{2\sqrt{a}}{(j+1)\pi} \left(\cos \frac{(j+1)\pi}{2a} \gamma - \cos \frac{(j+1)\pi}{2a} x \right) dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}a}{(j+1)\pi} \cos \frac{(j+1)\pi}{2a} \gamma;$$

4) $i = 2k$, $j = 0$:

$$P_{i0}^{-1} = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{\frac{1}{a}} \cos \frac{i\pi}{2a} x \frac{x + \gamma}{\sqrt{2a}} dx = 0;$$

5) $i = 2k$, $j = 2s$:

$$P_{ij}^{-1} = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{\frac{1}{a}} \cos \frac{i\pi}{2a} x \frac{2\sqrt{a}}{j\pi} \left(\sin \frac{j\pi}{2a} x + \sin \frac{j\pi}{2a} \gamma \right) dx = 0;$$

6) $i = 2k$, $j = 2s - 1$:

$$P_{ij}^{-1} = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{\frac{1}{a}} \cos \frac{i\pi}{2a} x \frac{2\sqrt{a}}{(j+1)\pi} \left(\cos \frac{(j+1)\pi}{2a} \gamma - \cos \frac{(j+1)\pi}{2a} x \right) dx =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2a}{(j+1)\pi}, \ i = j + 1, \\ 0, \ i \neq j + 1; \end{cases}$$

7) $i = 2k - 1$, $j = 0$:

$$P_{i0}^{-1} = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \frac{(i+1)\pi}{2a} x \frac{x + \gamma}{\sqrt{2a}} dx = \frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}} 2\sqrt{2}a}{(i+1)\pi};$$

8) $i = 2k - 1$, $j = 2s$:

$$P_{ij}^{-1} = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \frac{(i+1)\pi}{2a} x \frac{2\sqrt{a}}{j\pi} \left(\sin \frac{j\pi}{2a} x + \sin \frac{j\pi}{2a} \gamma \right) dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2a}{j\pi}, \ i + 1 = j, \\ 0, \ i + 1 \neq j; \end{cases}$$

9) $i = 2k-1$, $j = 2s-1$:

$$P_{ij}^{-1} =$$
$$= \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\frac{(i+1)\pi}{2a}x \frac{2\sqrt{a}}{(j+1)\pi}\left(\cos\frac{(j+1)\pi}{2a}\gamma - \cos\frac{(j+1)\pi}{2a}x\right)dx = 0.$$

Таким образом, искомая спектральная характеристика записывается в виде

$$P^{-1}(1,1) = \begin{bmatrix} \gamma & \frac{\sqrt{2}a}{\pi}\cos\frac{\pi}{a}\gamma & \frac{\sqrt{2}a}{\pi}\sin\frac{\pi}{a}\gamma & \frac{\sqrt{2}a}{2\pi}\cos\frac{2\pi}{a}\gamma & \ldots \\ \frac{\sqrt{2}a}{\pi} & 0 & \frac{a}{\pi} & 0 & \ldots \\ 0 & -\frac{a}{\pi} & 0 & 0 & \ldots \\ -\frac{\sqrt{2}a}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что если положить γ равным нулю, получится спектральная характеристика $P^{-1}(1,1)$ оператора интегрирования $\mathcal{D}_x^{-1}$ при условии $x_0 = 0$ (см. примеры спектральных характеристик оператора интегрирования, определенных относительно различных базисных систем). ■

Многомерный случай. Пусть $x = [x_1 \ \ x_2 \ \ \ldots \ \ x_n]^{\mathrm{T}} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, множество Ω представляется в виде $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$, причем $x_1 \in \Omega_1$, $x_2 \in \Omega_2$, …, $x_n \in \Omega_n$; $\mathcal{D}_{x_i}^{-1}$ – **оператор интегрирования**, ставящий в соответствие функции многих переменных $h(x) \in L_2(\Omega; \rho(x))$ функцию

$$\int\limits_{x_{0i}}^{x_i} h(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_n)\,d\xi,$$

где $x_{0i} \in \Omega_i$, т.е. интегрирование ведется по переменной x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Спектральной характеристикой оператора интегрирования $\mathcal{D}_{x_i}^{-1}$ называется $2n$-мерная матрица $P_i^{-1}(n,n) = (P_{i\,i_1 i_2 \ldots i_n j_1 j_2 \ldots j_n}^{-1})$, элементы которой задаются выражением

$$P_{i\,i_1 i_2 \ldots i_n j_1 j_2 \ldots j_n}^{-1} = \Bigg(p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x),$$
$$\int\limits_{x_{0i}}^{x_i} p(j_1, j_2, \ldots, j_n, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_n)\,d\xi\Bigg)_{L_2(\Omega;\,\rho(x))},$$

$$i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_n = 0, 1, 2, \ldots,$$

т.е.

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_i}^{-1}\right] = P_i^{-1}(n,n), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Для нахождения спектральных характеристик операторов интегрирования по нескольким координатам вектора состояния нужно воспользоваться свойством спектрального преобразования композиции линейных операторов (см. разд. 1.2.3).

Приведем основные *свойства спектрального преобразования операторов интегрирования*.

1. **Интегрирование функций многих переменных.**

Спектральная характеристика интеграла функции $h(x)$ по координате x_i равна произведению спектральной характеристики $P_i^{-1}(n,n)$ оператора интегрирования $\mathcal{D}_{x_i}^{-1}$ и спектральной характеристики $H(n,0)$ функции $h(x)$:

$$\mathbb{S}\left[\int\limits_{x_{0i}}^{x_i} h(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, d\xi\right] = P_i^{-1}(n,n) \cdot H(n,0),$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

2. **Связь спектральных характеристик операторов дифференцирования и интегрирования**.

Спектральная характеристика $P_i^{-1}(n,n)$ оператора интегрирования $\mathcal{D}_{x_i}^{-1}$ является правосторонней обратной матрицей для спектральной характеристики $\mathcal{P}_i(n,n)$ оператора дифференцирования $\mathcal{D}_{x_i}$:

$$\mathcal{P}_i(n,n) \cdot P_i^{-1}(n,n) = E(n,n), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В общем случае

$$P_i^{-1}(n,n) \cdot \mathcal{P}_i(n,n) \neq E(n,n).$$

Далее, как и для операторов дифференцирования, будем полагать, что функции базисной системы $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$ представляются в виде (1.23), иными словами, порождаются всевозможными произведениями функций $\{p_1(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$, $\{p_2(i_2, x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$, $\ldots$, $\{p_n(i_n, x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$, образующих базисные системы пространств $L_2(\Omega_1; \rho_1(x_1))$, $L_2(\Omega_2; \rho_2(x_2))$, $\ldots$, $L_2(\Omega_n; \rho_n(x_n))$ соответственно; $\rho(x) = \rho_1(x_1)\rho_2(x_2)\ldots\rho_n(x_n)$. Тогда спектральные характеристики $P_i^{-1}(n,n)$ операторов интегрирования $\mathcal{D}_{x_i}^{-1}$ выражаются через спектральные характеристики $P^{-1}(1,1)$ операторов интегрирования $\mathcal{D}_x^{-1}$, определенные для одномерного случая:

$$P_i^{-1}(n,n) = E(1,1) \otimes \ldots \otimes P_i^{-1}(1,1) \otimes \ldots \otimes E(1,1),$$
$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

т.е. матрица $P_i^{-1}(n,n)$ является тензорным произведением n сомножителей, из которых сомножитель с номером i равен $P_i^{-1}(1,1)$, а остальные представляют собой двумерные единичные матрицы $E(1,1)$. Здесь $P_l^{-1}(1,1)$ – спектральная характеристика оператора интегрирования, заданная выражением (1.82). Спектральная характеристика $P_l^{-1}(1,1)$ определена относительно базисной системы $\{p_l(i_l,x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$, $l=1,2,\ldots,n$.

Например, для двумерного случая ($n=2$) спектральные характеристики операторов интегрирования по координатам x_1 и x_2, определенные относительно базисной системы $\{p_1(i_1,x_1)p_2(i_2,x_2)\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\Omega;\, \rho_1(x_1)\rho_2(x_2))$, где $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, имеют вид

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_1}^{-1}\right] = P_1^{-1}(2,2) = P_1^{-1}(1,1)\otimes E(1,1),$$
$$\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_2}^{-1}\right] = P_2^{-1}(2,2) = E(1,1)\otimes P_2^{-1}(1,1),$$

где $P_1^{-1}(1,1)$ и $P_2^{-1}(1,1)$ – спектральные характеристики операторов интегрирования, определенные относительно базисных систем $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ соответственно.

Спектральные характеристики операторов интегрирования по нескольким координатам вектора состояния определяются по свойству спектрального преобразования композиции линейных операторов (см. разд. 1.4.1). Например, оператору $\mathcal{D}_{x_1x_2}^{-1}$, задаваемому формулой

$$\mathcal{D}_{x_1x_2}^{-1}h(x_1,x_2) = \int\limits_{x_{01}}^{x_1}\int\limits_{x_{02}}^{x_2} h(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2,$$

соответствует спектральная характеристика

$$P_{12}^{-1}(2,2) = P_1^{-1}(1,1)\otimes P_2^{-1}(1,1),$$

так как с учетом свойств умножения многомерных матриц (см. разд. 1.2.3)

$$\begin{aligned}\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_1x_2}^{-1}\right] &= \mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_1}^{-1}\circ\mathcal{D}_{x_2}^{-1}\right] = \mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_1}^{-1}\right]\cdot\mathbb{S}\left[\mathcal{D}_{x_2}^{-1}\right] = \\ &= \left(P_1^{-1}(1,1)\otimes E(1,1)\right)\cdot\left(E(1,1)\otimes P_2^{-1}(1,1)\right) = \\ &= \left(P_1^{-1}(1,1)\cdot E(1,1)\right)\otimes\left(E(1,1)\cdot P_2^{-1}(1,1)\right) = \\ &= P_1^{-1}(1,1)\otimes P_2^{-1}(1,1).\end{aligned}$$

Пример 1.35. Найти спектральную характеристику оператора интегрирования $\mathcal{D}_{x_1x_2}^{-1}$, заданного на пространстве $L_2([0,1]\times[0,1])$, относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_1,x_1)\hat{\Omega}(i_2,x_2)\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$ при условии, что $x_{01}=x_{02}=0$.

□ Спектральная характеристика $P_{12}^{-1}(2,2)$ оператора интегрирования $\mathcal{D}_{x_1x_2}^{-1}$ равна тензорному произведению спектральной характеристики $P_1^{-1}(1,1)$ оператора интегрирования, определенной относительно полиномов Лежандра (1.17), и спектральной характеристики $P_2^{-1}(1,1)$ оператора интегрирования, определенной относительно функций Уолша (1.19):

$$P_{12}^{-1}(2,2) = P_1^{-1}(1,1) \otimes P_2^{-1}(1,1) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{35}} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{35}} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \dots \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \dots \\ -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \dots \\ -\frac{1}{8} & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{16} & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{4\sqrt{3}} & -\frac{1}{8\sqrt{3}} & -\frac{1}{16\sqrt{3}} & \dots \\ \frac{1}{8\sqrt{3}} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{16\sqrt{3}} & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{8\sqrt{3}} & \frac{1}{16\sqrt{3}} & \dots \\ -\frac{1}{8\sqrt{3}} & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{16\sqrt{3}} & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Операторы интегрирования в пространстве функций времени и вектора состояния

Рассмотрим операторы интегрирования, заданные на пространстве функций времени и вектора состояния. Пусть $\mathcal{D}_t^{-1}$ – **оператор интегрирования по времени**, т.е.

$$\mathcal{D}_t^{-1} h(t,x) = \int\limits_{t_0}^{t} h(\theta, x)\, d\theta,$$

и $\mathcal{D}_{x_i}^{-1}$ – **оператор интегрирования по координате** x_i **вектора состояния** x:

$$\mathcal{D}_{x_i}^{-1}h(t,x) = \int\limits_{x_{0i}}^{x_i} h(t,x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},\xi,x_{i+1},\ldots,x_n)\,d\xi, \quad i=1,2,\ldots,n,$$

где $h(t,x)\in L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$, $Q_T = T\times\Omega$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$.

Нестационарной спектральной характеристикой оператора интегрирования по времени $\mathcal{D}_t^{-1}$, определенной относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, называется матрица $P^{-1}(n+1,n+1) = (P^{-1}_{i_0i_1\ldots i_nj_0j_1\ldots j_n})$, элементы которой вычисляются по следующему правилу:

$$\begin{aligned}
&P^{-1}_{i_0i_1\ldots i_nj_0j_1\ldots j_n} = \\
&= \left(e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x), \int\limits_{t_0}^{t} e(j_0,j_1,\ldots,j_n,\theta,x)\,d\theta \right)_{L_2(Q_T;\,\nu(t)\,\rho(x))}, \\
&i_0,i_1,\ldots,i_n,j_0,j_1,\ldots,j_n = 0,1,2,\ldots\ .
\end{aligned}$$

Нестационарная спектральная характеристика оператора интегрирования $\mathcal{D}_{x_i}^{-1}$ обозначается через $P_i^{-1}(n+1,n+1) = (P^{-1}_{i\,i_0i_1\ldots i_nj_0j_1\ldots j_n})$, а ее элементы определяются формулой

$$\begin{aligned}
P^{-1}_{i\,i_0i_1\ldots i_nj_0j_1\ldots j_n} &= \Bigg(e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x), \\
&\int\limits_{x_{0i}}^{x_i} e(j_0,j_1,\ldots,j_n,t,x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},\xi,x_{i+1},\ldots,x_n)\,d\xi \Bigg)_{L_2(Q_T;\,\nu(t)\,\rho(x))}, \\
&i_0,i_1,\ldots,i_n,j_0,j_1,\ldots,j_n = 0,1,2,\ldots, \quad i=1,2,\ldots,n.
\end{aligned}$$

В случае, если функции базисной системы пространства $L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$ представляются в виде (1.27), т.е. в виде произведения функций базисных систем пространств $L_2(T;\nu(t))$ и $L_2(\Omega;\rho(x))$, нестационарные спектральные характеристики операторов интегрирования представляются в виде

$$\begin{aligned}
&P^{-1}(n+1,n+1) = P^{-1}(1,1)\otimes E(n,n), \\
&P_i^{-1}(n+1,n+1) = E(1,1)\otimes P_i^{-1}(n,n), \qquad (1.83)\\
&i=1,2,\ldots,n,
\end{aligned}$$

что следует из определения нестационарных спектральных характеристик $P^{-1}(n+1,n+1)$ и $P_i^{-1}(n+1,n+1)$, свойства ортонормированности функций базисной системы (см. разд. 1.1.1 и 1.1.2) и правила тензорного умножения матриц (см. разд. 1.2.3). Здесь $P^{-1}(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора интегрирования, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T;\nu(t))$, а $P_i^{-1}(n,n)$ – спектральная характеристика оператора интегрирования по координате x_i, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\Omega;\rho(x))$ (см. предыдущий подраздел).

Приведем *свойства спектрального преобразования операторов интегрирования*.

1. **Интегрирование функций времени и вектора состояния.**

Нестационарная спектральная характеристика интеграла функции $h(t,x)$ по времени равна произведению нестационарной спектральной характеристики $P^{-1}(n+1,n+1)$ оператора интегрирования по времени $\mathcal{D}_t^{-1}$ и нестационарной спектральной характеристики $H(n+1,0)$ функции $h(t,x)$:

$$\mathbb{S}\left[\int\limits_{t_0}^{t} h(\theta,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,d\theta\right] = P^{-1}(n+1,n+1)\cdot H(n+1,0).$$

Нестационарная спектральная характеристика интеграла функции $h(t,x)$ по координате x_i равна произведению нестационарной спектральной характеристики $P_i^{-1}(n+1,n+1)$ оператора интегрирования $\mathcal{D}_{x_i}^{-1}$ и нестационарной спектральной характеристики $H(n+1,0)$ функции $h(t,x)$:

$$\mathbb{S}\left[\int\limits_{x_{0i}}^{x_i} h(t,x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},\xi,x_{i+1},\ldots,x_n)\,d\xi\right] =$$
$$= P_i^{-1}(n+1,n+1)\cdot H(n+1,0),\quad i=1,2,\ldots,n.$$

2. **Связь нестационарных спектральных характеристик операторов дифференцирования и интегрирования.**

Нестационарная спектральная характеристика $P^{-1}(n+1,n+1)$ оператора интегрирования по времени $\mathcal{D}_t^{-1}$ является обратной матрицей для нестационарной спектральной характеристики $P(n+1,n+1)$ оператора дифференцирования по времени $\tilde{\mathcal{D}}_t$ с учетом значения функции в начальный момент (см. разд. 1.4.3):

$$P(n+1,n+1)\cdot P^{-1}(n+1,n+1) = E(n+1,n+1),$$
$$P^{-1}(n+1,n+1)\cdot P(n+1,n+1) = E(n+1,n+1).$$

Нестационарная спектральная характеристика $P_i^{-1}(n+1,n+1)$ оператора интегрирования $\mathcal{D}_{x_i}^{-1}$ является правосторонней обратной матрицей для спектральной характеристики $\mathcal{P}_i(n+1,n+1)$ оператора дифференцирования $\mathcal{D}_{x_i}$:

$$\mathcal{P}_i(n+1,n+1)\cdot P_i^{-1}(n+1,n+1)=E(n+1,n+1),\quad i=1,2,\ldots,n.$$

В общем случае

$$P_i^{-1}(n+1,n+1)\cdot\mathcal{P}_i(n+1,n+1)\neq E(n+1,n+1).$$

Нестационарные спектральные характеристики операторов интегрирования по времени и нескольким координатам вектора состояния, а также операторов интегрирования второго порядка [71] определяются по свойству спектрального преобразования композиции линейных операторов (см. разд. 1.4.1).

Пример 1.36. Записать правосторонние обратные матрицы для нестационарных спектральных характеристик $\mathcal{P}_1(3,3)$ и $\mathcal{P}_2(3,3)$ операторов дифференцирования $\mathcal{D}_{x_1}$ и $\mathcal{D}_{x_2}$ соответственно, найденных в примере 1.30.

$\square$ Напомним (см. пример 1.30), что

$$\mathcal{P}_1(3,3)=E(1,1)\otimes\mathcal{P}_1(1,1)\otimes E(1,1),$$

$$\mathcal{P}_2(3,3)=E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes\mathcal{P}_2(1,1),$$

где $\mathcal{P}_1(1,1)$ и $\mathcal{P}_2(1,1)$ – спектральные характеристики операторов дифференцирования, определенные относительно базисных систем пространства $L_2(\mathbb{R})$.

Рассмотрим нестационарные спектральные характеристики операторов интегрирования $\mathcal{D}_{x_1}^{-1}$ и $\mathcal{D}_{x_2}^{-1}$:

$$P_1^{-1}(3,3)=E(1,1)\otimes P_1^{-1}(1,1)\otimes E(1,1),$$

$$P_2^{-1}(3,3)=E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes P_2^{-1}(1,1),$$

где $P_1^{-1}(1,1)$ и $P_2^{-1}(1,1)$ – спектральные характеристики операторов интегрирования, определенные относительно тех же базисных систем, что и спектральные характеристики $\mathcal{P}_1(1,1)$ и $\mathcal{P}_2(1,1)$ соответственно. Учитывая свойства умножения многомерных матриц (см. разд. 1.2.3), получаем

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_1(3,3)\cdot P_1^{-1}(3,3)=\\
&\quad=\big(E(1,1)\otimes\mathcal{P}_1(1,1)\otimes E(1,1)\big)\cdot\big(E(1,1)\otimes P_1^{-1}(1,1)\otimes E(1,1)\big)=\\
&\quad\quad=\big(E(1,1)\cdot E(1,1)\big)\otimes\big(\underbrace{\mathcal{P}_1(1,1)\cdot P_1^{-1}(1,1)}_{E(1,1)}\big)\otimes\big(E(1,1)\cdot E(1,1)\big)=\\
&\quad\quad\quad=E(3,3),
\end{aligned}$$

$$P_1^{-1}(3,3)\cdot \mathcal{P}_1(3,3) =$$
$$= \big(E(1,1)\otimes P_1^{-1}(1,1)\otimes E(1,1)\big)\cdot\big(E(1,1)\otimes \mathcal{P}_1(1,1)\otimes E(1,1)\big) =$$
$$= \big(E(1,1)\cdot E(1,1)\big)\otimes \big(\underbrace{P_1^{-1}(1,1)\cdot \mathcal{P}_1(1,1)}_{\neq E(1,1)}\big)\otimes\big(E(1,1)\cdot E(1,1)\big)\neq$$
$$\neq E(3,3).$$

Аналогично

$$\mathcal{P}_2(3,3)\cdot P_2^{-1}(3,3) = E(3,3),$$
$$P_2^{-1}(3,3)\cdot \mathcal{P}_2(3,3) \neq E(3,3),$$

следовательно, нестационарные спектральные характеристики $P_1^{-1}(3,3)$ и $P_2^{-1}(3,3)$ являются правосторонними обратными матрицами для нестационарных спектральных характеристик $\mathcal{P}_1(3,3)$ и $\mathcal{P}_2(3,3)$ соответственно (см. разд. 1.2.3). ■

1.5. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

1.5.1. Линейные функционалы на пространстве функций вектора состояния

При решении некоторых задач требуется вычислять интегралы от функций многих переменных как по всей области определения, так и по ее подмножествам. В связи с этим возникает необходимость представления линейных функционалов в спектральной форме математического описания.

Пусть $\mathcal{W}$ – линейный функционал, определенный на пространстве $L_2(\Omega;\rho(x))$, а $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ – базис этого пространства (см. разд. 1.1.2). Будем предполагать, что существует такая вещественнозначная функция $w(x)$, что

$$\mathcal{W}h(x) = \int\limits_{\Omega} w(x)h(x)\,dx \tag{1.84}$$

для любой функции $h(x)\in L_2(\Omega;\rho(x))$.

Гиперстрочная матрица $W(0,n) = (w_{i_1 i_2\ldots i_n})$, элементы которой определяются соотношением

$$w_{i_1 i_2\ldots i_n} = \big(p^*(i_1,i_2,\ldots,i_n,x),w(x)\big)_{L_2(\Omega;\rho(x))}, \tag{1.85}$$
$$i_1,i_2,\ldots,i_n = 0,1,2,\ldots,$$

называется **спектральной характеристикой функционала** $\mathcal{W}$, а элементы $w_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ – **координатами спектральной характеристики**. Отображение, ставящее в соответствие линейному функционалу его спектральную характеристику, называется **спектральным преобразованием** и обозначается $\mathbb{S}$, т.е.

$$\mathbb{S}\,[\mathcal{W}] = W(0, n).$$

Замечание 1.18. В ряде случаев функция $w(x)$ может не принадлежать пространству $L_2(\Omega;\, \rho(x))$, тем не менее координаты $w_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ спектральной характеристики $W(0, n)$ вычисляются по формуле (1.85).

Установим связь между спектральными характеристиками функций и линейных функционалов.

Утверждение 1.19. *Пусть* $\mathcal{W}$ *– линейный функционал;* $w(x)$ *– функция вектора состояния, соответствующая функционалу* $\mathcal{W}$ *в представлении* (1.84); $W(0, n)$ *– спектральная характеристика функционала* $\mathcal{W}$, *определенная относительно базисной системы* $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$; $W(n, 0)$ *– спектральная характеристика функции* $w(x)$, *определенная относительно той же базисной системы. Тогда гиперстолбцовая матрица* $W(n, 0)$ *является сопряженной по отношению к гиперстрочной матрице* $W(0, n)$, *т.е.*

$$W(0, n) = [W(n, 0)]^*.$$

Доказательство. По определению спектральных характеристик функций вектора состояния (см. разд. 1.3.2) элементы гиперстолбцовой матрицы $W(n, 0)$ задаются соотношением

$$w_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \big(p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x), w(x)\big)_{L_2(\Omega;\, \rho(x))},$$
$$i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Тогда

$$w^*_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \big(p^*(i_1, i_2, \ldots, i_n, x), w(x)\big)_{L_2(\Omega;\, \rho(x))},$$
$$i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $w^*_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ – комплексное сопряженное число, а $p^*(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)$ – комплекснозначная сопряженная функция.

Нетрудно видеть (см. (1.85)), что числа $w^*_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ представляют собой элементы гиперстрочной матрицы $W(0, n)$. Таким образом, по определению сопряженных матриц (см. разд. 1.2.3) имеем $W(0, n) = [W(n, 0)]^*$. ◄

Докажем теорему, позволяющую вычислять значения линейного функционала по его спектральной характеристике.

Теорема 1.5. *Пусть* $\mathcal{W}$ *– линейный функционал, определенный на пространстве* $L_2(\Omega;\,\rho(x))$; $h(x) \in L_2(\Omega;\,\rho(x))$ *– функция вектора состояния такая, что* $\rho^{-1}(x)h(x) \in L_2(\Omega;\,\rho(x))$; $W(0,n)$, $H(n,0)$ *и* $R(n,n)$ *– спектральные характеристики функционала* $\mathcal{W}$, *функции* $h(x)$ *и оператора умножения на весовую функцию* $\rho(x)$ *соответственно, определенные относительно базисной системы* $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$. *Тогда*

$$\mathcal{W}h(x) = W(0,n) \cdot \big(R^{-1}(n,n) \cdot H(n,0)\big), \tag{1.86}$$

т.е. значение функционала $\mathcal{W}h(x)$ *равно произведению спектральной характеристики функционала* $\mathcal{W}$ *на произведение обратной матрицы по отношению к спектральной характеристике оператора умножения на весовую функцию* $\rho(x)$ *и спектральной характеристики функции* $h(x)$.

Доказательство. Из (1.84) следует, что

$$\mathcal{W}h(x) = \int\limits_{\Omega} \underbrace{\rho(x)\frac{1}{\rho(x)}}_{1} w(x)\,h(x)\,dx,$$

тогда, обозначая произведение $\rho^{-1}(x)\,h(x)$ через $\gamma(x)$, формально можно записать

$$\mathcal{W}h(x) = \int\limits_{\Omega} \rho(x)\,w(x)\gamma(x)\,dx = \big(w(x), \gamma(x)\big)_{L_2(\Omega;\,\rho(x))}.$$

Представим функцию $\gamma(x)$ в виде ряда по функциям базисной системы (см. разд. 1.1.2) и воспользуемся свойством линейности скалярного произведения по каждому сомножителю:

$$\mathcal{W}h(x) = \left(w(x), \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty} \gamma_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\right)_{L_2(\Omega;\,\rho(x))} =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty} \big(w(x), p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\big)_{L_2(\Omega;\,\rho(x))} \cdot \gamma_{i_1 i_2 \ldots i_n},$$

где $\gamma_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ – координаты спектральной характеристики функции $\gamma(x)$.

Согласно свойству скалярного произведения [45], имеем

$$\begin{aligned}
&\big(w(x), p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\big)_{L_2(\Omega;\,\rho(x))} = \\
&= \Big[\big(p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x), w(x)\big)_{L_2(\Omega;\,\rho(x))}\Big]^* = \\
&= \big(p^*(i_1, i_2, \ldots, i_n, x), w(x)\big)_{L_2(\Omega;\,\rho(x))},
\end{aligned}$$

следовательно,

$$\mathcal{W}h(x) = \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}\big(p^*(i_1,i_2,\ldots,i_n,x),w(x)\big)_{L_2(\Omega;\,\rho(x))}\cdot\gamma_{i_1 i_2\ldots i_n} =$$
$$= \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty} w_{i_1 i_2\ldots i_n}\cdot\gamma_{i_1 i_2\ldots i_n},$$

где $w_{i_1 i_2\ldots i_n}$ – координаты спектральной характеристики функционала $\mathcal{W}$.

Учитывая правило умножения многомерных матриц (см. разд. 1.2.3), получаем

$$\mathcal{W}h(x) = W(0,n)\cdot\Gamma(n,0),$$

где $\Gamma(n,0)$ – спектральная характеристика функции $\gamma(x)$.

Из определения функции $\gamma(x)$ следует, что $h(x)=\rho(x)\gamma(x)$. Применим к левой и правой части этого равенства спектральное преобразование. Тогда по свойству спектрального преобразования произведения функций вектора состояния (см. разд. 1.4.2) получаем

$$H(n,0) = R(n,n)\cdot\Gamma(n,0),$$

где $R(n,n)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\rho(x)$. Умножая левую и правую часть полученного выражения слева на матрицу $R^{-1}(n,n)$, имеем

$$\Gamma(n,0) = R^{-1}(n,n)\cdot H(n,0),$$

поэтому $\mathcal{W}h(x) = W(0,n)\cdot\big(R^{-1}(n,n)\cdot H(n,0)\big)$. ◀

Приведем ***примеры линейных функционалов***.

1. Линейный функционал $\delta_{x'}$, ставящий в соответствие функции вектора состояния $h(x)\in L_2(\Omega;\rho(x))$ значение этой функции в точке $x'\in\Omega$:

$$\delta_{x'}h(x) = h(x').$$

Известно [29, 45], что $\delta_{x'}h(x)$ можно представить в виде

$$\delta_{x'}h(x) = \int\limits_{\Omega}\delta(x-x')\,h(x)\,dx,$$

где $\delta(x-x')$ – δ-функция векторного аргумента x. Тогда по определению спектральной характеристики линейного функционала

$$\mathbb{S}\left[\delta_{x'}\right] = \Delta_{x'}(0,n),$$

где элементы гиперстрочной матрицы $\Delta_{x'}(0,n)$ задаются выражением

$$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \int\limits_{\Omega} \rho(x) p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x) \delta(x - x')\, dx =$$

$$= \rho(x') \cdot p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x'), \quad i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Следовательно, значение функции $h(x)$ в заданной точке x' вычисляется по правилу

$$h(x') = \Delta_{x'}(0,n) \cdot \left(R^{-1}(n,n) \cdot H(n,0)\right).$$

Заметим, что если $R^{-1}(n,n) = E(n,n)$, т.е. при $\rho(x) \equiv 1$, получается соотношение, представляющее собой формулу обращения спектральных характеристик функций вектора состояния, записанную в матричной форме (см. (1.42)).

2. Линейный функционал $\mathcal{J}$, ставящий в соответствие функции вектора состояния $h(x) \in L_2(\Omega; \rho(x))$ значение интеграла от этой функции по множеству Ω:

$$\mathcal{J} h(x) = \int\limits_{\Omega} h(x)\, dx.$$

Нетрудно видеть, что функционалу $\mathcal{J}$ соответствует функция $w(x) = 1$, следовательно, по определению спектральной характеристики линейного функционала

$$\mathbb{S}\,[\mathcal{J}] = J(0,n),$$

где элементы гиперстрочной матрицы $J(0,n)$ задаются соотношением

$$J_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \int\limits_{\Omega} \rho(x) p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\, dx, \quad i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Тогда значение функционала $\mathcal{J}$ определяется следующим выражением:

$$\int\limits_{\Omega} h(x)\, dx = J(0,n) \cdot \left(R^{-1}(n,n) \cdot H(n,0)\right).$$

Следует отметить, что в силу утверждения 1.19 спектральная характеристика $J(0,n)$ линейного функционала $\mathcal{J}$ может быть выражена через спектральную характеристику $W(n,0)$ функции $w(x) \equiv 1$, определенную относительно базисной системы $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$, т.е.

$$J(0,n) = [W(n,0)]^*.$$

Пример 1.37. Найти спектральную характеристику линейного функционала δ_1, ставящего в соответствие функции $h(x) \in L_2(\mathbb{R}; \mathrm{e}^{-x^2})$ значение этой функции в точке $x = 1$, относительно полиномов Эрмита (1.20).

□ Как было показано выше (см. примеры линейных функционалов), линейному функционалу δ_1 соответствует функция $w(x) = \delta(x-1)$ в представлении (1.84). Следовательно, элементы Δ_i спектральной характеристики $\Delta(0,1)$ функционала δ_1, определенной относительно полиномов Эрмита, задаются выражением

$$\Delta_i = \rho(1) \cdot \hat{H}(i,1), \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\rho(1)$ – значение весовой функции $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ в точке $x = 1$, $\hat{H}(i,1)$ – значение i-го полинома Эрмита в точке $x = 1$, т.е.

$$\Delta_0 = \rho(1) \cdot \hat{H}(0,1) = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}},$$

$$\Delta_1 = \rho(1) \cdot \hat{H}(1,1) = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}},$$

$$\Delta_2 = \rho(1) \cdot \hat{H}(2,1) = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{\pi}},$$

$$\Delta_3 = \rho(1) \cdot \hat{H}(3,1) = -\frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt[4]{\pi}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta_i = \frac{1}{\mathrm{e}} \sqrt{\frac{i!}{2^i\sqrt{\pi}}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \frac{(-1)^k 2^{i-2k}}{k!(i-2k)!},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Таким образом, искомая спектральная характеристика имеет вид

$$\Delta(0,1) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\mathrm{e}\sqrt[4]{\pi}} & \dfrac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}\sqrt[4]{\pi}} & \dfrac{\sqrt{2}}{2\mathrm{e}\sqrt[4]{\pi}} & -\dfrac{\sqrt{3}}{3\mathrm{e}\sqrt[4]{\pi}} & \ldots \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Пример 1.38. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

используя в качестве базисной системы функции Эрмита (1.21).

$\square$ Известно [51], что координаты спектральной характеристики $W(1,0)$ функции $w(x) \equiv 1$, определенной относительно системы функций Эрмита, вычисляются следующим образом:

$$w_0 = \sqrt[4]{4\pi}, \quad w_1 = 0,$$
$$w_i = \sqrt{\frac{i-1}{i}}\, w_{i-2}, \quad i = 2, 3, 4, \ldots,$$

следовательно, спектральная характеристика функционала $\mathcal{J}$ при $n = 1$ (см. примеры линейных функционалов) имеет вид

$$J(0,1) = [W(1,0)]^{\mathrm{T}} = \left[\begin{array}{ccccccc} \sqrt[4]{4\pi} & 0 & \dfrac{\sqrt[4]{4\pi}}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{\sqrt{3}\sqrt[4]{4\pi}}{2\sqrt{2}} & 0 & \ldots \end{array}\right],$$

так как функции Эрмита являются вещественнозначными, и поэтому

$$[W(1,0)]^* = [W(1,0)]^{\mathrm{T}}.$$

Найдем спектральную характеристику функции $h(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ относительно системы функций Эрмита. По определению координаты спектральной характеристики функции $h(x)$ задаются соотношением (1.41):

$$h_i = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \hat{\Phi}(i,x)\, dx = \begin{cases} \sqrt[4]{\pi}, & i = 0, \\ 0, & i = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

т.е.

$$H(1,0) = \left[\begin{array}{ccccccc} \sqrt[4]{\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{array}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Функции Эрмита образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ с весовой функцией, тождественно равной единице. В связи с этим

$$R(1,1) = R^{-1}(1,1) = E(1,1),$$

тогда в силу теоремы 1.5 и правила умножения матриц значение интеграла определяется выражением

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx = J(0,1) \cdot H(1,0) =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} w_i \cdot h_i = \sqrt[4]{4\pi} \cdot \sqrt[4]{\pi} = \sqrt{2\pi}. \quad \blacksquare$$

Сформулируем утверждение о представлении спектральных характеристик линейных функционалов, определенных на пространстве функций вектора состояния.

Утверждение 1.20. *Пусть функции базисной системы*

$$\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$$

порождаются всевозможными произведениями функций $\{p_1(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$, $\{p_2(i_2, x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$, $\ldots$, $\{p_n(i_n, x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$, *которые в свою очередь образуют базисные системы пространств* $L_2(\Omega_1; \rho_1(x_1))$, $L_2(\Omega_2; \rho_2(x_2))$, $\ldots$, $L_2(\Omega_n; \rho_n(x_n))$ *соответственно (см.* (1.23)*), где* $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$, $\rho(x) = \rho_1(x_1)\rho_2(x_2)\ldots\rho_n(x_n)$. *Пусть также функцию* $w(x)$, *соответствующую линейному функционалу* $\mathcal{W}$, *можно представить в виде произведения* $w(x) = w_1(x_1) \cdot w_2(x_2) \cdots w_n(x_n)$. *Тогда спектральную характеристику функционала* $\mathcal{W}$, *определенную относительно базисной системы* $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$, *можно представить в виде тензорного произведения*

$$W(0, n) = W_1(0, 1) \otimes W_2(0, 1) \otimes \ldots \otimes W_n(0, 1), \tag{1.87}$$

где $W_l(0, 1)$ *– матрица-строка, сопряженная по отношению к спектральной характеристике* $W_l(1, 0)$ *функции* $w_l(x_l)$, *определенной относительно базисной системы* $\{p_l(i_l, x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$, *т.е.* $W_l(0, 1) = [W_l(1, 0)]^*$, $l = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Из утверждения 1.6 с учетом того, что понятие спектральных характеристик может быть расширено в том числе и на обобщенные функции вектора состояния, следует выражение для спектральной характеристики $W(n, 0)$ функции $w(x)$:

$$W(n, 0) = W_1(1, 0) \otimes W_2(1, 0) \otimes \ldots \otimes W_n(1, 0),$$

где $W_l(1, 0)$ – спектральная характеристика функции $w_l(x_l)$, определенная относительно базисной системы $\{p_l(i_l, x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$, $l = 1, 2, \ldots, n$.

Используя свойства сопряженных многомерных матриц (см. разд. 1.2.3), можно записать, что

$$[W(n, 0)]^* = [W_1(1, 0)]^* \otimes [W_2(1, 0)]^* \otimes \ldots \otimes [W_n(1, 0)]^*.$$

Если обозначить через $W_l(0, 1)$ матрицу-строку $[W_l(1, 0)]^*$, то отсюда и из утверждения 1.19 следует справедливость (1.87). ◄

З а м е ч а н и е 1.19. Если выполняются условия теоремы 1.5 и утверждений 1.6, 1.20 для линейного функционала $\mathcal{W}$ и функции вектора состояния $h(x)$, то формула (1.86) для вычисления значений функционала имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{W}h(x) = \Big(W_1(0, 1) \cdot \big(R_1^{-1}(1, 1) \cdot H_1(1, 0)\big)\Big) \times \\ \times \Big(W_2(0, 1) \cdot \big(R_2^{-1}(1, 1) \cdot H_2(1, 0)\big)\Big) \times \ldots \times \\ \times \Big(W_n(0, 1) \cdot \big(R_n^{-1}(1, 1) \cdot H_n(1, 0)\big)\Big). \end{aligned} \tag{1.88}$$

Действительно, спектральные характеристики $W(0,n)$ и $H(n,0)$ функционала $\mathcal{W}$ и функции $h(x)$ соответственно можно представить в виде

$$W(0,n) = W_1(0,1) \otimes W_2(0,1) \otimes \ldots \otimes W_n(0,1),$$

$$H(n,0) = H_1(1,0) \otimes H_2(1,0) \otimes \ldots \otimes H_n(1,0).$$

Кроме того, из утверждения 1.13 следует, что спектральная характеристика $R(n,n)$ оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$ представляется в виде тензорного произведения

$$R(n,n) = R_1(1,1) \otimes R_2(1,1) \otimes \ldots \otimes R_n(1,1),$$

где $R_l(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на весовую функцию $\rho_l(x_l)$, определенная относительно базисной системы $\{p_l(i_l,x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$, $l = 1,2,\ldots,n$.

В этом случае (1.86) примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{W}h(x) = \big(W_1(0,1) \otimes W_2(0,1) \otimes \ldots \otimes W_n(0,1)\big) \cdot \\ \cdot \Big(\big(R_1(1,1) \otimes R_2(1,1) \otimes \ldots \otimes R_n(1,1)\big)^{-1} \cdot \\ \cdot \big(H_1(1,0) \otimes H_2(1,0) \otimes \ldots \otimes H_n(1,0)\big)\Big), \end{aligned}$$

следовательно, применяя свойства обращения многомерных матриц (см. разд. 1.2.3), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{W}h(x) = \big(W_1(0,1) \otimes W_2(0,1) \otimes \ldots \otimes W_n(0,1)\big) \cdot \\ \cdot \Big(\big(R_1^{-1}(1,1) \otimes R_2^{-1}(1,1) \otimes \ldots \otimes R_n^{-1}(1,1)\big) \cdot \\ \cdot \big(H_1(1,0) \otimes H_2(1,0) \otimes \ldots \otimes H_n(1,0)\big)\Big). \end{aligned}$$

Тогда из свойства умножения многомерных матриц (см. разд. 1.2.3) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{W}h(x) = \Big(W_1(0,1) \cdot \big(R_1^{-1}(1,1) \cdot H_1(1,0)\big)\Big) \otimes \\ \otimes \Big(W_2(0,1) \cdot \big(R_2^{-1}(1,1) \cdot H_2(1,0)\big)\Big) \otimes \ldots \otimes \\ \otimes \Big(W_n(0,1) \cdot \big(R_n^{-1}(1,1) \cdot H_n(1,0)\big)\Big). \end{aligned}$$

Поскольку каждый сомножитель вида

$$\Big(W_l(0,1) \cdot \big(R_l^{-1}(1,1) \cdot H_l(1,0)\big)\Big),$$

где $l = 1,2,\ldots,n$, является числом (см. разд. 1.2.1), в результате получаем соотношение (1.88).

Пример 1.39. Найти спектральную характеристику линейного функционала $\mathcal{J}$, ставящего в соответствие функции $h(x_1, x_2) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ интеграл от этой функции по пространству $\mathbb{R}^2$. В качестве базисной системы использовать функции Эрмита.

□ Функционалу $\mathcal{J}$ соответствует функция $w(x_1, x_2) = 1$ (см. примеры линейных функционалов). Тогда, представляя функцию $w(x_1, x_2)$ в виде произведения $w(x_1, x_2) = w_1(x_1)w_2(x_2)$, где $w_1(x_1) = w_2(x_2) = 1$, и используя утверждение 1.20, можно сделать вывод о том, что спектральная характеристика $J(0, 2)$ функционала $\mathcal{J}$ может быть представлена в виде тензорного произведения

$$J(0,2) = J_1(0,1) \otimes J_2(0,1),$$

где $J_1(0, 1)$ и $J_2(0, 1)$ – матрицы-строки, сопряженные по отношению к спектральным характеристикам $W_1(1, 0)$ и $W_2(1, 0)$ функций $w_1(x_1)$ и $w_2(x_2)$ соответственно, определенным относительно системы функций Эрмита (1.21), т.е. $J_1(0, 1) = [W_1(1, 0)]^*$, $J_2(0, 1) = [W_2(1, 0)]^*$.

Спектральные характеристики $W_1(1, 0)$ и $W_2(1, 0)$ определены относительно одной и той же базисной системы, поэтому $W_1(1, 0) = W_2(1, 0)$ и, следовательно, $J_1(0, 1) = J_2(0, 1)$.

Как было показано в примере 1.38,

$$J_1(0,1) = J_2(0,1) = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{4\pi} & 0 & \dfrac{\sqrt[4]{4\pi}}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{\sqrt{3}\sqrt[4]{4\pi}}{2\sqrt{2}} & 0 & \ldots \end{bmatrix},$$

поэтому

$$J(0,2) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt[4]{4\pi}\cdot\sqrt[4]{4\pi} & \sqrt[4]{4\pi}\cdot 0 & \sqrt[4]{4\pi}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{4\pi}}{\sqrt{2}} & \sqrt[4]{4\pi}\cdot 0 & \ldots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0\cdot\sqrt[4]{4\pi} & 0\cdot 0 & 0\cdot\dfrac{\sqrt[4]{4\pi}}{\sqrt{2}} & 0\cdot 0 & \ldots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt[4]{4\pi}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{4\pi} & \dfrac{\sqrt[4]{4\pi}}{\sqrt{2}}\cdot 0 & \dfrac{\sqrt[4]{4\pi}}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{4\pi}}{\sqrt{2}} & \dfrac{\sqrt[4]{4\pi}}{\sqrt{2}}\cdot 0 & \ldots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0\cdot\sqrt[4]{4\pi} & 0\cdot 0 & 0\cdot\dfrac{\sqrt[4]{4\pi}}{\sqrt{2}} & 0\cdot 0 & \ldots \end{bmatrix} \ldots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{\pi} & 0 & \sqrt{2\pi} & 0 & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \sqrt{2\pi} & 0 & \sqrt{\pi} & 0 & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix} \ldots \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Рассмотрим процедуры интегрирования по части переменных функции вектора состояния. Введем новые обозначения. Пусть множество Ω представляется в виде $\Omega = \Omega_{(1)} \times \Omega_{(2)}$, где $\Omega_{(1)} \subseteq \mathbb{R}^m$, $\Omega_{(2)} \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$, $1 \leqslant m < n$, а вектор состояния x представляется в виде блочной матрицы-столбца

$$x = \begin{bmatrix} x_{(1)} \\ \hline x_{(2)} \end{bmatrix},$$

где $x_{(1)} = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_m]^{\mathrm{T}} \in \Omega_{(1)}$, $x_{(2)} = [x_{m+1} \quad \ldots \quad x_n]^{\mathrm{T}} \in \Omega_{(2)}$. Пусть также весовая функция $\rho(x)$ представляется в виде произведения

$$\rho(x) = \rho_{(1)}\bigl(x_{(1)}\bigr) \cdot \rho_{(2)}\bigl(x_{(2)}\bigr),$$

система функций $\bigl\{p_{(1)}\bigl(i_1, i_2, \ldots, i_m, x_{(1)}\bigr)\bigr\}_{i_1, i_2, \ldots, i_m = 0}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2\bigl(\Omega_{(1)}; \rho_{(1)}\bigl(x_{(1)}\bigr)\bigr)$, а система $\bigl\{p_{(2)}\bigl(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)}\bigr)\bigr\}_{i_{m+1}, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2\bigl(\Omega_{(2)}; \rho_{(2)}\bigl(x_{(2)}\bigr)\bigr)$. Функцию вектора состояния $h(x) \in L_2(\Omega; \rho(x))$ будем записывать в виде $h\bigl(x_{(1)}, x_{(2)}\bigr)$.

Будем полагать, что функции базиса $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$ пространства $L_2(\Omega; \rho(x))$ порождаются всевозможными произведениями функций базисных систем

$$\bigl\{p_{(1)}\bigl(i_1, i_2, \ldots, i_m, x_{(1)}\bigr)\bigr\}_{i_1, i_2, \ldots, i_m = 0}^{\infty} \quad \text{и} \quad \bigl\{p_{(2)}\bigl(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)}\bigr)\bigr\}_{i_{m+1}, \ldots, i_n = 0}^{\infty},$$

т.е. $p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x) = p_{(1)}\bigl(i_1, i_2, \ldots, i_m, x_{(1)}\bigr) \cdot p_{(2)}\bigl(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)}\bigr)$.

Рассмотрим линейный функционал $\mathcal{W}_{(1)}$, заданный на пространстве $L_2\bigl(\Omega_{(1)}; \rho_{(1)}\bigl(x_{(1)}\bigr)\bigr)$, тогда в выражении $h_{(2)}\bigl(x_{(2)}\bigr) = \mathcal{W}_{(1)} h\bigl(x_{(1)}, x_{(2)}\bigr)$ координаты вектора $x_{(2)}$ играют роль числовых параметров.

Теорема 1.6. *Пусть $\mathcal{W}_{(1)}$ – линейный функционал, определенный на пространстве $L_2\bigl(\Omega_{(1)}; \rho_{(1)}\bigl(x_{(1)}\bigr)\bigr)$; $h\bigl(x_{(1)}, x_{(2)}\bigr) \in L_2(\Omega; \rho(x))$ – функция вектора состояния такая, что $h\bigl(x_{(1)}, x_{(2)}\bigr)$, $\rho_{(1)}^{-1}\bigl(x_{(1)}\bigr) \cdot h\bigl(x_{(1)}, x_{(2)}\bigr) \in L_2\bigl(\Omega_{(1)}; \rho_{(1)}\bigl(x_{(1)}\bigr)\bigr)$ при почти всех $x_{(2)} \in \Omega_{(2)}$; $W_{(1)}(0, m)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{W}_{(1)}$, определенная относительно базисной системы $\bigl\{p_{(1)}\bigl(i_1, i_2, \ldots, i_m, x_{(1)}\bigr)\bigr\}_{i_1, i_2, \ldots, i_m = 0}^{\infty}$; $R(m, m)$ – спектральная характеристика оператора умножения на весовую функцию $\rho_{(1)}\bigl(x_{(1)}\bigr)$, определенная относительно той же базисной системы; $H(n, 0)$ – спектральная характеристика функции $h\bigl(x_{(1)}, x_{(2)}\bigr)$, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$. Тогда*

$$\begin{aligned} \mathbb{S}\bigl[\mathcal{W}_{(1)} h\bigl(x_{(1)}, x_{(2)}\bigr)\bigr] = \bigl(W_{(1)}(0, m) \otimes E(n - m, n - m)\bigr) \cdot \\ \cdot \bigl(\bigl(R^{-1}(m, m) \otimes E(n - m, n - m)\bigr) \cdot H(n, 0)\bigr), \end{aligned} \qquad (1.89)$$

где спектральное преобразование применяется к функции

$$h_{(2)}\bigl(x_{(2)}\bigr) = \mathcal{W}_{(1)} h\bigl(x_{(1)}, x_{(2)}\bigr)$$

относительно базисной системы $\bigl\{p_{(2)}\bigl(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)}\bigr)\bigr\}_{i_{m+1},\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Доказательство. Из теоремы 1.5 следует, что почти всюду на $\Omega_{(2)}$

$$h_{(2)}\bigl(x_{(2)}\bigr) = \mathcal{W}_{(1)} h\bigl(x_{(1)}, x_{(2)}\bigr) = W_{(1)}(0,m) \cdot \bigl(R^{-1}(m,m) \cdot H_{(1)}\bigl(m,0;x_{(2)}\bigr)\bigr)\,,$$

где $H_{(1)}\bigl(m,0;x_{(2)}\bigr)$ – спектральная характеристика функции $h\bigl(x_{(1)}, x_{(2)}\bigr)$ при фиксированном $x_{(2)} \in \Omega_{(2)}$, определенная относительно базисной системы $\bigl\{p_{(1)}\bigl(i_1, i_2, \ldots, i_m, x_{(1)}\bigr)\bigr\}_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{\infty}$.

Пусть $\Gamma_{(1)}\bigl(m,0;x_{(2)}\bigr) = R^{-1}(m,m) \cdot H_{(1)}\bigl(m,0;x_{(2)}\bigr)$ – спектральная характеристика функции $\gamma_{(1)}\bigl(x_{(1)}, x_{(2)}\bigr) = \rho^{-1}\bigl(x_{(1)}\bigr) \cdot h\bigl(x_{(1)}, x_{(2)}\bigr)$ при фиксированном $x_{(2)} \in \Omega_{(2)}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} h_{(2)}\bigl(x_{(2)}\bigr) &= W_{(1)}(0,m) \cdot \Gamma_{(1)}\bigl(m,0;x_{(2)}\bigr) = \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_m=0}^{\infty} w_{i_1 i_2 \ldots i_m} \cdot \gamma_{i_1 i_2 \ldots i_m}\bigl(x_{(2)}\bigr), \end{aligned}$$

где $w_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ и $\gamma_{i_1 i_2 \ldots i_m}\bigl(x_{(2)}\bigr)$ – координаты спектральных характеристик $W_{(1)}(0,m)$ и $\Gamma_{(1)}\bigl(m,0;x_{(2)}\bigr)$ соответственно, определенных относительно базисной системы $\bigl\{p_{(1)}\bigl(i_1, i_2, \ldots, i_m, x_{(1)}\bigr)\bigr\}_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{\infty}$.

Найдем координаты спектральной характеристики функции $h_{(2)}\bigl(x_{(2)}\bigr)$ относительно базисной системы $\bigl\{p_{(2)}\bigl(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)}\bigr)\bigr\}_{i_{m+1},\ldots,i_n=0}^{\infty}$, используя (1.41):

$$\begin{aligned} h_{i_{m+1}\ldots i_n} &= \bigl(p_{(2)}\bigl(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)}\bigr), h_{(2)}\bigl(x_{(2)}\bigr)\bigr)_{L_2\left(\Omega_{(2)};\rho_{(2)}\left(x_{(2)}\right)\right)} = \\ &= \Biggl(p_{(2)}\bigl(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)}\bigr), \\ &\qquad \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_m=0}^{\infty} w_{i_1 i_2 \ldots i_m} \cdot \gamma_{i_1 i_2 \ldots i_m}\bigl(x_{(2)}\bigr)\Biggr)_{L_2\left(\Omega_{(2)};\rho_{(2)}\left(x_{(2)}\right)\right)} = \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_m=0}^{\infty} w_{i_1 i_2 \ldots i_m} \cdot \gamma_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \\ & i_{m+1}, \ldots, i_n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

где величины

$$\gamma_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \bigl(p_{(2)}\bigl(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)}\bigr), \gamma_{i_1 i_2 \ldots i_m}\bigl(x_{(2)}\bigr)\bigr)_{L_2\left(\Omega_{(2)};\rho_{(2)}\left(x_{(2)}\right)\right)}$$

представляют собой координаты спектральной характеристики $\Gamma_{(1)}(n,0)$ функции $\gamma_{(1)}\bigl(x_{(1)},x_{(2)}\bigr)$, определенной относительно базисной системы $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Формулу для координат $h_{i_{m+1}\ldots i_n}$ можно переписать следующим образом:

$$h_{i_{m+1}\ldots i_n}=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_n=0}^{\infty}\tilde{w}_{i_{m+1}\ldots i_nj_1j_2\ldots j_n}\cdot\gamma_{j_1j_2\ldots j_n},$$
$$i_{m+1},\ldots,i_n=0,1,2,\ldots,$$

где величины

$$\tilde{w}_{i_{m+1}\ldots i_nj_1j_2\ldots j_n}=\begin{cases}w_{j_1j_2\ldots j_m},\ i_{m+1}=j_{m+1},\ \ldots,\ i_n=j_n,\\ 0\quad\text{в остальных случаях}\end{cases}$$

являются элементами многомерной матрицы $\tilde{W}(n-m,n)$.

Следовательно, по определению произведения и тензорного произведения многомерных матриц (см. разд. 1.2.3) получаем выражение для спектральной характеристики $H_{(2)}(n-m,0)$ функции $h_{(2)}\bigl(x_{(2)}\bigr)$:

$$H_{(2)}(n-m,0)=\mathbb{S}\left[h_{(2)}\bigl(x_{(2)}\bigr)\right]=\tilde{W}(n-m,n)\cdot\Gamma_{(1)}(n,0),$$

где

$$\tilde{W}(n-m,n)=W_{(1)}(0,m)\otimes E(n-m,n-m).$$

Из определения функции $\gamma_{(1)}\bigl(x_{(1)},x_{(2)}\bigr)$ и свойства спектрального преобразования произведения функций вектора состояния (см. разд. 1.4.2) получаем

$$H(n,0)=R(n,n)\cdot\Gamma_{(1)}(n,0),$$

где $R(n,n)$ – спектральная характеристика оператора умножения на весовую функцию $\rho_{(1)}\bigl(x_{(1)}\bigr)$, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$. Но функция $\rho_{(1)}\bigl(x_{(1)}\bigr)$ не зависит от координат вектора $x_{(2)}$, следовательно, $R(n,n)=R(m,m)\otimes E(n-m,n-m)$. Доказательство этого факта полностью аналогично доказательству утверждения 1.13.

Таким образом, по свойству обратных матриц (см. разд. 1.2.3)

$$\Gamma_{(1)}(n,0)=\bigl[R(m,m)\otimes E(n-m,n-m)\bigr]^{-1}\cdot H(n,0)=$$
$$=\bigl(R^{-1}(m,m)\otimes E(n-m,n-m)\bigr)\cdot H(n,0).$$

Подставляя $\Gamma_{(1)}(n,0)$ в выражение для $\mathbb{S}\left[h_{(2)}\bigl(x_{(2)}\bigr)\right]$, получаем (1.89). ◄

З а м е ч а н и е 1.20.

1. Аналогичное утверждение можно сформулировать в случае, если $x_{(1)}$ и $x_{(2)}$ образуются другим способом. Например,

$$x_{(1)} = [x_{m+1} \ \ \dots \ \ x_n]^{\mathrm{T}}, \quad x_{(2)} = [x_1 \ \ x_2 \ \ \dots \ \ x_m]^{\mathrm{T}}$$

или

$$x_{(1)} = [x_1 \ \ x_3 \ \ x_5 \ \ \dots \ \ x_{n-1}]^{\mathrm{T}}, \quad x_{(2)} = [x_2 \ \ x_4 \ \ x_6 \ \ \dots \ \ x_n]^{\mathrm{T}},$$

где n – четное число.

2. Переход от спектральной характеристики

$$H_{(2)}(n-m,0) = \mathbb{S}\left[\mathcal{W}_{(1)} h\big(x_{(1)}, x_{(2)}\big)\right]$$

к функции $h_{(2)}\big(x_{(2)}\big)$ в случае, если $h_{(2)}\big(x_{(2)}\big) \in L_2\big(\Omega_{(2)}; \rho_{(2)}\big(x_{(2)}\big)\big)$, осуществляется по **формуле обращения**

$$\begin{aligned} h_{(2)}\big(x_{(2)}\big) &= \mathbb{S}^{-1}\left[H_{(2)}(n-m,0)\right] = \\ &= \sum_{i_{m+1}=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} h_{i_{m+1}\dots i_n} \cdot p_{(2)}\big(i_{m+1}, \dots, i_n, x_{(2)}\big), \end{aligned} \qquad (1.90)$$

где $h_{i_{m+1}\dots i_n}$ – координаты спектральной характеристики $H_{(2)}(n-m,0)$, $x_{(2)} \in \Omega_{(2)}$.

Пример 1.40. Записать выражения для спектральных характеристик функций

$$h_2(x_2) = \int\limits_{\Omega_1} h(x_1,x_2)\,dx_1 \quad \text{и} \quad h_1(x_1) = \int\limits_{\Omega_2} h(x_1,x_2)\,dx_2,$$

где $h(x_1,x_2) \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$, $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}$.

☐ Пусть $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ – базис пространства $L_2(\Omega_1)$, а $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ – базис пространства $L_2(\Omega_2)$.

Положим $x_{(1)} = x_1$, $x_{(2)} = x_2$ и рассмотрим линейный функционал $\mathcal{J}_1$, ставящий в соответствие функции $f_1(x_1) \in L_2(\Omega_1)$ интеграл от этой функции по множеству Ω_1, т.е.

$$\mathcal{J}_1 f_1(x_1) = \int\limits_{\Omega_1} f_1(x_1)\,dx_1.$$

Нетрудно видеть, что $h_2(x_2) = \mathcal{J}_1 h(x_1,x_2)$ при любом фиксированном $x_2 \in \Omega_2$.

Поскольку $\rho_1(x_1) \equiv 1$ (см. замечание 1.3), то спектральная характеристика $R_1(1,1)$ оператора умножения на весовую функцию $\rho_1(x_1)$ равна двумерной единичной матрице $E(1,1)$ (см. разд. 1.4.2). По теореме 1.6 спектральная характеристика $H_2(1,0)$ функции $h_2(x_2)$, определенная относительно базисной системы $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$, выражается следующим образом ($n=2, m=1$):

$$\begin{aligned} H_2(1,0) &= \mathbb{S}\left[h_2(x_2)\right] = \mathbb{S}\left[\int\limits_{\Omega_1} h(x_1,x_2)\,dx_1\right] = \\ &= \big(J_1(0,1)\otimes E(1,1)\big)\cdot\Big(\big(\underbrace{R_1^{-1}(1,1)\otimes E(1,1)}_{E(2,2)}\big)\cdot H(2,0)\Big) = \\ &= \big(J_1(0,1)\otimes E(1,1)\big)\cdot H(2,0), \end{aligned}$$

где $J_1(0,1)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{J}_1$, определенная относительно базисной системы $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$; $H(2,0)$ – спектральная характеристика функции $h(x_1,x_2)$, определенная относительно базисной системы $\{p_1(i_1,x_1)p_2(i_2,x_2)\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$; $R_1^{-1}(1,1)\otimes E(1,1) = E^{-1}(1,1)\otimes E(1,1) = E(1,1)\otimes E(1,1) = E(2,2)$ согласно (1.33).

Переход от спектральной характеристики $H_2(1,0)$ к функции $h_2(x_2)$ осуществляется по формуле (1.90), которая в рассматриваемой задаче примет вид

$$\int\limits_{\Omega_1} h(x_1,x_2)\,dx_1 = \mathbb{S}^{-1}\left[H_2(1,0)\right] = \sum_{i_2=0}^{\infty} h''_{i_2}\cdot p_2(i_2,x_2),$$

где h''_{i_2} – координаты спектральной характеристики $H_2(1,0)$, $x_2\in\Omega_2$.

Теперь предположим, что $x_{(1)} = x_2$, а $x_{(2)} = x_1$ (см. замечание 1.20). Проводя аналогичные рассуждения, получаем выражение для спектральной характеристики $H_1(1,0)$ функции $h_1(x_1)$, определенной относительно базисной системы $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} H_1(1,0) &= \mathbb{S}\left[h_1(x_1)\right] = \mathbb{S}\left[\int\limits_{\Omega_2} h(x_1,x_2)\,dx_2\right] = \\ &= \big(E(1,1)\otimes J_2(0,1)\big)\cdot\Big(\big(\underbrace{E(1,1)\otimes R_2^{-1}(1,1)}_{E(2,2)}\big)\cdot H(2,0)\Big) = \\ &= \big(E(1,1)\otimes J_2(0,1)\big)\cdot H(2,0), \end{aligned}$$

где $J_2(0,1)$ – спектральная характеристика линейного функционала $\mathcal{J}_2$, заданного на пространстве $L_2(\Omega_2)$ и ставящего в соответствие функции $f_2(x_2)\in L_2(\Omega_2)$ интеграл от этой функции по множеству Ω_2, т.е.

$$\mathcal{J}_2 f_2(x_2) = \int\limits_{\Omega_2} f_2(x_2)\,dx_2;$$

$R_2(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на весовую функцию $\rho_2(x_2)$, равная двумерной единичной матрице $E(1,1)$, так как $\rho_2(x_2) \equiv 1$ вследствие замечания 1.3; $E(1,1) \otimes R_2^{-1}(1,1) = E(1,1) \otimes \otimes E^{-1}(1,1) = E(1,1) \otimes E(1,1) = E(2,2)$.

Формула обращения для спектральной характеристики $H_1(1,0)$ функции $h_1(x_1)$ имеет вид

$$\int\limits_{\Omega_2} h(x_1,x_2)\,dx_2 = \mathbb{S}^{-1}\left[H_1(1,0)\right] = \sum_{i_1=0}^{\infty} h'_{i_1} \cdot p_1(i_1,x_1),$$

где h'_{i_1} – координаты спектральной характеристики $H_1(1,0)$, $x_1 \in \Omega_1$.

Напомним, что спектральная характеристика функционала $\mathcal{J}_1$ может быть определена как матрица-строка, сопряженная по отношению к спектральной характеристике $W_1(1,0)$ функции $w_1(x_1) = 1$, определенной относительно базисной системы $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$, т.е.

$$J_1(0,1) = [W_1(1,0)]^*.$$

Аналогично,

$$J_2(0,1) = [W_2(1,0)]^*,$$

где $W_2(1,0)$ – спектральная характеристика функции $w_2(x_2) = 1$, определенная относительно базисной системы $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$. $\blacksquare$

1.5.2. Линейные функционалы на пространстве функций вектора состояния с параметром

Рассмотрим линейные функционалы, заданные на пространстве функций времени и вектора состояния в предположении, что значение переменной времени фиксировано, т.е. переменная t играет роль числового параметра.

Будем предполагать, что функции базисной системы

$$\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$$

пространства $L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$ порождаются всевозможными произведениями функций систем $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, которые в свою очередь являются базисами пространств $L_2(T;\nu(t))$ и $L_2(\Omega;\rho(x))$ соответственно (см. разд. 1.1.3).

Теорема 1.7. *Пусть* $\mathcal{W}$ *– линейный функционал, определенный на пространстве* $L_2(\Omega;\rho(x))$; $h(t,x) \in L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$ *– функция времени и вектора состояния такая, что* $h(t,x) \in L_2(\Omega;\rho(x))$ *и* $\rho^{-1}(x) \cdot h(t,x) \in L_2(\Omega;\rho(x))$ *при почти всех* $t \in T$; $W(0,n)$ *– спектральная характеристика функционала* $\mathcal{W}$, *определенная относительно базисной системы* $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$; $R(n,n)$ *– спектральная характеристика*

ристика оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$, *определенная относительно той же базисной системы*; $H(n+1,0)$ – *нестационарная спектральная характеристика функции* $h(t,x)$, *определенная относительно базисной системы* $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (*см. разд.* 1.3.3). *Тогда*

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{W}h(t,x)\right] =$$
$$= \big(E(1,1)\otimes W(0,n)\big)\cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes R^{-1}(n,n)\big)\cdot H(n+1,0)\Big)\,, \qquad (1.91)$$

где спектральное преобразование применяется к функции $h_0(t)=\mathcal{W}h(t,x)$ *относительно базисной системы* $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$.

Доказательство проводится так же, как и доказательство теоремы 1.6.

Запишем формулу обращения (1.38) для нестационарной спектральной характеристики $H_0(1,0)=\mathbb{S}\left[\mathcal{W}h(t,x)\right]$ функции $h_0(t)=\mathcal{W}h(t,x)$ в случае, если $h_0(t)\in L_2(T;\nu(t))$:

$$h_0(t)=\mathbb{S}^{-1}\left[H_0(1,0)\right]=\sum_{i_0=0}^{\infty}h_{i_0}\cdot q(i_0,t), \qquad (1.92)$$

где h_{i_0} – координаты нестационарной спектральной характеристики $H_0(1,0)$, $t\in T$.

Пример 1.41. Записать выражение для нестационарной спектральной характеристики функции времени

$$h_0(t)=\int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_2}h(t,x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2,$$

где $h(t,x_1,x_2)\in L_2(T\times\Omega_1\times\Omega_2)$, $\Omega_1,\Omega_2\subseteq\mathbb{R}$.

$\square$ Пусть $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ – базис пространства $L_2(T)$, а $\{p(i_1,i_2,x_1,x_2)\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$ представляет собой базисную систему пространства $L_2(\Omega_1\times\Omega_2)$.

Представим функцию $h_0(t)$ в виде $h_0(t)=\mathcal{J}h(t,x_1,x_2)$, где $\mathcal{J}$ – линейный функционал, ставящий в соответствие функции $f(x_1,x_2)\in L_2(\Omega_1\times\Omega_2)$ интеграл от этой функции по множеству $\Omega_1\times\Omega_2$.

Так как весовая функция $\rho(x_1,x_2)$ пространства $L_2(\Omega_1\times\Omega_2)$ тождественно равна единице (см. замечание 1.3), спектральная характеристика $R(2,2)$ оператора умножения на функцию $\rho(x_1,x_2)$ представляет собой четырехмерную единичную матрицу $E(2,2)$ (см. разд. 1.4.2). Тогда по теореме 1.7 искомая нестационарная спектральная характеристика записывается в виде

$$H_0(1,0)=\mathbb{S}\left[h_0(t)\right]=\mathbb{S}\left[\int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_2}h(t,x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2\right]=$$

$$= \big(E(1,1)\otimes J(0,2)\big)\cdot\Big(\big(\underbrace{E(1,1)\otimes R^{-1}(2,2)}_{E(3,3)}\big)\cdot H(3,0)\Big) =$$

$$= \big(E(1,1)\otimes J(0,2)\big)\cdot H(3,0),$$

где $J(0,2)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{J}$, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,i_2,x_1,x_2)\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$; $H(3,0)$ – нестационарная спектральная характеристика функции $h(t,x_1,x_2)$, определенная относительно базиса $\{q(i_0,t)p(i_1,i_2,x_1,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$; $E(1,1)\otimes R^{-1}(2,2) =$ $= E(1,1)\otimes E^{-1}(2,2) = E(1,1)\otimes E(2,2) = E(3,3)$ (см. (1.33)).

Отметим, что, согласно утверждению 1.19, спектральная характеристика $J(0,2)$ является сопряженной матрицей по отношению к спектральной характеристике $W(2,0)$ функции $w(x_1,x_2)=1$, определенной относительно базисной системы $\{p(i_1,i_2,x_1,x_2)\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$, т.е. $J(0,2)=[W(2,0)]^*$.

Для перехода от нестационарной спектральной характеристики $H_0(1,0)$ к соответствующей функции времени применяется формула обращения (1.92). ■

Сформулируем важное следствие из теорем 1.6 и 1.7, при этом будем использовать обозначения, введенные в разд. 1.5.1.

Предположим, что функции базисной системы

$$\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$$

порождаются всевозможными произведениями функций, образующих базисные системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$,

$$\big\{p_{(1)}\big(i_1,i_2,\ldots,i_m,x_{(1)}\big)\big\}_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{\infty} \quad \text{и} \quad \big\{p_{(2)}\big(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)}\big)\big\}_{i_{m+1},\ldots,i_n=0}^{\infty},$$

а вектор состояния представляется в виде блочной матрицы-столбца (см. разд. 1.5.1). Рассмотрим линейный функционал $\mathcal{W}_{(1)}$, заданный на пространстве $L_2\big(\Omega_{(1)};\rho_{(1)}\big(x_{(1)}\big)\big)$. Тогда в выражении $h_{(2)}\big(t,x_{(2)}\big)=\mathcal{W}_{(1)}h\big(t,x_{(1)},x_{(2)}\big)$ переменная времени t и координаты вектора $x_{(2)}$ играют роль числовых параметров. Функцию времени и вектора состояния $h(t,x)$ будем записывать в виде $h\big(t,x_{(1)},x_{(2)}\big)$.

Теорема 1.8. *Пусть $\mathcal{W}_{(1)}$ – линейный функционал, определенный на пространстве $L_2\big(\Omega_{(1)};\rho_{(1)}\big(x_{(1)}\big)\big)$; $h\big(t,x_{(1)},x_{(2)}\big)\in L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$ – функция времени и вектора состояния такая, что $h\big(t,x_{(1)},x_{(2)}\big)\in$ $\in L_2\big(\Omega_{(1)};\rho_{(1)}\big(x_{(1)}\big)\big)$ и $\rho_{(1)}^{-1}\big(x_{(1)}\big)\cdot h\big(t,x_{(1)},x_{(2)}\big)\in L_2\big(\Omega_{(1)};\rho_{(1)}\big(x_{(1)}\big)\big)$ почти при всех $\big(t,x_{(2)}\big)\in T\times\Omega_{(2)}$; $W_{(1)}(0,m)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{W}_{(1)}$, определенная относительно базисной системы $\big\{p_{(1)}\big(i_1,i_2,\ldots,i_m,x_{(1)}\big)\big\}_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{\infty}$; $R(m,m)$ – спектральная характеристи-*

ка оператора умножения на весовую функцию $\rho_{(1)}\big(x_{(1)}\big)$, *определенная относительно той же базисной системы*; $H(n+1,0)$ – *нестационарная спектральная характеристика функции* $h\big(t,x_{(1)},x_{(2)}\big)$, *определенная относительно базисной системы* $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$. *Тогда*

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{W}_{(1)}h\big(t,x_{(1)},x_{(2)}\big)\right]=\big(E(1,1)\otimes W_{(1)}(0,m)\otimes E(n-m,n-m)\big)\cdot$$
$$\cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes R^{-1}(m,m)\otimes E(n-m,n-m)\big)\cdot H(n+1,0)\Big), \qquad (1.93)$$

где спектральное преобразование применяется к функции $h_{(2)}\big(t,x_{(2)}\big)=$ $=\mathcal{W}_{(1)}h\big(t,x_{(1)},x_{(2)}\big)$ *относительно базисной системы*

$$\big\{q(i_0,t)\cdot p_{(2)}\big(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)}\big)\big\}_{i_0,i_{m+1},\ldots,i_n=0}^{\infty}.$$

Доказательство проводится так же, как и доказательство теоремы 1.6.

З а м е ч а н и е 1.21.

1. В общем случае $x_{(1)}$ и $x_{(2)}$ могут формироваться произвольным образом из координат вектора состояния x (см. замечание 1.20).

2. Переход от нестационарной спектральной характеристики

$$H_{(2)}(n-m+1,0)=\mathbb{S}\left[\mathcal{W}_{(1)}h\big(t,x_{(1)},x_{(2)}\big)\right]$$

к функции $h_{(2)}\big(t,x_{(2)}\big)$ осуществляется по **формуле обращения**

$$h_{(2)}\big(t,x_{(2)}\big)=\mathbb{S}^{-1}\left[H_{(2)}(n-m+1,0)\right]=$$
$$=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_{m+1}=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}h_{i_0i_{m+1}\ldots i_n}\cdot q(i_0,t)\cdot p_{(2)}\big(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)}\big), \qquad (1.94)$$

где $h_{i_0i_{m+1}\ldots i_n}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $H_{(2)}(n-m+1,0)$, $t\in T$, $x_{(2)}\in\Omega_{(2)}$.

Пример 1.42. Записать выражения для нестационарных спектральных характеристик функций

$$h_2(t,x_2)=\int\limits_{\Omega_1}h(t,x_1,x_2)\,dx_1 \quad \text{и} \quad h_1(t,x_1)=\int\limits_{\Omega_2}h(t,x_1,x_2)\,dx_2,$$

где $h(t,x_1,x_2)\in L_2(T\times\Omega_1\times\Omega_2)$, $\Omega_1,\Omega_2\subseteq\mathbb{R}$.

□ Пусть $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ – базис пространства $L_2(T)$, а $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ – базисы пространств $L_2(\Omega_1)$ и $L_2(\Omega_2)$ соответственно. Как и в примере 1.40, спектральные характеристики $R_1(1,1)$ и $R_2(1,1)$ операторов умножения на весовые функции $\rho_1(x_1)$ и $\rho_2(x_2)$ соответственно представляют собой двумерные единичные матрицы $E(1,1)$. Тогда в силу теоремы 1.8 искомые выражения для нестационарных спектральных характеристик $H_2(2,0)$ и $H_1(2,0)$ функций $h_2(t,x_2)$ и $h_1(t,x_1)$, определенных относительно базисных систем $\{q(i_0,t)p_2(i_2,x_2)\}_{i_0,i_2=0}^{\infty}$ и $\{q(i_0,t)p_1(i_1,x_1)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ соответственно, представляются в виде

$$H_2(2,0) = \mathbb{S}\left[h_2(t,x_2)\right] = \mathbb{S}\left[\int\limits_{\Omega_1} h(t,x_1,x_2)\,dx_1\right] =$$

$$= \big(E(1,1)\otimes J_1(0,1)\otimes E(1,1)\big)\cdot$$

$$\cdot\Big(\big(\underbrace{E(1,1)\otimes R_1^{-1}(1,1)\otimes E(1,1)}_{E(3,3)}\big)\cdot H(3,0)\Big) =$$

$$= \big(E(1,1)\otimes J_1(0,1)\otimes E(1,1)\big)\cdot H(3,0),$$

$$H_1(2,0) = \mathbb{S}\left[h_1(t,x_1)\right] = \mathbb{S}\left[\int\limits_{\Omega_2} h(t,x_1,x_2)\,dx_2\right] =$$

$$= \big(E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes J_2(0,1)\big)\cdot$$

$$\cdot\Big(\big(\underbrace{E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes R_2^{-1}(1,1)}_{E(3,3)}\big)\cdot H(3,0)\Big) =$$

$$= \big(E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes J_2(0,1)\big)\cdot H(3,0),$$

где $J_1(0,1)$ и $J_2(0,1)$ – спектральные характеристики линейных функционалов $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$, определенные относительно базисных систем $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ соответственно (см. пример 1.40); $H(3,0)$ – нестационарная спектральная характеристика функции $h(t,x_1,x_2)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)p_1(i_1,x_1)p_2(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$; $E(1,1)\otimes R_1^{-1}(1,1)\otimes E(1,1) = E(1,1)\otimes E^{-1}(1,1)\otimes E(1,1) = E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes E(1,1) = E(3,3)$ и $E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes R_2^{-1}(1,1) = E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes E^{-1}(1,1) = E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes E(1,1) = E(3,3)$ согласно (1.33).

Для перехода от нестационарных спектральных характеристик $H_2(2,0)$ и $H_1(2,0)$ к соответствующим функциям времени и координат вектора состояния применим формулу обращения (1.94):

$$\int\limits_{\Omega_1} h(t,x_1,x_2)\,dx_1 = \mathbb{S}^{-1}\left[H_2(2,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty} h''_{i_0i_2}\cdot q(i_0,t)\cdot p_2(i_2,x_2),$$

$$\int\limits_{\Omega_2} h(t,x_1,x_2)\,dx_2 = \mathbb{S}^{-1}\left[H_1(2,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty} h'_{i_0i_1}\cdot q(i_0,t)\cdot p_1(i_1,x_1),$$

где $h''_{i_0i_2}$ и $h'_{i_0i_1}$ – координаты нестационарных спектральных характеристик $H_2(2,0)$ и $H_1(2,0)$ соответственно. ■

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Представить функцию $h(t) = 3t^2 - t + 2$ в виде ряда по следующим базисным системам:

а) нестационарным полиномам Лежандра, заданным на нестационарном отрезке $T = [0, \tau]$;

б) нестационарным косинусоидам, заданным на стационарном отрезке $T = [0, 1]$;

в) полиномам Лагерра.

2. Представить функцию $h(t) = \mathrm{e}^{-t}$ в виде ряда по следующим базисным системам:

а) нестационарным полиномам Лежандра, заданным на стационарном отрезке $T = [0, 5]$;

б) нестационарным косинусоидам, заданным на нестационарном отрезке $T = [0, \tau]$;

в) полиномам Лагерра;

г) функциям Лагерра.

3. Представить функцию $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$ в виде ряда по следующим базисным системам:

а) полиномам Лежандра, заданным на отрезке $\Omega = [0, n]$;

б) тригонометрическим функциям, заданным на отрезке $\Omega = [-\pi, \pi]$;

в) полиномам Эрмита;

г) функциям Эрмита.

4. Представить функцию $h(x) = x \cos x$ в виде ряда по следующим базисным системам:

а) полиномам Лежандра, заданным на отрезке $\Omega = [0, 1]$;

б) полиномам Лежандра, заданным на отрезке $\Omega = [1, 3]$;

в) тригонометрическим функциям, заданным на отрезке $\Omega = [-2\pi, 2\pi]$;

г) полиномам Эрмита.

5. Представить функцию $h(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{-x_1} x_2^3$ в виде ряда по функциям базисной системы $\{\hat{S}(i_1, x_1)\, \hat{H}(i_2, x_2)\}_{i_1, i_2 = 0}^{\infty}$, определенной на множестве

$$\Omega = [-\pi, \pi] \times (-\infty, +\infty).$$

6. Представить функцию $h(t, x) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}(x^2 + n)$ в виде ряда по функциям базисной системы $\{\hat{\Psi}(i_0, t)\, \hat{P}(i_1, x)\}_{i_0, i_1 = 0}^{\infty}$, заданной на множестве

$$Q_T = [0, +\infty) \times [0, 1].$$

7. Представить функцию $h(t, x_1, x_2) = x_2$ в виде ряда по функциям базисной системы $\{\hat{F}(i_0, t)\,\hat{H}(i_1, x_1)\,\hat{H}(i_2, x_2)\}_{i_0, i_1, i_2 = 0}^{\infty}$, определенной на множестве

$$Q_T = [0, \tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

8. Найти нестационарную спектральную характеристику функции $h(t) = 2t^3 - 7 + n$ относительно следующих базисных систем:

а) нестационарных полиномов Лежандра, заданных на нестационарном отрезке $T = [0, \tau]$;

б) нестационарных полиномов Лежандра, заданных на стационарном отрезке $T = [0, 2]$;

в) нестационарных функций Уолша, заданных на стационарном отрезке $T = [0, 1]$;

г) полиномов Лагерра.

9. Найти спектральную характеристику функции $h(x_1, x_2) = x_2^2 \cos x_1$ относительно базисной системы $\{\hat{S}(i_1, x_1)\,\hat{P}(i_2, x_2)\}_{i_1, i_2 = 0}^{\infty}$, определенной на прямоугольнике

$$\Omega = [-\pi, \pi] \times [0, 1].$$

10. Найти нестационарную спектральную характеристику функции $h(t, x) = t^2$ относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0, t)\,\hat{\Phi}(i_1, x)\}_{i_0, i_1 = 0}^{\infty}$, заданной на множестве

$$Q_T = [0, 4] \times (-\infty, +\infty).$$

11. Найти нестационарную спектральную характеристику функции $h(t, x) = t^4 \cos x$ относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0, t)\,\hat{S}(i_1, x)\}_{i_0, i_1 = 0}^{\infty}$, заданной на множестве

$$Q_T = [0, \tau] \times [-\pi, \pi].$$

12. Найти нестационарную спектральную характеристику оператора умножения на функцию $a(t) = nt + 1$, определенного на пространстве $L_2([0, \tau])$, относительно следующих базисных систем:

а) нестационарных полиномов Лежандра, заданных на нестационарном отрезке $T = [0, \tau]$;

б) нестационарных косинусоид, заданных на нестационарном отрезке $T = [0, \tau]$;

в) нестационарных комплексных экспоненциальных функций, заданных на нестационарном отрезке $T = [0, \tau]$.

13. Найти спектральную характеристику оператора умножения на функцию $a(x) = x^2$, определенного на пространстве $L_2([0, 1])$, относительно системы полиномов Лежандра.

14. Найти нестационарную спектральную характеристику оператора умножения на функцию $a(t,x) = t(x-n)$, заданного на пространстве

$$L_2([0,+\infty)\times[-\pi,\pi];\, \mathrm{e}^{-t}),$$

относительно базисной системы $\{\hat{L}(i_0,t)\,\hat{S}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$.

15. Записать общий вид нестационарных спектральных характеристик операторов дифференцирования первого и второго порядков по координатам вектора состояния, заданных на пространстве $L_2(T\times\Omega_1\times\Omega_2)$, где $\Omega_1,\Omega_2\subset\mathbb{R}$, при нулевых краевых условиях второго рода и условии, что функции базисной системы пространства $L_2(T\times\Omega_1\times\Omega_2)$ представляются в виде произведения функций базисных систем пространств $L_2(T)$, $L_2(\Omega_1)$ и $L_2(\Omega_2)$.

16. Найти нестационарную спектральную характеристику оператора дифференцирования $\mathcal{D}_{xx}$, заданного на пространстве $L_2([0,\tau]\times\mathbb{R})$, относительно базисной системы $\{\hat{\Omega}(i_0,t)\,\hat{\Phi}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$.

17. Найти спектральную характеристику функции

$$h(x) = \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\,d\xi$$

относительно системы функций Эрмита.

18. Найти нестационарную спектральную характеристику оператора интегрирования $\mathcal{D}_t^{-1}$, определенного на пространстве $L_2([0,\tau]\times[-2\pi,2\pi])$, относительно базисной системы $\{\hat{C}(i_0,t)\,\hat{S}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$.

19. Найти нестационарную спектральную характеристику оператора интегрирования $\mathcal{D}_x^{-1}$, определенного на пространстве $L_2([0,2]\times\mathbb{R})$, относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0,t)\,\hat{\Phi}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$.

20. Найти спектральную характеристику линейного функционала $\mathcal{M}_x$, ставящего в соответствие функции $h(x)$ интеграл от функции $xh(x)$ по пространству $\mathbb{R}$. В качестве базисной системы использовать:

а) полиномы Эрмита;

б) функции Эрмита.

21. Найти спектральную характеристику линейного функционала $\mathcal{M}_{xx}$, ставящего в соответствие функции $h(x)$ интеграл от функции $x^2h(x)$ по пространству $\mathbb{R}$. В качестве базисной системы использовать:

а) полиномы Эрмита;

б) функции Эрмита.

ГЛАВА 2

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ФИКСИРОВАННОЙ СТРУКТУРОЙ

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1.1. Описание стохастических систем управления с фиксированной структурой

Пусть поведение модели системы управления описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито [36, 39, 83]

$$dX(t) = f\,(t, X(t))\,dt + \sigma\,(t, X(t))\,dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{2.1}$$

где X – вектор состояния, $X = [X_1 \;\; X_2 \;\; \ldots \;\; X_n]^{\mathrm{T}} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$; $t \in T$, T – заданный промежуток времени функционирования системы, представляющий собой конечный отрезок $[t_0, t_1]$ или полубесконечный промежуток $[t_0, +\infty)$; $W(t)$ – s-мерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от X_0; $f(t,x): \; T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – вектор-функция размера $n \times 1$, $\sigma(t,x): \; T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times s}$ – матричная функция размера $n \times s$, т.е.

$$f(t,x) = \begin{bmatrix} f_1(t,x) \\ f_2(t,x) \\ \vdots \\ f_n(t,x) \end{bmatrix}, \quad \sigma(t,x) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(t,x) & \sigma_{12}(t,x) & \ldots & \sigma_{1s}(t,x) \\ \sigma_{21}(t,x) & \sigma_{22}(t,x) & \ldots & \sigma_{2s}(t,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1}(t,x) & \sigma_{n2}(t,x) & \ldots & \sigma_{ns}(t,x) \end{bmatrix}.$$

Начальное состояние X_0 определяется заданной плотностью вероятности $\varphi_0(x)$. Функции $f(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ задают структуру системы управления, которая в данной главе считается фиксированной (неизменяемой).

Решением задачи (2.1) называется случайный процесс $X(t)$, который можно представить в виде

$$X(t) = X_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, X(\tau))\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \sigma(\tau, X(\tau))\,dW(\tau),$$

где первый интеграл в правой части понимается в среднеквадратическом смысле, а второй представляет собой стохастический интеграл Ито [36, 39].

Будем рассматривать два случая:

1) множество Ω совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$ (рис. 2.1);

2) множество Ω не совпадает с $\mathbb{R}^n$, например, Ω ограничено.

Предполагается, что траектории случайного процесса $X(t)$ не уйдут в бесконечность на заданном промежутке времени T.

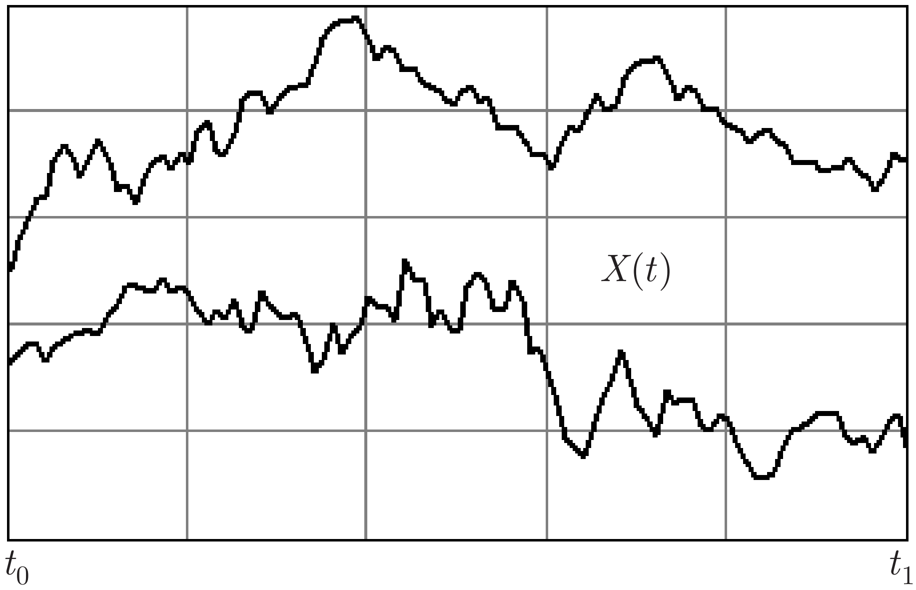

Рис. 2.1. Траектории одномерного случайного процесса $X(t)$ при условии, что $\Omega = (-\infty, +\infty)$

В случае, если множество Ω не совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$, необходимо задать условия поведения траекторий случайного процесса $X(t)$ при достижении границ этого множества. На границе множества Ω могут происходить, например, следующие явления:

а) **поглощение**, при котором траектория случайного процесса, достигнув границы, далее не рассматривается (рис. 2.2);

б) **отражение**, при котором траектория случайного процесса при достижении границы зеркально отражается и, таким образом, возвращается внутрь множества Ω (рис. 2.3).

Другие возможные ситуации поведения случайного процесса $X(t)$ на границе множества Ω описаны в [16, 83].

Задача анализа стохастических систем управления с фиксированной структурой формулируется следующим образом. По заданным уравнению системы (2.1), плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0 и условию поведения траекторий случайного процесса $X(t)$ на границе множества Ω (если $\Omega \neq \mathbb{R}^n$) найти **плотность вероятности** вектора состояния $\varphi(t, x)$, $(t, x) \in Q_T = T \times \Omega$.

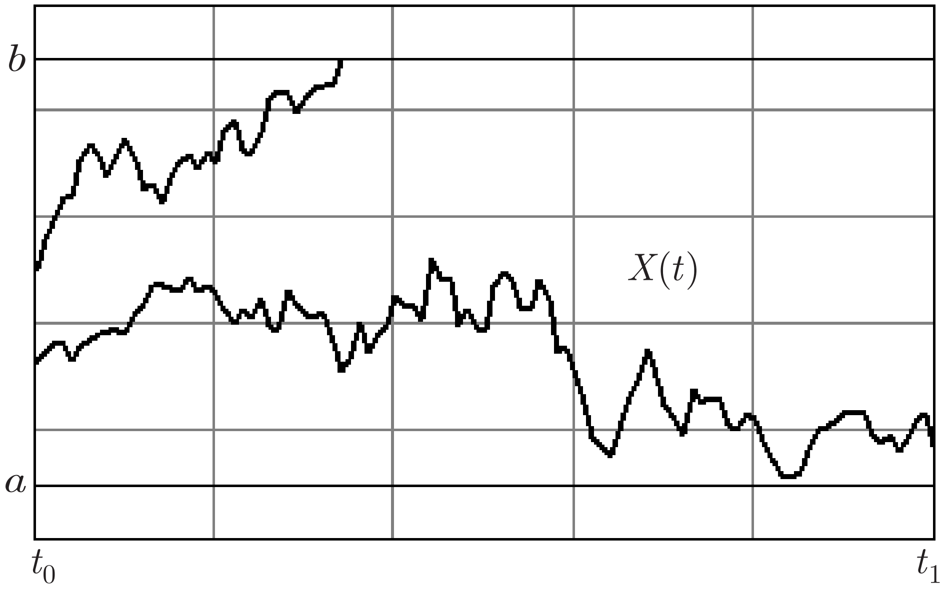

Рис. 2.2. Поведение траекторий одномерного случайного процесса $X(t)$ при условии поглощения на границе множества $\Omega = [a, b]$

2.1.2. Уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова

Плотность вероятности $\varphi(t, x)$ удовлетворяет **уравнению Фоккера – Планка – Колмогорова** [63, 83], которое является дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка параболического типа [33]:

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big[f_i(t,x)\varphi(t,x)\big] + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\big[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x)\big], \tag{2.2}$$

где

$$g_{ij}(t,x) = \sum_{r=1}^{s} \sigma_{ir}(t,x)\sigma_{jr}(t,x). \tag{2.3}$$

Начальное условие для уравнения (2.2) задается плотностью вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0, т.е.

$$\varphi(t,x)\big|_{t=t_0} = \varphi_0(x). \tag{2.4}$$

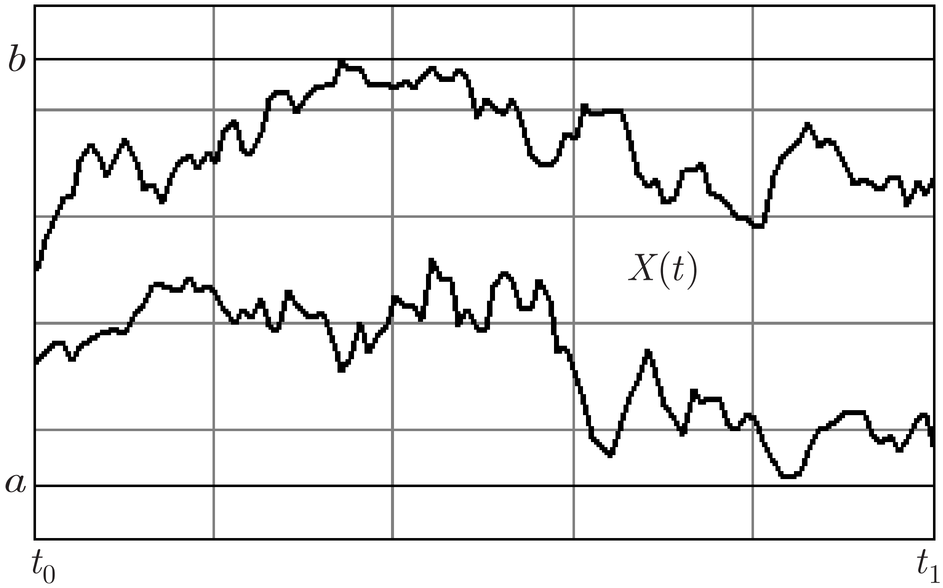

Рис. 2.3. Поведение траекторий одномерного случайного процесса $X(t)$ при условии отражения на границе множества $\Omega = [a, b]$

Замечание 2.1. Функции $f_i(t,x)$ и $g_{ij}(t,x)$ называются соответственно **коэффициентами сноса** и **диффузии**, функция $f(t,x)$ называется **вектором сноса**, а функция $g(t,x)$ – **матрицей диффузии** [83]:

$$g(t,x) = \begin{bmatrix} g_{11}(t,x) & g_{12}(t,x) & \ldots & g_{1n}(t,x) \\ g_{21}(t,x) & g_{22}(t,x) & \ldots & g_{2n}(t,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(t,x) & g_{n2}(t,x) & \ldots & g_{nn}(t,x) \end{bmatrix}.$$

Будем предполагать, что функции $f_i(t,x)$ и $g_{ij}(t,x)$ удовлетворяют условиям существования и единственности решения задачи (2.1).

Кратко соотношения (2.2), (2.4) будем записывать в форме

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t,x), \quad \varphi(t,x)|_{t=t_0} = \varphi_0(x), \tag{2.5}$$

где $\mathcal{A}$ – дифференциальный оператор, или оператор Фоккера–Планка–Колмогорова [92], заданный выражением

$$\mathcal{A}\varphi(t,x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_i(t,x)\varphi(t,x)\right] + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x)\right]. \tag{2.6}$$

Для интегрирования уравнения (2.2) кроме начального условия требуется задать краевое условие в соответствии с характером поведения траекторий случайного процесса $X(t)$ на границе множества Ω.

Если множество Ω совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$, то для любого $t \in T$ выполняется условие нормировки

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(t, x)\, dx = 1, \tag{2.7}$$

поэтому в данном случае справедливо естественное краевое условие

$$\varphi(t, x)\big|_{x=\pm\infty} = 0.$$

Следовательно, если случайный процесс $X(t)$ может принимать любые значения из пространства $\mathbb{R}^n$ ($\Omega = \mathbb{R}^n$), **решением задачи анализа стохастической системы управления** (2.1) является функция $\varphi(t, x)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t, x), && \\ &\varphi(t, x)\big|_{t=t_0} = \varphi_0(x) && \text{(начальное условие)}, \\ &\varphi(t, x)\big|_{x=\pm\infty} = 0 && \text{(краевое условие)}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Если $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, то краевые условия для уравнения (2.2) задаются в зависимости от характера поведения траекторий случайного процесса $X(t)$ на границе множества Ω. Так, при условии поглощения на границе требуется, чтобы выполнялось равенство [83]

$$\varphi(t, x)\big|_{x \in \partial\Omega} = 0,$$

где $\partial\Omega$ – граница множества Ω. Известно [83], что в этом случае решение задачи (2.5) с таким краевым условием не удовлетворяет условию нормировки (2.7), поскольку с течением времени все больше траекторий случайного процесса $X(t)$ достигают границы множества Ω и исключаются из дальнейшего рассмотрения. **Решением задачи анализа стохастической системы управления** (2.1) **при условии поглощения** на границе множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является функция

$$\varphi(t, x) = \frac{\hat{\varphi}(t, x)}{\int\limits_{\Omega} \hat{\varphi}(t, x)\, dx}, \tag{2.9}$$

где функция $\hat{\varphi}(t,x)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\hat{\varphi}(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\hat{\varphi}(t,x), \\
&\hat{\varphi}(t,x)|_{t=t_0} = \varphi_0(x) && \text{(начальное условие)}, \\
&\hat{\varphi}(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0 && \text{(краевое условие)}.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

В (2.9) производится нормировка решения $\hat{\varphi}(t,x)$ уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для того, чтобы было выполнено условие (2.7).

Условие отражения траекторий случайного процесса $X(t)$ на границе множества Ω записывается в виде [83]

$$
\pi(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0,
$$

где $\pi(t,x)$ – **поток вероятности**, координаты которого определяются следующим выражением:

$$
\begin{aligned}
\pi_i(t,x) = {}& f_i(t,x)\varphi(t,x) - \\
&- \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\bigl[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x)\bigr], \\
i = {}& 1,2,\ldots,n.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Следовательно, **решением задачи анализа стохастической системы управления** (2.1) **при условии отражения** на границе множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является функция $\varphi(t,x)$, удовлетворяющая соотношениям

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t,x), \\
&\varphi(t,x)|_{t=t_0} = \varphi_0(x) && \text{(начальное условие)}, \\
&\pi(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0 && \text{(краевое условие)}.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Нетрудно показать, что для произвольной функции $\varphi(t,x)$ выполняется равенство

$$
\mathcal{A}\varphi(t,x) = -\operatorname{div}\pi(t,x),
$$

где

$$
\operatorname{div}\pi(t,x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\pi_i(t,x)}{\partial x_i},
$$

вследствие чего можно записать задачу (2.12) в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = -\operatorname{div} \pi(t,x), \\ &\varphi(t,x)|_{t=t_0} = \varphi_0(x) && \text{(начальное условие)}, \\ &\pi(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0 && \text{(краевое условие)}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Замечание 2.2. Решение уравнения (2.2) и, следовательно, задач (2.8), (2.9)–(2.10), (2.12) и (2.13) будем понимать в обобщенном смысле [33, 63].

2.1.3. Определение маргинальных и условных плотностей вероятности

В ряде случаев требуется найти не только плотность вероятности вектора состояния, но и маргинальные и условные плотности вероятности.

Не ограничивая общности, предположим что множество Ω представляется в виде $\Omega = \Omega_{(1)} \times \Omega_{(2)}$, где $\Omega_{(1)} \subseteq \mathbb{R}^m$, $\Omega_{(2)} \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$, $1 \leqslant m < n$. Пусть первые m координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$ вектора состояния x образуют матрицу-столбец $x_{(1)}$, а остальные координаты $x_{m+1}, \ldots, x_n$ – матрицу-столбец $x_{(2)}$:

$$x_{(1)} = [x_1 \ \ x_2 \ \ \ldots \ \ x_m]^{\mathrm{T}} \in \Omega_{(1)},$$

$$x_{(2)} = [x_{m+1} \ \ \ldots \ \ x_n]^{\mathrm{T}} \in \Omega_{(2)},$$

т.е. вектор состояния x представляется в виде блочной матрицы-столбца:

$$x = \left[\begin{array}{c} x_{(1)} \\ \hline x_{(2)} \end{array}\right].$$

Маргинальной плотностью вероятности называется функция

$$\varphi_{(1)}\big(t, x_{(1)}\big) = \int\limits_{\Omega_{(2)}} \varphi(t,x)\,dx_{(2)}, \tag{2.14}$$

а функция

$$\varphi_{(2|1)}\big(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\big) = \frac{\varphi(t,x)}{\varphi_{(1)}\big(t, x_{(1)}\big)} \tag{2.15}$$

называется **условной плотностью вероятности**, где $\varphi(t,x)$ – плотность вероятности вектора состояния стохастической системы управления (2.1).

Плотность вероятности $\varphi_{(1)}\big(t, x_{(1)}\big)$ характеризует распределение $X_{(1)}$ в момент времени t, где

$$X_{(1)} = [X_1 \ \ X_2 \ \ \ldots \ \ X_m]^{\mathrm{T}} \in \Omega_{(1)},$$

а $\varphi_{(2|1)}\big(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\big)$ – распределение $X_{(2)}$, где

$$X_{(2)} = [X_{m+1} \quad \ldots \quad X_n]^{\mathrm{T}} \in \Omega_{(2)},$$

при условии $X_{(1)} = x_{(1)}$.

Таким образом, может быть рассмотрена следующая задача. По плотности вероятности $\varphi(t, x)$ вектора состояния стохастической системы управления (2.1) найти маргинальную плотность вероятности $\varphi_{(1)}\big(t, x_{(1)}\big)$ и условную плотность вероятности $\varphi_{(2|1)}\big(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\big)$.

Замечание 2.3. В общем случае можно рассматривать другие маргинальные и условные плотности вероятности. Например, функция

$$\varphi_{(2)}\big(t, x_{(2)}\big) = \int\limits_{\Omega_{(1)}} \varphi(t, x)\, dx_{(1)}$$

является маргинальной плотностью вероятности, характеризующей распределение $X_{(2)}$ в момент времени t, а функция

$$\varphi_{(1|2)}\big(t, x_{(1)} \mid x_{(2)}\big) = \frac{\varphi(t, x)}{\varphi_{(2)}\big(t, x_{(2)}\big)}$$

представляет собой условную плотность вероятности, характеризующую распределение $X_{(1)}$ при условии $X_{(2)} = x_{(2)}$.

2.1.4. Определение моментных характеристик

При решении задачи анализа стохастических систем управления иногда возникает необходимость в определении моментных характеристик[46, 63] вектора состояния по известной плотности вероятности, причем в большинстве случаев достаточно найти **математическое ожидание** $m(t)$ и **ковариационную матрицу** $R(t)$, для которых справедливы следующие соотношения:

$$m(t) = \begin{bmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ \vdots \\ m_n(t) \end{bmatrix}, \quad R(t) = \begin{bmatrix} R_{11}(t) & R_{12}(t) & \ldots & R_{1n}(t) \\ R_{21}(t) & R_{22}(t) & \ldots & R_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1}(t) & R_{n2}(t) & \ldots & R_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

где

$$m_i(t) = \int\limits_{\Omega} x_i \varphi(t, x)\, dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.16}$$

$$R_{ij}(t) = \int\limits_{\Omega} x_i x_j \varphi(t,x)\, dx - m_i(t) m_j(t), \quad i,j = 1,2,\ldots,n. \tag{2.17}$$

Таким образом, наряду с задачей нахождения маргинальных и условных плотностей вероятности (см. разд. 2.1.3) будем рассматривать задачу определения моментных характеристик вектора состояния стохастической системы управления (2.1) по известной плотности вероятности $\varphi(t,x)$.

Замечание 2.4.

1. В одномерном случае, т.е. при $n = 1$, функцию $R(t)$ будем обозначать через $D(t)$ и называть **дисперсией**:

$$D(t) = \int\limits_{\Omega} x^2 \varphi(t,x)\, dx - m^2(t),$$

где

$$m(t) = \int\limits_{\Omega} x \varphi(t,x)\, dx.$$

2. Аналогично могут быть определены условные моментные характеристики вектора состояния по известной условной плотности вероятности.

2.2. СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ФИКСИРОВАННОЙ СТРУКТУРОЙ

2.2.1. Уравнение обобщенной характеристической функции

В гл. 1 были введены понятия спектральных характеристик функций, линейных операторов и линейных функционалов, а также рассмотрены их свойства. Воспользуемся этими результатами для решения задачи анализа стохастических систем управления с использованием спектральной формы математического описания.

Пусть множество Ω представляется в виде

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n,$$

где Ω_l – конечный отрезок $[a_l, b_l]$ или бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$,

$l = 1, 2, \ldots, n$. Для спектрального преобразования функций времени и вектора состояния в качестве базиса пространства $L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$, где $Q_T = T \times \Omega$, $T = [t_0, t_1]$ или $T = [t_0, +\infty)$, выберем такую ортонормированную систему

$$\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x) = q(i_0, t) \cdot p_1(i_1, x_1) \cdots p_n(i_n, x_n)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty},$$

что системы функций $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, $\{p_1(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$, $\ldots$, $\{p_n(i_n, x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$ являются базисными системами пространств $L_2(T; \nu(t))$, $L_2(\Omega_1; \rho_1(x_1))$, $\ldots$, $L_2(\Omega_n; \rho_n(x_n))$ соответственно и при этом $\rho(x) = \rho_1(x_1) \ldots \rho_n(x_n)$ (см. разд. 1.1.1–1.1.3).

Тогда для спектрального преобразования функций времени будем использовать базисную систему $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, а для спектрального преобразования функций вектора состояния – систему функций

$$\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x) = p_1(i_1, x_1) \cdot p_2(i_2, x_2) \cdots p_n(i_n, x_n)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty},$$

которая в силу утверждения 1.2 является базисом пространства $L_2(\Omega; \rho(x))$.

Уравнение обобщенной характеристической функции в случае, если множество Ω совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим задачу анализа стохастических систем управления при условии, что случайный процесс $X(t)$ может принимать любые значения в пространстве $\mathbb{R}^n$, т.е. $\Omega = \mathbb{R}^n$. Применим спектральное преобразование к левой и правой частям уравнения

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t, x)$$

с учетом начального и краевого условий (см. задачу (2.8)). Тогда

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t}\right|_{\varphi(t_0, x) = \varphi_0(x)}\right] = \mathbb{S}\left[\left.\mathcal{A}\varphi(t, x)\right|_{\varphi(t, \pm\infty) = 0}\right]. \tag{2.18}$$

Учитывая определение оператора $\mathcal{A}$ (см. (2.6)) и свойство линейности спектрального преобразования (см. разд. 1.3.3), получаем

$$\mathbb{S}\left[\left.\mathcal{A}\varphi(t, x)\right|_{\varphi(t, \pm\infty) = 0}\right] = -\sum_{i=1}^{n} \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\big[f_i(t, x)\varphi(t, x)\big]\right|_{\varphi(t, \pm\infty) = 0}\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\big[g_{ij}(t, x)\varphi(t, x)\big]\right|_{\varphi(t, \pm\infty) = 0}\right]. \tag{2.19}$$

Рассмотрим левую часть равенства (2.18). По формуле (1.71) нестационарная спектральная характеристика частной производной плотности вероятности по времени с учетом начального условия (2.4) выражается следующим образом:

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t}\right|_{\varphi(t_0,x)=\varphi_0(x)}\right] = P(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0) -$$
$$- \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0), \tag{2.20}$$

где $P(n+1,n+1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования $\tilde{\mathcal{D}}_t$ по времени с учетом значения функции в начальный момент, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.3), для которой, согласно (1.70), справедливо представление

$$P(n+1,n+1) = P(1,1)\otimes E(n,n),$$

где $P(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.3); $E(n,n)$ – единичная матрица размерности $2n$. Через $\Phi(n+1,0)$ обозначена нестационарная спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi(t,x)$, определенная относительно той же базисной системы (см. разд. 1.3.3), т.е.

$$\mathbb{S}\left[\varphi(t,x)\right] = \Phi(n+1,0) = \left(\varphi_{i_0 i_1\ldots i_n}\right),$$

где

$$\varphi_{i_0 i_1\ldots i_n} = \big(e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),\varphi(t,x)\big)_{L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))},$$
$$i_0,i_1,\ldots,i_n = 0,1,2,\ldots,$$

$\nu(t_0)$ – значение весовой функции $\nu(t)$ в точке t_0, а $q(1,0;t_0)$ – матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке t_0 (см. разд. 1.4.3):

$$q(1,0;t_0) = \begin{bmatrix} q^*(0,t_0) & q^*(1,t_0) & q^*(2,t_0) & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{2.21}$$

где $q^*(i_0,t_0)$ – комплексное сопряженное число, $\Phi_0(n,0)$ – спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.2), т.е.

$$\mathbb{S}\left[\varphi_0(x)\right] = \Phi_0(n,0) = \left(\varphi_{0\,i_1 i_2\ldots i_n}\right),$$

где

$$\varphi_{0 i_1 i_2 \ldots i_n} = \big(p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x), \varphi_0(x)\big)_{L_2(\Omega; \rho(x))},$$
$$i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

В дальнейшем будем называть нестационарную спектральную характеристику $\Phi(n+1, 0)$ плотности вероятности $\varphi(t, x)$ **обобщенной характеристической функцией** [74, 75, 94], а элементы $\varphi_{i_0 i_1 \ldots i_n}$ – **координатами обобщенной характеристической функции**.

Перейдем к правой части равенства (2.18) с учетом соотношения (2.19). Пусть $\mathcal{P}_l(1,1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования $\mathcal{D}_x$ в одномерном случае, определенная относительно базисной системы $\{p_l(i_l, x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.3), $l = 1, 2, \ldots, n$; $F_i(n+1, n+1)$ и $G_{ij}(n+1, n+1)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов умножения на коэффициенты сноса $f_i(t, x)$ и диффузии $g_{ij}(t, x)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.2), $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Заметим, что выражение

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \big[f_i(t, x) \varphi(t, x) \big]$$

можно рассматривать как результат последовательного применения линейных операторов, а именно умножение плотности вероятности $\varphi(t, x)$ на функцию $f_i(t, x)$ и дифференцирование полученного результата по координате x_i, т.е. имеет место композиция (см. разд. 1.4.1) линейных операторов дифференцирования и умножения.

В рассматриваемом случае областью изменения вектора состояния является все пространство $\mathbb{R}^n$, поэтому, согласно формуле (1.79) и свойству спектрального преобразования композиции линейных операторов (см. разд. 1.4.1), получаем следующее выражение:

$$\mathbb{S} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \big[f_i(t, x) \varphi(t, x) \big] \Big|_{\varphi(t, \pm\infty) = 0} \right] =$$
$$= \mathcal{P}_i(n+1, n+1) \cdot F_i(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0), \qquad (2.22)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$\mathcal{P}_i(n+1, n+1) = E(1,1) \otimes \underbrace{E(1,1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}_i(1,1) \otimes \ldots \otimes E(1,1)}_{n \text{ сомножителей}}.$$

Аналогично, используя представление (1.80) и принимая во внимание тот факт, что выражение
$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\big[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x)\big]$$
можно рассматривать как результат последовательного применения линейных операторов умножения и дифференцирования, запишем соотношение
$$\mathbb{S}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\big[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x)\big]\bigg|_{\varphi(t,\pm\infty)=0}\right] =$$
$$= \mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0), \qquad (2.23)$$
$$i,j = 1,2,\ldots,n,$$

где
$$\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1) =$$
$$= \begin{cases} E(1,1)\otimes\underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i^2(1,1)\otimes\ldots\otimes E(1,1)}_{n \text{ сомножителей}},\ i=j,\\ E(1,1)\otimes\underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_j(1,1)\otimes}_{n \text{ сомножителей}}\\ \quad\underline{\otimes\ldots\otimes E(1,1)},\ i\neq j.\end{cases}$$

Таким образом,
$$\mathbb{S}\left[\mathcal{A}\varphi(t,x)\bigg|_{\varphi(t,\pm\infty)=0}\right] =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i(n+1,n+1)\cdot F_i(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0),$$

следовательно, уравнение (2.18) записывается в виде
$$P(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0) - \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i(n+1,n+1)\cdot F_i(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0). \qquad (2.24)$$

Полученное уравнение относительно $\Phi(n+1,0)$ называется **уравнением обобщенной характеристической функции** [74, 75, 94].

Нетрудно видеть, что уравнение (2.24) представляет собой систему линейных неоднородных алгебраических уравнений [8], записанных в матричной форме, неизвестными в которой являются координаты обобщенной характеристической функции $\Phi(n+1,0)$.

Уравнение (2.24) будем записывать в краткой форме

$$P(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)-\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)=$$
$$=A(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0), \qquad (2.25)$$

где

$$A(n+1,n+1)=-\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i(n+1,n+1)\cdot F_i(n+1,n+1)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}(n+1,n+1),$$

что следует из свойств умножения многомерных матриц (см. разд. 1.2.3).

В данном случае, т.е. при условии, что случайный процесс $X(t)$ может принимать любые значения из пространства $\mathbb{R}^n$, многомерная матрица $A(n+1,n+1)$ является нестационарной спектральной характеристикой оператора $\mathcal{A}$, определенной относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.1), т.е.

$$\mathbb{S}\,[\mathcal{A}]=A(n+1,n+1).$$

Введем новые обозначения, чтобы выразить обобщенную характеристическую функцию $\Phi(n+1,0)$ из уравнения (2.25). Пусть

$$Z(n+1,n+1)=P(n+1,n+1)-A(n+1,n+1),$$

$$B(n+1,0)=\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0).$$

Тогда уравнение (2.25) можно переписать следующим образом:

$$Z(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)=B(n+1,0). \qquad (2.26)$$

Умножая левую и правую части этого равенства слева на $Z^{-1}(n+1,n+1)$, где $Z^{-1}(n+1,n+1)$ – обратная матрица по отношению к матрице $Z(n+1,n+1)$ (см. разд. 1.2.3), получаем

$$\Phi(n+1,0)=Z^{-1}(n+1,n+1)\cdot B(n+1,0). \qquad (2.27)$$

Таким образом, нестационарная спектральная характеристика $\Phi(n+1,0)$, задаваемая выражением (2.27), удовлетворяет уравнению (2.24) и, следовательно, определяет решение задачи (2.8) в спектральной форме математического описания.

Для получения решения задачи анализа в пространстве функций времени и вектора состояния требуется применить формулу обращения (1.46):

$$\begin{aligned}\varphi(t,x) &= \mathbb{S}^{-1}\left[\Phi(n+1,0)\right] = \\ &= \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}\varphi_{i_0 i_1\ldots i_n}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),\end{aligned} \tag{2.28}$$

где $\varphi_{i_0 i_1\ldots i_n}$ – координаты обобщенной характеристической функции $\Phi(n+1,0)$, $t\in T$, $x\in\Omega$.

Пример 2.1. Записать уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова и уравнение обобщенной характеристической функции для одномерной стохастической системы управления, заданной уравнением Ито

$$dX(t) = f\,(t,X(t))\,dt + \sigma\,(t,X(t))\,dW(t), \quad X(t_0) = X_0,$$

где $t\in T=[t_0,t_1]$, $X\in\Omega=\mathbb{R}$, $W(t)$ – одномерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от X_0, т.е. $n=s=1$. Начальное состояние X_0 определяется заданной плотностью вероятности $\varphi_0(x)$.

□ В общем случае уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова имеет вид (2.2), а для рассматриваемой задачи оно записывается следующим образом:

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[f(t,x)\varphi(t,x)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g(t,x)\varphi(t,x)\right],$$

где

$$g(t,x) = \sigma^2(t,x), \quad (t,x)\in Q_T = T\times\Omega.$$

Начальное условие определяется плотностью вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0, т.е.

$$\varphi(t,x)\big|_{t=t_0} = \varphi_0(x),$$

а краевое условие вследствие того, что случайный процесс может принимать всевозможные значения из множества действительных чисел ($\Omega=\mathbb{R}$), записывается в форме (см. разд. 2.1.2):

$$\varphi(t,x)\big|_{x=\pm\infty} = 0.$$

Перейдем к уравнению обобщенной характеристической функции. Пусть система функций $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))$, причем система $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2(T;\,\nu(t))$, а система $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ – базисом пространства $L_2(\Omega;\,\rho(x))$. Тогда уравнение (2.24) с учетом того, что $n=1$, примет вид

$$P(2,2)\cdot\Phi(2,0)-\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(1,0)=$$

$$=-\,\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F(2,2)\cdot\Phi(2,0)+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G(2,2)\cdot\Phi(2,0),$$

или кратко

$$Z(2,2)\cdot\Phi(2,0)=B(2,0),$$

где

$$\begin{aligned}
&Z(2,2)=P(2,2)-A(2,2),\\
&A(2,2)=-\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F(2,2)+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G(2,2),\\
&B(2,0)=\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(1,0).
\end{aligned}$$

В приведенных соотношениях $P(2,2)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент, $\mathcal{P}_1(2,2)$ и $\mathcal{P}_{11}(2,2)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов дифференцирования по переменной x первого и второго порядков соответственно (см. разд. 1.4.3), $F(2,2)$ и $G(2,2)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов умножения на функции $f(t,x)$ и $g(t,x)$ соответственно (см. разд. 1.4.2), $\Phi(2,0)$ – обобщенная характеристическая функция, т.е. нестационарная спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi(t,x)$ (см. разд. 1.3.3). Все перечисленные выше нестационарные спектральные характеристики определены относительно базисной системы $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$. Кроме того, $q(1,0;t_0)$ – матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке t_0 (см. (2.21)), а $\Phi_0(1,0)$ – спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.2).

Заметим, что для нестационарных спектральных характеристик $P(2,2)$, $\mathcal{P}_1(2,2)$ и $\mathcal{P}_{11}(2,2)$ справедливо представление

$$\begin{aligned}
&P(2,2)=P(1,1)\otimes E(1,1),\\
&\mathcal{P}_1(2,2)=E(1,1)\otimes\mathcal{P}(1,1),\\
&\mathcal{P}_{11}(2,2)=E(1,1)\otimes\mathcal{P}^2(1,1),
\end{aligned}$$

где $P(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$; $\mathcal{P}(1,1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.3).

Решение уравнения обобщенной характеристической функции определяется выражением

$$\Phi(2,0) = Z^{-1}(2,2) \cdot B(2,0),$$

где $Z^{-1}(2,2)$ – обратная матрица по отношению к матрице $Z(2,2)$ (см. разд. 1.2.3), т.е.

$$\Phi(2,0) = \Big[P(1,1) \otimes E(1,1) + \big(E(1,1) \otimes \mathcal{P}(1,1)\big) \cdot F(2,2) -$$
$$- \frac{1}{2} \cdot \big(E(1,1) \otimes \mathcal{P}^2(1,1)\big) \cdot G(2,2)\Big]^{-1} \cdot \Big[\nu(t_0) \cdot q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0(1,0)\Big].$$

Таким образом, обобщенная характеристическая функция $\Phi(2,0)$ равна произведению обратной матрицы для четырехмерной гиперквадратной матрицы $Z(2,2)$ и двумерного гиперстолбца $B(2,0)$.

В качестве базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ можно использовать нестационарные полиномы Лежандра (1.4), нестационарные косинусоиды (1.5), нестационарные экспоненциальные функции (1.6) или нестационарные функции Уолша (1.7), а в качестве базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ – полиномы Эрмита (1.20) с весовой функцией $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ или функции Эрмита (1.21) с весовой функцией $\rho(x) \equiv 1$. ■

Пример 2.2. Записать уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова и уравнение обобщенной характеристической функции для двумерной стохастической системы управления, заданной уравнениями Ито

$$dX_1(t) = f_1(t, X_1(t), X_2(t))\,dt + \sigma_{11}(t, X_1(t), X_2(t))\,dW_1(t),$$
$$dX_2(t) = f_2(t, X_1(t), X_2(t))\,dt + \sigma_{22}(t, X_1(t), X_2(t))\,dW_2(t),$$
$$X_1(t_0) = X_{10}, \quad X_2(t_0) = X_{20},$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, $X_1 \in \Omega_1 = \mathbb{R}$, $X_2 \in \Omega_2 = \mathbb{R}$, $W_1(t)$, $W_2(t)$ – одномерные стандартные винеровские случайные процессы, не зависящие от X_{10} и X_{20}, т.е. $n = s = 2$.

Начальное состояние $X_0 = [X_{10} \;\; X_{20}]^{\mathrm{T}}$ определяется заданной плотностью вероятности $\varphi_0(x_1, x_2)$.

□ В рассматриваемом примере вектор состояния является двумерным, т.е. $X(t) = [X_1(t) \;\; X_2(t)]^{\mathrm{T}}$, $x = [x_1 \;\; x_2]^{\mathrm{T}}$, а функции $f(t,x)$ и $\sigma(t,x)$, входящие в уравнение (2.1), определяются выражениями

$$f(t,x) = \begin{bmatrix} f_1(t,x_1,x_2) \\ f_2(t,x_1,x_2) \end{bmatrix}, \quad \sigma(t,x) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(t,x_1,x_2) & 0 \\ 0 & \sigma_{22}(t,x_1,x_2) \end{bmatrix}.$$

Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова при $n = 2$ и с учетом того, что матричная функция $\sigma(t,x)$ является диагональной, имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi(t,x_1,x_2)}{\partial t} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_1}\big[f_1(t,x_1,x_2)\varphi(t,x_1,x_2)\big] - \frac{\partial}{\partial x_2}\big[f_2(t,x_1,x_2)\varphi(t,x_1,x_2)\big] + \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\big[g_{11}(t,x_1,x_2)\varphi(t,x_1,x_2)\big] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\big[g_{22}(t,x_1,x_2)\varphi(t,x_1,x_2)\big], \end{aligned}$$

где

$$g_{11}(t,x_1,x_2) = \sigma_{11}^2(t,x_1,x_2), \quad g_{22}(t,x_1,x_2) = \sigma_{22}^2(t,x_1,x_2),$$

$$(t,x_1,x_2) \in Q_T = T \times \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Начальное условие задается плотностью вероятности $\varphi_0(x_1,x_2)$ начального состояния X_0:

$$\varphi(t,x_1,x_2)\big|_{t=t_0} = \varphi_0(x_1,x_2),$$

а краевое условие записывается следующим образом (см. разд. 2.1.2):

$$\varphi(t,x_1,x_2)\big|_{x_1,x_2=\pm\infty} = 0,$$

поскольку множество $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ совпадает с пространством $\mathbb{R}^2$.

Пусть система функций $\{q(i_0,t)p_1(i_1,x_1)p_2(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$, причем система $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2(T;\nu(t))$, а системы $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ представляют собой базисы пространств $L_2(\Omega_1;\rho_1(x_1))$ и $L_2(\Omega_2;\rho_2(x_2))$ соответственно, $\rho(x) = \rho_1(x_1)\rho_2(x_2)$. Положим в (2.24) параметр n равным двум, тогда уравнение обобщенной характеристической функции в рассматриваемом примере примет вид

$$\begin{aligned} &P(3,3)\cdot\Phi(3,0) - \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(2,0) = \\ &= -\mathcal{P}_1(3,3)\cdot F_1(3,3)\cdot\Phi(3,0) - \mathcal{P}_2(3,3)\cdot F_2(3,3)\cdot\Phi(3,0) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(3,3)\cdot G_{11}(3,3)\cdot\Phi(3,0) + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{22}(3,3)\cdot G_{22}(3,3)\cdot\Phi(3,0), \end{aligned}$$

где $P(3,3)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент, определенная относительно базисной системы

$$\{q(i_0,t)p_1(i_1,x_1)p_2(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty};$$

$\mathcal{P}_1(3,3)$, $\mathcal{P}_2(3,3)$, $\mathcal{P}_{11}(3,3)$ и $\mathcal{P}_{22}(3,3)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов дифференцирования по переменным x_1 и x_2, определенные относительно той же базисной системы (см. разд. 1.4.3). Причем для нестационарной спектральной характеристики $P(3,3)$ оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент справедливо соотношение

$$P(3,3) = P(1,1)\otimes E(1,1)\otimes E(1,1),$$

а нестационарные спектральные характеристики $\mathcal{P}_1(3,3)$, $\mathcal{P}_2(3,3)$, $\mathcal{P}_{11}(3,3)$ и $\mathcal{P}_{22}(3,3)$ операторов дифференцирования первого и второго порядков по координатам вектора состояния выражаются следующим образом:

$$\mathcal{P}_1(3,3) = E(1,1)\otimes \mathcal{P}_1(1,1)\otimes E(1,1),$$

$$\mathcal{P}_2(3,3) = E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes \mathcal{P}_2(1,1),$$

$$\mathcal{P}_{11}(3,3) = E(1,1)\otimes \mathcal{P}_1^2(1,1)\otimes E(1,1),$$

$$\mathcal{P}_{22}(3,3) = E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes \mathcal{P}_2^2(1,1),$$

что следует из (1.68)–(1.70). Здесь $P(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$; $\mathcal{P}_1(1,1)$ и $\mathcal{P}_2(1,1)$ – спектральные характеристики операторов дифференцирования, определенные относительно базисных систем $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ соответственно (см. разд. 1.4.3).

Далее, $F_1(3,3)$ и $F_2(3,3)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов умножения на функции $f_1(t,x_1,x_2)$ и $f_2(t,x_1,x_2)$ соответственно, а $G_{11}(3,3)$ и $G_{22}(3,3)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов умножения на функции $g_{11}(t,x_1,x_2)$ и $g_{22}(t,x_1,x_2)$ соответственно (см. разд. 1.4.2), $\Phi(3,0)$ – обобщенная характеристическая функция, т.е. нестационарная спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi(t,x)$ (см. разд. 1.3.3). Нестационарные спектральные характеристики $F_1(3,3)$, $F_2(3,3)$, $G_{11}(3,3)$, $G_{22}(3,3)$ и $\Phi(3,0)$ определены относительно базисной системы $\{q(i_0,t)p_1(i_1,x_1)p_2(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$. Через $q(1,0;t_0)$ обозначена матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке t_0 (см. (2.21)), $\Phi_0(2,0)$ – спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi_0(x_1,x_2)$ начального состояния X_0, определенная относительно базисной системы $\{p_1(i_1,x_1)p_2(i_2,x_2)\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.2).

Кратко уравнение обобщенной характеристической функции записывается в форме

$$Z(3,3)\cdot\Phi(3,0)=B(3,0),$$

где

$$Z(3,3)=P(3,3)-A(3,3),$$

$$A(3,3)=-\mathcal{P}_1(3,3)\cdot F_1(3,3)\cdot\Phi(3,0)-\mathcal{P}_2(3,3)\cdot F_2(3,3)\cdot\Phi(3,0)+$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(3,3)\cdot G_{11}(3,3)\cdot\Phi(3,0)+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{22}(3,3)\cdot G_{22}(3,3)\cdot\Phi(3,0),$$

$$B(3,0)=\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(2,0),$$

а его решение определяется соотношением

$$\Phi(3,0)=Z^{-1}(3,3)\cdot B(3,0),$$

где $Z^{-1}(3,3)$ – обратная матрица по отношению к матрице $Z(3,3)$ (см. разд. 1.2.3), т.е.

$$\Phi(3,0)=\Big[P(1,1)\otimes E(1,1)\otimes E(1,1)+$$
$$+\big(E(1,1)\otimes\mathcal{P}_1(1,1)\otimes E(1,1)\big)\cdot F_1(3,3)+$$
$$+\big(E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes\mathcal{P}_2(1,1)\big)\cdot F_2(3,3)-$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\big(E(1,1)\otimes\mathcal{P}_1^2(1,1)\otimes E(1,1)\big)\cdot G_{11}(3,3)-$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\big(E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes\mathcal{P}_2^2(1,1)\big)\cdot G_{22}(3,3)\Big]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\Big[\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(2,0)\Big].$$

Следовательно, обобщенная характеристическая функция $\Phi(3,0)$ равна произведению обратной матрицы по отношению к шестимерной гиперквадратной матрице $Z(3,3)$ и трехмерного гиперстолбца $B(3,0)$.

В качестве базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, как и в примере (2.1), можно использовать нестационарные полиномы Лежандра (1.4), нестационарные косинусоиды (1.5), нестационарные экспоненциальные функции (1.6) или нестационарные функции Уолша (1.7), а в качестве базисных систем $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ – полиномы Эрмита (1.20) или функции Эрмита (1.21), причем в общем случае системы функций $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ могут быть различными. ■

Уравнение обобщенной характеристической функции при условии поглощения на границе множества Ω

Перейдем к задаче анализа стохастических систем управления при условии поглощения на границе множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Применяя спектральное преобразование к левой и правой частям уравнения

$$\frac{\partial \hat{\varphi}(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\hat{\varphi}(t,x)$$

с учетом начального и краевого условий (см. задачу (2.10)), получаем следующее выражение:

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial \hat{\varphi}(t,x)}{\partial t}\right|_{\hat{\varphi}(t_0,x)=\varphi_0(x)}\right] = \mathbb{S}\left[\left.\mathcal{A}\hat{\varphi}(t,x)\right|_{\hat{\varphi}(t,x)|_{x\in\partial\Omega}=0}\right], \tag{2.29}$$

где

$$\mathbb{S}\left[\left.\mathcal{A}\hat{\varphi}(t,x)\right|_{\hat{\varphi}(t,x)|_{x\in\partial\Omega}=0}\right] = -\sum_{i=1}^{n} \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\big[f_i(t,x)\,\hat{\varphi}(t,x)\big]\right|_{\hat{\varphi}(t,x)|_{x\in\partial\Omega}=0}\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\big[g_{ij}(t,x)\,\hat{\varphi}(t,x)\big]\right|_{\hat{\varphi}(t,x)|_{x\in\partial\Omega}=0}\right], \tag{2.30}$$

что следует из (2.6) и свойства линейности спектрального преобразования (см. разд. 1.3.3).

Сравнивая (2.18) и (2.29), нетрудно видеть, что левые части этих уравнений с точностью до обозначения неизвестной функции совпадают, поэтому с учетом (2.20) получаем соотношение

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial \hat{\varphi}(t,x)}{\partial t}\right|_{\hat{\varphi}(t_0,x)=\varphi_0(x)}\right] = P(n+1,n+1)\cdot\hat{\Phi}(n+1,0) -$$
$$-\,\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0), \tag{2.31}$$

где $\hat{\Phi}(n+1,0)$ – нестационарная спектральная характеристика функции $\hat{\varphi}(t,x)$, определенная относительно базисной системы

$$\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty},$$

а остальные обозначения такие же, как и в (2.20).

Рассмотрим правую часть уравнения (2.29). Наряду с обозначениями, введенными в предыдущем подразделе, будем обозначать через $L_l(1,1)$ спектральную характеристику оператора умножения на функцию $\frac{d\ln\rho_l(x_l)}{dx_l}$, определенную относительно базисной системы $\{p_l(i_l, x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.2 и утверждение 1.18), $l = 1, 2, \ldots, n$. Тогда, используя выражение (1.74) и свойство спектрального преобразования композиции линейных операторов (см. разд. 1.4.1), можно сделать вывод о том, что

$$\begin{aligned}
&\mathbb{S}\left[\frac{\partial}{\partial x_i} \big[f_i(t,x)\hat{\varphi}(t,x) \big] \Big|_{\hat{\varphi}(t,x)|_{x\in\partial\Omega}=0} \right] = \\
&\quad = \mathcal{P}_i^{\text{п}}(n+1,n+1)\cdot F_i(n+1,n+1)\cdot\hat{\Phi}(n+1,0), \qquad (2.32)\\
&i = 1, 2, \ldots, n,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_i^{\text{п}}(n+1,n+1) = \\
&= E(1,1)\otimes \underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes\big(-\mathcal{P}_i^*(1,1)-L_i(1,1)\big)\otimes\ldots\otimes E(1,1)}_{n \text{ сомножителей}}, \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

индекс «п» здесь и далее обозначает, что рассматривается задача анализа с условием поглощения.

Далее, принимая во внимание соотношение (1.77) и свойство спектрального преобразования композиции линейных операторов (см. разд. 1.4.1), получаем

$$\begin{aligned}
&\mathbb{S}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \big[g_{ij}(t,x)\hat{\varphi}(t,x) \big] \Big|_{\hat{\varphi}(t,x)|_{x\in\partial\Omega}=0} \right] = \\
&\quad = \mathcal{P}_{ij}^{\text{п}}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}(n+1,n+1)\cdot\hat{\Phi}(n+1,0), \qquad (2.34)\\
&i, j = 1, 2, \ldots, n,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_{ij}^{\text{п}}(n+1,n+1) = \\
&= \begin{cases}
E(1,1)\otimes \underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes \otimes\big(-\mathcal{P}_i(1,1)\cdot\mathcal{P}_i^*(1,1)-\mathcal{P}_i(1,1)\cdot L_i(1,1)\big)\otimes \otimes\ldots\otimes E(1,1)}_{n \text{ сомножителей}}, & i = j,\\
E(1,1)\otimes \underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes\big(-\mathcal{P}_i^*(1,1)-L_i(1,1)\big)\otimes \otimes\ldots\otimes\big(-\mathcal{P}_j^*(1,1)-L_j(1,1)\big)\otimes\ldots\otimes E(1,1)}_{n \text{ сомножителей}}, & i \neq j.
\end{cases} \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{A}\hat{\varphi}(t,x)\Big|_{\hat{\varphi}(t,x)|_{x\in\partial\Omega}=0}\right]=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i^{\text{п}}(n+1,n+1)\cdot F_i(n+1,n+1)\cdot\hat{\Phi}(n+1,0)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}^{\text{п}}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}(n+1,n+1)\cdot\hat{\Phi}(n+1,0). \qquad (2.36)$$

Принимая во внимание соотношения (2.31) и (2.36), уравнение (2.29) можно записать следующим образом:

$$P(n+1,n+1)\cdot\hat{\Phi}(n+1,0)-\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i^{\text{п}}(n+1,n+1)\cdot F_i(n+1,n+1)\cdot\hat{\Phi}(n+1,0)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}^{\text{п}}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}(n+1,n+1)\cdot\hat{\Phi}(n+1,0), \qquad (2.37)$$

или кратко

$$P(n+1,n+1)\cdot\hat{\Phi}(n+1,0)-\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)=$$

$$=A^{\text{п}}(n+1,n+1)\cdot\hat{\Phi}(n+1,0), \qquad (2.38)$$

где

$$A^{\text{п}}(n+1,n+1)=-\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i^{\text{п}}(n+1,n+1)\cdot F_i(n+1,n+1)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}^{\text{п}}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}(n+1,n+1).$$

Как и (2.24), уравнение (2.37) представляет собой систему линейных неоднородных алгебраических уравнений, записанных в матричной форме, и называется **уравнением ненормированной обобщенной характеристической функции**.

Перепишем уравнение (2.38) в виде

$$Z^{\text{п}}(n+1,n+1)\cdot\hat{\Phi}(n+1,0)=B(n+1,0), \qquad (2.39)$$

где

$$Z^{\text{п}}(n+1,n+1) = P(n+1,n+1) - A^{\text{п}}(n+1,n+1),$$

$$B(n+1,0) = \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes \Phi_0(n,0).$$

Тогда гиперстолбцовая матрица, задаваемая выражением

$$\hat{\Phi}(n+1,0) = \left[Z^{\text{п}}(n+1,n+1)\right]^{-1}\cdot B(n+1,0), \tag{2.40}$$

где $\left[Z^{\text{п}}(n+1,n+1)\right]^{-1}$ – обратная матрица по отношению к матрице $Z^{\text{п}}(n+1,n+1)$ (см. разд. 1.2.3), является решением уравнения ненормированной обобщенной характеристической функции в случае поглощения на границе.

Переход от нестационарной спектральной характеристики $\hat{\Phi}(n+1,0)$ к функции $\hat{\varphi}(t,x)$ осуществляется по формуле обращения (1.46):

$$\hat{\varphi}(t,x) = \mathbb{S}^{-1}\left[\hat{\Phi}(n+1,0)\right] = \\ = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}\hat{\varphi}_{i_0 i_1\ldots i_n}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x), \tag{2.41}$$

где $\hat{\varphi}_{i_0 i_1\ldots i_n}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $\hat{\Phi}(n+1,0)$, $t\in T$, $x\in\Omega$. Решение задачи анализа стохастической системы управления при условии поглощения, т.е. плотность вероятности $\varphi(t,x)$, определяется выражением (2.9).

Замечание 2.5. Используя понятие спектральных характеристик линейных функционалов (см. разд. 1.5.1 и 1.5.2), можно получить решение задачи анализа стохастических систем управления при условии поглощения другим способом.

Обозначим через $\mathbb{P}(t)$ интеграл от функции $\hat{\varphi}(t,x)$ по множеству Ω в момент времени $t\in T$, т.е.

$$\mathbb{P}(t) = \int\limits_{\Omega}\hat{\varphi}(t,x)\,dx,$$

и перепишем это выражение в виде

$$\mathbb{P}(t) = \mathcal{J}\hat{\varphi}(t,x),$$

где $\mathcal{J}$ – линейный функционал, ставящий в соответствие функции вектора состояния интеграл от этой функции по множеству Ω (см. разд. 1.5.1).

Тогда, согласно теореме 1.7, нестационарная спектральная характеристика $\mathsf{P}(1,0)$ функции $\mathbb{P}(t)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, выражается через нестационарную спектральную характеристику $\hat{\Phi}(n+1,0)$ следующим образом:

$$\mathsf{P}(1,0) = \big(E(1,1) \otimes J(0,n)\big) \cdot \Big(\big(E(1,1) \otimes R^{-1}(n,n)\big) \cdot \hat{\Phi}(n+1,0)\Big),$$

где $J(0,n)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{J}$ (см. разд. 1.5.1), $R(n,n)$ – спектральная характеристика оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$ (см. разд. 1.4.2). Спектральные характеристики $J(0,n)$ и $R(n,n)$ определены относительно базисной системы

$$\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}.$$

Следует отметить, что функция $\mathbb{P}(t)$ имеет смысл вероятности того, что траектория случайного процесса $X(t)$ не достигнет границы множества Ω к моменту времени $t \in T$.

Запишем соотношение (2.9) в форме

$$\hat{\varphi}(t,x) = \mathbb{P}(t) \cdot \varphi(t,x)$$

и применим спектральное преобразование к левой и правой частям полученного равенства. Тогда по теореме 1.4 нестационарная спектральная характеристика $\hat{\Phi}(n+1,0)$ равна произведению нестационарной спектральной характеристики $\mathsf{P}(n+1,n+1)$ оператора умножения на функцию $\mathbb{P}(t)$, определенной относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, и обобщенной характеристической функции $\Phi(n+1,0)$, т.е.

$$\hat{\Phi}(n+1,0) = \mathsf{P}(n+1,n+1) \cdot \Phi(n+1,0), \tag{2.42}$$

причем нестационарная спектральная характеристика $\mathsf{P}(n+1,n+1)$, согласно утверждению 1.15 и свойству спектрального преобразования операторов умножения, определенных на пространстве функций вектора состояния (см. разд. 1.4.2), представляется в виде

$$\mathsf{P}(n+1,n+1) = \mathsf{P}(1,1) \otimes E(n,n), \tag{2.43}$$

где $\mathsf{P}(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\mathbb{P}(t)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, которая в свою очередь выражается через нестационарную спектральную характеристику $\mathsf{P}(1,0)$ функции $\mathbb{P}(t)$ и нестационарную спектральную характеристику $V(1,2)$ множительного звена, определенную относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ (см. утверждение 1.11):

$$\mathsf{P}(1,1) = V(1,2) \odot \mathsf{P}(1,0). \tag{2.44}$$

Выражая обобщенную характеристическую функцию $\Phi(n+1,0)$ из уравнения (2.42), получаем выражение

$$\Phi(n+1,0) = \mathsf{P}^{-1}(n+1,n+1)\cdot\hat{\Phi}(n+1,0),$$

которое с учетом (2.43) и (2.44) примет вид

$$\Phi(n+1,0) = \left[\big(V(1,2)\odot\mathsf{P}(1,0)\big)\otimes E(n,n)\right]^{-1}\cdot\hat{\Phi}(n+1,0).$$

Таким образом, принимая во внимание свойства обращения многомерных матриц (см. разд. 1.2.3), получаем соотношение, определяющее решение задачи (2.10) в спектральной форме математического описания:

$$\Phi(n+1,0) = \left[\big(V(1,2)\odot\mathsf{P}(1,0)\big)^{-1}\otimes E(n,n)\right]\cdot\hat{\Phi}(n+1,0),$$

где $\hat{\Phi}(n+1,0)$ удовлетворяет уравнению (2.37).

Для перехода от обобщенной характеристической функции $\Phi(n+1,0)$ к плотности вероятности $\varphi(t,x)$ используется формула обращения (2.28).

Пример 2.3. Записать уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова и уравнение обобщенной характеристической функции для одномерной стохастической системы управления, заданной уравнением Ито

$$dX(t) = f\,(t,X(t))\,dt + \sigma\,(t,X(t))\,dW(t),\quad X(t_0)=X_0,$$

где $t\in T=[t_0,t_1]$, $X\in\Omega=[a,b]$, $W(t)$ – одномерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от X_0 $(n=s=1)$, при условии поглощения траекторий случайного процесса $X(t)$ на границе множества Ω. Начальное состояние X_0 определяется заданной плотностью вероятности $\varphi_0(x)$.

□ Поскольку рассматривается задача анализа стохастических систем управления при условии поглощения, то плотность вероятности $\varphi(t,x)$ состояния системы определяется выражением

$$\varphi(t,x) = \frac{\hat{\varphi}(t,x)}{\displaystyle\int\limits_{\Omega}\hat{\varphi}(t,x)\,dx},$$

где функция $\hat{\varphi}(t,x)$ удовлетворяет уравнению (см. разд. 2.1.2):

$$\frac{\partial\hat{\varphi}(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\big[f(t,x)\hat{\varphi}(t,x)\big] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big[g(t,x)\hat{\varphi}(t,x)\big],$$

в котором

$$g(t,x)=\sigma^2(t,x),\quad (t,x)\in Q_T = T\times\Omega.$$

Начальное условие для этого уравнения задается плотностью вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0:

$$\hat{\varphi}(t,x)|_{t=t_0} = \varphi_0(x),$$

а краевое условие определяется выражением

$$\hat{\varphi}(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0,$$

т.е.

$$\hat{\varphi}(t,x)|_{x=a} = \hat{\varphi}(t,x)|_{x=b} = 0.$$

Будем предполагать, что система функций $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ представляет собой базис пространства $L_2(Q_T;\, \nu(t)\rho(x))$, при этом системы функций $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ являются базисами пространств $L_2(T;\, \nu(t))$ и $L_2(\Omega;\, \rho(x))$ соответственно (см. разд. 1.1.3).

Запишем уравнение ненормированной обобщенной характеристической функции (2.37), принимая во внимание, что $n=1$:

$$P(2,2)\cdot\hat{\Phi}(2,0) - \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(1,0) =$$

$$= -\,\mathcal{P}_1^{\text{п}}(2,2)\cdot F(2,2)\cdot\hat{\Phi}(2,0) + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}^{\text{п}}(2,2)\cdot G(2,2)\cdot\hat{\Phi}(2,0),$$

или кратко

$$Z^{\text{п}}(2,2)\cdot\hat{\Phi}(2,0) = B(2,0),$$

где

$$\begin{aligned} &Z^{\text{п}}(2,2) = P(2,2) - A^{\text{п}}(2,2),\\ &A^{\text{п}}(2,2) = -\mathcal{P}_1^{\text{п}}(2,2)\cdot F(2,2) + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}^{\text{п}}(2,2)\cdot G(2,2),\\ &B(2,0) = \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(1,0). \end{aligned}$$

В приведенных соотношениях $P(2,2)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент (см. разд. 1.4.3), $F(2,2)$ и $G(2,2)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов умножения на функции $f(t,x)$ и $g(t,x)$ соответственно (см. разд. 1.4.2), $\hat{\Phi}(2,0)$ – нестационарная спектральная характеристика функции $\hat{\varphi}(t,x)$ (см. разд. 1.3.3). Нестационарные спектральные характеристики $P(2,2)$, $F(2,2)$, $G(2,2)$ и $\hat{\Phi}(2,0)$ определены относительно базисной системы $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$. Через $q(1,0;t_0)$ обозначена матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке t_0 (см. (2.21)), а через $\Phi_0(1,0)$ – спектральная характеристика начальной плотности вероятности $\varphi_0(x)$, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.2).

Напомним, что нестационарная спектральная характеристика $P(2,2)$ оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент представляется в виде

$$P(2,2) = P(1,1) \otimes E(1,1),$$

где $P(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.3).

Четырехмерные гиперквадратные матрицы $\mathcal{P}_1^{\text{п}}(2,2)$ и $\mathcal{P}_{11}^{\text{п}}(2,2)$ определяются соотношениями (2.33) и (2.35) соответственно:

$$\mathcal{P}_1^{\text{п}}(2,2) = E(1,1) \otimes \big(-\mathcal{P}^*(1,1) - L(1,1)\big),$$

$$\mathcal{P}_{11}^{\text{п}}(2,2) = E(1,1) \otimes \big(-\mathcal{P}(1,1)\cdot\mathcal{P}^*(1,1) - \mathcal{P}(1,1)\cdot L(1,1)\big),$$

где $\mathcal{P}(1,1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.3); $L(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на логарифмическую производную $\frac{d\ln\rho(x)}{dx}$ весовой функции $\rho(x)$, определенная относительно той же базисной системы (см. разд. 1.4.2).

Решение уравнения ненормированной обобщенной характеристической функции определяется выражением

$$\hat{\Phi}(2,0) = [Z^{\text{п}}(2,2)]^{-1}\cdot B(2,0),$$

где $[Z^{\text{п}}(2,2)]^{-1}$ – обратная матрица по отношению к матрице $Z^{\text{п}}(2,2)$ (см. разд. 1.2.3), т.е.

$$\hat{\Phi}(2,0) = \Big[P(1,1)\otimes E(1,1) + \big(E(1,1)\otimes\big(-\mathcal{P}^*(1,1) - L(1,1)\big)\big)\cdot F(2,2) - \\ - \frac{1}{2}\cdot\big(E(1,1)\otimes\big(-\mathcal{P}(1,1)\cdot\mathcal{P}^*(1,1) - \mathcal{P}(1,1)\cdot L(1,1)\big)\big)\cdot G(2,2)\Big]^{-1}\cdot \\ \cdot\Big[\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(1,0)\Big].$$

Таким образом, нестационарная спектральная характеристика $\hat{\Phi}(2,0)$ равна произведению обратной матрицы для четырехмерной гиперквадратной матрицы $Z^{\text{п}}(2,2)$ и двумерного гиперстолбца $B(2,0)$.

В частном случае, если $\nu(t)\equiv 1$ и $\rho(x)\equiv 1$, а функции базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ являются вещественнозначными, полученные соотношения можно упростить, так как матрица $L(1,1)$ является нулевой и $\mathcal{P}^*(1,1) = \mathcal{P}^{\text{т}}(1,1)$ (см. замечание 1.16).

Следовательно,

$$\mathcal{P}_1^{\text{п}}(2,2) = E(1,1) \otimes \big(-\mathcal{P}^{\text{T}}(1,1)\big)$$

и

$$\mathcal{P}_{11}^{\text{п}}(2,2) = E(1,1) \otimes \big(-\mathcal{P}(1,1) \cdot \mathcal{P}^{\text{T}}(1,1)\big).$$

Тогда нестационарная спектральная характеристика $\hat{\Phi}(2,0)$ задается выражением

$$\hat{\Phi}(2,0) = \Bigg[P(1,1) \otimes E(1,1) + \Big(E(1,1) \otimes \big(-\mathcal{P}^{\text{T}}(1,1)\big)\Big) \cdot F(2,2) - \\ - \frac{1}{2} \cdot \Big(E(1,1) \otimes \big(-\mathcal{P}(1,1) \cdot \mathcal{P}^{\text{T}}(1,1)\big)\Big) \cdot G(2,2)\Bigg]^{-1} \cdot \\ \cdot \Big[q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0(1,0)\Big].$$

В качестве базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ можно использовать, например, нестационарные полиномы Лежандра (1.4), нестационарные косинусоиды (1.5), нестационарные экспоненциальные функции (1.6) или нестационарные функции Уолша (1.7), а в качестве базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ – полиномы Лежандра (1.17), если $\Omega = [a,b]$; тригонометрические функции (1.18), если $\Omega = [a,b]$ и при этом $a = -b$; функции Уолша (1.19), если $\Omega = [0,1]$. ■

Уравнение обобщенной характеристической функции при условии отражения на границе множества Ω

Рассмотрим задачу анализа стохастических систем управления при условии отражения (см. разд. 2.1.1). Применяя спектральное преобразование к левой и правой частям уравнения

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} = -\operatorname{div}\pi(t,x)$$

с учетом начального и краевого условий (см. задачу (2.13)), получаем следующее равенство:

$$\mathbb{S}\left[\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}\bigg|_{\varphi(t_0,x)=\varphi_0(x)}\right] = \mathbb{S}\left[-\operatorname{div}\pi(t,x)\Big|_{\pi(t,x)|_{x\in\partial\Omega}=0}\right], \tag{2.45}$$

где

$$\mathbb{S}\left[-\operatorname{div}\pi(t,x)\Big|_{\pi(t,x)|_{x\in\partial\Omega}=0}\right] = -\sum_{i=1}^{n}\mathbb{S}\left[\frac{\partial\pi_i(t,x)}{\partial x_i}\bigg|_{\pi_i(t,x)|_{x\in\partial\Omega}=0}\right], \tag{2.46}$$

что следует из свойства линейности спектрального преобразования (см. разд. 1.3.3). Левая часть этого равенства совпадает с левой частью уравнения (2.18), поэтому для нее справедливо выражение (2.20).

Перейдем к правой части (2.45), при этом будем использовать обозначения, введенные в предыдущих подразделах. Выразим сначала нестационарную спектральную характеристику $\Pi_i(n+1,0)$ функции $\pi_i(t,x)$, используя (2.11) и свойство линейности спектрального преобразования:

$$\Pi_i(n+1,0) = \mathbb{S}\left[f_i(t,x)\varphi(t,x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\big[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x)\big]\right] =$$

$$= \mathbb{S}\Big[f_i(t,x)\varphi(t,x)\Big] - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{S}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\big[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x)\big]\right],$$

$$i = 1,2,\ldots,n.$$

Первое слагаемое в этом выражении по свойству спектрального преобразования операторов умножения, заданных на пространстве функций времени и вектора состояния (см. разд. 1.4.2), равно произведению нестационарной спектральной характеристики $F_i(n+1,n+1)$ оператора умножения на коэффициент сноса $f_i(t,x)$ и обобщенной характеристической функции $\Phi(n+1,0)$, т.е.

$$\mathbb{S}\left[f_i(t,x)\varphi(t,x)\right] = F_i(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0).$$

Для того, чтобы выразить второе слагаемое, воспользуемся соотношением (1.73) и свойством спектрального преобразования композиции линейных операторов (см. разд. 1.4.1). Тогда

$$\mathbb{S}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\big[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x)\big]\right] =$$

$$= \mathcal{P}_j(n+1,n+1)\cdot G_{ij}(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0),$$

$$j = 1,2,\ldots,n,$$

где $G_{ij}(n+1,n+1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на коэффициент диффузии $g_{ij}(t,x)$, а $\mathcal{P}_j(n+1,n+1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования первого порядка по координате x_j вектора состояния (см. разд. 1.4.3), для которой справедливо представление

$$\mathcal{P}_j(n+1,n+1) = E(1,1)\otimes\underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_j(1,1)\otimes\ldots\otimes E(1,1)}_{n\ \text{сомножителей}}.$$

Следовательно,

$$\Pi_i(n+1,0) = F_i(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0) - \\ -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_j(n+1,n+1)\cdot G_{ij}(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0).$$

Далее запишем выражение для нестационарной спектральной характеристики частной производной функции $\pi_i(t,x)$ по координате x_i вектора состояния с учетом краевого условия, которая, согласно выражению (1.74), определяется соотношением

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial\pi_i(t,x)}{\partial x_i}\right|_{\pi_i(t,x)|_{\partial\Omega}=0}\right] = \mathcal{P}_i^{\mathrm{o}}(n+1,n+1)\cdot\Pi_i(n+1,0), \\ i=1,2,\ldots,n,$$

где

$$\mathcal{P}_i^{\mathrm{o}}(n+1,n+1) = \\ = E(1,1)\otimes\underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes\big(-\mathcal{P}_i^*(1,1)-L_i(1,1)\big)\otimes\ldots\otimes E(1,1)}_{n\ \text{сомножителей}}, \quad (2.47)$$

а индекс «о» здесь и далее соответствует случаю отражения.

Таким образом,

$$\mathbb{S}\left[\left.-\operatorname{div}\pi(t,x)\right|_{\pi(t,x)|_{x\in\partial\Omega}=0}\right] = \\ = -\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i^{\mathrm{o}}(n+1,n+1)\cdot\Big(F_i(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0) - \\ -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_j(n+1,n+1)\cdot G_{ij}(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)\Big) = \\ = -\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i^{\mathrm{o}}(n+1,n+1)\cdot F_i(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0) + \\ +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}^{\mathrm{o}}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0),$$

где

$$\mathcal{P}_{ij}^{\mathrm{o}}(n+1,n+1) = \mathcal{P}_i^{\mathrm{o}}(n+1,n+1)\cdot\mathcal{P}_j(n+1,n+1),$$

причем, принимая во внимание соотношения для многомерных матриц $\mathcal{P}_i^{\mathrm{o}}(n+1,n+1)$ и $\mathcal{P}_j(n+1,n+1)$, можно сделать вывод о том, что

$$\mathcal{P}_{ij}^{\mathrm{o}}(n+1,n+1) =$$
$$= \begin{cases} E(1,1)\otimes \underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes \otimes\left(-\mathcal{P}_i^*(1,1)\cdot\mathcal{P}_i(1,1) - L_i(1,1)\cdot\mathcal{P}_i(1,1)\right)\otimes \otimes\ldots\otimes E(1,1)}_{n\ \text{сомножителей}},\ i=j, \\ E(1,1)\otimes \underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes\left(-\mathcal{P}_i^*(1,1) - L_i(1,1)\right)\otimes \otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_j(1,1)\otimes\ldots\otimes E(1,1)}_{n\ \text{сомножителей}},\ i\neq j. \end{cases} \tag{2.48}$$

С учетом полученного соотношения уравнение (2.45) примет вид

$$P(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0) - \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i^{\mathrm{o}}(n+1,n+1)\cdot F_i(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}^{\mathrm{o}}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0), \tag{2.49}$$

или кратко

$$P(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0) - \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0) =$$
$$= A^{\mathrm{o}}(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0), \tag{2.50}$$

где

$$A^{\mathrm{o}}(n+1,n+1) = -\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i^{\mathrm{o}}(n+1,n+1)\cdot F_i(n+1,n+1) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}^{\mathrm{o}}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}(n+1,n+1).$$

Уравнение (2.49) называется **уравнением обобщенной характеристической функции**. По структуре оно аналогично уравнениям (2.24), (2.37) и представляет собой систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно координат обобщенной характеристической функции $\Phi(n+1,0)$.

Переписывая уравнение (2.50) в форме

$$Z^{\mathrm{o}}(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)=B(n+1,0), \tag{2.51}$$

где

$$Z^{\mathrm{o}}(n+1,n+1)=P(n+1,n+1)-A^{\mathrm{o}}(n+1,n+1),$$

$$B(n+1,0)=\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0),$$

можно выразить обобщенную характеристическую функцию $\Phi(n+1,0)$, определяющую решение задачи (2.13) в спектральной форме математического описания:

$$\Phi(n+1,0)=\left[Z^{\mathrm{o}}(n+1,n+1)\right]^{-1}\cdot B(n+1,0), \tag{2.52}$$

где $\left[Z^{\mathrm{o}}(n+1,n+1)\right]^{-1}$ – обратная матрица по отношению к матрице $Z^{\mathrm{o}}(n+1,n+1)$ (см. разд. 1.2.3).

Переход от обобщенной характеристической функции $\Phi(n+1,0)$ к плотности вероятности $\varphi(t,x)$ осуществляется по формуле обращения (2.28).

Пример 2.4. Записать уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова и уравнение обобщенной характеристической функции для одномерной стохастической системы управления, заданной уравнением Ито

$$dX(t)=f\left(t,X(t)\right)dt+\sigma\left(t,X(t)\right)dW(t),\quad X(t_0)=X_0,$$

где $t\in T=[t_0,t_1]$, $X\in\Omega=[a,b]$, $W(t)$ – одномерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от X_0 $(n=s=1)$, при условии отражения траекторий случайного процесса $X(t)$ на границе множества Ω. Начальное состояние X_0 определяется заданной плотностью вероятности $\varphi_0(x)$.

□ Для одномерной стохастической системы управления уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова имеет вид (см. пример 2.1)

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[f(t,x)\varphi(t,x)\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g(t,x)\varphi(t,x)\right],$$

где

$$g(t,x)=\sigma^2(t,x),\quad (t,x)\in Q_T=T\times\Omega.$$

Начальное условие задается плотностью вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0:

$$\varphi(t,x)|_{t=t_0}=\varphi_0(x),$$

а краевое условие записывается в форме

$$\pi(t,x)|_{x\in\partial\Omega}=0,$$

т.е.

$$\pi(t,x)\big|_{x=a} = \pi(t,x)\big|_{x=b} = 0,$$

где

$$\pi(t,x) = f(t,x)\varphi(t,x) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\big[g(t,x)\varphi(t,x)\big].$$

Будем предполагать, что система функций $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ представляет собой базис пространства $L_2(Q_T;\, \nu(t)\rho(x))$, при этом системы функций $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ являются базисами пространств $L_2(T;\, \nu(t))$ и $L_2(\Omega;\, \rho(x))$ соответственно (см. разд. 1.1.3).

Уравнение обобщенной характеристической функции (2.49) с учетом того, что $n=1$, примет вид

$$P(2,2)\cdot\Phi(2,0) - \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(1,0) =$$

$$= -\,\mathcal{P}_1^{\mathrm{o}}(2,2)\cdot F(2,2)\cdot\Phi(2,0) + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}^{\mathrm{o}}(2,2)\cdot G(2,2)\cdot\Phi(2,0),$$

или кратко

$$Z^{\mathrm{o}}(2,2)\cdot\Phi(2,0) = B(2,0),$$

где

$$\begin{aligned}
&Z^{\mathrm{o}}(2,2) = P(2,2) - A^{\mathrm{o}}(2,2),\\
&A^{\mathrm{o}}(2,2) = -\mathcal{P}_1^{\mathrm{o}}(2,2)\cdot F(2,2) + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}^{\mathrm{o}}(2,2)\cdot G(2,2),\\
&B(2,0) = \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(1,0).
\end{aligned}$$

Здесь, как в примерах 2.1 и 2.3, введены следующие обозначения: $P(2,2)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент (см. разд. 1.4.3), $F(2,2)$ и $G(2,2)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов умножения на функции $f(t,x)$ и $g(t,x)$ соответственно (см. разд. 1.4.2), $\Phi(2,0)$ – обобщенная характеристическая функция, т.е. нестационарная спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi(t,x)$ (см. разд. 1.3.3). Нестационарные спектральные характеристики $P(2,2)$, $F(2,2)$, $G(2,2)$ и $\Phi(2,0)$ определены относительно базисной системы $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$. Кроме того, $q(1,0;t_0)$ – матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке t_0 (см. (2.21)), $\Phi_0(1,0)$ – спектральная характеристика начальной плотности вероятности $\varphi_0(x)$, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.2).

Известно (см. разд. 1.4.3), что для нестационарной спектральной характеристики $P(2,2)$ справедливо представление

$$P(2,2) = P(1,1) \otimes E(1,1),$$

где $P(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$.

Для четырехмерных гиперквадратных матриц $\mathcal{P}_1^{\mathrm{o}}(2,2)$ и $\mathcal{P}_{11}^{\mathrm{o}}(2,2)$ справедливы соотношения (2.47) и (2.48), т.е.

$$\mathcal{P}_1^{\mathrm{o}}(2,2) = E(1,1) \otimes \big(-\mathcal{P}^*(1,1) - L(1,1)\big),$$
$$\mathcal{P}_{11}^{\mathrm{o}}(2,2) = E(1,1) \otimes \big(-\mathcal{P}^*(1,1) \cdot \mathcal{P}(1,1) - L(1,1) \cdot \mathcal{P}(1,1)\big),$$

где $\mathcal{P}(1,1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.3); $L(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\frac{d\ln\rho(x)}{dx}$, определенная относительно той же базисной системы (см. разд. 1.4.2).

Выражая нестационарную спектральную характеристику $\Phi(2,0)$ из уравнения обобщенной характеристической функции, получаем

$$\Phi(2,0) = [Z^{\mathrm{o}}(2,2)]^{-1} \cdot B(2,0),$$

где $[Z^{\mathrm{o}}(2,2)]^{-1}$ – обратная матрица по отношению к матрице $Z^{\mathrm{o}}(2,2)$ (см. разд. 1.2.3), т.е.

$$\begin{aligned}
&\Phi(2,0) = \\
&\quad = \Big[P(1,1) \otimes E(1,1) + \big(E(1,1) \otimes \big(-\mathcal{P}^*(1,1) - L(1,1)\big)\big) \cdot F(2,2) - \\
&\qquad - \frac{1}{2} \cdot \big(E(1,1) \otimes \big(-\mathcal{P}^*(1,1) \cdot \mathcal{P}(1,1) - L(1,1) \cdot \mathcal{P}(1,1)\big)\big) \cdot G(2,2)\Big]^{-1} \cdot \\
&\qquad \cdot \Big[\nu(t_0) \cdot q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0(1,0)\Big].
\end{aligned}$$

Таким образом, обобщенная характеристическая функция $\Phi(2,0)$ равна произведению обратной матрицы для четырехмерной гиперквадратной матрицы $Z^{\mathrm{o}}(2,2)$ и двумерного гиперстолбца $B(2,0)$.

Рассмотрим частный случай, когда весовые функции $\nu(t)$ и $\rho(x)$ тождественно равны единице, а функции базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ являются вещественнозначными. Тогда, согласно замечанию 1.16, спектральная характеристика $L(1,1)$ представляет собой нулевую матрицу и $\mathcal{P}^*(1,1) = \mathcal{P}^{\mathrm{T}}(1,1)$.

Следовательно, матрицы $\mathcal{P}_1^{\mathrm{o}}(2,2)$ и $\mathcal{P}_{11}^{\mathrm{o}}(2,2)$ определяются соотношениями

$$\mathcal{P}_1^{\mathrm{o}}(2,2) = E(1,1) \otimes \big(-\mathcal{P}^{\mathrm{T}}(1,1)\big),$$
$$\mathcal{P}_{11}^{\mathrm{o}}(2,2) = E(1,1) \otimes \big(-\mathcal{P}^{\mathrm{T}}(1,1) \cdot \mathcal{P}(1,1)\big),$$

а решение уравнения обобщенной характеристической функции представляется в виде

$$\Phi(2,0) = \Bigg[P(1,1) \otimes E(1,1) + \Big(E(1,1) \otimes \big(-\mathcal{P}^{\mathrm{T}}(1,1)\big)\Big) \cdot F(2,2) - \\ - \frac{1}{2} \cdot \Big(E(1,1) \otimes \big(-\mathcal{P}^{\mathrm{T}}(1,1) \cdot \mathcal{P}(1,1)\big)\Big) \cdot G(2,2)\Bigg]^{-1} \cdot \\ \cdot \Bigg[q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0(1,0)\Bigg].$$

Как и в примере 2.3, для решения задачи анализа в качестве базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ можно использовать нестационарные полиномы Лежандра (1.4), нестационарные косинусоиды (1.5), нестационарные экспоненциальные функции (1.6) или нестационарные функции Уолша (1.7), а в качестве базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ – полиномы Лежандра (1.17), если $\Omega = [a,b]$; функции Уолша (1.19), если $\Omega = [0,1]$. ■

З а м е ч а н и е 2.6. Для случая, когда множество Ω совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$, а также при условии поглощения или отражения на границе множества Ω ($\Omega \neq \mathbb{R}^n$), уравнения обобщенной характеристической функции могут быть записаны с помощью нестационарных спектральных характеристик операторов интегрирования (см. разд. 1.4.4). Такой подход используется в работах [76, 75, 94].

Методика расчета плотности вероятности

1. По функциям $f(t,x)$ и $\sigma(t,x)$, входящим в уравнение (2.1), плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0 и условию поведения траекторий случайного процесса $X(t)$ на границе множества Ω (если множество Ω не совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$) сформировать соответствующую начально-краевую задачу:

а) если $\Omega = \mathbb{R}^n$, то

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t,x),$$
$$\varphi(t,x)\big|_{t=t_0} = \varphi_0(x), \qquad \text{(I)}$$
$$\varphi(t,x)\big|_{x=\pm\infty} = 0,$$

где

$$\mathcal{A}\varphi(t,x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big[f_i(t,x)\,\varphi(t,x)\big] + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\big[g_{ij}(t,x)\,\varphi(t,x)\big],$$

$$g_{ij}(t,x) = \sum_{r=1}^{s} \sigma_{ir}(t,x)\sigma_{jr}(t,x);$$

б) если множество Ω не совпадает с $\mathbb{R}^n$ и выполняется условие поглощения (см. разд. 2.1.2), то

$$\varphi(t,x) = \frac{\hat{\varphi}(t,x)}{\int\limits_{\Omega} \hat{\varphi}(t,x)\,dx},$$

где функция $\hat{\varphi}(t,x)$ определяется как решение задачи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\hat{\varphi}(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\hat{\varphi}(t,x), \\ &\hat{\varphi}(t,x)\big|_{t=t_0} = \varphi_0(x), \\ &\hat{\varphi}(t,x)\big|_{x\in\partial\Omega} = 0; \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

в) если множество Ω не совпадает с $\mathbb{R}^n$ и выполняется условие отражения (см. разд. 2.1.2), то

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t,x), \\ &\varphi(t,x)\big|_{t=t_0} = \varphi_0(x), \\ &\pi(t,x)\big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

где $\pi(t,x)$ – вектор-функция размера $n\times 1$, координаты которой определяются выражением

$$\pi_i(t,x) = f_i(t,x)\varphi(t,x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\big[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x)\big], \\ i = 1,2,\ldots,n.$$

2. Выбрать базисную систему

$$\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x) = q(i_0, t) \cdot p_1(i_1, x_1) \cdots p_n(i_n, x_n)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$$

пространства $L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$ для представления плотности вероятности $\varphi(t, x)$ (см. разд. 1.1.3), а также оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент, операторов дифференцирования первого и второго порядков по координатам вектора состояния (см. разд. 1.4.3), операторов умножения на коэффициенты сноса $f_i(t, x)$ и диффузии $g_{ij}(t, x)$ (см. разд. 1.4.2).

При этом базисная система $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$ должна выбираться таким образом, чтобы система функций $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ являлась базисом пространства $L_2(T; \nu(t))$ (см. разд. 1.1.1), а системы функций $\{p_1(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}, \ldots, \{p_n(i_n, x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$ представляли собой базисные системы пространств $L_2(\Omega_1; \rho_1(x_1)), \ldots, L_2(\Omega_n; \rho_n(x_n))$ соответственно и $\rho(x) = \rho_1(x_1) \ldots \rho_n(x_n)$ (см. разд. 1.1.2).

Например, в качестве системы функций $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ можно использовать:

а) нестационарные полиномы Лежандра (1.4), нестационарные косинусоиды (1.5), нестационарные экспоненциальные функции (1.6) или нестационарные функции Уолша (1.7) с весовой функцией $\nu(t) \equiv 1$, если $T = [0, t_1]$, т.е. $t_0 = 0$, t_1 – заданный момент времени окончания процесса;

б) полиномы Лагерра (1.10) с весовой функцией $\nu(t) = \mathrm{e}^{-t}$, если $T = [0, +\infty)$, т.е. $t_0 = 0$;

в) функции Лагерра (1.11) с весовой функцией $\nu(t) \equiv 1$, если $T = [0, +\infty)$, т.е. $t_0 = 0$;

г) другие базисные системы пространства $L_2(T; \nu(t))$ (см. [7, 57, 78]), если T – произвольный конечный отрезок $[t_0, t_1]$ или полубесконечный промежуток $[t_0, +\infty)$.

В качестве системы функций $\{p_l(i_l, x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$, $l = 1, 2, \ldots, n$, могут быть выбраны:

а) полиномы Лежандра (1.17) с весовой функцией $\rho_l(x_l) \equiv 1$, если $\Omega_l = [a_l, b_l]$;

б) тригонометрические функции (1.18) с весовой функцией $\rho_l(x_l) \equiv 1$, если $\Omega_l = [-b_l, b_l]$, т.е. $a_l = -b_l$;

в) функции Уолша (1.19) с весовой функцией $\rho_l(x_l) \equiv 1$, если $\Omega_l = [0, 1]$, т.е. $a_l = 0$, $b_l = 1$;

г) полиномы Эрмита (1.20) с весовой функцией $\rho_l(x_l) = \mathrm{e}^{-x_l^2}$, если $\Omega_l = (-\infty, \infty)$;

д) функции Эрмита (1.21) с весовой функцией $\rho_l(x_l) \equiv 1$, если $\Omega_l = (-\infty, \infty)$;

е) другие базисные системы пространства $L_2(\Omega_l; \rho_l(x_l))$ (см. [7, 57, 78]).

Сформировать базисную систему

$$\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x) = p_1(i_1, x_1) \cdot p_2(i_2, x_2) \cdots p_n(i_n, x_n)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$$

пространства $L_2(\Omega; \rho(x))$ для представления плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0 (см. разд. 1.1.2).

Следует подчеркнуть, что в общем случае различным l соответствуют различные базисные системы $\{p_l(i_l, x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$.

3. Вычислить:

а) нестационарные спектральные характеристики операторов:

1) $P(n+1, n+1)$ – нестационарную спектральную характеристику оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент (см. разд. 1.4.3);

2) $\mathcal{P}_i(n+1, n+1)$ – нестационарную спектральную характеристику оператора дифференцирования первого порядка по координате x_i вектора состояния (см. разд. 1.4.3), если решается задача (I); иначе вычислить многомерную матрицу $\mathcal{P}_i^{\text{п}}(n+1, n+1)$ при решении задачи (II) (см. (2.33)) или $\mathcal{P}_i^{\text{о}}(n+1, n+1)$ при решении задачи (III) (см. (2.47)), $i = 1, 2, \ldots, n$;

3) $\mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1)$ – нестационарную спектральную характеристику оператора дифференцирования второго порядка по координатам x_i и x_j вектора состояния (см. разд. 1.4.3), если решается задача (I); иначе вычислить многомерную матрицу $\mathcal{P}_{ij}^{\text{п}}(n+1, n+1)$ при решении задачи (II) (см. (2.35)) или $\mathcal{P}_{ij}^{\text{о}}(n+1, n+1)$ при решении задачи (III) (см. (2.48)), $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

4) $F_i(n+1, n+1)$ – нестационарную спектральную характеристику оператора умножения на коэффициент сноса $f_i(t, x)$ (см. разд. 1.4.2), $i = 1, 2, \ldots, n$;

5) $G_{ij}(n+1, n+1)$ – нестационарную спектральную характеристику оператора умножения на коэффициент диффузии $g_{ij}(t, x)$ (см. разд. 1.4.2), $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

б) спектральную характеристику $\Phi_0(n, 0)$ плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0 (см. разд. 1.3.2);

в) $\nu(t_0)$ – значение весовой функции $\nu(t)$ в точке t_0;

г) $q(1, 0; t_0)$ – матрицу-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке t_0 (см. (2.21)).

4. Составить уравнение обобщенной характеристической функции в соответствии с постановкой задачи (I), (II) или (III).

Если рассматривается задача (I), то уравнение обобщенной характеристической функции имеет вид (2.24):

$$Z(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)=B(n+1,0), \qquad \text{(IV)}$$

где

$$\begin{aligned}
&Z(n+1,n+1)=P(n+1,n+1)-A(n+1,n+1),\\
&A(n+1,n+1)=-\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i(n+1,n+1)\cdot F_i(n+1,n+1)+\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}(n+1,n+1),\\
&B(n+1,0)=\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0).
\end{aligned}$$

Уравнение ненормированной обобщенной характеристической функции при решении задачи (II) записывается в форме

$$Z^{\text{п}}(n+1,n+1)\cdot\hat{\Phi}(n+1,0)=B(n+1,0), \qquad \text{(V)}$$

где

$$\begin{aligned}
&Z^{\text{п}}(n+1,n+1)=P(n+1,n+1)-A^{\text{п}}(n+1,n+1),\\
&A^{\text{п}}(n+1,n+1)=-\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i^{\text{п}}(n+1,n+1)\cdot F_i(n+1,n+1)+\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}^{\text{п}}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}(n+1,n+1),\\
&B(n+1,0)=\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0).
\end{aligned}$$

Для задачи (III) уравнение обобщенной характеристической функции записывается следующим образом:

$$Z^{\text{o}}(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)=B(n+1,0), \qquad \text{(VI)}$$

где

$$\begin{aligned}
&Z^{\text{o}}(n+1,n+1)=P(n+1,n+1)-A^{\text{o}}(n+1,n+1),\\
&A^{\text{o}}(n+1,n+1)=-\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i^{\text{o}}(n+1,n+1)\cdot F_i(n+1,n+1)+
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}^{\text{о}}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}(n+1,n+1),$$

$$B(n+1,0)=\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0).$$

5. Найти решение уравнения обобщенной характеристической функции.

Если рассматривается задача (I), выразить обобщенную характеристическую функцию $\Phi(n+1,0)$ из уравнения (IV):

$$\Phi(n+1,0)=Z^{-1}(n+1,n+1)\cdot B(n+1,0).$$

Если рассматривается задача (II), выразить нестационарную спектральную характеристику $\hat{\Phi}(n+1,0)$ из уравнения (V):

$$\hat{\Phi}(n+1,0)=\left[Z^{\text{п}}(n+1,n+1)\right]^{-1}\cdot B(n+1,0).$$

Если рассматривается задача (III), выразить обобщенную характеристическую функцию $\Phi(n+1,0)$ из уравнения (VI):

$$\Phi(n+1,0)=\left[Z^{\text{о}}(n+1,n+1)\right]^{-1}\cdot B(n+1,0).$$

6. Найти плотность вероятности $\varphi(t,x)$ по решению уравнения обобщенной характеристической функции.

Если рассматривается задача (I) или (III), то плотность вероятности $\varphi(t,x)$ определяется выражением

$$\varphi(t,x)=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}\varphi_{i_0i_1\ldots i_n}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x), \tag{VII}$$

где $\varphi_{i_0i_1\ldots i_n}$ – координаты обобщенной характеристической функции $\Phi(n+1,0)$, $t\in T$, $x\in\Omega$.

В случае решения задачи (II) плотность вероятности $\varphi(t,x)$ удовлетворяет соотношению

$$\varphi(t,x)=\frac{\hat{\varphi}(t,x)}{\int\limits_{\Omega}\hat{\varphi}(t,x)\,dx},$$

в котором

$$\hat{\varphi}(t,x)=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}\hat{\varphi}_{i_0i_1\ldots i_n}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x), \tag{VIII}$$

где $\hat{\varphi}_{i_0i_1\ldots i_n}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $\hat{\Phi}(n+1,0)$, $t\in T$, $x\in\Omega$.

Замечание 2.7.

1. При практических расчетах на ЭВМ используются базисные системы с конечным числом функций, т.е. индексы i_0, i_1, ..., i_n принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} &i_0 = 0, 1, \ldots, L_0 - 1, \\ &i_1 = 0, 1, \ldots, L_1 - 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &i_n = 0, 1, \ldots, L_n - 1, \end{aligned}$$

где натуральные числа L_0, L_1, ..., L_n называются **порядками усечения спектральных характеристик**.

В этом случае бесконечные многомерные матрицы заменяются конечными многомерными матрицами соответствующих размеров [69]. Тем не менее, все определения, свойства, правила представления и операции для конечных многомерных матриц такие же, как и для бесконечных матриц (см. разд. 1.2.1–1.2.3).

С учетом усечения спектральных характеристик формула обращения (VII) примет вид

$$\varphi(t,x) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \ldots \sum_{i_n=0}^{L_n-1} \varphi_{i_0 i_1 \ldots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x),$$

где $\varphi_{i_0 i_1 \ldots i_n}$ – элементы конечной гиперстолбцовой матрицы $\Phi(n+1, 0)$, $t \in T$, $x \in \Omega$.

Аналогичным образом записывается соотношение (VIII):

$$\hat{\varphi}(t,x) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \ldots \sum_{i_n=0}^{L_n-1} \hat{\varphi}_{i_0 i_1 \ldots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x),$$

где $\hat{\varphi}_{i_0 i_1 \ldots i_n}$ – элементы конечной гиперстолбцовой матрицы $\hat{\Phi}(n+1, 0)$, $t \in T$, $x \in \Omega$.

Методика вычисления погрешности расчета, обусловленной усечением спектральных характеристик, приведена в [73, 94].

2. В случае, если множество T представляет собой полубесконечный промежуток $[t_0, +\infty)$, в качестве базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ можно использовать системы функций, ортонормированные на нестационарных отрезках времени, например, на отрезке с подвижным правым концом (см. разд. 1.1.1). Тогда решение уравнения обобщенной характеристической функции будет зависеть от параметра τ (см. замечание 1.2), изменяя который можно получать плотность вероятности вектора состояния для любого конечного момента времени $t \in T$.

Пример 2.5. Решить задачу анализа одномерной стохастической следящей системы управления, заданной уравнением Ито

$$dX(t) = -\frac{3}{2}\sin X(t)\,dt + dW(t),$$

где $t \in T = [0,1]$, $X \in \Omega = \mathbb{R}$, $X(0) = X_0$ – случайная величина, имеющая гауссовское распределение с параметрами $m_0 = 1$ и $D_0 = 1$, $W(t)$ – одномерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от X_0.

☐ 1. Сравнивая с постановкой задачи анализа (см. разд. 2.1.1), можно сделать вывод о том, что $n = s = 1$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $f(t,x) = -\frac{3}{2}\sin x$, $\sigma(t,x) = 1$ и, следовательно, $g(t,x) = 1$.

По условию начальное состояние X_0 имеет гауссовское распределение с заданными параметрами m_0 и D_0, т.е. плотность вероятности $\varphi_0(x)$ определяется соотношением

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2}}.$$

Таким образом, с учетом того, что случайный процесс $X(t)$ может принимать любые значения из пространства $\mathbb{R}$, т.е. $\Omega = \mathbb{R}$, соответствующая начально-краевая задача записывается в виде (I):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{3}{2}\sin x\,\varphi(t,x)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2},\\
&\varphi(t,x)|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2}},\\
&\varphi(t,x)|_{x=\pm\infty} = 0,
\end{aligned}$$

где $(t,x) \in Q_T = [0,1] \times \mathbb{R}$.

2. Выберем в качестве базисной системы $\{e(i_0,i_1,t,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$ систему функций $\{\hat{C}(i_0,t)\hat{\Phi}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$, где $\{\hat{C}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ – система нестационарных косинусоид (1.5), определенная на стационарном отрезке $T = [0,1]$ и представляющая собой базис пространства $L_2(T;\nu(t))$ при $\nu(t) \equiv 1$, т.е. система функций $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$; $\{\hat{\Phi}(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ – система функций Эрмита (1.21), образующая базис пространства $L_2(\Omega;\rho(x))$ при $\rho(x) \equiv 1$, т.е. система функций $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$.

3. Вычислим нестационарные спектральные характеристики операторов дифференцирования по времени и координате x, а также операторов умножения на коэффициенты сноса и диффузии относительно базисной системы $\{\hat{C}(i_0,t)\hat{\Phi}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$.

Нестационарная спектральная характеристика $P(2,2)$ оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент, согласно (1.70), представляется в виде тензорного произведения нестационарной спектральной характеристики $P(1,1)$ оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенной относительно системы косинусоид (см. примеры нестационарных спектральных характеристик операторов дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени в разд. 1.4.3), и двумерной единичной матрицы $E(1,1)$:

$$P(2,2) = P(1,1) \otimes E(1,1).$$

Для нестационарных спектральных характеристик $\mathcal{P}_1(2,2)$ и $\mathcal{P}_{11}(2,2)$ операторов дифференцирования по координате x первого и второго порядков соответственно справедливы выражения (см. (1.70))

$$\mathcal{P}_1(2,2) = E(1,1) \otimes \mathcal{P}(1,1),$$

$$\mathcal{P}_{11}(2,2) = E(1,1) \otimes \mathcal{P}^2(1,1),$$

где $\mathcal{P}(1,1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно системы функций Эрмита (см. примеры спектральных характеристик операторов дифференцирования в разд. 1.4.3).

Согласно утверждению 1.15 и свойству спектрального преобразования операторов умножения, заданных на пространстве функций времени (см. разд. 1.4.2), нестационарная спектральная характеристика $F(2,2)$ оператора умножения на функцию $f(t,x) = -\frac{3}{2}\sin x$ представляется соотношением

$$F(2,2) = E(1,1) \otimes \tilde{A}(1,1),$$

в котором $\tilde{A}(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\tilde{a}(x) = -\frac{3}{2}\sin x$, вычисленная относительно системы функций Эрмита по определению (1.54):

$$\tilde{A}(1,1) = (\tilde{a}_{i_1 j_1}),$$

где

$$\tilde{a}_{i_1 j_1} = \big(p(i_1,x), \tilde{a}(x)\cdot p(j_1,x)\big)_{L_2(\Omega)} = -\frac{3}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,\hat{\Phi}(i_1,x)\,\hat{\Phi}(j_1,x)\,dx,$$

$$i_1, j_1 = 0,1,2,\ldots\ .$$

Нестационарная спектральная характеристика $G(2,2)$ оператора умножения на функцию $g(t,x) = 1$ представляет собой четырехмерную единичную матрицу $E(2,2)$, согласно свойству спектрального преобразования операторов умножения, заданных на пространстве функций времени и вектора состояния (см. разд. 1.4.2), т.е. $G(2,2) = E(2,2)$.

Вычислим спектральную характеристику $\Phi_0(1,0)$ плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0 относительно системы функций Эрмита по определению (1.40):

$$\Phi_0(1,0) = (\varphi_{0i_1}),$$

где

$$\varphi_{0i_1} = \big(p(i_1,x), \varphi_0(x)\big)_{L_2(\Omega)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2}} \hat{\Phi}(i_1,x)\,dx,$$

$$i_1 = 0,1,2,\ldots,$$

и матрицу-столбец $q(1,0;0)$ значений функций $\hat{C}(i_0,t)$ в точке $t=0$, используя соотношение (2.21) с учетом того, что функции базисной системы $\{\hat{C}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ вещественнозначные:

$$q(1,0;0) = \Big[\hat{C}(0,0) \;\; \hat{C}(1,0) \;\; \hat{C}(2,0) \;\; \ldots\Big]^{\mathrm{T}}.$$

Значение весовой функции $\nu(t)$ в точке $t=0$ равно единице.

4. Составим уравнение обобщенной характеристической функции. Используя (IV) и учитывая результат, полученный в ходе решения примера 2.1 для одномерной стохастической системы управления, получаем

$$P(2,2)\cdot\Phi(2,0) - \nu(0)\cdot q(1,0;0)\otimes\Phi_0(1,0) =$$
$$= -\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F(2,2)\cdot\Phi(2,0) + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G(2,2)\cdot\Phi(2,0),$$

где $\Phi(2,0)$ – обобщенная характеристическая функция, т.е. нестационарная спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi(t,x)$, определенная относительно базисной системы $\{\hat{C}(i_0,t)\hat{\Phi}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.3):

$$\Phi(2,0) = (\varphi_{i_0i_1}),$$

где

$$\varphi_{i_0i_1} = \big(e(i_0,i_1,t,x), \varphi(t,x)\big)_{L_2(Q_T)} = \int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t,x)\hat{C}(i_0,t)\hat{\Phi}(i_1,x)\,dt\,dx,$$

$$i_0, i_1 = 0,1,2,\ldots\,.$$

Принимая во внимание, что $\nu(0) = 1$ и $G(2,2) = E(2,2)$, перепишем уравнение обобщенной характеристической функции следующим образом:

$$P(2,2)\cdot\Phi(2,0) - q(1,0;0)\otimes\Phi_0(1,0) =$$
$$= -\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F(2,2)\cdot\Phi(2,0) + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot\Phi(2,0),$$

или кратко

$$Z(2,2)\cdot\Phi(2,0) = B(2,0),$$

где

$$Z(2,2) = P(2,2) - A(2,2), \quad A(2,2) = -\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F(2,2) + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2),$$

$$B(2,0) = q(1,0;0)\otimes\Phi_0(1,0).$$

5. Найдем решение уравнения обобщенной характеристической функции, выражая нестационарную спектральную характеристику $\Phi(2,0)$:

$$\Phi(2,0) = Z^{-1}(2,2)\cdot B(2,0),$$

где $Z^{-1}(2,2)$ – обратная матрица по отношению к матрице $Z(2,2)$ (см. разд. 1.2.3). Следовательно,

$$\Phi(2,0) = \left[P(2,2) + \mathcal{P}_1(2,2)\cdot F(2,2) - \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\right]^{-1}\cdot\left[q(1,0;0)\otimes\Phi_0(1,0)\right].$$

6. Плотность вероятности $\varphi(t,x)$ определяется по формуле обращения:

$$\varphi(t,x) = \mathbb{S}^{-1}\left[\Phi(2,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\varphi_{i_0 i_1}\cdot\hat{C}(i_0,t)\cdot\hat{\Phi}(i_1,x),$$

где $\varphi_{i_0 i_1}$ – координаты обобщенной характеристической функции $\Phi(2,0)$, $t\in[0,1]$, $x\in\mathbb{R}$.

При численном расчете зададим порядки усечения спектральных характеристик L_0 и L_1 (см. замечание 2.7). Тогда все спектральные характеристики, входящие в уравнение обобщенной характеристической функции, представляют собой многомерные матрицы с конечным числом элементов, а решение задачи анализа приближенно определяется выражением

$$\varphi(t,x) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\varphi_{i_0 i_1}\cdot\hat{C}(i_0,t)\cdot\hat{\Phi}(i_1,x),$$

где $\varphi_{i_0 i_1}$ – элементы конечной гиперстолбцовой матрицы $\Phi(2,0)$, $t\in[0,1]$, $x\in\mathbb{R}$. Положим $L_0 = 8$, $L_1 = 16$.

На рис. 2.4 и 2.5 изображены график функции $\varphi(t,x)$ и графики ее сечений в различные моменты времени t. ■

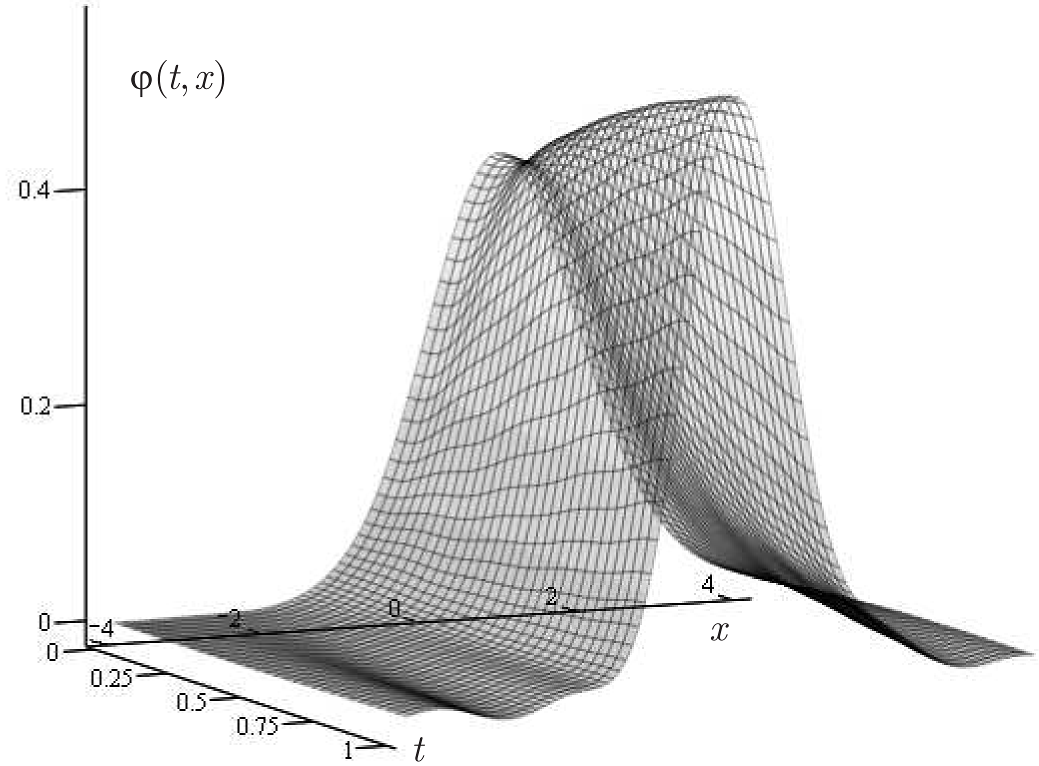

Рис. 2.4. Плотность вероятности состояния системы

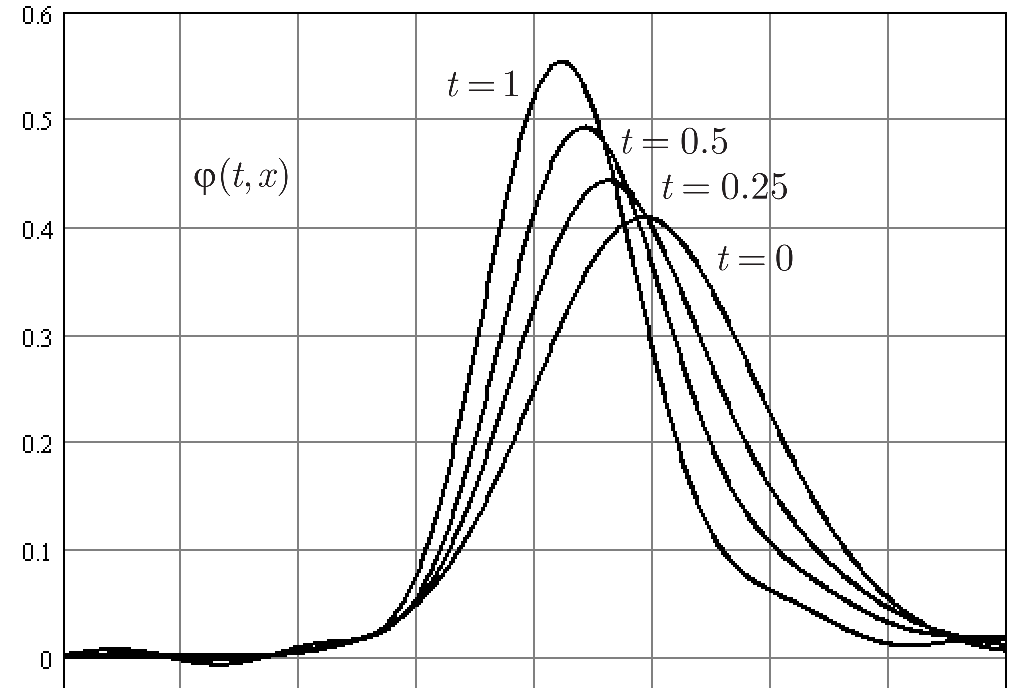

Рис. 2.5. Сечения плотности вероятности состояния системы в различные моменты времени

Пример 2.6. Решить задачу анализа одномерной стохастической системы управления, заданной уравнением Ито

$$dX(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t} X^2(t)}{3} dt + dW(t),$$

где $t \in T = [0,2]$, $X \in \Omega = [0,4]$, $X(0) = X_0$, $W(t)$ – одномерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от X_0, при условии поглощения траекторий случайного процесса $X(t)$ на границе множества Ω. Распределение начального состояния X_0 является усеченным гауссовским [46] с математическим ожиданием $m_0 = 2$ и дисперсией $D_0 = 1$.

☐ 1. Из постановки задачи анализа (см. разд. 2.1.1) следует, что $n = s = 1$, $t_0 = 0$, $t_1 = 2$, $f(t,x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}x^2$, $\sigma(t,x) = 1$, $g(t,x) = 1$.

Запишем формулу для плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0. Плотность вероятности гауссовской случайной величины с заданными параметрами m_0 и D_0 задается выражением

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-2)^2}{2}},$$

поэтому

$$\varphi_0(x) = \frac{\varphi_N(x)\mathbb{I}_\Omega(x)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_N(x)\mathbb{I}_\Omega(x)\,dx},$$

где $\mathbb{I}_\Omega(x)$ – индикатор множества Ω, т.е.

$$\mathbb{I}_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Таким образом, функция $\varphi_0(x)$ задается соотношением

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_N(x)}{\int\limits_0^4 \varphi_N(x)\,dx}, & x \in [0,4], \\ 0, & x \notin [0,4] \end{cases}$$

и определяет начальное условие для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, общий вид которого был приведен в примере 2.3.

Следовательно, соответствующая начально-краевая задача записывается в виде (II):

$$\frac{\partial\hat{\varphi}(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mathrm{e}^{-t}x^2}{3}\hat{\varphi}(t,x)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\hat{\varphi}(t,x)}{\partial x^2},$$

$$\hat{\varphi}(t,x)|_{t=0} = \varphi_0(x),$$

$$\hat{\varphi}(t,x)|_{x=0} = \hat{\varphi}(t,x)|_{x=4} = 0,$$

где $(t,x) \in Q_T = [0,2] \times [0,4]$.

2. Выберем в качестве базисной системы $\{e(i_0,i_1,t,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$ систему функций $\{\hat{P}(i_0,t)\hat{P}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$, где $\{\hat{P}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ – система нестационарных полиномов Лежандра (1.4), определенная на стационарном отрезке $T=[0,2]$ и представляющая собой базис пространства $L_2(T;\nu(t))$ при $\nu(t)\equiv 1$, т.е. система функций $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$; $\{\hat{P}(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ – система полиномов Лежандра (1.17), являющаяся базисом пространства $L_2(\Omega;\rho(x))$ при $\rho(x)\equiv 1$, т.е. система функций $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$.

3. Вычислим нестационарные спектральные характеристики оператора дифференцирования по времени и операторов умножения на коэффициенты сноса и диффузии относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0,t)\hat{P}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$, а также матрицы $\mathcal{P}_1^{\text{п}}(2,2)$ и $\mathcal{P}_{11}^{\text{п}}(2,2)$.

Нестационарная спектральная характеристика $P(2,2)$ оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент, согласно (1.70), представляется в виде тензорного произведения нестационарной спектральной характеристики $P(1,1)$ оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенной относительно системы полиномов Лежандра $\{\hat{P}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ (см. примеры нестационарных спектральных характеристик операторов дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени в разд. 1.4.3), и двумерной единичной матрицы $E(1,1)$:

$$P(2,2) = P(1,1) \otimes E(1,1).$$

Четырехмерные гиперквадратные матрицы $\mathcal{P}_1^{\text{п}}(2,2)$ и $\mathcal{P}_{11}^{\text{п}}(2,2)$ определяются соотношениями (2.33) и (2.35) соответственно, которые для рассматриваемой задачи с учетом того, что функции выбранной базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ являются вещественнозначными и $\rho(x)\equiv 1$, примут вид (см. пример 2.3)

$$\mathcal{P}_1^{\text{п}}(2,2) = E(1,1) \otimes \big(-\mathcal{P}^{\mathrm{T}}(1,1)\big),$$

$$\mathcal{P}_{11}^{\text{п}}(2,2) = E(1,1) \otimes \big(-\mathcal{P}(1,1)\cdot\mathcal{P}^{\mathrm{T}}(1,1)\big),$$

где $\mathcal{P}(1,1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно системы полиномов Лежандра $\{\hat{P}(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ (см. примеры спектральных характеристик операторов дифференцирования в разд. 1.4.3).

Из утверждения 1.15 следует, что нестационарная спектральная характеристика $F(2,2)$ оператора умножения на функцию $f(t,x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}x^2$ определяется соотношением

$$F(2,2) = A_0(1,1) \otimes \tilde{A}(1,1),$$

в котором $A_0(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_0(t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}$, вычисленная относительно системы полиномов Лежандра $\{\hat{P}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ по определению (1.52):

$$A_0(1,1) = \left(a_{0\,i_0 j_0}\right),$$

где

$$a_{0\,i_0 j_0} = \big(q(i_0,t), a_0(t)\cdot q(j_0,t)\big)_{L_2(T)} = \frac{1}{3}\int\limits_0^2 \mathrm{e}^{-t}\,\hat{P}(i_0,t)\,\hat{P}(j_0,t)\,dt,$$

$$i_0, j_0 = 0,1,2,\ldots,$$

а $\tilde{A}(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\tilde{a}(x) = x^2$, вычисленная относительно системы полиномов Лежандра $\{\hat{P}(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ по определению (1.54):

$$\tilde{A}(1,1) = (\tilde{a}_{i_1 j_1}),$$

где

$$\tilde{a}_{i_1 j_1} = \big(p(i_1,x), \tilde{a}(x)\cdot p(j_1,x)\big)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_0^4 x^2\,\hat{P}(i_1,x)\,\hat{P}(j_1,x)\,dx,$$

$$i_1, j_1 = 0,1,2,\ldots\ .$$

Заметим, что как и в примере 2.5, нестационарная спектральная характеристика $G(2,2)$ оператора умножения на функцию $g(t,x) = 1$ представляет собой четырехмерную единичную матрицу $E(2,2)$, согласно свойству спектрального преобразования операторов умножения, заданных на пространстве функций времени и вектора состояния (см. разд. 1.4.2), т.е.

$$G(2,2) = E(2,2).$$

Спектральная характеристика $\Phi_0(1,0)$ плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0, определенная относительно системы полиномов Лежандра $\{\hat{P}(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$, вычисляется следующим образом (см. разд. 1.3.2):

$$\Phi_0(1,0) = (\varphi_{0i_1}),$$

где

$$\varphi_{0i_1} = \big(p(i_1,x), \varphi_0(x)\big)_{L_2(\Omega)} = \frac{1}{\int\limits_0^4 \varphi_N(x)\,dx} \int\limits_0^4 \varphi_N(x)\,\hat{P}(i_1,x)\,dx,$$

$$i_1 = 0,1,2,\ldots\ .$$

Матрица-столбец $q(1,0;0)$ значений функций $\hat{P}(i_0,t)$ в точке $t=0$ с учетом того, что функции базисной системы $\{\hat{P}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ вещественнозначные, представляется в виде (см. (2.21))

$$q(1,0;0) = \Big[\hat{P}(0,0) \ \ \hat{P}(1,0) \ \ \hat{P}(2,0) \ \ \ldots\Big]^{\mathrm{T}}.$$

Значение весовой функции $\nu(t)$ в точке $t=0$ равно единице.

4. Составим уравнение ненормированной обобщенной характеристической функции. Используя (V) и результат примера 2.3 для одномерной стохастической системы управления, получаем

$$P(2,2)\cdot\hat{\Phi}(2,0) - \nu(0)\cdot q(1,0;0)\otimes\Phi_0(1,0) =$$
$$= -\mathcal{P}_1^{\text{п}}(2,2)\cdot F(2,2)\cdot\hat{\Phi}(2,0) + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}^{\text{п}}(2,2)\cdot G(2,2)\cdot\hat{\Phi}(2,0),$$

где $\hat{\Phi}(2,0)$ – нестационарная спектральная характеристика функции $\hat{\varphi}(t,x)$, определенная относительно базиса $\{\hat{P}(i_0,t)\,\hat{P}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.3):

$$\hat{\Phi}(2,0) = \big(\hat{\varphi}_{i_0i_1}\big),$$

где

$$\hat{\varphi}_{i_0i_1} = \big(e(i_0,i_1,t,x), \hat{\varphi}(t,x)\big)_{L_2(Q_T)} = \int\limits_0^2\int\limits_0^4 \hat{\varphi}(t,x)\,\hat{P}(i_0,t)\,\hat{P}(i_1,x)\,dt\,dx,$$

$$i_0, i_1 = 0,1,2,\ldots\ .$$

Учитывая, что $\nu(0)=1$ и $G(2,2)=E(2,2)$, уравнение ненормированной обобщенной характеристической функции можно записать в виде

$$P(2,2)\cdot\hat{\Phi}(2,0)-q(1,0;0)\otimes\Phi_0(1,0)=$$
$$=-\mathcal{P}_1^{\text{п}}(2,2)\cdot F(2,2)\cdot\hat{\Phi}(2,0)+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}^{\text{п}}(2,2)\cdot\hat{\Phi}(2,0),$$

или кратко

$$Z^{\text{п}}(2,2)\cdot\hat{\Phi}(2,0)=B(2,0),$$

где

$$Z^{\text{п}}(2,2)=P(2,2)-A^{\text{п}}(2,2),$$
$$A^{\text{п}}(2,2)=-\mathcal{P}_1^{\text{п}}(2,2)\cdot F(2,2)+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}^{\text{п}}(2,2),$$
$$B(2,0)=q(1,0;0)\otimes\Phi_0(1,0).$$

5. Решение уравнения ненормированной обобщенной характеристической функции определяется соотношением

$$\hat{\Phi}(2,0)=[Z^{\text{п}}(2,2)]^{-1}\cdot B(2,0),$$

в котором $[Z^{\text{п}}(2,2)]^{-1}$ – обратная матрица по отношению к матрице $Z^{\text{п}}(2,2)$ (см. разд. 1.2.3), т.е.

$$\hat{\Phi}(2,0)=$$
$$=\left[P(2,2)+\mathcal{P}_1^{\text{п}}(2,2)\cdot F(2,2)-\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}^{\text{п}}(2,2)\right]^{-1}\cdot\left[q(1,0;0)\otimes\Phi_0(1,0)\right].$$

6. Для перехода от нестационарной спектральной характеристики $\hat{\Phi}(2,0)$ к функции $\hat{\varphi}(t,x)$ воспользуемся формулой обращения (VIII):

$$\hat{\varphi}(t,x)=\mathbb{S}^{-1}\left[\hat{\Phi}(2,0)\right]=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\hat{\varphi}_{i_0i_1}\cdot\hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{P}(i_1,x),$$

где $\hat{\varphi}_{i_0i_1}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $\hat{\Phi}(2,0)$, $t\in[0,2]$, $x\in[0,4]$.

Для приближенного решения задачи анализа зададим порядки усечения спектральных характеристик L_0 и L_1 (см. замечание 2.7). Тогда

$$\hat{\varphi}(t,x)\approx\sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\hat{\varphi}_{i_0i_1}\cdot\hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{P}(i_1,x),$$

где $\hat{\varphi}_{i_0 i_1}$ – элементы конечной гиперстолбцовой матрицы $\hat{\Phi}(2,0)$, $t \in [0,2]$, $x \in [0,4]$. Положим $L_0 = L_1 = 16$.

На рис. 2.6 и 2.7 изображены график функции $\hat{\varphi}(t,x)$ и графики ее сечений в различные моменты времени t.

Перейдем к определению плотности вероятности $\varphi(t,x)$. Обозначим через $\mathbb{P}(t)$ интеграл от функции $\hat{\varphi}(t,x)$ по множеству Ω в момент времени $t \in T$:

$$\mathbb{P}(t) = \int\limits_{\Omega} \hat{\varphi}(t,x)\,dx.$$

На рис. 2.8 видно, что функция $\mathbb{P}(t)$ с течением времени монотонно убывает, т.е. решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова не нормировано к единице (см. разд. 2.1.2), поэтому плотность вероятности $\varphi(t,x)$ определяется соотношением (2.9):

$$\varphi(t,x) = \frac{\hat{\varphi}(t,x)}{\int\limits_{\Omega} \hat{\varphi}(t,x)\,dx}.$$

График плотности вероятности $\varphi(t,x)$ и графики ее сечений в различные моменты времени t изображены на рис. 2.9 и 2.10 (см. с. 228). ■

Пример 2.7. Решить задачу анализа одномерной стохастической системы управления, заданной уравнением Ито

$$dX(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t} X^2(t)}{3}\,dt + dW(t),$$

где $t \in T = [0,2]$, $X \in \Omega = [0,4]$, $X(0) = X_0$, $W(t)$ – одномерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от X_0, при условии отражения траекторий случайного процесса $X(t)$ на границе множества Ω. Распределение начального состояния X_0 является усеченным гауссовским [46] с математическим ожиданием $m_0 = 2$ и дисперсией $D_0 = 1$.

□ 1. Заметим, что рассматривается стохастическая система управления, описываемая таким же уравнением, что и в примере 2.6, но с условием отражения траекторий случайного процесса $X(t)$ на границе множества Ω, поэтому сразу можно записать, что

$$n = s = 1,$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 2,$$

$$f(t,x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t} x^2, \quad \sigma(t,x) = 1, \quad g(t,x) = 1.$$

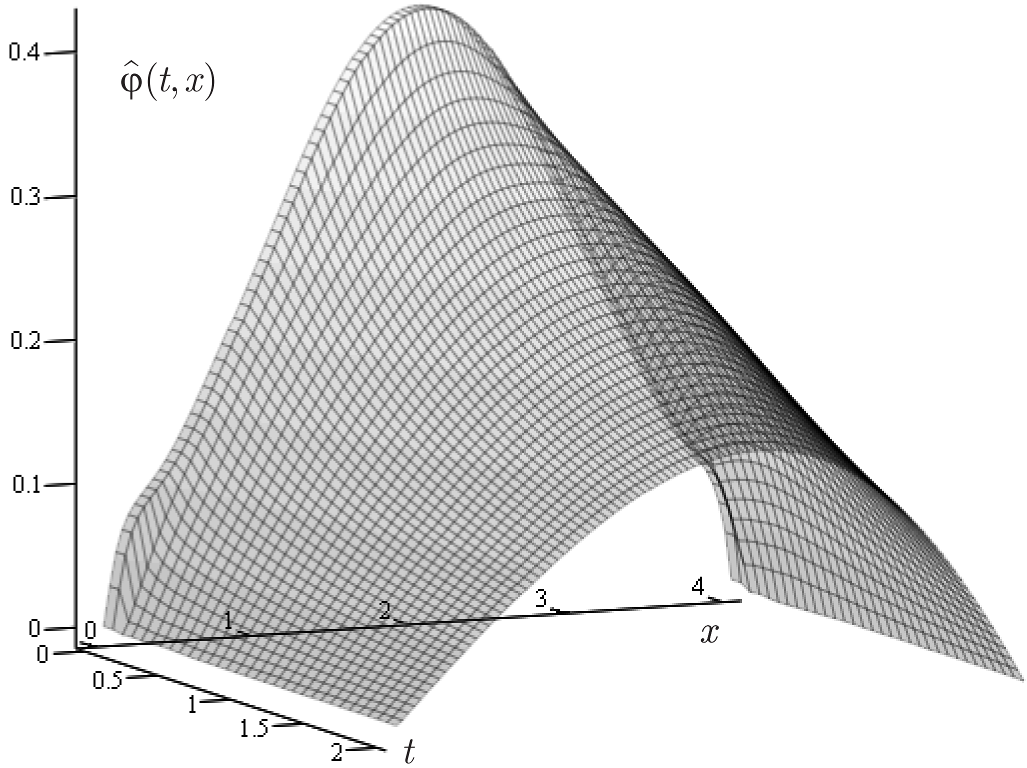

Рис. 2.6. Ненормированная плотность вероятности состояния системы

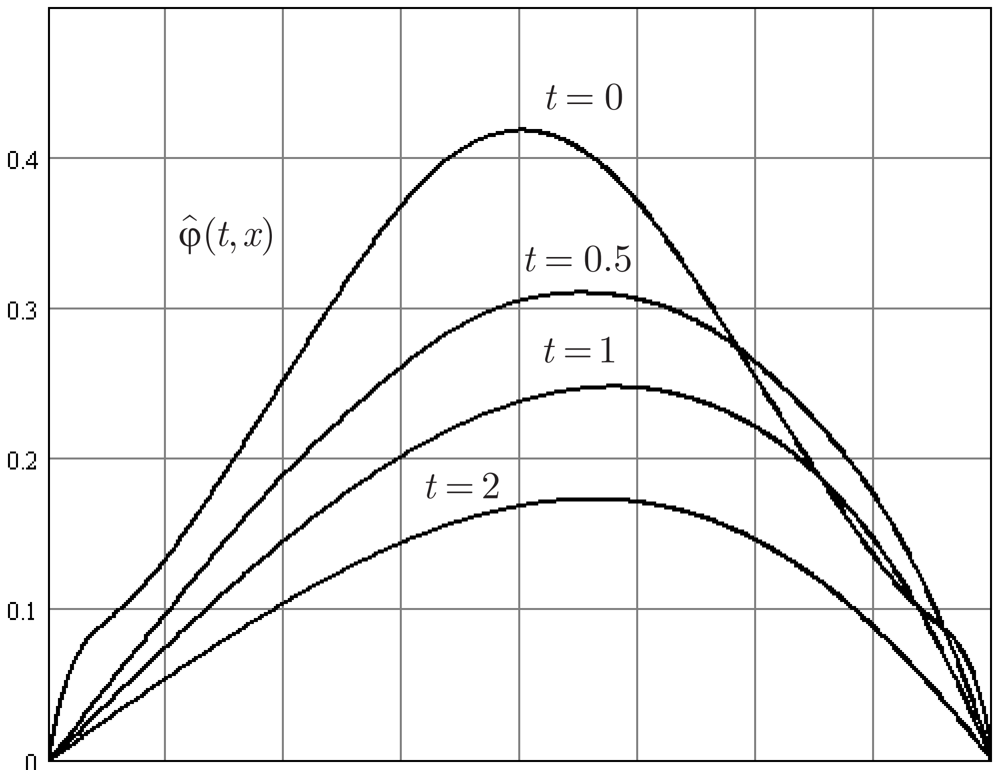

Рис. 2.7. Сечения ненормированной плотности вероятности состояния системы в различные моменты времени

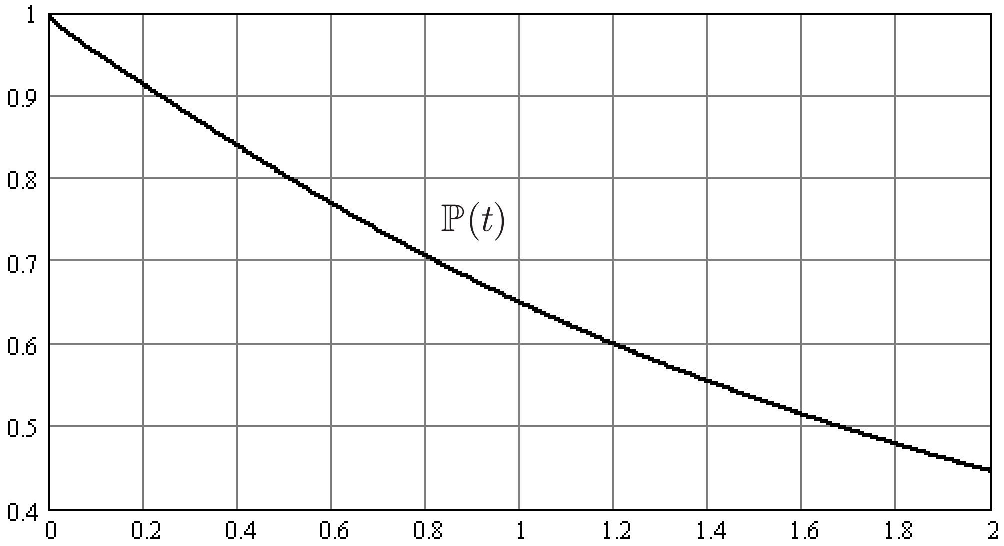

Рис. 2.8. Вероятность того, что траектория случайного процесса $X(t)$ не достигнет границ отрезка $[0,4]$ к моменту времени $t \in [0,2]$

Плотность вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0 определяется выражением (см. пример 2.6)

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_N(x)}{\displaystyle\int\limits_0^4 \varphi_N(x)\,dx}, \ x \in [0,4], \\ 0, \ x \notin [0,4], \end{cases}$$

а соответствующая начально-краевая задача записывается в виде (III):

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mathrm{e}^{-t}x^2}{3}\varphi(t,x)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2},$$

$$\varphi(t,x)|_{t=0} = \varphi_0(x),$$

$$\pi(t,x)|_{x=0} = \pi(t,x)|_{x=4} = 0,$$

где

$$\pi(t,x) = \frac{\mathrm{e}^{-t}x^2}{3}\varphi(t,x) - \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x},$$

$$(t,x) \in Q_T = [0,2]\times[0,4].$$

2. Как и в примере 2.6, выберем в качестве базисной системы

$$\{e(i_0,i_1,t,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$$

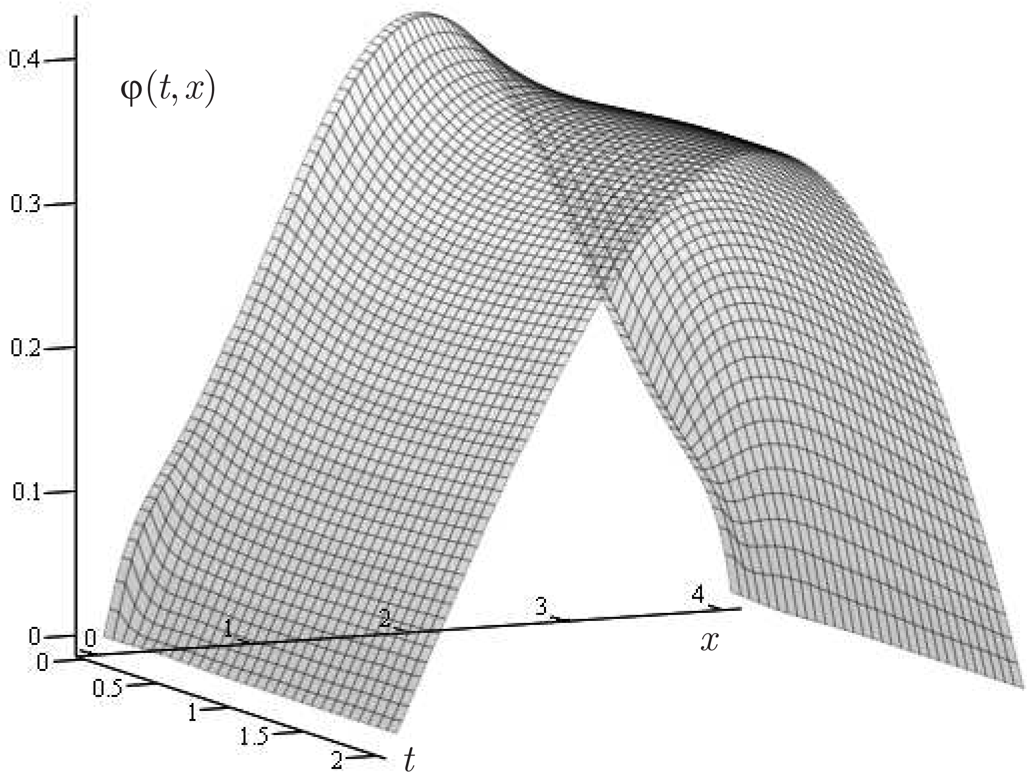

Рис. 2.9. Плотность вероятности состояния системы

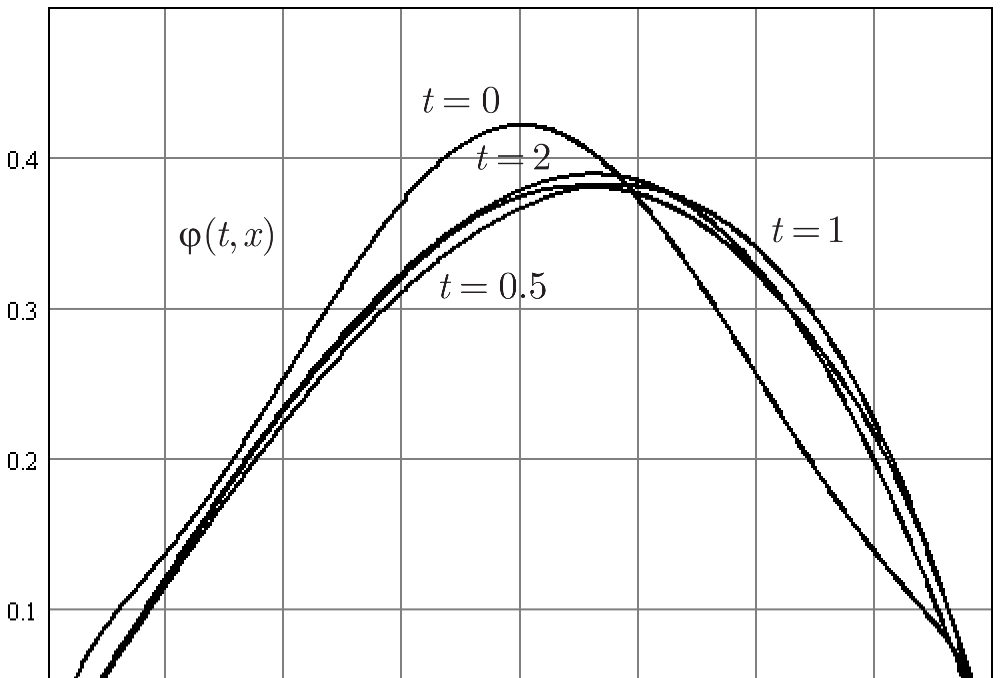

Рис. 2.10. Сечения плотности вероятности состояния системы в различные моменты времени

пространства $L_2(Q_T;\, \nu(t)\rho(x))$ систему функций $\{\hat{P}(i_0,t)\,\hat{P}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$, где $\{\hat{P}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ – система нестационарных полиномов Лежандра (1.4), определенная на стационарном отрезке $T=[0,2]$ и представляющая собой базис пространства $L_2(T;\, \nu(t))$ при $\nu(t)\equiv 1$, т.е. система функций $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$; $\{\hat{P}(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ – система полиномов Лежандра (1.17), являющаяся базисом пространства $L_2(\Omega;\, \rho(x))$ при $\rho(x)\equiv 1$, т.е. система функций $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$.

3. Выражения для нестационарной спектральной характеристики $P(2,2)$ оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент, а также нестационарных спектральных характеристик $F(2,2)$ и $G(2,2)$ операторов умножения на функции $f(t,x)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}x^2$ и $g(t,x)=1$ соответственно, определенных относительно базисной системы

$$\{\hat{P}(i_0,t)\,\hat{P}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty},$$

получены в ходе решения примера 2.6.

Четырехмерные гиперквадратные матрицы $\mathcal{P}_1^{\mathrm{o}}(2,2)$ и $\mathcal{P}_{11}^{\mathrm{o}}(2,2)$ вычисляются с помощью соотношений (2.47) и (2.48) соответственно, которые для данного случая с учетом того, что функции выбранной базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ являются вещественнозначными и $\rho(x)\equiv 1$, имеют вид (см. пример 2.4)

$$\mathcal{P}_1^{\mathrm{o}}(2,2)=E(1,1)\otimes\big(-\mathcal{P}^{\mathrm{T}}(1,1)\big),$$

$$\mathcal{P}_{11}^{\mathrm{o}}(2,2)=E(1,1)\otimes\big(-\mathcal{P}^{\mathrm{T}}(1,1)\cdot\mathcal{P}(1,1)\big),$$

где $\mathcal{P}(1,1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно системы полиномов Лежандра $\{\hat{P}(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ (см. примеры спектральных характеристик операторов дифференцирования в разд. 1.4.3).

Выражения для спектральной характеристики $\Phi_0(1,0)$ плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0, определенной относительно системы полиномов Лежандра $\{\hat{P}(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$, и матрицы-столбца $q(1,0;0)$ значений функций $\hat{P}(i_0,t)$ в точке $t=0$ получены при решении примера 2.6.

Значение весовой функции $\nu(t)$ в точке $t=0$ равно единице.

4. Составим уравнение обобщенной характеристической функции. Используя (VI) и результат примера 2.4 для одномерной стохастической системы управления, получаем

$$P(2,2)\cdot\Phi(2,0)-\nu(0)\cdot q(1,0;0)\otimes\Phi_0(1,0)=$$

$$=-\mathcal{P}_1^{\mathrm{o}}(2,2)\cdot F(2,2)\cdot\Phi(2,0)+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}^{\mathrm{o}}(2,2)\cdot G(2,2)\cdot\Phi(2,0),$$

где $\Phi(2,0)$ – обобщенная характеристическая функция, т.е. нестационарная спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi(t,x)$, определенная относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0,t)\,\hat{P}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.3):

$$\Phi(2,0) = (\varphi_{i_0 i_1}),$$

где

$$\varphi_{i_0 i_1} = \big(e(i_0,i_1,t,x), \varphi(t,x)\big)_{L_2(Q_T)} = \int\limits_0^2\int\limits_0^4 \varphi(t,x)\,\hat{P}(i_0,t)\,\hat{P}(i_1,x)\,dt\,dx,$$

$$i_0, i_1 = 0,1,2,\ldots\ .$$

Так как $\nu(0)=1$ и $G(2,2)=E(2,2)$, уравнение обобщенной характеристической функции может быть записано в виде

$$P(2,2)\cdot\Phi(2,0) - q(1,0;0)\otimes\Phi_0(1,0) =$$
$$= -\mathcal{P}_1^{\mathrm{o}}(2,2)\cdot F(2,2)\cdot\Phi(2,0) + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}^{\mathrm{o}}(2,2)\cdot\Phi(2,0),$$

или кратко

$$Z^{\mathrm{o}}(2,2)\cdot\Phi(2,0) = B(2,0),$$

где

$$Z^{\mathrm{o}}(2,2) = P(2,2) - A^{\mathrm{o}}(2,2),$$
$$A^{\mathrm{o}}(2,2) = -\mathcal{P}_1^{\mathrm{o}}(2,2)\cdot F(2,2) + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}^{\mathrm{o}}(2,2),$$
$$B(2,0) = q(1,0;0)\otimes\Phi_0(1,0).$$

5. Решение уравнения обобщенной характеристической функции определяется выражением

$$\Phi(2,0) = [Z^{\mathrm{o}}(2,2)]^{-1}\cdot B(2,0),$$

где $[Z^{\mathrm{o}}(2,2)]^{-1}$ – обратная матрица по отношению к матрице $Z^{\mathrm{o}}(2,2)$ (см. разд. 1.2.3), т.е.

$$\Phi(2,0) =$$
$$= \Big[P(2,2) + \mathcal{P}_1^{\mathrm{o}}(2,2)\cdot F(2,2) - \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}^{\mathrm{o}}(2,2)\Big]^{-1}\cdot\Big[q(1,0;0)\otimes\Phi_0(1,0)\Big].$$

6. По формуле обращения (VII) получаем выражение для плотности вероятности $\varphi(t,x)$:

$$\varphi(t,x) = \mathbb{S}^{-1}\left[\Phi(2,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\varphi_{i_0 i_1}\cdot\hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{P}(i_1,x),$$

где $\varphi_{i_0 i_1}$ – координаты обобщенной характеристической функции $\Phi(2,0)$, $t\in[0,2]$, $x\in[0,4]$.

Чтобы получить приближенное решение задачи анализа, зададим порядки усечения спектральных характеристик L_0 и L_1 (см. замечание 2.7). Тогда

$$\varphi(t,x) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\varphi_{i_0 i_1}\cdot\hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{P}(i_1,x),$$

где $\varphi_{i_0 i_1}$ – элементы конечной гиперстолбцовой матрицы $\Phi(2,0)$, $t\in[0,2]$, $x\in[0,4]$. Положим $L_0 = L_1 = 16$.

На рис. 2.11 и 2.12 изображены график плотности вероятности $\varphi(t,x)$ и графики ее сечений в различные моменты времени t. ■

2.2.2. Спектральные характеристики маргинальных и условных плотностей вероятности

Перейдем к задаче нахождения маргинальных и условных плотностей вероятности (см. разд. 2.1.3) с использованием спектральной формы математического описания.

Пусть первые m координат x_1, x_2, …, x_m вектора состояния x образуют матрицу-столбец $x_{(1)}$, а остальные координаты x_{m+1}, …, x_n – матрицу-столбец $x_{(2)}$, т.е.

$$x_{(1)} = [x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_m]^{\mathrm{T}} \in \Omega_{(1)} = \Omega_1\times\Omega_2\times\ldots\times\Omega_m,$$
$$x_{(2)} = [x_{m+1}\ \ \ldots\ \ x_n]^{\mathrm{T}} \in \Omega_{(2)} = \Omega_{m+1}\times\ldots\times\Omega_n,$$

где $1\leqslant m<n$.

Сформируем системы функций

$$\bigl\{p_{(1)}\bigl(i_1,i_2,\ldots,i_m,x_{(1)}\bigr)\bigr\}_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{\infty} \quad \text{и} \quad \bigl\{p_{(2)}\bigl(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)}\bigr)\bigr\}_{i_{m+1},\ldots,i_n=0}^{\infty}$$

следующим образом. Пусть функции $p_{(1)}\bigl(i_1,i_2,\ldots,i_m,x_{(1)}\bigr)$ порождаются всевозможными произведениями функций, образующих базисные системы $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$, $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$, …, $\{p_m(i_m,x_m)\}_{i_m=0}^{\infty}$ пространств $L_2(\Omega_1;\,\rho_1(x_1))$, $L_2(\Omega_2;\,\rho_2(x_2))$, …, $L_2(\Omega_m;\,\rho_m(x_m))$ соответственно, а функции $p_{(2)}\bigl(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)}\bigr)$ – всевозможными произведениями функций ба-

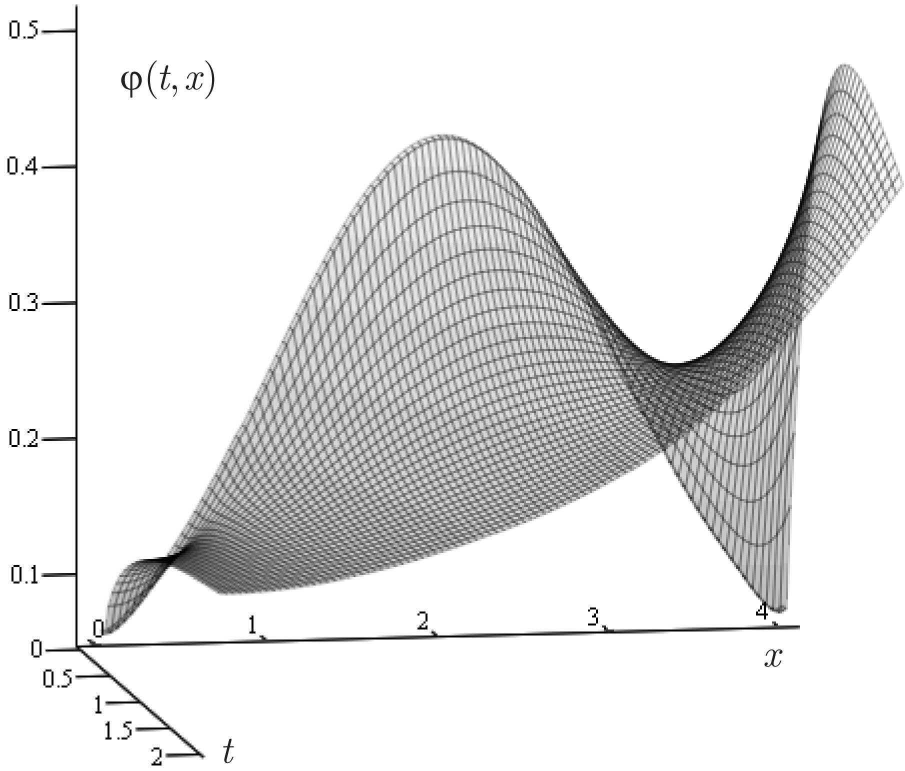

Рис. 2.11. Плотность вероятности состояния системы

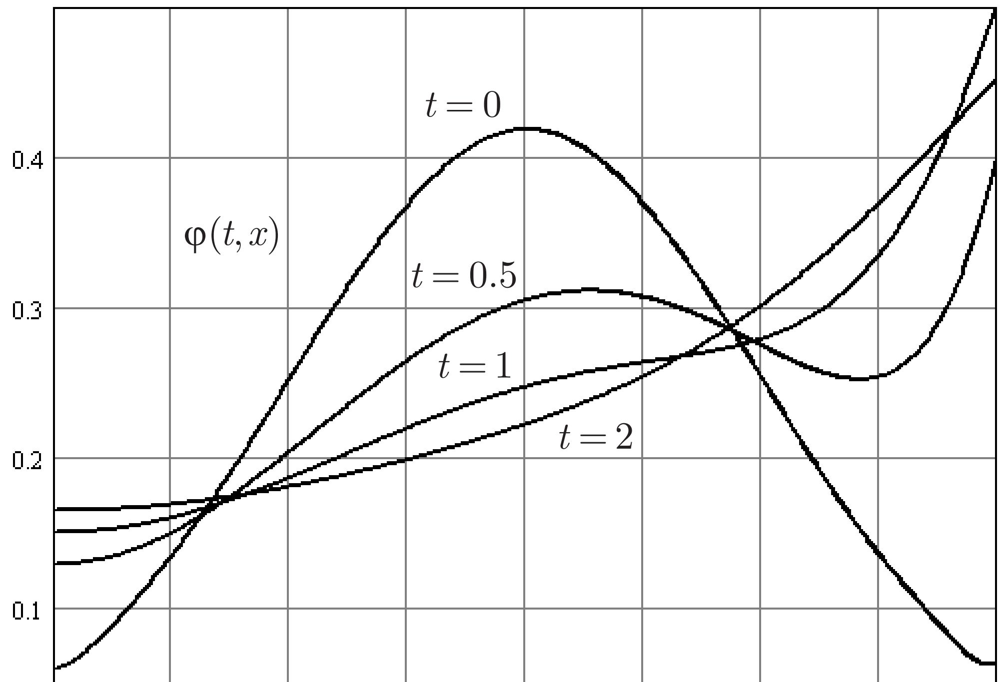

Рис. 2.12. Сечения плотности вероятности состояния системы в различные моменты времени

зисных систем $\{p_{m+1}(i_{m+1},x_{m+1})\}_{i_{m+1}=0}^{\infty}$, ..., $\{p_n(i_n,x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$ пространств $L_2(\Omega_{m+1};\rho_{m+1}(x_{m+1}))$, ..., $L_2(\Omega_n;\rho_n(x_n))$ соответственно:

$$p_{(1)}\big(i_1,i_2,\ldots,i_m,x_{(1)}\big)=p_1(i_1,x_1)\cdot p_2(i_2,x_2)\cdots p_m(i_m,x_m),$$
$$p_{(2)}\big(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)}\big)=p_{m+1}(i_{m+1},x_{m+1})\cdots p_n(i_n,x_n).$$

Вследствие утверждения 1.2 системы функций

$$\big\{p_{(1)}\big(i_1,i_2,\ldots,i_m,x_{(1)}\big)\big\}_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{\infty} \quad \text{и} \quad \big\{p_{(2)}\big(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)}\big)\big\}_{i_{m+1},\ldots,i_n=0}^{\infty}$$

являются базисами пространств $L_2\big(\Omega_{(1)};\rho_{(1)}\big(x_{(1)}\big)\big)$ и $L_2\big(\Omega_{(2)};\rho_{(2)}\big(x_{(2)}\big)\big)$ соответственно, где

$$\rho_{(1)}\big(x_{(1)}\big)=\rho_1(x_1)\cdot\rho_2(x_2)\cdots\rho_m(x_m),\quad \rho_{(2)}\big(x_{(2)}\big)=\rho_{m+1}(x_{m+1})\cdots\rho_n(x_n),$$

а, согласно утверждению 1.4, система функций

$$\big\{e_{(1)}\big(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)}\big)=q(i_0,t)\cdot p_{(1)}\big(i_1,\ldots,i_m,x_{(1)}\big)\big\}_{i_0,i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty}$$

образует базис пространства $L_2\big(T\times\Omega_{(1)};\nu(t)\,\rho_{(1)}\big(x_{(1)}\big)\big)$.

Обозначим через $\mathcal{J}_{(2)}$ линейный функционал, определенный на пространстве $L_2\big(\Omega_{(2)};\rho_{(2)}\big(x_{(2)}\big)\big)$ и ставящий в соответствие функции $h\big(x_{(2)}\big)$ значение интеграла от этой функции по множеству $\Omega_{(2)}$, т.е.

$$\mathcal{J}_{(2)}h\big(x_{(2)}\big)=\int\limits_{\Omega_{(2)}}h\big(x_{(2)}\big)dx_{(2)}. \tag{2.53}$$

Тогда соотношение (2.14) примет вид

$$\varphi_{(1)}\left(t,x_{(1)}\right)=\int\limits_{\Omega_{(2)}}\varphi(t,x)\,dx_{(2)}=\mathcal{J}_{(2)}\varphi(t,x).$$

Применяя спектральное преобразование к левой и правой частям этого соотношения, получаем выражение для нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(1)}(m+1,0)$ маргинальной плотности вероятности $\varphi_{(1)}\big(t,x_{(1)}\big)$:

$$\Phi_{(1)}(m+1,0)=\mathbb{S}\left[\mathcal{J}_{(2)}\varphi(t,x)\right],$$

правая часть которого по теореме 1.8 с учетом замечания 1.21 представляется в виде

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{J}_{(2)}\varphi(t,x)\right]=\big(E(1,1)\otimes E(m,m)\otimes J_{(2)}(0,n-m)\big)\cdot$$
$$\cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes E(m,m)\otimes R_{(2)}^{-1}(n-m,n-m)\big)\cdot\Phi(n+1,0)\Big),$$

где $E(m,m)$ – единичная матрица размерности $2m$ (см. разд. 1.2.3); $J_{(2)}(0,n-m)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{J}_{(2)}$, определенная относительно базисной системы $\bigl\{p_{(2)}\bigl(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)}\bigr)\bigr\}_{i_{m+1},\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.5.1); $R_{(2)}(n-m,n-m)$ – спектральная характеристика оператора умножения на весовую функцию $\rho_{(2)}\bigl(x_{(2)}\bigr)$, определенная относительно той же базисной системы (см. разд. 1.4.2).

Следовательно, нестационарная спектральная характеристика $\Phi_{(1)}(m+1,0)$ маргинальной плотности вероятности $\varphi_{(1)}\bigl(t,x_{(1)}\bigr)$, определенная относительно базисной системы

$$\bigl\{e_{(1)}\bigl(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)}\bigr)\bigr\}_{i_0,i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty},$$

выражается следующим образом:

$$\Phi_{(1)}(m+1,0)=\bigl(E(1,1)\otimes E(m,m)\otimes J_{(2)}(0,n-m)\bigr)\cdot \\ \cdot\Bigl(\bigl(E(1,1)\otimes E(m,m)\otimes R_{(2)}^{-1}(n-m,n-m)\bigr)\cdot\Phi(n+1,0)\Bigr). \qquad (2.54)$$

Переход от нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(1)}(m+1,0)$ к соответствующей функции $\varphi_{(1)}\bigl(t,x_{(1)}\bigr)$ осуществляется по формуле обращения

$$\varphi_{(1)}\bigl(t,x_{(1)}\bigr)=\mathbb{S}^{-1}\left[\Phi_{(1)}(m+1,0)\right]= \\ =\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_m=0}^{\infty}\varphi_{(1)\,i_0i_1\ldots i_m}\cdot e_{(1)}\bigl(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)}\bigr), \qquad (2.55)$$

где $\varphi_{(1)\,i_0i_1\ldots i_m}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(1)}(m+1,0)$, $t\in T$, $x_{(1)}\in\Omega_{(1)}$.

Далее найдем выражение для нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(2|1)}(n+1,0)$ условной плотности вероятности $\varphi_{(2|1)}\bigl(t,x_{(2)}\mid x_{(1)}\bigr)$, определенной относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$. Перепишем соотношение (2.15) в форме

$$\varphi(t,x)=\varphi_{(1)}\bigl(t,x_{(1)}\bigr)\cdot\varphi_{(2|1)}\bigl(t,x_{(2)}\mid x_{(1)}\bigr)$$

и применим спектральное преобразование к левой и правой частям полученного равенства. Тогда с учетом свойства спектрального преобразования операторов умножения, заданных на множестве функций времени и вектора состояния (см. разд. 1.4.2), получаем

$$\Phi(n+1,0)=\Phi_{(1)}(n+1,n+1)\cdot\Phi_{(2|1)}(n+1,0)$$

и, следовательно,

$$\Phi_{(2|1)}(n+1,0)=\Phi_{(1)}^{-1}(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0), \qquad (2.56)$$

где $\Phi_{(1)}(n+1,n+1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\varphi_{(1)}\big(t,x_{(1)}\big)$, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$; $\Phi(n+1,0)$ – обобщенная характеристическая функция, т.е. нестационарная спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi(t,x)$, определенная относительно той же базисной системы; $\Phi_{(1)}^{-1}(n+1,n+1)$ – обратная матрица (см. разд. 1.2.3).

Преобразуем правую часть (2.56), опираясь на свойства спектрального преобразования операторов умножения, определенных на пространстве функций времени и вектора состояния (см. разд. 1.4.2). Функция $\varphi_{(1)}\big(t,x_{(1)}\big)$ не зависит от $x_{(2)}$, поэтому

$$\Phi_{(1)}(n+1,n+1)=\Phi_{(1)}(m+1,m+1)\otimes E(n-m,n-m),$$

где $\Phi_{(1)}(m+1,m+1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\varphi_{(1)}\big(t,x_{(1)}\big)$, определенная относительно базисной системы $\big\{e_{(1)}\big(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)}\big)\big\}_{i_0,i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty}$; $E(n-m,n-m)$ – единичная матрица размерности $2(n-m)$. Нестационарная спектральная характеристика $\Phi_{(1)}(m+1,m+1)$ в свою очередь, согласно утверждению 1.14, выражается через нестационарную спектральную характеристику $\Phi_{(1)}(m+1,0)$ маргинальной плотности вероятности $\varphi_{(1)}\big(t,x_{(1)}\big)$ и нестационарную спектральную характеристику $V(m+1,2m+2)$ множительного звена, определенную относительно базисной системы $\big\{e_{(1)}\big(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)}\big)\big\}_{i_0,i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.2):

$$\Phi_{(1)}(m+1,m+1)=V(m+1,2m+2)\odot\Phi_{(1)}(m+1,0),$$

т.е.

$$\begin{aligned}
&\Phi_{(2|1)}(n+1,0)=\\
&\quad=\big[\Phi_{(1)}(m+1,m+1)\otimes E(n-m,n-m)\big]^{-1}\cdot\Phi(n+1,0)=\\
&\quad=\big[\big(V(m+1,2m+2)\odot\Phi_{(1)}(m+1,0)\big)\otimes E(n-m,n-m)\big]^{-1}\cdot\\
&\qquad\cdot\Phi(n+1,0).
\end{aligned}$$

Таким образом, с учетом свойств обратных матриц (см. разд. 1.2.3) получаем выражение для нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(2|1)}(n+1,0)$:

$$\begin{aligned}
&\Phi_{(2|1)}(n+1,0)=\\
&\quad=\Big(\big[V(m+1,2m+2)\odot\Phi_{(1)}(m+1,0)\big]^{-1}\otimes E(n-m,n-m)\Big)\cdot\\
&\qquad\cdot\Phi(n+1,0),
\end{aligned}\tag{2.57}$$

в котором нестационарная спектральная характеристика $\Phi_{(1)}(m+1,0)$ определяется соотношением (2.54).

Для перехода от нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(2|1)}(n+1,0)$ к функции $\varphi_{(2|1)}\big(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\big)$ применяется формула обращения (1.46):

$$\begin{aligned}\varphi_{(2|1)}\big(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\big) &= \mathbb{S}^{-1}\left[\Phi_{(2|1)}(n+1,0)\right] = \\ &= \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}\varphi_{(2|1)\,i_0 i_1\ldots i_n}\cdot e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x),\end{aligned} \tag{2.58}$$

где $\varphi_{(2|1)\,i_0 i_1\ldots i_n}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(2|1)}(n+1,0)$, $t \in T$, $x_{(1)} \in \Omega_{(1)}$, $x_{(2)} \in \Omega_{(2)}$.

Таким образом, соотношения (2.54) и (2.55) определяют решение задачи нахождения маргинальной плотности вероятности, а соотношения (2.57) и (2.58) – задачи нахождения условной плотности вероятности.

З а м е ч а н и е 2.8. Нестационарная спектральная характеристика $V(m+1, 2m+2)$ множительного звена, определенная относительно базисной системы $\big\{e_{(1)}\big(i_0, i_1, \ldots, i_m, t, x_{(1)}\big)\big\}_{i_0, i_1, \ldots, i_m=0}^{\infty}$, представляется в виде (см. замечание 1.13)

$$V(m+1, 2m+2) = V_0(1,2) \otimes \tilde{V}(m, 2m),$$

где $V_0(1,2)$ – нестационарная спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$; $\tilde{V}(m, 2m)$ – спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно базисной системы $\big\{p_{(1)}\big(i_1, i_2, \ldots, i_m, x_{(1)}\big)\big\}_{i_1, i_2, \ldots, i_m=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.2).

Пример 2.8. По известной нестационарной спектральной характеристике плотности вероятности $\varphi(t, x_1, x_2)$ вектора состояния двумерной стохастической системы управления найти нестационарные спектральные характеристики маргинальной плотности вероятности $\varphi_{(1)}(t, x_1)$ и условной плотности вероятности $\varphi_{(2|1)}(t, x_2 \mid x_1)$, где $t \in T$, $x_1 \in \Omega_1 = \mathbb{R}$, $x_2 \in \Omega_2 = \mathbb{R}$.

☐ Положим $x_{(1)} = x_1$ и $x_{(2)} = x_2$. Тогда соотношение (2.14), определяющее маргинальную плотность вероятности, примет вид

$$\varphi_{(1)}(t, x_1) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t, x_1, x_2)\, dx_2 = \mathcal{J}_2 \varphi(t, x_1, x_2),$$

где $\mathcal{J}_2$ – линейный функционал, заданный на пространстве $L_2(\mathbb{R})$ и ставящий в соответствие функции $h(x_2)$ интеграл от этой функции по пространству $\mathbb{R}$.

Для представления функций времени и вектора состояния $x = [x_1\ x_2]^{\mathrm{T}}$ выберем такую базисную систему $\{q(i_0,t)p_1(i_1,x_1)p_2(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T \times \mathbb{R}^2; \nu(t)\rho_1(x_1)\rho_2(x_2))$, что система функций $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ представляет собой базис пространства $L_2(T; \nu(t))$, а системы $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и

$\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ являются базисами пространств $L_2(\mathbb{R};\,\rho_1(x_1))$ и $L_2(\mathbb{R};\,\rho_2(x_2))$ соответственно (см. разд. 1.1.1–1.1.3).

Принимая во внимание соотношение (2.54) и результат, полученный в примере 1.42, запишем выражение для нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(1)}(2,0)$ маргинальной плотности вероятности $\varphi_{(1)}(t,x_1)$, определенной относительно базисной системы $\{q(i_0,t)p_1(i_1,x_1)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$:

$$\Phi_{(1)}(2,0) = \big(E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes J_2(0,1)\big)\cdot$$
$$\cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes R_2^{-1}(1,1)\big)\cdot\Phi(3,0)\Big),$$

где $\Phi(3,0)$ – обобщенная характеристическая функция, т.е. нестационарная спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi(t,x_1,x_2)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)p_1(i_1,x_1)p_2(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$; $J_2(0,1)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{J}_2$ (см. разд. 1.5.1), $R_2(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\rho_2(x_2)$ (см. разд. 1.4.2). Спектральные характеристики $J_2(0,1)$ и $R_2(1,1)$ определены относительно базисной системы $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$.

В частном случае, когда весовая функция $\rho_2(x_2)$ тождественно равна единице, спектральная характеристика $R_2(1,1)$ оператора умножения на функцию $\rho_2(x_2)$ представляет собой двумерную единичную матрицу $E(1,1)$. Тогда соотношение для нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(1)}(2,0)$ записывается в виде

$$\Phi_{(1)}(2,0) = \big(E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes J_2(0,1)\big)\cdot\Phi(3,0).$$

Для перехода от нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(1)}(2,0)$ к функции $\varphi_{(1)}(t,x_1)$ применяется формула обращения (2.55):

$$\varphi_{(1)}(t,x_1) = \mathbb{S}^{-1}\left[\Phi_{(1)}(2,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\varphi_{(1)\,i_0 i_1}\cdot q(i_0,t)\cdot p_1(i_1,x_1),$$

где $\varphi_{(1)\,i_0 i_1}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(1)}(2,0)$, $t\in T$, $x_1\in\mathbb{R}$.

Условная плотность вероятности $\varphi_{(2|1)}\big(t,x_2 \mid x_1\big)$ определяется соотношением (2.15), т.е.

$$\varphi_{(2|1)}\big(t,x_2 \mid x_1\big) = \frac{\varphi(t,x)}{\varphi_{(1)}(t,x_1)},$$

а ее нестационарная спектральная характеристика $\Phi_{(2|1)}(3,0)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)p_1(i_1,x_1)p_2(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$, задается выражением (2.57):

$$\Phi_{(2|1)}(3,0) = \Big(\big[V(2,4)\odot\Phi_{(1)}(2,0)\big]^{-1}\otimes E(1,1)\Big)\cdot\Phi(3,0),$$

где $V(2,4)$ – нестационарная спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)p_1(i_1,x_1)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.2), причем

$$V(2,4) = V_0(1,2) \otimes \tilde{V}(1,2),$$

где $V_0(1,2)$ – нестационарная спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$; $\tilde{V}(1,2)$ – спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно базисной системы $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ (см. замечание 2.8).

Переход от нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(2|1)}(3,0)$ к функции $\varphi_{(2|1)}(t,x_2 \mid x_1)$ осуществляется по формуле обращения (2.58):

$$\begin{aligned}\varphi_{(2|1)}(t,x_2 \mid x_1) &= \mathbb{S}^{-1}\left[\Phi_{(2|1)}(3,0)\right] = \\ &= \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty} \varphi_{(2|1)\,i_0 i_1 i_2} \cdot q(i_0,t)\cdot p_1(i_1,x_1)\cdot p_2(i_2,x_2),\end{aligned}$$

где $\varphi_{(2|1)\,i_0 i_1 i_2}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(2|1)}(3,0)$, $t \in T$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. ■

Методика расчета маргинальных и условных плотностей вероятности

Для определения маргинальных и условных плотностей вероятности необходимо выполнить следующие этапы.

1–6. Найти плотность вероятности $\varphi(t,x)$ согласно методике, изложенной в разд. 2.2.1.

7. Записать соотношения для маргинальной и условной плотностей вероятности в соответствии со структурой матриц-столбцов $x_{(1)}$ и $x_{(2)}$:

$$\varphi_{(1)}\big(t,x_{(1)}\big) = \int\limits_{\Omega_{(2)}} \varphi(t,x)\,dx_{(2)}, \tag{IX}$$

$$\varphi_{(2|1)}\big(t,x_{(2)} \mid x_{(1)}\big) = \frac{\varphi(t,x)}{\varphi_{(1)}\big(t,x_{(1)}\big)}. \tag{X}$$

8. Сформировать базисную систему

$$\Big\{e_{(1)}\big(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)}\big) = q(i_0,t)\cdot p_{(1)}\big(i_1,\ldots,i_m,x_{(1)}\big)\Big\}_{i_0,i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty}$$

пространства $L_2\big(T\times\Omega_{(1)};\,\nu(t)\,\rho_{(1)}\big(x_{(1)}\big)\big)$ для представления маргинальной плотности вероятности $\varphi_{(1)}\big(t,x_{(1)}\big)$ (см. разд. 1.1.3) и базисную систему

$$\Big\{p_{(2)}\big(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)}\big) = p_{m+1}(i_{m+1},x_{m+1})\cdots p_n(i_n,x_n)\Big\}_{i_{m+1},\ldots,i_n=0}^{\infty}$$

пространства $L_2\big(\Omega_{(2)}; \rho_{(2)}\big(x_{(2)}\big)\big)$ для представления линейного функционала $\mathcal{J}_{(2)}$ (см. (2.53) и разд. 1.5.1) и оператора умножения на весовую функцию $\rho_{(2)}\big(x_{(2)}\big)$ (см. разд. 1.4.2).

9. Вычислить:

а) спектральные характеристики:

1) $J_{(2)}(0, n-m)$ – спектральную характеристику функционала $\mathcal{J}_{(2)}$ (см. разд. 1.5.1);

2) $R_{(2)}(n-m, n-m)$ – спектральную характеристику оператора умножения на весовую функцию $\rho_{(2)}\big(x_{(2)}\big)$ (см. разд. 1.4.2);

б) нестационарную спектральную характеристику $V(m+1, 2m+2)$ множительного звена (см. разд. 1.4.2).

10. Найти нестационарную спектральную характеристику $\Phi_{(1)}(m+1, 0)$ маргинальной плотности вероятности $\varphi_{(1)}\big(t, x_{(1)}\big)$, используя соотношение

$$\Phi_{(1)}(m+1,0) = \big(E(1,1) \otimes E(m,m) \otimes J_{(2)}(0,n-m)\big)\cdot \\ \cdot \Big(\big(E(1,1) \otimes E(m,m) \otimes R_{(2)}^{-1}(n-m,n-m)\big) \cdot \Phi(n+1,0)\Big), \qquad \text{(XI)}$$

и нестационарную спектральную характеристику $\Phi_{(2|1)}(n+1, 0)$ условной плотности вероятности $\varphi_{(2|1)}\big(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\big)$, используя формулу

$$\Phi_{(2|1)}(n+1,0) = \\ = \Big(\big[V(m+1,2m+2) \odot \Phi_{(1)}(m+1,0)\big]^{-1} \otimes E(n-m,n-m)\Big) \cdot \\ \cdot \Phi(n+1,0). \qquad \text{(XII)}$$

11. Получить маргинальную плотность вероятности $\varphi_{(1)}\big(t, x_{(1)}\big)$ и условную плотность вероятности $\varphi_{(2|1)}\big(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\big)$ по найденным нестационарным спектральным характеристикам $\Phi_{(1)}(m+1, 0)$ и $\Phi_{(2|1)}(n+1, 0)$ соответственно, применяя формулы обращения

$$\varphi_{(1)}\big(t, x_{(1)}\big) = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_m=0}^{\infty} \varphi_{(1)\,i_0 i_1 \ldots i_m} \cdot e_{(1)}\big(i_0, i_1, \ldots, i_m, t, x_{(1)}\big), \qquad \text{(XIII)}$$

где $\varphi_{(1)\,i_0 i_1 \ldots i_m}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(1)}(m+1, 0)$, $t \in T$, $x_{(1)} \in \Omega_{(1)}$;

$$\varphi_{(2|1)}\big(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\big) = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty} \varphi_{(2|1)\,i_0 i_1 \ldots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x), \qquad \text{(XIV)}$$

где $\varphi_{(2|1)\,i_0 i_1 \ldots i_n}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(2|1)}(n+1, 0)$, $t \in T$, $x_{(1)} \in \Omega_{(1)}$, $x_{(2)} \in \Omega_{(2)}$.

Замечание 2.9. При задании порядков усечения спектральных характеристик для численного решения (см. замечание 2.7) соотношения (XIII) и (XIV) записываются в виде

$$\varphi_{(1)}\bigl(t, x_{(1)}\bigr) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \ldots \sum_{i_m=0}^{L_m-1} \varphi_{(1)\, i_0 i_1 \ldots i_m} \cdot e_{(1)}\bigl(i_0, i_1, \ldots, i_m, t, x_{(1)}\bigr),$$

где $\varphi_{(1)\, i_0 i_1 \ldots i_m}$ – элементы конечной гиперстолбцовой матрицы $\Phi_{(1)}(m+1, 0)$, $t \in T$, $x_{(1)} \in \Omega_{(1)}$;

$$\varphi_{(2|1)}\bigl(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\bigr) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \ldots \sum_{i_n=0}^{L_n-1} \varphi_{(2|1)\, i_0 i_1 \ldots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x),$$

где $\varphi_{(2|1)\, i_0 i_1 \ldots i_n}$ – элементы конечной гиперстолбцовой матрицы $\Phi_{(2|1)}(n+1, 0)$, $t \in T$, $x_{(1)} \in \Omega_{(1)}$, $x_{(2)} \in \Omega_{(2)}$.

Пример 2.9. Решить задачу анализа линейной детерминированной системы управления второго порядка, представляющей собой упрощенную математическую модель акселерометра:

$$\ddot{Y}(t) + Y(t) = 0,$$
$$Y(0) = Y_0,$$
$$\dot{Y}(0) = \dot{Y}_0,$$

где $t \in T = [0, 2\pi]$, $Y \in \mathbb{R}$, Y_0 и $\dot{Y}_0$ – независимые случайные величины, имеющие гауссовское распределение с математическим ожиданием $m_0 = 1$ и дисперсией $D_0 = \frac{1}{2}$.

□ Поскольку начальные условия для рассматриваемой динамической системы являются случайными, $Y(t)$ представляет собой случайный процесс, а решением задачи анализа является плотность вероятности $\varphi(t, y)$.

Произведем замену переменных. Пусть $X_1(t) = Y(t)$, а $X_2(t) = \dot{Y}(t)$, тогда исходное уравнение сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{X}_1(t) = X_2(t), \\ \dot{X}_2(t) = -X_1(t), \end{cases}$$

где $t \in T = [0, 2\pi]$, $X_1 \in \Omega_1 = \mathbb{R}$, $X_2 \in \Omega_2 = \mathbb{R}$.

Начальные условия для полученной системы определяются соотношениями

$$X_1(0) = Y_0, \quad X_2(0) = \dot{Y}_0.$$

Переписав эту систему в виде

$$dX_1(t) = X_2(t)\,dt,$$
$$dX_2(t) = -X_1(t)\,dt,$$

ее можно рассматривать как уравнение (2.1) при условии, что размерность n вектора состояния равна двум, т.е. $X(t) = [X_1(t)\ X_2(t)]^{\mathrm{T}}$. При этом вектор-функция $f(t,x)$ задается выражением

$$f(t,x) = f(t,x_1,x_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix},$$

а матричная функция $\sigma(t,x)$ представляет собой нулевую матрицу.

Следовательно, исходная задача сведена к задаче анализа стохастических систем управления (см. разд. 2.1.1). Так как состоянием исходной системы управления является Y, т.е. координата X_1, требуется отыскать маргинальную плотность вероятности $\varphi_{(1)}(t,x_1)$ (см. разд. 2.1.3).

Для нахождения функции $\varphi_{(1)}(t,x_1)$ воспользуемся методикой расчета маргинальных и условных плотностей вероятности.

1. Поскольку матричная функция $\sigma(t,x)$ является нулевой, все коэффициенты диффузии тождественно равны нулю.

Плотность вероятности $\varphi_0(x_1,x_2)$ начального состояния $X_0 = [Y_0\ \ \dot{Y}_0]^{\mathrm{T}}$ является гауссовской, выражение для которой определяется заданными параметрами m_0 и D_0:

$$\varphi_0(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-[x_1-1]^2-[x_2-1]^2}.$$

Таким образом, поскольку случайный процесс $X(t) = [X_1(t)\ X_2(t)]^{\mathrm{T}}$ может принимать любые значения из пространства $\mathbb{R}^2$, т.е. $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, соответствующая начально-краевая задача записывается в виде (I):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi(t,x_1,x_2)}{\partial t} = -x_2\frac{\partial\varphi(t,x_1,x_2)}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial\varphi(t,x_1,x_2)}{\partial x_2},\\
&\varphi(t,x_1,x_2)\big|_{t=0} = \frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-[x_1-1]^2-[x_2-1]^2},\\
&\varphi(t,x_1,x_2)\big|_{x_1,x_2=\pm\infty} = 0,
\end{aligned}$$

где $(t,x_1,x_2) \in Q_T = [0,2\pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = [0,2\pi] \times \mathbb{R}^2$.

2. Выберем в качестве базисной системы $\{e(i_0,i_1,i_2,t,x_1,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$ пространства $L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$ систему функций

$$\{\hat{P}(i_0,t)\,\hat{\Phi}(i_1,x_1)\,\hat{\Phi}(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty},$$

где $\{\hat{P}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ – система нестационарных полиномов Лежандра (1.4), определенная на стационарном отрезке $T=[0,2\pi]$ и представляющая собой базис пространства $L_2(T;\,\nu(t))$ при $\nu(t)\equiv 1$, т.е. базисная система функций $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$; $\{\hat{\Phi}(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{\hat{\Phi}(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ – системы функций Эрмита (1.21), образующие базисы пространств $L_2(\Omega_1;\,\rho_1(x_1))$ и $L_2(\Omega_2;\,\rho_2(x_2))$ соответственно при $\rho_1(x_1)\equiv\rho_2(x_2)\equiv 1$, т.е. системы функций $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$, $\rho(x)\equiv\rho_1(x_1)\rho_2(x_2)\equiv 1$.

Сформируем базисную систему $\{p(i_1,i_2,x_1,x_2)\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\Omega;\,\rho(x))$:

$$p(i_1,i_2,x_1,x_2)=\hat{\Phi}(i_1,x_1)\cdot\hat{\Phi}(i_2,x_2).$$

3. Вычислим нестационарные спектральные характеристики операторов дифференцирования по времени и координатам x_1 и x_2, а также операторов умножения на коэффициенты сноса относительно выбранной базисной системы $\{\hat{P}(i_0,t)\,\hat{\Phi}(i_1,x_1)\,\hat{\Phi}(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$.

Нестационарная спектральная характеристика $P(3,3)$ оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент, согласно (1.70), представляется в виде тензорного произведения нестационарной спектральной характеристики $P(1,1)$ оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенной относительно системы полиномов Лежандра (см. примеры нестационарных спектральных характеристик операторов дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени в разд. 1.4.3), и четырехмерной единичной матрицы $E(2,2)$:

$$P(3,3)=P(1,1)\otimes E(2,2).$$

Из (1.70) следует, что нестационарные спектральные характеристики $\mathcal{P}_1(3,3)$ и $\mathcal{P}_2(3,3)$ операторов дифференцирования первого порядка по координатам x_1 и x_2 соответственно представляются в виде

$$\mathcal{P}_1(3,3)=E(1,1)\otimes\mathcal{P}(1,1)\otimes E(1,1),$$

$$\mathcal{P}_2(3,3)=E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes\mathcal{P}(1,1),$$

где $\mathcal{P}(1,1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно системы функций Эрмита (см. примеры спектральных характеристик операторов дифференцирования в разд. 1.4.3).

Перейдем к вычислению нестационарных спектральных характеристик операторов умножения на коэффициенты сноса $f_1(t,x_1,x_2)$ и $f_2(t,x_1,x_2)$. Принимая во внимание утверждения 1.13, 1.15 и свойства спектрального преобразования операторов умножения, заданных на пространствах функций времени и функций вектора состояния (см. разд. 1.4.2), получаем выражение для нестационарной спектральной характеристики $F_1(3,3)$ оператора умножения на функцию $f_1(t,x_1,x_2)=x_2$:

$$F_1(3,3)=E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes A_2(1,1),$$

в котором $A_2(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_2(x_2)=x_2$, вычисленная относительно системы функций Эрмита по определению (1.54) (см. примеры спектральных характеристик операторов умножения на функцию $a(x)=x$ в разд. 1.4.2):

$$A_2(1,1)=\left(a_{2\,i_2j_2}\right),$$

где

$$a_{2\,i_2j_2}=\big(p_2(i_2,x_2),a_2(x_2)\cdot p_2(j_2,x_2)\big)_{L_2(\Omega_2)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x_2\,\hat\Phi(i_2,x_2)\,\hat\Phi(j_2,x_2)\,dx_2,$$

$$i_2,j_2=0,1,2,\ldots\ .$$

Аналогично, нестационарная спектральная характеристика $F_2(3,3)$ оператора умножения на функцию $f_2(t,x_1,x_2)=-x_1$ представляется выражением

$$F_2(3,3)=E(1,1)\otimes A_1(1,1)\otimes E(1,1),$$

в котором $A_1(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_1(x_1)=-x_1$, вычисленная относительно системы функций Эрмита по определению (1.54):

$$A_1(1,1)=\left(a_{1\,i_1j_1}\right),$$

где

$$a_{1\,i_1j_1}=\big(p_1(i_1,x_1),a_1(x_1)\cdot p_1(j_1,x_1)\big)_{L_2(\Omega_1)}=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x_1\,\hat\Phi(i_1,x_1)\,\hat\Phi(j_1,x_1)\,dx_1,$$

$$i_1,j_1=0,1,2,\ldots\ .$$

Нетрудно видеть, что из соотношений, определяющих элементы $a_{1\,i_1j_1}$ и $a_{2\,i_2j_2}$, следует, что $A_1(1,1)=-A_2(1,1)$.

Спектральная характеристика $\Phi_0(2,0)$ плотности вероятности $\varphi_0(x_1,x_2)$ начального состояния X_0, определенная относительно базисной системы $\{\hat\Phi(i_1,x_1)\,\hat\Phi(i_2,x_2)\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$, вычисляется следующим образом (см. разд. 1.3.2):

$$\Phi_0(2,0)=(\varphi_{0\,i_1i_2}),$$

где

$$\varphi_{0\,i_1 i_2} = \big(p(i_1, i_2, x_1, x_2), \varphi_0(x_1, x_2)\big)_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-[x_1-1]^2-[x_2-1]^2}\, \hat{\Phi}(i_1, x_1)\, \hat{\Phi}(i_2, x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-[x_1-1]^2}\, \hat{\Phi}(i_1, x_1)\, dx_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-[x_2-1]^2}\, \hat{\Phi}(i_2, x_2)\, dx_2,$$

$$i_1, i_2 = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Матрица-столбец $q(1, 0; 0)$ значений функций $\hat{P}(i_0, t)$ в точке $t = 0$, согласно (2.21), с учетом того, что функции базисной системы $\{\hat{P}(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ вещественнозначные, имеет вид

$$q(1, 0; 0) = \begin{bmatrix} \hat{P}(0, 0) & \hat{P}(1, 0) & \hat{P}(2, 0) & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Значение весовой функции $\nu(t)$ в точке $t = 0$ равно единице.

4. Составим уравнение обобщенной характеристической функции. Используя (IV), а также результат, полученный в ходе решения примера 2.2 для двумерной стохастической системы управления, имеем

$$P(3, 3) \cdot \Phi(3, 0) - \nu(0) \cdot q(1, 0; 0) \otimes \Phi_0(2, 0) =$$

$$= -\mathcal{P}_1(3, 3) \cdot F_1(3, 3) \cdot \Phi(3, 0) - \mathcal{P}_2(3, 3) \cdot F_2(3, 3) \cdot \Phi(3, 0),$$

где $\Phi(3, 0)$ – обобщенная характеристическая функция, т.е. нестационарная спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi(t, x_1, x_2)$, определенная относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0, t)\, \hat{\Phi}(i_1, x_1)\, \hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_0, i_1, i_2=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.3):

$$\Phi(3, 0) = (\varphi_{i_0 i_1 i_2}),$$

где

$$\varphi_{i_0 i_1 i_2} = \big(e(i_0, i_1, i_2, t, x_1, x_2), \varphi(t, x_1, x_2)\big)_{L_2(Q_T)} =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, x_1, x_2)\, \hat{P}(i_0, t)\, \hat{\Phi}(i_1, x_1)\, \hat{\Phi}(i_2, x_2)\, dt\, dx_1\, dx_2,$$

$$i_0, i_1, i_2 = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Поскольку $\nu(0) = 1$, уравнение обобщенной характеристической функции записывается следующим образом:

$$P(3,3) \cdot \Phi(3,0) - q(1,0;0) \otimes \Phi_0(2,0) =$$
$$= -\mathcal{P}_1(3,3) \cdot F_1(3,3) \cdot \Phi(3,0) - \mathcal{P}_2(3,3) \cdot F_2(3,3) \cdot \Phi(3,0),$$

или кратко

$$Z(3,3) \cdot \Phi(3,0) = B(3,0),$$

где

$$Z(3,3) = P(3,3) - A(3,3),$$
$$A(3,3) = -\mathcal{P}_1(3,3) \cdot F_1(3,3) - \mathcal{P}_2(3,3) \cdot F_2(3,3),$$
$$B(3,0) = q(1,0;0) \otimes \Phi_0(2,0).$$

5. Решение уравнения обобщенной характеристической функции определяется соотношением

$$\Phi(3,0) = Z^{-1}(3,3) \cdot B(3,0),$$

в котором $Z^{-1}(3,3)$ – обратная матрица по отношению к матрице $Z(3,3)$ (см. разд. 1.2.3). Следовательно,

$$\Phi(3,0) = \Big[P(3,3) + \mathcal{P}_1(3,3) \cdot F_1(3,3) + \mathcal{P}_2(3,3) \cdot F_2(3,3)\Big]^{-1} \cdot$$
$$\cdot \Big[q(1,0;0) \otimes \Phi_0(2,0)\Big].$$

6. Плотность вероятности $\varphi(t,x_1,x_2)$ определяется по формуле обращения (VII):

$$\varphi(t,x_1,x_2) = \mathbb{S}^{-1}\left[\Phi(3,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty} \varphi_{i_0 i_1 i_2} \cdot \hat{P}(i_0,t) \cdot \hat{\Phi}(i_1,x_1) \cdot \hat{\Phi}(i_2,x_2),$$

где $\varphi_{i_0 i_1 i_2}$ – координаты обобщенной характеристической функции $\Phi(3,0)$, $t \in [0,2\pi]$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

При численном расчете зададим порядки усечения спектральных характеристик L_0, L_1 и L_2 (см. замечание 2.7), тогда

$$\varphi(t,x_1,x_2) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\sum_{i_2=0}^{L_2-1} \varphi_{i_0 i_1 i_2} \cdot \hat{P}(i_0,t) \cdot \hat{\Phi}(i_1,x_1) \cdot \hat{\Phi}(i_2,x_2),$$

где $\varphi_{i_0 i_1 i_2}$ – элементы конечной гиперстолбцовой матрицы $\Phi(3,0)$, $t \in [0,2\pi]$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Положим $L_0 = L_1 = L_2 = 8$.

Графики функции $\varphi(t,x_1,x_2)$ в различные моменты времени t изображены на рис. 2.13–2.15.

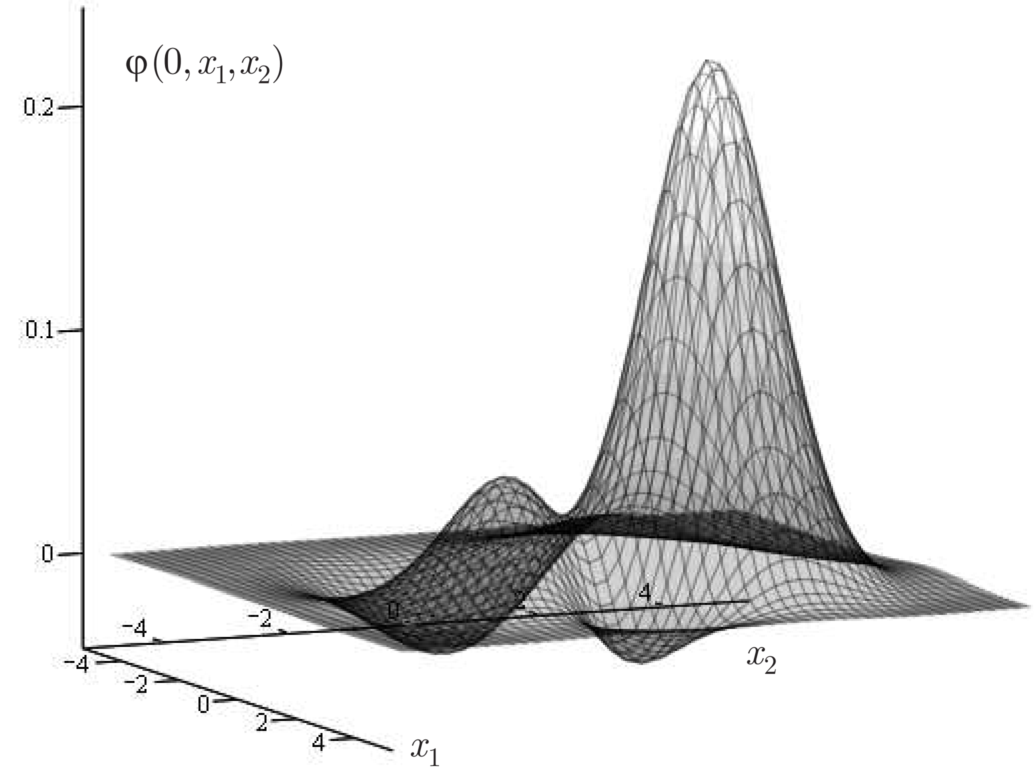

Рис. 2.13. Плотность вероятности $\varphi(t, x_1, x_2)$ при $t = 0$

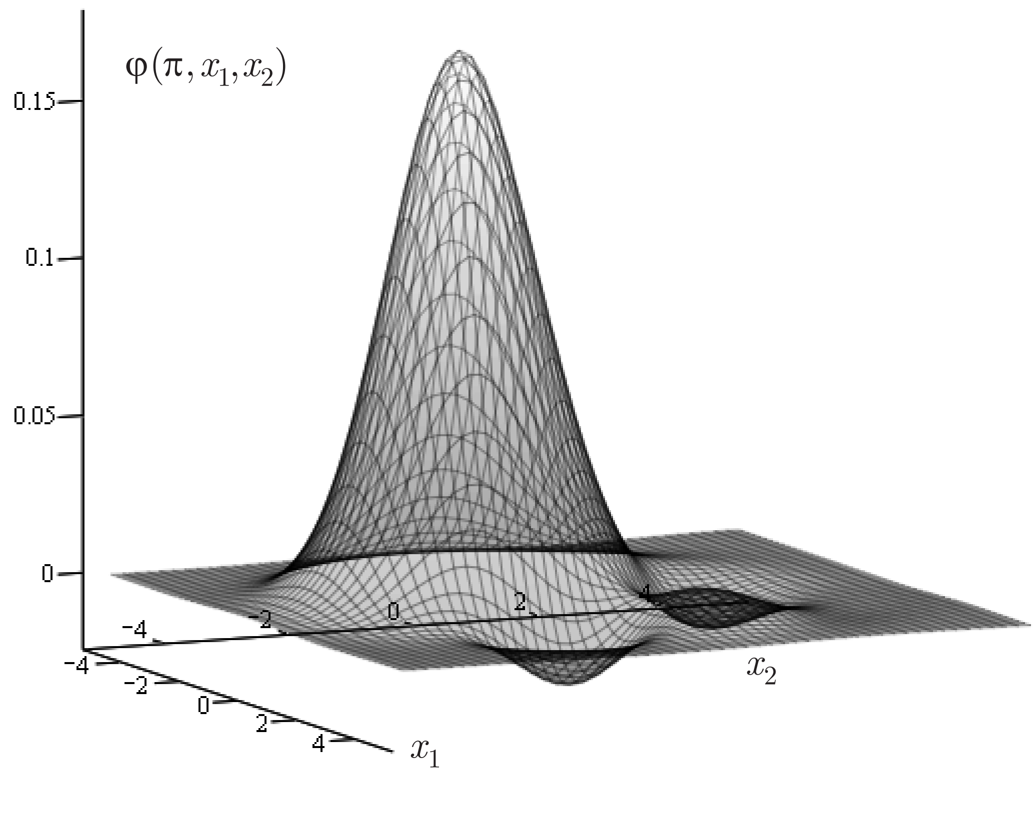

Рис. 2.14. Плотность вероятности $\varphi(t, x_1, x_2)$ при $t = \pi$

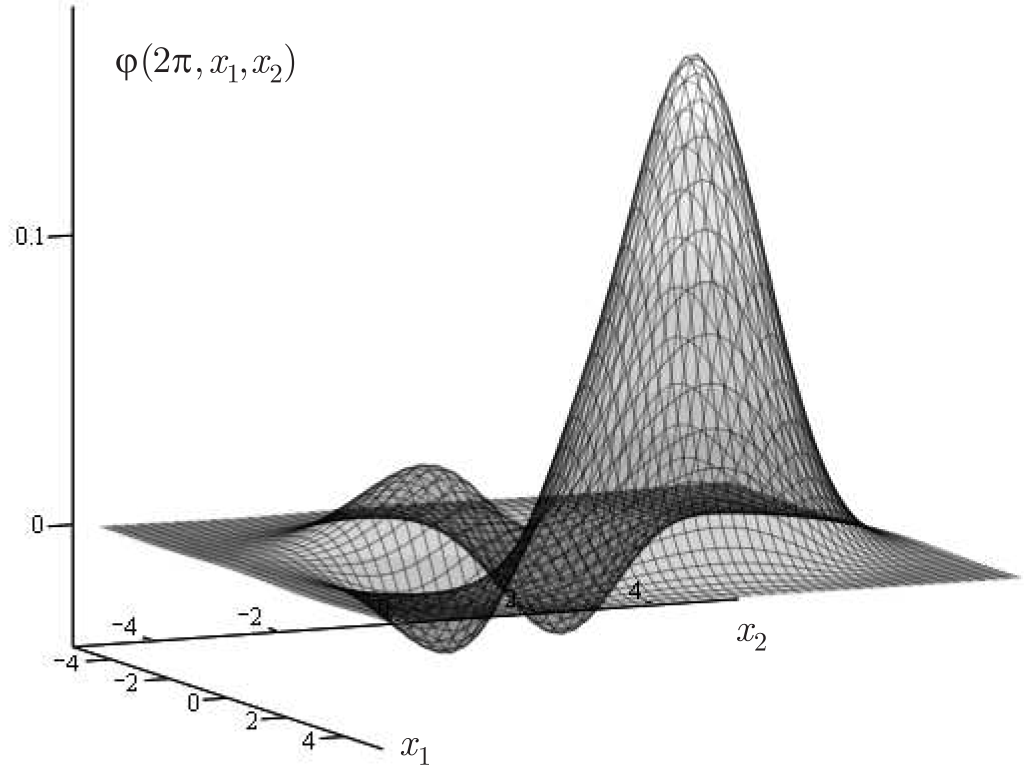

Рис. 2.15. Плотность вероятности $\varphi(t, x_1, x_2)$ при $t = 2\pi$

7. Соотношение для искомой маргинальной плотности вероятности $\varphi_{(1)}(t, x_1)$ имеет вид (IX):

$$\varphi_{(1)}(t, x_1) = \int\limits_{\Omega_2} \varphi(t, x_1, x_2)\, dx_2.$$

8. Сформируем базисную систему $\left\{e_{(1)}(i_0, i_1, t, x_1)\right\}_{i_0, i_1, i_2 = 0}^{\infty}$ пространства $L_2(T \times \Omega_1;\, \nu(t)\rho_1(x_1))$:

$$e_{(1)}(i_0, i_1, t, x_1) = \hat{P}(i_0, t) \cdot \hat{\Phi}(i_1, x_1).$$

Базисная система $\left\{p_{(2)}(i_2, x_2)\right\}_{i_2=0}^{\infty}$ представляет собой систему функций Эрмита $\{\hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$.

9. Спектральная характеристика $J_2(0, 1)$ линейного функционала $\mathcal{J}_2$, ставящего в соответствие функции $h_2(x_2)$ интеграл от этой функции по пространству $\mathbb{R}$, определенная относительно системы функций Эрмита, была найдена в примере 1.38, а спектральная характеристика $R_2(1, 1)$ оператора умножения на весовую функцию $\rho_2(x_2)$ представляет собой двумерную единичную матрицу $E(1, 1)$, так как $\rho_2(x_2) \equiv 1$ (см. разд. 1.4.2).

Перейдем к вычислению нестационарной спектральной характеристики $V(2,4)$ множительного звена (см. разд. 1.4.2) относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0,t)\hat{\Phi}(i_1,x_1)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$. Согласно замечанию 1.13, нестационарная спектральная характеристика $V(2,4)$ представляется в виде соотношения

$$V(2,4) = V_0(1,2) \otimes \tilde{V}(1,2),$$

в котором $V_0(1,2)$ – нестационарная спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно системы полиномов Лежандра по формуле (1.53):

$$V_0\,(1,2) = \big(v_{0\,i_0 j_0 k_0}\big),$$

где

$$v_{0\,i_0 j_0 k_0} = \big(q(i_0,t), q(j_0,t)\cdot q(k_0,t)\big)_{L_2(T)} = \int\limits_0^{2\pi} \hat{P}(i_0,t)\,\hat{P}(j_0,t)\,\hat{P}(k_0,t)\,dt,$$

$$i_0, j_0, k_0 = 0,1,2,\ldots,$$

а $\tilde{V}(1,2)$ – спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно системы функций Эрмита по формуле (1.55):

$$\tilde{V}\,(1,2) = \big(\tilde{v}_{i_1 j_1 k_1}\big)\,,$$

где

$$\tilde{v}_{i_1 j_1 k_1} = \big(p_1(i_1,x_1), p_1(j_1,x_1)\cdot p_1(k_1,x_1)\big)_{L_2(\Omega_1)} = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(i_1,x_1)\,\hat{\Phi}(j_1,x_1)\,\hat{\Phi}(k_1,x_1)\,dx_1, \\ i_1, j_1, k_1 = 0,1,2,\ldots\ .$$

10. Используя (XI), запишем выражение для нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(1)}(2,0)$ маргинальной плотности вероятности $\varphi_{(1)}(t,x_1)$:

$$\Phi_{(1)}(2,0) = \big(E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes J_2(0,1)\big)\cdot \\ \cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes R_2^{-1}(1,1)\big)\cdot \Phi(3,0)\Big).$$

Так как $R_2(1,1)$ представляет собой двумерную единичную матрицу $E(1,1)$, выражение для нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(1)}(2,0)$ можно упростить (см. пример 2.8):

$$\Phi_{(1)}(2,0) = \big(E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes J_2(0,1)\big)\cdot \Phi(3,0).$$

Напомним, что нестационарная спектральная характеристика $\Phi_{(1)}(2,0)$ определена относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0,t)\,\hat{\Phi}(i_1,x_1)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.3), т.е.

$$\Phi_{(1)}(2,0) = \left(\varphi_{(1)\,i_0 i_1}\right),$$

где

$$\varphi_{(1)\,i_0 i_1} = \left(e_{(1)}(i_0,i_1,t,x_1), \varphi_{(1)}(t,x_1)\right)_{L_2(T\times\Omega_1)} = \\ = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{(1)}(t,x_1)\,\hat{P}(i_0,t)\,\hat{\Phi}(i_1,x_1)\,dt\,dx_1, \\ i_0,i_1 = 0,1,2,\ldots\ .$$

11. Воспользуемся формулой обращения (XIII) для перехода от нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(1)}(2,0)$ к функции $\varphi_{(1)}(t,x_1)$:

$$\varphi_{(1)}(t,x_1) = \mathbb{S}^{-1}\left[\Phi_{(1)}(2,0)\right] = \\ = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty} \varphi_{(1)\,i_0 i_1}\cdot \hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{\Phi}(i_1,x_1),$$

где $\varphi_{(1)\,i_0 i_1}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(1)}(2,0)$, $t\in[0,2\pi]$, $x_1\in\mathbb{R}$.

Так как при расчетах используется усечение спектральных характеристик (см. замечание 2.9 и п. 6), формула обращения записывается в виде

$$\varphi_{(1)}(t,x_1) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1} \varphi_{(1)\,i_0 i_1}\cdot \hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{\Phi}(i_1,x_1),$$

где $\varphi_{(1)\,i_0 i_1}$ – элементы конечной гиперстолбцовой матрицы $\Phi_{(1)}(2,0)$, $t\in[0,2\pi]$, $x_1\in\mathbb{R}$. Положим $L_0=L_1=8$.

Таким образом, искомая плотность вероятности $\varphi(t,y)$ приближенно определяется выражением

$$\varphi(t,y) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1} \varphi_{(1)\,i_0 i_1}\cdot \hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{\Phi}(i_1,y),$$

где $t\in[0,2\pi]$, $y\in\mathbb{R}$, $L_0=L_1=8$.

График функции $\varphi(t,y)$ и графики ее сечений в различные моменты времени t изображены на рис. 2.16 и 2.17. ■

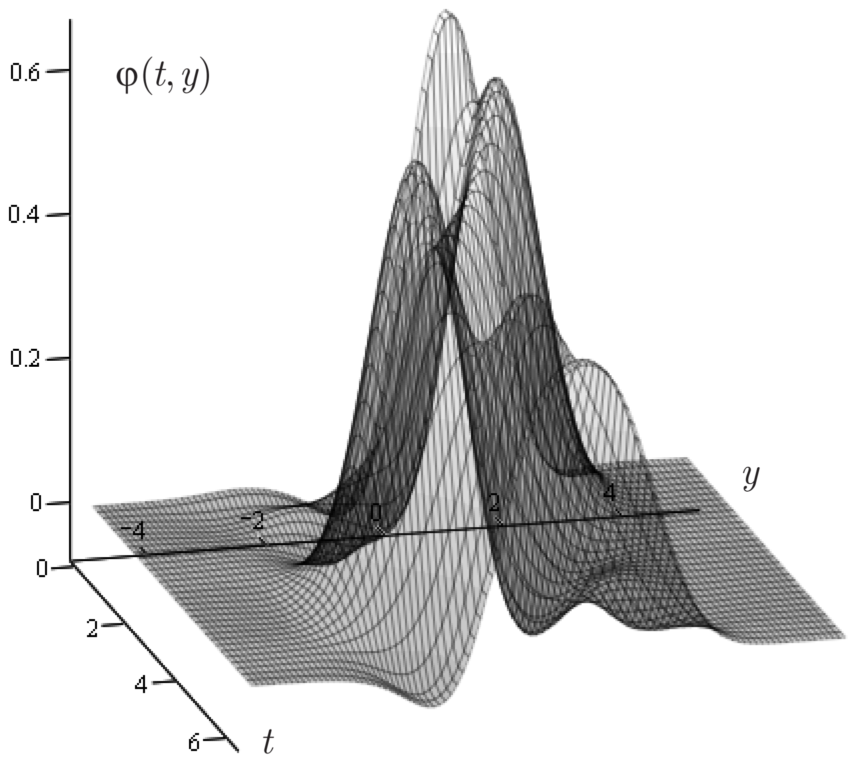

Рис. 2.16. Плотность вероятности состояния системы

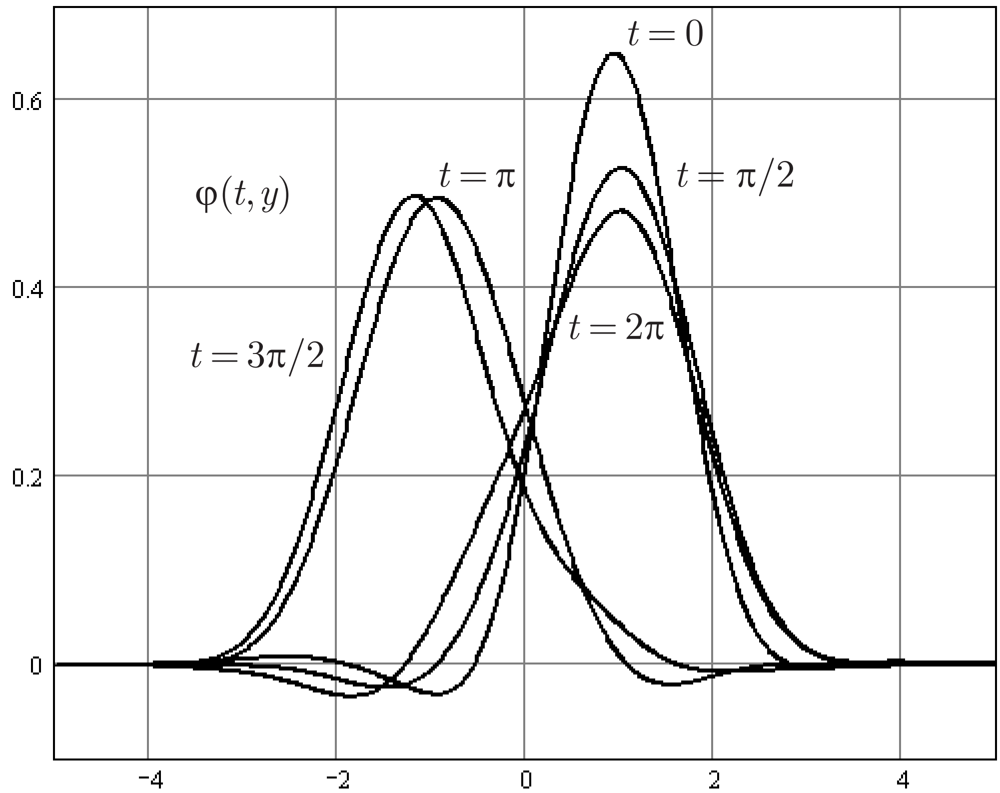

Рис. 2.17. Сечения плотности вероятности состояния системы в различные моменты времени

2.2.3. Определение моментных характеристик в спектральной форме математического описания

Операцию вычисления математического ожидания $m(t)$ вектора состояния в любой момент времени $t \in T$ можно рассматривать как линейный функционал, заданный на пространстве функций вектора состояния с параметром (см. разд. 1.5.2). В этом случае соотношения (2.16) и (2.17) могут быть записаны следующим образом:

$$m_i(t) = \int\limits_{\Omega} x_i \varphi(t,x)\,dx = \mathcal{J}\bigl[x_i \varphi(t,x)\bigr], \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{2.59}$$

$$R_{ij}(t) = \int\limits_{\Omega} x_i x_j \varphi(t,x)\,dx - m_i(t)\,m_j(t) =$$
$$= \mathcal{J}\bigl[x_i x_j \varphi(t,x)\bigr] - m_i(t)\,m_j(t), \quad i,j = 1,2,\ldots,n, \tag{2.60}$$

где $\mathcal{J}$ – линейный функционал, ставящий в соответствие функции вектора состояния интеграл от этой функции по множеству $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{J}h(x) = \int\limits_{\Omega} h(x)\,dx. \tag{2.61}$$

Применим спектральное преобразование к левой и правой частям соотношения (2.59) (см. разд. 1.3.1). Тогда

$$\mathbb{S}\Bigl[m_i(t)\Bigr] = \mathbb{S}\Bigl[\mathcal{J}\bigl[x_i\varphi(t,x)\bigr]\Bigr].$$

Левая часть этого соотношения по определению представляет собой нестационарную спектральную характеристику $M_i(1,0)$ координаты $m_i(t)$ математического ожидания $m(t)$:

$$\mathbb{S}\,[m_i(t)] = M_i(1,0),$$

а правая часть по теореме 1.7 представляется в виде

$$\mathbb{S}\Bigl[\mathcal{J}\bigl[x_i\varphi(t,x)\bigr]\Bigr] = \bigl(E(1,1)\otimes J(0,n)\bigr)\cdot\Bigl(\bigl(E(1,1)\otimes R^{-1}(n,n)\bigr)\cdot H_i(n+1,0)\Bigr),$$

где $J(0,n)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{J}$, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\Omega;\rho(x))$ (см. разд. 1.5.1); $R(n,n)$ – спектральная характеристика оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$, определенная относительно той же базисной системы (см. разд. 1.4.2); $H_i(n+1,0)$ – нестационарная спектральная характеристика функции $h_i(t,x) = x_i\varphi(t,x)$, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$, $Q_T = T\times\Omega$. При этом, согласно свойству спектрального преобразования операторов умножения, определенных на пространстве функций времени и вектора состояния (см. разд. 1.4.2), нестационарная спектральная характеристика $H_i(n+1,0)$ определяется соотношением

$$H_i(n+1,0) = X_i(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0),$$

в котором $X_i(n+1,n+1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_i(t,x) = x_i$, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$; $\Phi(n+1,0)$ – обобщенная характеристическая функция, определенная относительно той же базисной системы.

Следовательно, для нестационарной спектральной характеристики $M_i(1,0)$ функции $m_i(t)$, определенной относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T;\nu(t))$, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} &M_i(1,0) = \big(E(1,1)\otimes J(0,n)\big)\cdot \\ &\quad\cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes R^{-1}(n,n)\big)\cdot X_i(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)\Big), \qquad (2.62)\\ &i = 1,2,\ldots,n. \end{aligned}$$

Далее применим спектральное преобразование к левой и правой частям соотношения (2.60) с учетом свойства линейности спектрального преобразования (см. разд. 1.3.1). Тогда

$$\mathbb{S}\Big[R_{ij}(t)\Big] = \mathbb{S}\Big[\mathcal{J}\big[x_i x_j \varphi(t,x)\big]\Big] - \mathbb{S}\Big[m_i(t)\,m_j(t)\Big]. \qquad (2.63)$$

Левая часть этого выражения представляет собой нестационарную спектральную характеристику $R_{ij}(1,0)$ функции $R_{ij}(t)$, т.е.

$$\mathbb{S}\left[R_{ij}(t)\right] = R_{ij}(1,0).$$

Воспользуемся теоремой 1.7 для представления первого слагаемого в правой части (2.63):

$$\begin{aligned} &\mathbb{S}\Big[\mathcal{J}\big[x_i x_j \varphi(t,x)\big]\Big] = \\ &\quad = \big(E(1,1)\otimes J(0,n)\big)\cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes R^{-1}(n,n)\big)\cdot H_{ij}(n+1,0)\Big), \end{aligned}$$

где $H_{ij}(n+1,0)$ – нестационарная спектральная характеристика функции $h_{ij}(t,x) = x_i x_j\,\varphi(t,x)$, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$. По аналогии с нестационарной спектральной характеристикой $H_i(n+1,0)$ функции $h_i(t,x) = x_i\varphi(t,x)$ запишем выражение для нестационарной спектральной характеристики $H_{ij}(n+1,0)$:

$$H_{ij}(n+1,0) = X_{ij}(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0),$$

где $X_{ij}(n+1,n+1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_{ij}(t,x) = x_i x_j$, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.2), причем

$$X_{ij}(n+1,n+1) = X_i(n+1,n+1) \cdot X_j(n+1,n+1) \tag{2.64}$$

с учетом свойства спектрального преобразования композиции линейных операторов, заданных на пространстве функций времени и вектора состояния (см. разд. 1.4.1).

Для второго слагаемого в правой части (2.63) необходимо применить свойство спектрального преобразования операторов умножения, заданных на пространстве функций времени, согласно которому

$$\mathbb{S}\,[m_i(t)\,m_j(t)] = M_i(1,1) \cdot M_j(1,0),$$

где $M_i(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $m_i(t)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$; $M_j(1,0)$ – нестационарная спектральная характеристика функции $m_j(t)$, определенная относительно той же базисной системы. Нестационарная спектральная характеристика $M_i(1,1)$ в свою очередь выражается через нестационарную спектральную характеристику $M_i(1,0)$ функции $m_i(t)$ и нестационарную спектральную характеристику $V(1,2)$ множительного звена, определенную относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$:

$$M_i(1,1) = V(1,2) \odot M_i(1,0),$$

что следует из утверждения 1.11.

Таким образом, нестационарная спектральная характеристика $R_{ij}(1,0)$ функции $R_{ij}(t)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, задается выражением

$$\begin{aligned} R_{ij}(1,0) = \big(E(1,1) \otimes J(0,n)\big) \cdot \\ \cdot \Big(\big(E(1,1) \otimes R^{-1}(n,n)\big) \cdot X_{ij}(n+1,n+1) \cdot \Phi(n+1,0)\Big) - \\ - \big(V(1,2) \odot M_i(1,0)\big) \cdot M_j(1,0), \quad i,j = 1,2,\ldots,n. \end{aligned}$$

Переход от нестационарных спектральных характеристик $M_i(1,0)$ и $R_{ij}(1,0)$ к соответствующим функциям времени осуществляется по формуле обращения (1.38):

$$m_i(t) = \mathbb{S}^{-1}\,[M_i(1,0)] = \sum_{i_0=0}^{\infty} m_{i\,i_0} \cdot q(i_0,t), \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{2.65}$$

$$R_{ij}(t) = \mathbb{S}^{-1}\,[R_{ij}(1,0)] = \sum_{i_0=0}^{\infty} r_{ij\,i_0} \cdot q(i_0,t), \quad i,j = 1,2,\ldots,n, \tag{2.66}$$

где m_{ii_0} – координаты нестационарной спектральной характеристики $M_i(1,0)$, r_{iji_0} – координаты нестационарной спектральной характеристики $R_{ij}(1,0)$, $t \in T$.

Замечание 2.10.

1. Следует отметить, что, согласно утверждениям 1.13 и 1.15, нестационарная спектральная характеристика $X_i(n+1,n+1)$ представляется в виде

$$X_i(n+1,n+1) = E(1,1) \otimes \underbrace{E(1,1) \otimes \ldots \otimes A_i(1,1) \otimes \ldots \otimes E(1,1)}_{n \text{ сомножителей}},$$
$$i = 1,2,\ldots,n,$$

следовательно, с учетом (2.64) и свойств умножения многомерных матриц (см. разд. 1.2.3) получаем, что

$$X_{ij}(n+1,n+1) =$$
$$= \begin{cases} E(1,1) \otimes \underbrace{E(1,1) \otimes \ldots \otimes A_i^2(1,1) \otimes \ldots \otimes E(1,1)}_{n \text{ сомножителей}}, \ i = j, \\ E(1,1) \otimes \underbrace{E(1,1) \otimes \ldots \otimes A_i(1,1) \otimes \ldots \otimes A_j(1,1) \otimes}_{n \text{ сомножителей}} \\ \qquad \underline{\otimes \ldots \otimes E(1,1)}, \ i \neq j, \end{cases}$$
$$i,j = 1,2,\ldots,n.$$

В приведенных соотношениях $A_l(1,1)$ является спектральной характеристикой оператора умножения на функцию $a_l(x_l) = x_l$, определенной относительно базисной системы $\{p_l(i_l,x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\Omega_l; \rho_l(x_l))$ (см. разд. 1.4.2), $l = 1,2,\ldots,n$.

2. Используя понятия спектральных характеристик линейных функционалов, можно получить соотношения, аналогичные (2.62) и (2.65), для определения нестационарных спектральных характеристик начальных и центральных моментов любого порядка [46] по известной обобщенной характеристической функции.

3. Нестационарные спектральные характеристики $M_i(1,0)$ и $R_{ij}(1,0)$ могут быть получены другим способом, а именно с помощью спектральных характеристик линейных функционалов $\mathcal{M}_{x_i}$ и $\mathcal{M}_{x_ix_j}$, заданных на пространстве функций вектора состояния следующим образом:

$$\mathcal{M}_{x_i} h(x) = \int\limits_{\Omega} x_i h(x)\,dx, \quad \mathcal{M}_{x_ix_j} h(x) = \int\limits_{\Omega} x_i x_j h(x)\,dx,$$
$$i,j = 1,2,\ldots,n.$$

Однако, как показано в [48], такое представление эквивалентно соотношениям (2.62) и (2.65).

Пример 2.10. Записать выражения для нестационарных спектральных характеристик математического ожидания и дисперсии состояния одномерной стохастической системы управления, рассмотренной в примере 2.1.

□ Для одномерной стохастической системы искомые моментные характеристики состояния определяются следующими выражениями (см. замечание 2.4):

$$m(t) = \int\limits_{\Omega} x\varphi(t,x)\,dx,$$

$$D(t) = \int\limits_{\Omega} x^2\varphi(t,x)\,dx - m^2(t),$$

где $\varphi(t,x)$ – плотность вероятности состояния, $(t,x) \in Q_T = T \times \Omega$, $\Omega = \mathbb{R}$.

Пусть $\Phi(2,0)$ – обобщенная характеристическая функция, т.е. нестационарная спектральная характеристика функции $\varphi(t,x)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$, которая была получена в ходе решения примера 2.1.

Напомним (см. пример 2.1), что базисная система $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ выбрана таким образом, что системы функций $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ представляют собой базисы пространств $L_2(T;\nu(t))$ и $L_2(\Omega;\rho(x))$ соответственно.

Нестационарная спектральная характеристика $M(1,0)$ математического ожидания $m(t)$ определяется соотношением (2.62), т.е.

$$M(1,0) = \big(E(1,1) \otimes J(0,1)\big) \cdot \Big(\big(E(1,1) \otimes R^{-1}(1,1)\big) \cdot X_1(2,2) \cdot \Phi(2,0)\Big),$$

где $J(0,1)$ – спектральная характеристика линейного функционала $\mathcal{J}$, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.5.1); $R(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$, определенная относительно той же базисной системы; $X_1(2,2)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_1(t,x) = x$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.2), причем для нестационарной спектральной характеристики $X_1(2,2)$ справедливо представление (см. замечание 2.10)

$$X_1(2,2) = E(1,1) \otimes A(1,1),$$

в котором $A(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a(x) = x$, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$.

Для определения нестационарной спектральной характеристики $D(1,0)$ дисперсии $D(t)$ воспользуемся соотношением (2.65), которое в рассматриваемом случае примет вид

$$D(1,0) = \big(E(1,1) \otimes J(0,1)\big) \cdot$$
$$\cdot \Big(\big(E(1,1) \otimes R^{-1}(1,1)\big) \cdot X_{11}(2,2) \cdot \Phi(2,0)\Big) -$$
$$- \big(V(1,2) \odot M(1,0)\big) \cdot M(1,0),$$

где $X_{11}(2,2)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_{11}(t,x) = x^2$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$, которая, согласно (2.64), представляется в виде

$$X_{11}(2,2) = E(1,1) \otimes A^2(1,1).$$

Кроме того, $V(1,2)$ – нестационарная спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.2).

Заметим, что если весовая функция $\rho(x)$ тождественно равна единице, то выражения для нестационарных спектральных характеристик $M(1,0)$ и $D(1,0)$ можно упростить, поскольку в этом случае спектральная характеристика $R(1,1)$ оператора умножения на функцию $\rho(x)$ представляет собой двумерную единичную матрицу $E(1,1)$. Следовательно, с учетом (1.33) получаем

$$E(1,1) \otimes R^{-1}(1,1) = E(1,1) \otimes E^{-1}(1,1) = E(1,1) \otimes E(1,1) = E(2,2).$$

Тогда

$$M(1,0) = \big(E(1,1) \otimes J(0,1)\big) \cdot \big(X_1(2,2) \cdot \Phi(2,0)\big),$$
$$D(1,0) = \big(E(1,1) \otimes J(0,1)\big) \cdot \big(X_{11}(2,2) \cdot \Phi(2,0)\big) -$$
$$- \big(V(1,2) \odot M(1,0)\big) \cdot M(1,0).$$

Переход от нестационарных спектральных характеристик $M(1,0)$ и $D(1,0)$ к соответствующим функциям времени осуществляется по формулам (2.65) и (2.66) с учетом того, что в одномерном случае вместо обозначения $R(t)$ используется обозначение $D(t)$. ■

Методика расчета моментных характеристик

Перечислим этапы, необходимые для расчета математического ожидания и ковариационной матрицы вектора состояния. При этом будем предполагать, что для представления функций $m_i(t)$ и $R_{ij}(t)$ используется базисная система $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, для представления линейного функционала $\mathcal{J}$

и оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$ применяется базисная система $\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$, а для представления операторов умножения на функции $a_i(t, x) = x_i$ и $a_{ij}(t, x) = x_i x_j$ – базисная система $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$.

1–6. Найти плотность вероятности $\varphi(t, x)$ согласно методике, изложенной в разд. 2.2.1.

7. Записать соотношения для моментных характеристик вектора состояния:

$$m(t) = \begin{bmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ \vdots \\ m_n(t) \end{bmatrix}, \quad R(t) = \begin{bmatrix} R_{11}(t) & R_{12}(t) & \ldots & R_{1n}(t) \\ R_{21}(t) & R_{22}(t) & \ldots & R_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1}(t) & R_{n2}(t) & \ldots & R_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

где

$$m_i(t) = \int\limits_{\Omega} x_i \varphi(t, x)\, dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{XV}$$

$$R_{ij}(t) = \int\limits_{\Omega} x_i x_j \varphi(t, x)\, dx - m_i(t) m_j(t), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{XVI}$$

8. Вычислить:

а) спектральные характеристики:

1) $J(0, n)$ – спектральную характеристику функционала $\mathcal{J}$ (см. разд. 1.5.1);

2) $R(n, n)$ – спектральную характеристику оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$ (см. разд. 1.4.2);

б) нестационарные спектральные характеристики:

1) $X_i(n+1, n+1)$ – нестационарную спектральную характеристику оператора умножения на функцию $a_i(t, x) = x_i$ (см. разд. 1.4.2), $i = 1, 2, \ldots, n$;

2) $X_{ij}(n+1, n+1)$ – нестационарную спектральную характеристику оператора умножения на функцию $a_{ij}(t, x) = x_i x_j$ (см. разд. 1.4.2), $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

в) нестационарную спектральную характеристику $V(1, 2)$ множительного звена (см. разд. 1.4.2).

9. Найти нестационарные спектральные характеристики $M_i(1,0)$ функций $m_i(t)$, используя соотношение

$$\begin{gathered} M_i(1,0) = \big(E(1,1) \otimes J(0,n)\big) \cdot \\ \cdot \Big(\big(E(1,1) \otimes R^{-1}(n,n)\big) \cdot X_i(n+1,n+1) \cdot \Phi(n+1,0)\Big), \\ i = 1,2,\ldots,n, \end{gathered} \tag{XVII}$$

и нестационарные спектральные характеристики $R_{ij}(1,0)$ функций $R_{ij}(t)$, используя формулу

$$\begin{gathered} R_{ij}(1,0) = \big(E(1,1) \otimes J(0,n)\big) \cdot \\ \cdot \Big(\big(E(1,1) \otimes R^{-1}(n,n)\big) \cdot X_{ij}(n+1,n+1) \cdot \Phi(n+1,0)\Big) - \\ - \big(V(1,2) \odot M_i(1,0)\big) \cdot M_j(1,0), \quad i,j = 1,2,\ldots,n. \end{gathered} \tag{XVIII}$$

10. Получить выражения для функций $m_i(t)$ и $R_{ij}(t)$ по найденным нестационарным спектральным характеристикам $M_i(1,0)$ и $R_{ij}(1,0)$ соответственно, применяя формулы обращения

$$m_i(t) = \sum_{i_0=0}^{\infty} m_{i\,i_0} \cdot q(i_0,t), \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{XIX}$$

где $m_{i\,i_0}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $M_i(1,0)$, $t \in T$;

$$R_{ij}(t) = \sum_{i_0=0}^{\infty} r_{ij\,i_0} \cdot q(i_0,t), \quad i,j = 1,2,\ldots,n, \tag{XX}$$

где $r_{ij\,i_0}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $R_{ij}(1,0)$, $t \in T$.

Замечание 2.11. При задании порядков усечения спектральных характеристик для численного решения (см. замечание 2.7) соотношения (XIX) и (XX) примут вид

$$m_i(t) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} m_{i\,i_0} \cdot q(i_0,t), \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

где $m_{i\,i_0}$ – элементы матрицы-столбца $M_i(1,0)$, $t \in T$;

$$R_{ij}(t) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} r_{ij\,i_0} \cdot q(i_0,t), \quad i,j = 1,2,\ldots,n,$$

где $r_{ij\,i_0}$ – элементы матрицы-столбца $R_{ij}(1,0)$, $t \in T$.

Пример 2.11. Найти математическое ожидание и дисперсию состояния одномерной стохастической системы управления, рассмотренной в примере 2.7.

□ Воспользуемся методикой расчета моментных характеристик.

1–6. При решении примера 2.7, согласно методике расчета плотности вероятности, была найдена обобщенная характеристическая функция $\Phi(2,0)$, т.е. нестационарная спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi(t,x)$, определенная относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0,t)\,\hat{P}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$.

7. Запишем соотношения для математического ожидания $m(t)$ и дисперсии $D(t)$:

$$m(t) = \int\limits_{\Omega} x\varphi(t,x)\,dx,$$

$$D(t) = \int\limits_{\Omega} x^2\varphi(t,x)\,dx - m^2(t).$$

8. Вычислим спектральную характеристику $J(0,1)$ линейного функционала $\mathcal{J}$, ставящего в соответствие функции одной переменной интеграл от этой функции по множеству Ω (см. (2.61)), относительно системы полиномов Лежандра $\{\hat{P}(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ по определению (1.85):

$$J(0,1) = (J_{i_1}),$$

где

$$J_{i_1} = \big(p^*(i_1,x), w(x)\big)_{L_2(\Omega)}, \quad i_1 = 0,1,2,\ldots\ .$$

Линейному функционалу $\mathcal{J}$ соответствует функция $w(x)=1$ (см. примеры линейных функционалов в разд. 1.5.1), поэтому

$$J_{i_1} = \int\limits_0^4 \hat{P}(i_1,x)\,dx, \quad i_1 = 0,1,2,\ldots\ .$$

Для нестационарных спектральных характеристик $X_1(2,2)$ и $X_{11}(2,2)$ операторов умножения на функции $a_1(t,x)=x$ и $a_{11}(t,x)=x^2$ соответственно, определенных относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0,t)\,\hat{P}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$, справедливы следующие соотношения (см. замечание 2.10):

$$X_1(2,2) = E(1,1)\otimes A(1,1),$$

$$X_{11}(2,2) = E(1,1)\otimes A^2(1,1),$$

в которых $A(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a(x)=x$, вычисленная относительно системы полиномов Лежандра $\{\hat{P}(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ (см. примеры спектральных характеристик оператора умножения на функцию $a(x)=x$ в разд. 1.4.2).

Нестационарная спектральная характеристика $V(1,2)$ множительного звена (см. разд. 1.4.2), определенная относительно системы полиномов Лежандра $\{\hat{P}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, задается выражением

$$V(1,2) = (v_{i_0 j_0 k_0}),$$

где

$$v_{i_0 j_0 k_0} = \big(q(i_0,t), q(j_0,t)\cdot q(k_0,t)\big)_{L_2(T)} = \int\limits_0^2 \hat{P}(i_0,t)\,\hat{P}(j_0,t)\,\hat{P}(k_0,t)\,dt,$$

$$i_0, j_0, k_0 = 0,1,2,\ldots\ .$$

9. Нестационарные спектральные характеристики $M(1,0)$ и $D(1,0)$ функций $m(t)$ и $D(t)$ соответственно, определенные относительно системы полиномов Лежандра $\{\hat{P}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, выражаются следующим образом (см. (XVII) и (XVIII)):

$$\begin{aligned}
M(1,0) &= \big(E(1,1)\otimes J(0,1)\big)\cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes R^{-1}(1,1)\big)\cdot X_1(2,2)\cdot\Phi(2,0)\Big),\\
D(1,0) &= \big(E(1,1)\otimes J(0,1)\big)\cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes R^{-1}(1,1)\big)\cdot X_{11}(2,2)\cdot\Phi(2,0)\Big) -\\
&\quad - \big(V(1,2)\odot M(1,0)\big)\cdot M(1,0),
\end{aligned}$$

однако, так как матрица $R(1,1)$ является единичной, эти соотношения можно упростить (см. пример 2.10):

$$\begin{aligned}
M(1,0) &= \big(E(1,1)\otimes J(0,1)\big)\cdot\big(X_1(2,2)\cdot\Phi(2,0)\big),\\
D(1,0) &= \big(E(1,1)\otimes J(0,1)\big)\cdot\big(X_{11}(2,2)\cdot\Phi(2,0)\big) -\\
&\quad - \big(V(1,2)\odot M(1,0)\big)\cdot M(1,0),
\end{aligned}$$

при этом

$$M(1,0) = (m_{i_0}),\quad D(1,0) = (d_{i_0}),$$

где

$$m_{i_0} = \big(q(i_0,t), m(t)\big)_{L_2(T)} = \int\limits_0^2 \hat{P}(i_0,t)m(t)\,dt,$$

$$d_{i_0} = \big(q(i_0,t), D(t)\big)_{L_2(T)} = \int\limits_0^2 \hat{P}(i_0,t)\,D(t)\,dt,$$

$$i_0 = 0,1,2,\ldots\ .$$

10. Используя формулы обращения (XIX) и (XX), получаем выражения для искомых моментных характеристик:

$$m(t) = \mathbb{S}^{-1}\left[M(1,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty} m_{i_0} \cdot \hat{P}(i_0, t),$$
$$D(t) = \mathbb{S}^{-1}\left[D(1,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty} d_{i_0} \cdot \hat{P}(i_0, t),$$

где m_{i_0} и d_{i_0} – координаты нестационарных спектральных характеристик $M(1,0)$ и $D(1,0)$ соответственно, $t \in [0,2]$.

С учетом задания порядка L_0 усечения спектральных характеристик (см. замечание 2.11) формулы обращения примут вид

$$m(t) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} m_{i_0} \cdot \hat{P}(i_0, t),$$
$$D(t) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} d_{i_0} \cdot \hat{P}(i_0, t),$$

где m_{i_0} и d_{i_0} – элементы матриц-столбцов $M(1,0)$ и $D(1,0)$ соответственно, $t \in [0,2]$. Положим $L_0 = 16$.

Графики математического ожидания $m(t)$ и дисперсии $D(t)$ приведены на рис. 2.18 и 2.19 соответственно. ∎

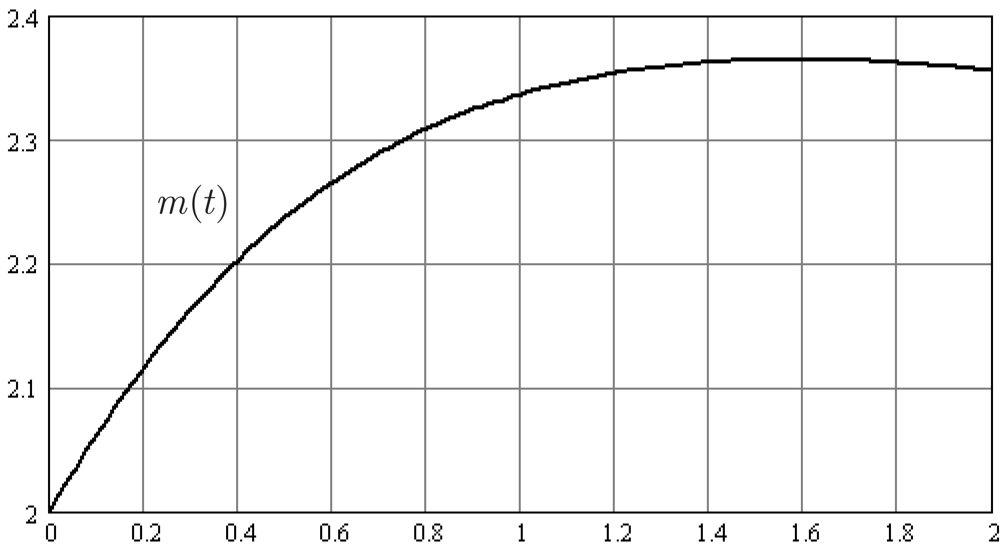

Рис. 2.18. Математическое ожидание состояния системы

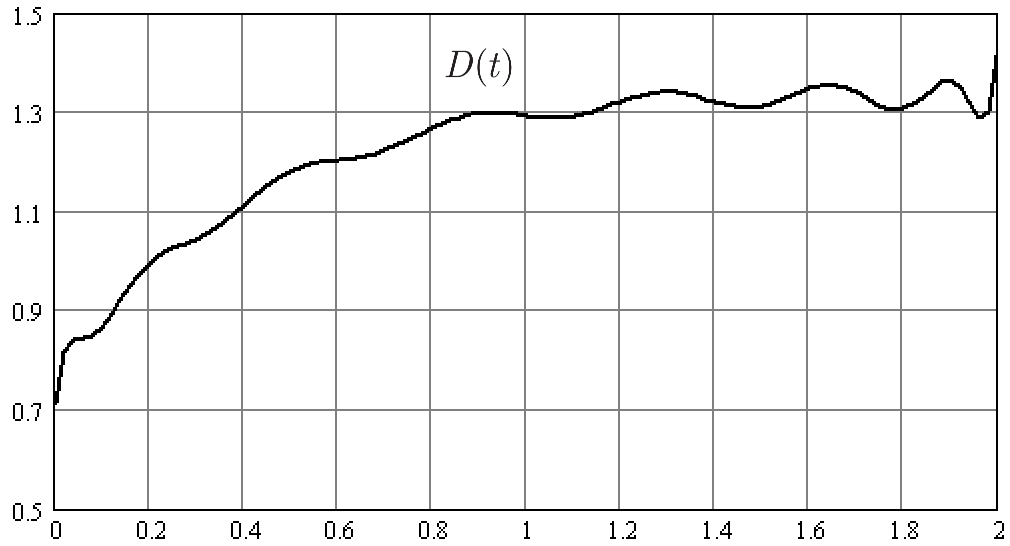

Рис. 2.19. Дисперсия состояния системы

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Записать уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова и уравнение обобщенной характеристической функции для двумерной стохастической системы, заданной уравнениями Ито

$$dX_1(t) = f_1\left(t, X_1(t), X_2(t)\right)dt + \sigma_1\left(t, X_1(t), X_2(t)\right)dW_1(t),$$

$$dX_2(t) = f_2\left(t, X_1(t), X_2(t)\right)dt + \sigma_2\left(t, X_1(t), X_2(t)\right)dW_2(t),$$

$$X_1(t_0) = X_{10}, \quad X_2(t_0) = X_{20},$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, $X_1 \in \Omega_1 = [a_1, b_1]$, $X_2 \in \Omega_2 = [a_2, b_2]$, $W_1(t)$, $W_2(t)$ – одномерные стандартные винеровские случайные процессы, не зависящие от X_{10} и X_{20}, при условии:

а) поглощения на границе множества $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$;

б) отражения на границе множества $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

Начальное состояние $[X_{10}\ X_{20}]^{\mathrm{T}}$ определяется заданной плотностью вероятности $\varphi_0(x_1, x_2)$.

2. По известной нестационарной спектральной характеристике плотности вероятности $\varphi(t, x_1, x_2, x_3)$ вектора состояния трехмерной стохастической системы управления найти нестационарные спектральные характеристики маргинальных плотностей вероятности $\varphi_{(1)}(t, x_1)$, $\varphi_{(12)}(t, x_1, x_2)$, $\varphi_{(3)}(t, x_3)$ и условной плотности вероятности $\varphi_{(3|12)}(t, x_3 \mid x_1, x_2)$.

3. Записать выражения для нестационарных спектральных характеристик координат математического ожидания и элементов ковариационной

матрицы вектора состояния двумерной стохастической системы управления, рассмотренной в примере 2.2.

4. Решить задачу анализа одномерной стохастической системы управления, заданной уравнением Ито

$$dX(t) = -\operatorname{sign}(X(t))\,dt + \mathrm{e}^{0.1nt}dW(t),$$

где $t \in T = [0, 2]$, $X \in \Omega = \mathbb{R}$, $X(0) = X_0$ – случайная величина, имеющая распределение:

а) гауссовское с параметрами $m_0 = 0$ и $D_0 = 1$;

б) равномерное на отрезке $[-2, 2]$.

5. Решить задачу анализа одномерной стохастической системы управления, заданной уравнением Ито

$$dX(t) = -\sin(2X(t))\,dt + 0.25\,dW(t),$$

где $t \in T = [0, 10]$, $X \in \Omega = \mathbb{R}$, $X(0) = X_0$ – случайная величина, имеющая распределение:

а) гауссовское с параметрами $m_0 = n$ и $D_0 = 1$;

б) равномерное на отрезке $[-5, 5]$.

6. Решить задачу анализа одномерной стохастической системы управления, заданной уравнением Ито

$$dX(t) = -\mathrm{e}^{-t}\operatorname{sign}(X(t))\,dt + dW(t),$$

где $t \in T = [0, 3]$, $X \in \Omega = \mathbb{R}$, $X(0) = X_0$ – случайная величина, имеющая гауссовское распределение с параметрами:

а) $m_0 = 0$ и $D_0 = 1$;

б) $m_0 = 2$ и $D_0 = 1$;

в) $m_0 = -2$ и $D_0 = 1$.

7. Решить задачу анализа одномерной стохастической системы управления, заданной уравнением Ито

$$dX(t) = -X^2(t)\sin(2\pi t)\,dt + \frac{1}{2}\,dW(t),$$

где $t \in T = [0, 4]$, $X \in \Omega = [0, n]$, $X(0) = X_0$ – случайная величина, имеющая гауссовское распределение с параметрами:

а) $m_0 = 1$ и $D_0 = 2$;

б) $m_0 = 2$ и $D_0 = 1$;

в) $m_0 = 3$ и $D_0 = 0.5$;

при условии:

а) поглощения на границе множества Ω;

б) отражения на границе множества Ω.

8. Решить задачу анализа двумерной стохастической системы управления, заданной уравнениями Ито

$$
\begin{aligned}
dX_1(t) &= X_2(t)dt + dW_1(t),\\
dX_2(t) &= \frac{n}{5}\,dW_2(t),
\end{aligned}
$$

где $t \in T = [0, 2]$, $X \in \Omega = \mathbb{R}^2$, $X(0) = [X_{10}\ X_{20}]^{\mathrm{T}}$ – случайная величина, имеющая гауссовское распределение с параметрами:

а) $m_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $m_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$;

в) $m_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $R_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$.

9. Решить задачу анализа нелинейной детерминированной системы управления второго порядка, заданной уравнением

$$
\begin{aligned}
&\ddot{Y}(t) + \frac{1}{2}\operatorname{sign}\dot{Y}(t) + Y(t) = 0,\\
&Y(0) = Y_0,\\
&\dot{Y}(0) = \dot{Y}_0,
\end{aligned}
$$

где $t \in T = [0, 2\pi]$, $Y \in \mathbb{R}$, Y_0 и $\dot{Y}_0$ – независимые случайные величины, имеющие гауссовское распределение с математическим ожиданием $m_0 = \frac{n}{2}$ и дисперсией $D_0 = \frac{1}{5}$.

10. Найти математическое ожидание и дисперсию состояния одномерной стохастической системы управления, заданной уравнением Ито

$$
dX(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(X(t) - \frac{n}{10}\right)dt + dW(t),
$$

где $t \in T = [0, 5]$, $X \in \Omega = \mathbb{R}$, $X(0) = X_0$ – случайная величина, имеющая гауссовское распределение с параметрами:

а) $m_0 = 2$ и $D_0 = 1$;

б) $m_0 = 0$ и $D_0 = 0.5$;

в) $m_0 = -2$ и $D_0 = 1$.

ГЛАВА 3

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

3.1.1. Описание стохастических систем управления со случайной структурой

Каждая структура модели мультиструктурной системы управления описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито [36, 39, 83]

$$dX(t) = f^{<k>}(t, X(t))\, dt + \sigma^{<k>}(t, X(t))\, dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{3.1}$$
$$k = 1, 2, \ldots, N,$$

где X – вектор состояния, $X = [X_1 \ \ X_2 \ \ \ldots \ \ X_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$; $t \in T$, T – заданный промежуток времени функционирования системы, представляющий собой конечный отрезок $[t_0, t_1]$ или полубесконечный промежуток $[t_0, +\infty)$; $W(t)$ – s-мерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от X_0; k – номер структуры, N – число структур системы; $f^{<k>}(t,x):\ T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – вектор-функция размера $n \times 1$, $\sigma^{<k>}(t,x):$ $T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times s}$ – матричная функция размера $n \times s$, т.е.

$$f^{<k>}(t,x) = \begin{bmatrix} f_1^{<k>}(t,x) \\ f_2^{<k>}(t,x) \\ \vdots \\ f_n^{<k>}(t,x) \end{bmatrix},$$

$$\sigma^{<k>}(t,x) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{<k>}(t,x) & \sigma_{12}^{<k>}(t,x) & \ldots & \sigma_{1s}^{<k>}(t,x) \\ \sigma_{21}^{<k>}(t,x) & \sigma_{22}^{<k>}(t,x) & \ldots & \sigma_{2s}^{<k>}(t,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1}^{<k>}(t,x) & \sigma_{n2}^{<k>}(t,x) & \ldots & \sigma_{ns}^{<k>}(t,x) \end{bmatrix}.$$

Начальное состояние системы определяется заданными ненормированными плотностями вероятности $\varphi_0^{<k>}(x)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, при этом выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0^{<k>}(x)\,dx = 1. \tag{3.2}$$

Процесс смены структуры $K(t) : T \to \{1, 2, \ldots, N\}$, характеризующий правую часть уравнения (3.1), удовлетворяет условию [26, 90]

$$\mathbb{P}\big(K(t + \Delta t) = r \mid K(t) = k,\ X(t) = x\big) = \lambda_{kr}(t, x)\Delta t + o(\Delta t), \tag{3.3}$$

$$K(t_0) = K_0, \quad k, r = 1, 2, \ldots, N, \quad k \neq r,$$

где функция $\lambda_{kr}(t, x) : T \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ называется **интенсивностью перехода**. Данное условие обеспечивает при любом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$ отсутствие нескольких переключений процесса смены структуры за малый интервал времени Δt. Выражения для функций $\lambda_{kr}(t, x)$ могут быть различными в зависимости от существа решаемой задачи [17, 23].

Стохастические мультиструктурные системы, процесс смены структуры в которых удовлетворяет условию (3.3), называются **системами с распределенными переходами**.

Следует отметить, что начальное состояние K_0 для случайного процесса $K(t)$ характеризуется вероятностями $\mathbb{P}_0^{<k>}$ активности структуры с номером k в начальный момент времени, которые выражаются через ненормированные плотности вероятности $\varphi_0^{<k>}(x)$ начального состояния X_0:

$$\mathbb{P}_0^{<k>} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0^{<k>}(x)\,dx,$$

$$k = 1, 2, \ldots, N,$$

причем случайный процесс $K(t)$ описывается стохастическим дифференциальным уравнением [46, 90]

$$dK(t) = \sum_{r=1}^{N} (r - K(t))\,dP_r(t), \quad K(t_0) = K_0, \tag{3.4}$$

где $P_r(t)$ – простой пуассоновский процесс переходов в структуру с номером r.

Как показано в [46], уравнения (3.1) и (3.4) могут быть приведены к общей форме уравнения Ито. При этом расширенным вектором состояния будет вектор $[X \;\; K]^{\mathrm{T}}$, составленный из координат вектора состояния X и номера структуры K.

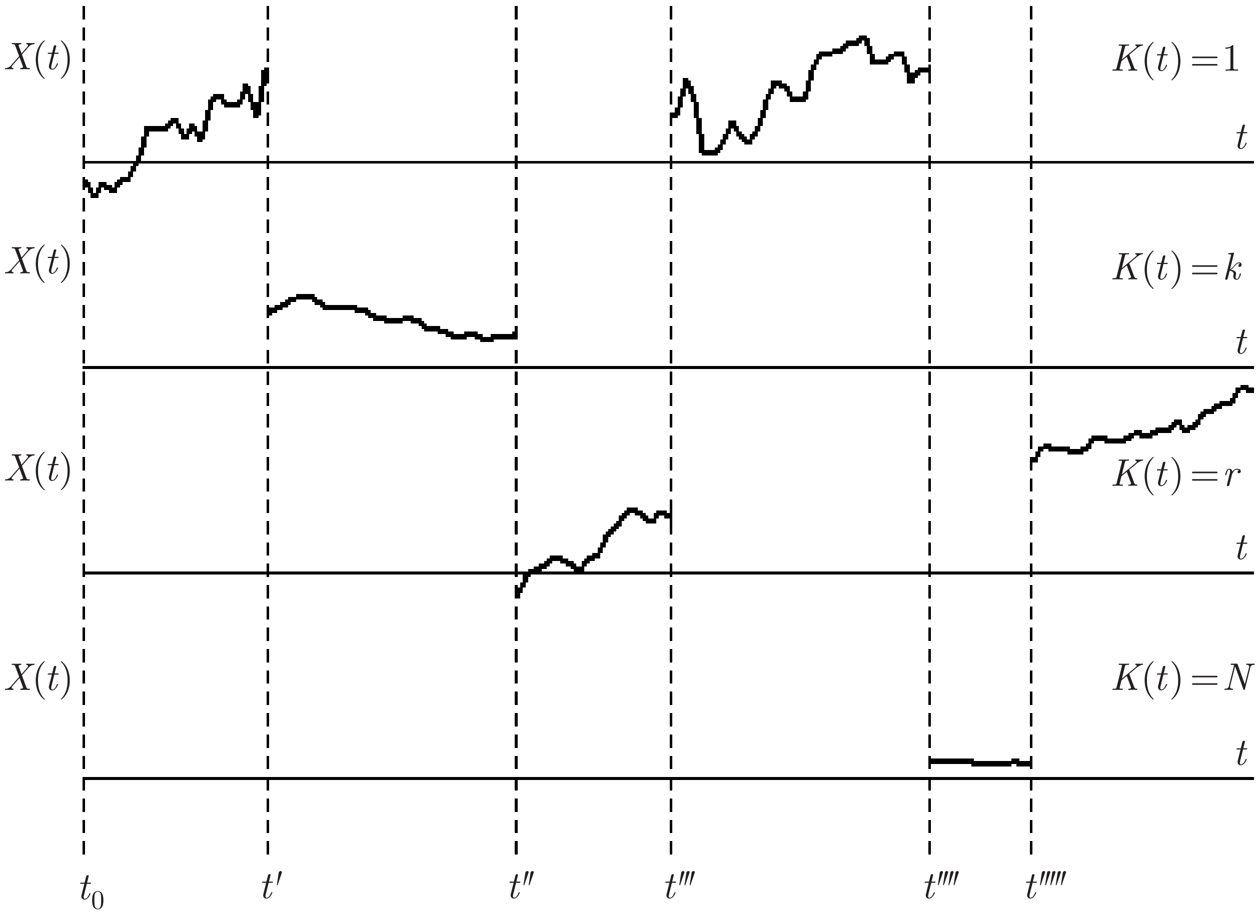

Рис. 3.1. Поведение траекторий одномерного случайного процесса $X(t)$ при смене структуры (t', t'', t''', … – моменты смены структуры; номер структуры $K(t)$ последовательно принимает значения 1, k, r, 1, N, r, где $1 < k < r < N$)

В момент времени t смены номера структуры с k на r наблюдается следующее явление (см. [4] и рис. 3.1). Траектория, соответствующая структуре с номером $K(t) = k$, поглощается, а в следующий момент $t + 0$ восстанавливается траектория, соответствующая структуре с номером $K(t) = r$, где $k, r \in \{1, 2, \ldots, N\}$ и $k \neq r$. При этом траектория случайного процесса $X(t)$ может быть как непрерывной (рис. 3.2), так и разрывной.

При разрыве траектории возможны два случая:

1) **зависимое восстановление реализаций**, при котором значения координат вектора состояния в момент смены структуры t и в следующий момент $t + 0$ связаны между собой, например, $X(t + 0) = X(t) - x'$, где x' – заданный вектор (рис. 3.3);

2) **независимое восстановление реализаций**, при котором значения координат вектора состояния в момент смены структуры t и в следующий момент $t + 0$ не связаны, например, траектория случайного процесса $X(t)$ после переключения структуры начинается с заданной функции $a(t)$ (рис. 3.4).

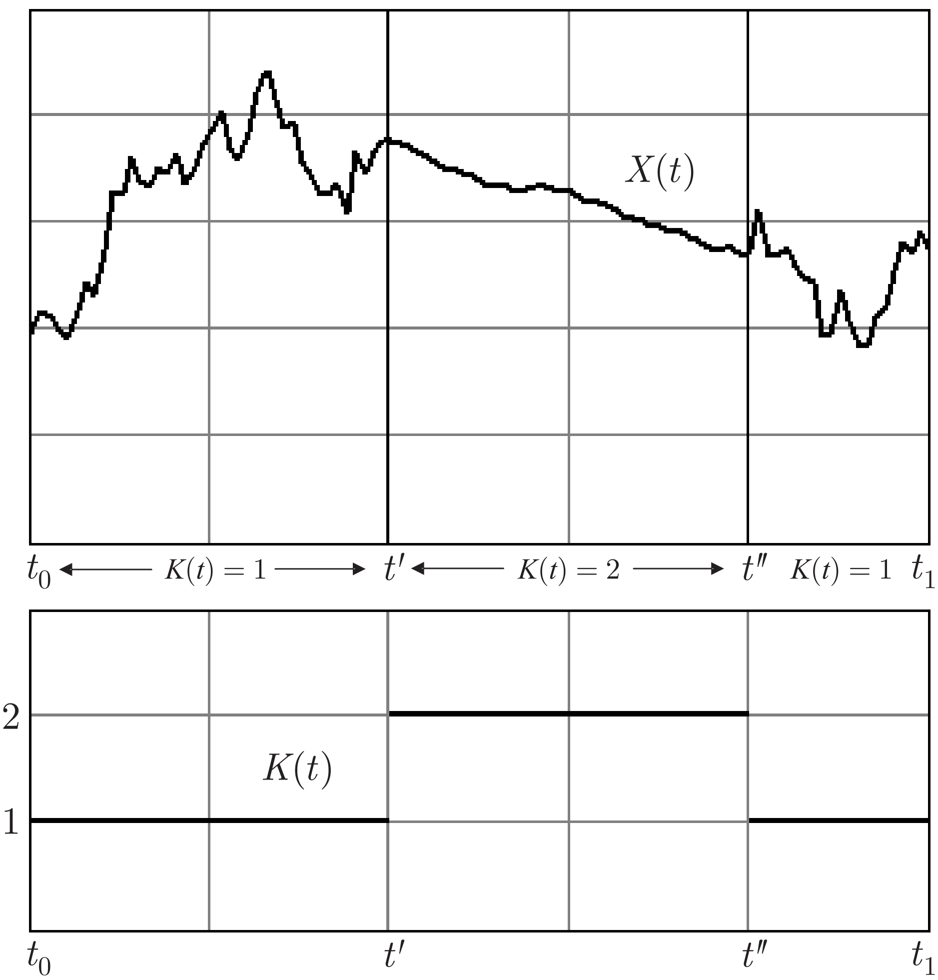

Рис. 3.2. Траектория непрерывного одномерного случайного процесса $X(t)$ для системы с двумя структурами и траектория соответствующего процесса смены структуры $K(t)$ (t' и t'' – моменты смены структуры, $n = 1$, $N = 2$)

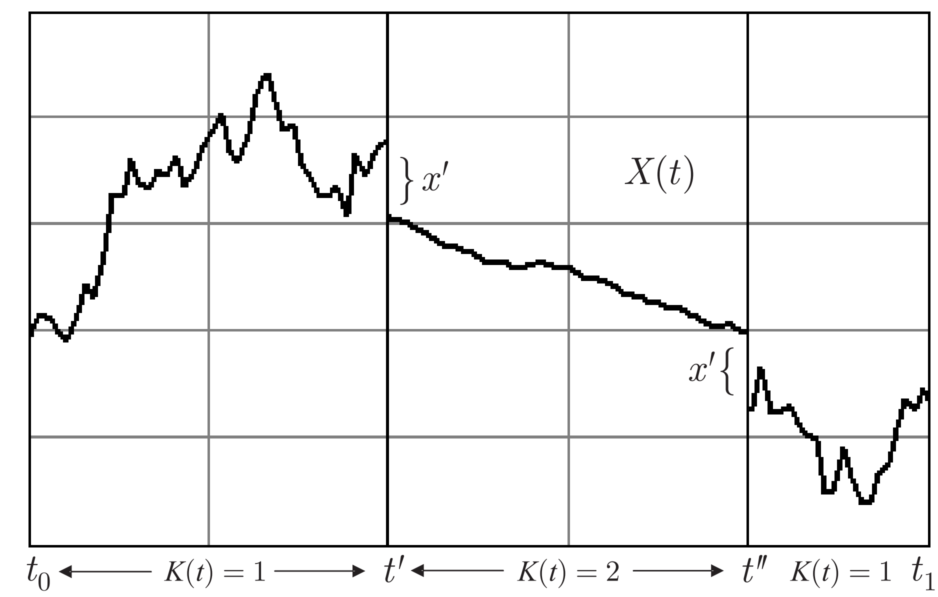

Рис. 3.3. Траектория разрывного одномерного случайного процесса $X(t)$ для системы с двумя структурами с зависимыми условиями восстановления (t' и t'' – моменты смены структуры, величина $x' > 0$ задана, $n = 1$, $N = 2$)

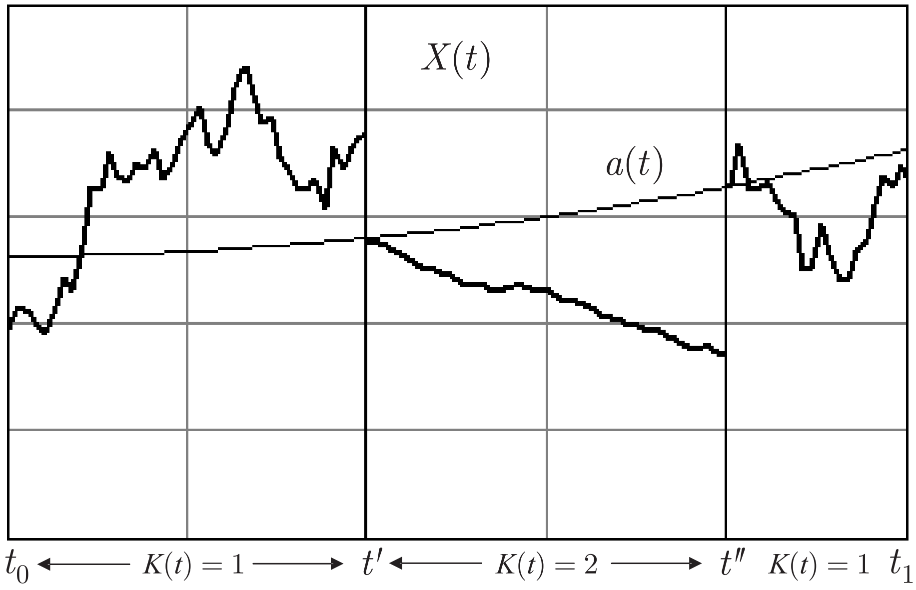

Рис. 3.4. Траектория разрывного одномерного случайного процесса $X(t)$ для системы с двумя структурами с независимыми условиями восстановления (t' и t'' – моменты смены структуры, $n=1$, $N=2$)

Значение координат вектора состояния в момент $t+0$, при условии, что $X(t)=\tilde{x}$, характеризуется нормированной **условной плотностью вероятности восстановления реализаций** $q_{kr}(t,x \mid \tilde{x})$ (см. [25, 26, 85, 91]):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} q_{kr}(t,x \mid \tilde{x})dx = 1, \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \quad k,r = 1,2,\ldots,N, \quad k \neq r.$$

Так, если траектория случайного процесса $X(t)$ непрерывна (см. рис. 3.2), т.е. при **точном восстановлении реализаций**, справедливо равенство

$$q_{kr}(t,x \mid \tilde{x}) = \delta(x-\tilde{x})$$

при любых $t \in T$ и $x,\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$.

При разрыве траектории случайного процесса $X(t)$ в случае зависимого восстановления реализаций, например, если $X(t+0) = X(t) - x'$ (см. рис. 3.3), условная плотность восстановления реализаций имеет вид

$$q_{kr}(t,x \mid \tilde{x}) = \delta(x-\tilde{x}+x')$$

при любых $t \in T$, где элемент $x' \in \mathbb{R}^n$ задан.

При независимом восстановлении реализаций, если траектория случайного процесса $X(t)$ после переключения структуры начинается с заданной функции $a(t)$ (см. рис. 3.4), условная плотность восстановления реализаций определяется равенством

$$q_{kr}(t,x \mid \tilde{x}) = \delta(x-a(t))$$

для произвольных $t \in T$ и $x,\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$.

Возможны и другие способы задания функций $q_{kr}(t,x \mid \tilde{x})$, описанные в [4, 77]. В частности, функции $q_{kr}(t,x \mid \tilde{x})$ могут задаваться по-разному для различных значений k и r.

Более подробно условия смены структуры и возможные ситуации в момент переключения описаны в [4, 5, 15, 23, 24, 25, 26, 46, 77]. Методы численного моделирования систем со случайной структурой и в частности случайного процесса $K(t)$ изложены в [1, 2].

Задача анализа систем управления со случайной структурой заключается в следующем. По заданному уравнению системы (3.1), ненормированным плотностям вероятности $\varphi_0^{<k>}(x)$ начального состояния X_0, интенсивностям переходов $\lambda_{kr}(t,x)$ и условным плотностям вероятности восстановления реализаций $q_{kr}(t,x \mid \tilde{x})$ требуется найти **ненормированные плотности вероятности** $\varphi^{<k>}(t,x)$ вектора состояния для всех структур, входящих в систему.

Замечание 3.1. Функция $\varphi^{<k>}(t,x)$ представляет собой **совместную плотность вероятности** $\varphi(t,x,k)$ вектора состояния X и номера структуры K, т.е. вектора $[X \quad K]^{\mathrm{T}}$, при фиксированном k, а функция

$$\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x) = \frac{\varphi^{<k>}(t,x)}{\mathbb{P}^{<k>}(t)}, \quad k = 1,2,\ldots,N, \tag{3.5}$$

где $\mathbb{P}^{<k>}(t)$ – вероятность активности структуры с номером k в заданный момент времени, определяемая соотношением

$$\mathbb{P}^{<k>}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^{<k>}(t,x)\,dx, \quad k = 1,2,\ldots,N, \tag{3.6}$$

является **условной плотностью вероятности** $\varphi(t,x \mid k)$.

Таким образом, решением задачи анализа нелинейных систем со случайной структурой является упорядоченная совокупность ненормированных плотностей вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$, $k = 1,2,\ldots,N$, которая характеризует закон распределения вектора состояния X в момент времени t и несет информацию о процессе смены структуры $K(t)$.

Изложим операторный подход к описанию процесса смены структур. Известно [4, 23, 25, 26, 85], что поглощение реализаций случайного процесса $X(t)$ при переходе от структуры с номером k к структуре с номером r характеризуется функцией $b_{kr}(t,x): \ T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которая называется **функцией поглощения** и в общем случае задается в виде

$$b_{kr}(t,x) = \begin{cases} \mathcal{B}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x), \ k \neq r, \\ 0, \ k = r, \end{cases} \tag{3.7}$$

где $\mathcal{B}_{kr}$ – линейный оператор, заданный на пространстве функций времени и вектора состояния, $\varphi^{<k>}(t,x)$ – ненормированная плотность вероятности вектора состояния для структуры с номером k.

В рассматриваемом случае, т.е. когда процесс смены структуры $K(t)$ удовлетворяет условию (3.3), оператор $\mathcal{B}_{kr}$ определяется следующим образом [4, 23, 26]:

$$\begin{gathered}\mathcal{B}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x) = \lambda_{kr}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x), \\ k,r = 1,2,\ldots,N, \quad k \neq r,\end{gathered} \tag{3.8}$$

и, следовательно,

$$b_{kr}(t,x) = \begin{cases} \lambda_{kr}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x), \ k \neq r, \\ 0, \ k = r. \end{cases}$$

Восстановление реализаций случайного процесса $X(t)$ при переходе от структуры с номером r к структуре с номером k с учетом условного закона распределения вектора состояния в момент времени, следующий за моментом переключения структуры, определяемого условной плотностью восстановления реализаций $q_{rk}(t,x \mid \tilde{x})$, характеризуется функцией $h_{rk}(t,x): \ T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Функция $h_{rk}(t,x)$ называется **функцией восстановления** и для нее справедливо соотношение

$$h_{rk}(t,x) = \begin{cases} \mathcal{H}_{rk}\varphi^{<r>}(t,x), \ k \neq r, \\ 0, \ k = r, \end{cases} \tag{3.9}$$

где $\mathcal{H}_{rk}$ – линейный оператор, заданный на пространстве функций времени и вектора состояния.

В случае, когда процесс смены структуры $K(t)$ удовлетворяет условию (3.3), имеем [4, 23, 26]

$$\begin{gathered}\mathcal{H}_{rk}\varphi^{<r>}(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lambda_{rk}(t,\tilde{x})\varphi^{<r>}(t,\tilde{x})q_{rk}(t,x \mid \tilde{x})\,d\tilde{x}, \\ k,r = 1,2,\ldots,N, \quad k \neq r,\end{gathered} \tag{3.10}$$

т.е.

$$h_{rk}(t,x) = \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lambda_{rk}(t,\tilde{x})\varphi^{<r>}(t,\tilde{x})q_{rk}(t,x \mid \tilde{x})\,d\tilde{x}, \ k \neq r, \\ 0, \ k = r. \end{cases}$$

Замечание 3.2.

1. Нетрудно видеть, что при точном восстановлении реализаций случайного процесса $X(t)$, т.е. при $q_{kr}(t,x \mid \tilde{x}) = \delta(x-\tilde{x})$, справедливо равенство

$$b_{kr}(t,x) = h_{kr}(t,x), \quad k,r = 1,2,\ldots,N, \tag{3.11}$$

т.е. операторы $\mathcal{B}_{kr}$ и $\mathcal{H}_{kr}$ совпадают.

2. Функции $b_{kr}(t,x)$ и $h_{rk}(t,x)$ имеют смысл локального стока и истока вероятности [23] или плотности потоков поглощения и восстановления [4].

3.1.2. Обобщенные уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова

Известно [4, 23, 24, 25, 26, 85], что ненормированные плотности вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$ вектора состояния удовлетворяют **обобщенным уравнениям Фоккера – Планка – Колмогорова**:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \varphi^{<k>}(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_i^{<k>}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x)\right] + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[g_{ij}^{<k>}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x)\right] - \\ - \sum_{r=1}^{N} b_{kr}(t,x) + \sum_{r=1}^{N} h_{rk}(t,x), \\ k = 1,2,\ldots,N,\end{gathered} \tag{3.12}$$

где

$$g_{ij}^{<k>}(t,x) = \sum_{r=1}^{s} \sigma_{ir}^{<k>}(t,x)\sigma_{jr}^{<k>}(t,x).$$

Начальные условия для уравнений (3.12) определяются ненормированными плотностями вероятности $\varphi_0^{<k>}(x)$ начального состояния X_0:

$$\varphi^{<k>}(t,x)\big|_{t=t_0} = \varphi_0^{<k>}(x), \quad k = 1,2,\ldots,N, \tag{3.13}$$

а краевые условия задаются следующим образом:

$$\varphi^{<k>}(t,x)\big|_{x=\pm\infty} = 0, \quad k = 1,2,\ldots,N. \tag{3.14}$$

Заметим, что первые два слагаемых в правой части уравнения (3.12) по форме совпадают с правой частью уравнения (2.2), третье слагаемое характеризует процесс поглощения реализаций при переходе из структуры с номером k в остальные структуры, а четвертое слагаемое описывает восстановление реализаций при переходе в структуру с номером k из других структур.

Обобщенные уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова связаны между собой через функции восстановления (3.9) и образуют систему дифференциальных уравнений в частных производных.

Следует также отметить, что при перечисленных выше условиях уравнения (3.12) являются уравнениями сохранения вероятности, т.е.

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}^{<k>}(t) = 1$$

для произвольного момента времени $t \in T$.

Замечание 3.3.

1. Для получения **плотности вероятности** $\varphi(t,x)$ вектора состояния системы управления (3.1) необходимо просуммировать ненормированные плотности вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$, т.е.

$$\varphi(t,x) = \varphi^{<1>}(t,x) + \varphi^{<2>}(t,x) + \ldots + \varphi^{<N>}(t,x).$$

2. Как и в случае стохастических систем с фиксированной структурой (см. замечание 2.1), функции $f_i^{<k>}(t,x)$ и $g_{ij}^{<k>}(t,x)$ называются соответственно **коэффициентами сноса** и **диффузии**, функция $f^{<k>}(t,x)$ называется **вектором сноса**, а функция $g^{<k>}(t,x)$ – **матрицей диффузии** [23, 25]:

$$g^{<k>}(t,x) = \begin{bmatrix} g_{11}^{<k>}(t,x) & g_{12}^{<k>}(t,x) & \ldots & g_{1n}^{<k>}(t,x) \\ g_{21}^{<k>}(t,x) & g_{22}^{<k>}(t,x) & \ldots & g_{2n}^{<k>}(t,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}^{<k>}(t,x) & g_{n2}^{<k>}(t,x) & \ldots & g_{nn}^{<k>}(t,x) \end{bmatrix}.$$

Будем предполагать, что функции $f_i^{<k>}(t,x)$ и $g_{ij}^{<k>}(t,x)$ удовлетворяют условиям существования и единственности решения задачи (3.1).

3. Для стохастических мультиструктурных систем вида (3.1), условие смены структуры в которых отлично от (3.3), например, для **систем с сосредоточенными переходами** [4, 23, 26, 85], т.е. в случае, когда переключение между структурами происходит при достижении вектором состояния заданной гиперповерхности в пространстве $\mathbb{R}^n$, или для **стохастических логико-динамических систем** [5], ненормированные плотности вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$ также удовлетворяют уравнениям вида (3.12). При этом изменяются лишь выражения, задающие функции поглощения и восстановления, т.е. операторы $\mathcal{B}_{kr}$ и $\mathcal{H}_{kr}$.

Кратко задачу (3.12)–(3.14) будем записывать в **векторно-операторной форме**

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varphi}(t,x), \\
&\boldsymbol{\varphi}(t,x)|_{t=t_0} = \boldsymbol{\varphi}_0(x) \qquad \text{(начальное условие)}, \\
&\boldsymbol{\varphi}(t,x)|_{x=\pm\infty} = 0 \qquad \text{(краевое условие)},
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

где $\boldsymbol{\varphi}(t,x)$ – вектор-функция размера $n \times 1$, координатами которой являются ненормированные плотности вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$:

$$
\boldsymbol{\varphi}(t,x) = \begin{bmatrix} \varphi^{<1>}(t,x) & \varphi^{<2>}(t,x) & \ldots & \varphi^{<N>}(t,x) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},
$$

$\boldsymbol{\varphi}_0(x)$ – вектор-функция размера $n \times 1$, задающая начальное условие для уравнения (3.15):

$$
\boldsymbol{\varphi}_0(x) = \begin{bmatrix} \varphi_0^{<1>}(x) & \varphi_0^{<2>}(x) & \ldots & \varphi_0^{<N>}(x) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},
$$

$\mathcal{A}$ – квадратная матрица размера $n \times n$, элементы которой представляют собой линейные операторы, соответствующие уравнениям (3.12):

$$
\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \ldots & \mathcal{A}_{1N} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \ldots & \mathcal{A}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_{N1} & \mathcal{A}_{N2} & \ldots & \mathcal{A}_{NN} \end{bmatrix},
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{kk}\varphi^{<k>}(t,x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_i^{<k>}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x)\right] + \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[g_{ij}^{<k>}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x)\right] - \sum_{r=1, r\neq k}^{N} \mathcal{B}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x), \\
&\mathcal{A}_{kr}\varphi^{<r>}(t,x) = \mathcal{H}_{rk}\varphi^{<r>}(t,x), \\
&k, r = 1, 2, \ldots, N, \quad k \neq r.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

З а м е ч а н и е 3.4. Решение уравнений (3.12) и (3.15) будем понимать в обобщенном смысле [33].

3.1.3. Определение маргинальных и условных плотностей вероятности

Рассмотрим задачу определения маргинальных и условных плотностей вероятности для систем со случайной структурой. В замечании 3.1 были определены условные плотности вероятности вида $\varphi(t, x \mid k)$, характеризующие распределение вектора состояния X в момент времени t при условии $K(t) = k$, но, как и для стохастических систем с фиксированной структурой (см. разд. 2.1.3), иногда возникает необходимость в нахождении плотности вероятности части координат вектора состояния.

Воспользуемся обозначениями, введенными в разд. 2.1.3, т.е. пусть первые m координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$ вектора состояния x образуют матрицу-столбец $x_{(1)}$, а остальные координаты $x_{m+1}, \ldots, x_n$ – матрицу-столбец $x_{(2)}$:

$$x_{(1)} = [x_1 \ \ x_2 \ \ \ldots \ \ x_m]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m, \quad x_{(2)} = [x_{m+1} \ \ \ldots \ \ x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

Условной плотностью вероятности называется функция

$$\varphi_{(2|1)}^{<k>}\bigl(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\bigr) = \frac{\varphi^{<k>}(t,x)}{\varphi_{(1)}^{<k>}\bigl(t, x_{(1)}\bigr)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.17}$$

где

$$\varphi_{(1)}^{<k>}\bigl(t, x_{(1)}\bigr) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \varphi^{<k>}(t,x)\, dx_{(2)}. \tag{3.18}$$

Функцию $\varphi_{(1)}^{<k>}\bigl(t, x_{(1)}\bigr)$ будем называть **ненормированной маргинальной плотностью вероятности**.

Плотность вероятности $\varphi_{(2|1)}^{<k>}\bigl(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\bigr)$ характеризует распределение вектора $X_{(2)} = [X_{m+1} \ \ \ldots \ \ X_n]^{\mathrm{T}}$ при условии $X_{(1)} = x_{(1)}$ в момент времени t для структуры с номером k, где $X_{(1)} = [X_1 \ \ X_2 \ \ \ldots \ \ X_m]^{\mathrm{T}}$. Несмотря на то, что она определяется через ненормированные плотности вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$ и $\varphi_{(1)}^{<k>}\bigl(t, x_{(1)}\bigr)$, для нее справедливо условие нормировки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \varphi_{(2|1)}^{<k>}\bigl(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\bigr) dx_{(2)} = 1, \quad x_{(1)} \in \mathbb{R}^m, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Заметим, что условную плотность вероятности $\varphi_{(2|1)}^{<k>}\bigl(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\bigr)$ можно определить другим образом, а именно

$$\varphi_{(2|1)}^{<k>}\bigl(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\bigr) = \frac{\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)}{\tilde{\varphi}_{(1)}^{<k>}\bigl(t, x_{(1)}\bigr)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

где

$$\tilde{\varphi}_{(1)}^{<k>}\bigl(t, x_{(1)}\bigr) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)\, dx_{(2)}.$$

Действительно, при $\mathbb{P}^{<k>}(t) \neq 0$ справедливо равенство

$$\frac{\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)}{\tilde{\varphi}^{<k>}_{(1)}\big(t,x_{(1)}\big)} = \frac{\mathbb{P}^{<k>}(t)\,\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)}{\mathbb{P}^{<k>}(t)\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)\,dx_{(2)}} = \frac{\mathbb{P}^{<k>}(t)\,\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)}{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \mathbb{P}^{<k>}(t)\,\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)\,dx_{(2)}},$$

но $\mathbb{P}^{<k>}(t)\cdot\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x) = \varphi^{<k>}(t,x)$ (см. замечание 3.1), поэтому

$$\frac{\mathbb{P}^{<k>}(t)\,\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)}{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \mathbb{P}^{<k>}(t)\,\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)\,dx_{(2)}} = \frac{\varphi^{<k>}(t,x)}{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \varphi^{<k>}(t,x)\,dx_{(2)}} = \frac{\varphi^{<k>}(t,x)}{\varphi^{<k>}_{(1)}\big(t,x_{(1)}\big)},$$

т.е.

$$\frac{\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)}{\tilde{\varphi}^{<k>}_{(1)}\big(t,x_{(1)}\big)} = \frac{\varphi^{<k>}(t,x)}{\varphi^{<k>}_{(1)}\big(t,x_{(1)}\big)}.$$

Таким образом, можно рассматривать задачу нахождения ненормированных маргинальных и условных плотностей вероятности вектора состояния системы управления (3.1) по ненормированным плотностям вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$, $k=1,2,\ldots,N$.

Замечание 3.5.

1. Как и для стохастических систем с фиксированной структурой, в общем случае можно рассматривать ненормированные маргинальные и условные плотности вероятности при другом способе формирования матриц-столбцов $x_{(1)}$ и $x_{(2)}$ (см. замечание 2.3).

2. Маргинальные плотности вероятности $\varphi_{(1)}\big(t,x_{(1)}\big)$ и условные плотности вероятности $\varphi_{(2|1)}\big(t,x_{(2)} \mid x_{(1)}\big)$ определяются через плотность вероятности $\varphi(t,x)$ вектора состояния (см. замечание 3.3) выражениями (2.14) и (2.15) соответственно.

3.1.4. Определение моментных характеристик

Приведем соотношения для вычисления моментных характеристик вектора состояния системы управления (3.1), а именно для **математического ожидания** $m(t)$ и **ковариационной матрицы** $R(t)$:

$$m(t) = \begin{bmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ \vdots \\ m_n(t) \end{bmatrix}, \quad R(t) = \begin{bmatrix} R_{11}(t) & R_{12}(t) & \ldots & R_{1n}(t) \\ R_{21}(t) & R_{22}(t) & \ldots & R_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1}(t) & R_{n2}(t) & \ldots & R_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

где функции $m_i(t)$ и $R_{ij}(t)$ определяются формулами (2.16) и (2.17) соответственно.

Координаты функции $m(t)$ и элементы матрицы $R(t)$ можно определить и другим способом, выражая их через ненормированные плотности вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$ или условные плотности вероятности $\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)$.

Функции $m_i(t)$ задаются следующим образом [26]:

$$m_i(t) = \sum_{k=1}^{N} m_i^{<k>}(t), \quad m_i^{<k>}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i \varphi^{<k>}(t,x)\,dx, \tag{3.19}$$

или

$$m_i(t) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}^{<k>}(t)\,\tilde{m}_i^{<k>}(t), \quad \tilde{m}_i^{<k>}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i \tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)\,dx. \tag{3.20}$$

Соотношения для определения элементов $R_{ij}(t)$ ковариационной матрицы $R(t)$ имеют вид [26]

$$\begin{gathered} R_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{N} \left(R_{ij}^{<k>}(t) + \frac{m_i^{<k>}(t)\, m_j^{<k>}(t)}{\mathbb{P}^{<k>}(t)} \right) - m_i(t)\, m_j(t), \\ R_{ij}^{<k>}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \varphi^{<k>}(t,x)\,dx - \frac{m_i^{<k>}(t)\, m_j^{<k>}(t)}{\mathbb{P}^{<k>}(t)}, \end{gathered} \tag{3.21}$$

или

$$\begin{gathered} R_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}^{<k>}(t)\big(\tilde{R}_{ij}^{<k>}(t) + (\tilde{m}_i^{<k>}(t) - m_i(t))(\tilde{m}_j^{<k>}(t) - m_j(t))\big), \\ \tilde{R}_{ij}^{<k>}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)\,dx - \tilde{m}_i^{<k>}(t)\,\tilde{m}_j^{<k>}(t). \end{gathered} \tag{3.22}$$

Нетрудно видеть, что для всех $i,j = 1,2,\ldots,n$ и $k = 1,2,\ldots,N$ справедливы равенства $m_i^{<k>}(t) = \mathbb{P}^{<k>}(t)\cdot \tilde{m}_i^{<k>}(t)$ и $R_{ij}^{<k>}(t) = \mathbb{P}^{<k>}(t)\cdot \tilde{R}_{ij}^{<k>}(t)$.

З а м е ч а н и е 3.6.

1. Будем называть функции

$$m^{<k>}(t) = \begin{bmatrix} m_1^{<k>}(t) \\ m_2^{<k>}(t) \\ \vdots \\ m_n^{<k>}(t) \end{bmatrix}, \quad R^{<k>}(t) = \begin{bmatrix} R_{11}^{<k>}(t) & R_{12}^{<k>}(t) & \ldots & R_{1n}^{<k>}(t) \\ R_{21}^{<k>}(t) & R_{22}^{<k>}(t) & \ldots & R_{2n}^{<k>}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1}^{<k>}(t) & R_{n2}^{<k>}(t) & \ldots & R_{nn}^{<k>}(t) \end{bmatrix}$$

взвешенными моментными характеристиками, а

$$\tilde{m}^{<k>}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{m}_1^{<k>}(t) \\ \tilde{m}_2^{<k>}(t) \\ \vdots \\ \tilde{m}_n^{<k>}(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}^{<k>}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{11}^{<k>}(t) & \tilde{R}_{12}^{<k>}(t) & \ldots & \tilde{R}_{1n}^{<k>}(t) \\ \tilde{R}_{21}^{<k>}(t) & \tilde{R}_{22}^{<k>}(t) & \ldots & \tilde{R}_{2n}^{<k>}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{R}_{n1}^{<k>}(t) & \tilde{R}_{n2}^{<k>}(t) & \ldots & \tilde{R}_{nn}^{<k>}(t) \end{bmatrix}$$

– **условными моментными характеристиками** [26].

2. В одномерном случае функции $R(t)$, $R^{<k>}(t)$ и $\tilde{R}^{<k>}(t)$ будем обозначать через $D(t)$, $D^{<k>}(t)$ и $\tilde{D}^{<k>}(t)$ соответственно. Функция $D(t)$ называется **дисперсией**.

Таким образом, будем рассматривать задачу определения моментных характеристик вектора состояния, в том числе взвешенных и условных, по ненормированным плотностям вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

3.2. СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ

3.2.1. Уравнения обобщенных характеристических функций

Воспользуемся спектральной формой математического описания систем управления и применим результаты, полученные в гл. 1, для решения задачи анализа систем со случайной структурой.

Для представления функций времени и вектора состояния в качестве базиса пространства $L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$, где $Q_T = T \times \mathbb{R}^n$, $T = [t_0, t_1]$ или $T = [t_0, +\infty)$, выберем такую ортонормированную систему

$$\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x) = q(i_0, t) \cdot p_1(i_1, x_1) \cdots p_n(i_n, x_n)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty},$$

что системы функций $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$, $\ldots$, $\{p_n(i_n,x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$ представляют собой базисы пространств $L_2(T; \nu(t))$, $L_2(\mathbb{R}; \rho_1(x_1))$, $\ldots$, $L_2(\mathbb{R}; \rho_n(x_n))$ соответственно и при этом $\rho(x) = \rho_1(x_1) \ldots \rho_n(x_n)$ (см. разд. 1.1.3). Тогда для представления функций времени будем использовать базисную систему $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.1.1), а для представления функций вектора состояния (см. разд. 1.1.2) будем применять систему функций

$$\{p(i_1, i_2, \ldots, i_n, x) = p_1(i_1, x_1) \cdot p_2(i_2, x_2) \cdots p_n(i_n, x_n)\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty},$$

которая, согласно утверждению 1.2, образует базисную систему пространства $L_2(\mathbb{R}^n; \rho(x))$.

Запишем обобщенные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (3.12) с использованием (3.7) и (3.9):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi^{<k>}(t,x)}{\partial t} &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_i^{<k>}(t,x)\,\varphi^{<k>}(t,x)\right] + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[g_{ij}^{<k>}(t,x)\,\varphi^{<k>}(t,x)\right] - \\ &- \sum_{r=1, r\neq k}^{N} \mathcal{B}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x) + \sum_{r=1, r\neq k}^{N} \mathcal{H}_{rk}\varphi^{<r>}(t,x), \quad k = 1,2,\ldots,N,\end{aligned}$$

и применим спектральное преобразование к левой и правой частям с учетом начальных и краевых условий (3.13), (3.14):

$$\begin{aligned}&\mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial \varphi^{<k>}(t,x)}{\partial t}\right|_{\varphi^{<k>}(t_0,x)=\varphi_0^{<k>}(x)}\right] = \\ &= \mathbb{S}\Bigg[\Bigg(-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_i^{<k>}(t,x)\,\varphi^{<k>}(t,x)\right] + \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{S}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[g_{ij}^{<k>}(t,x)\,\varphi^{<k>}(t,x)\right]\right] - \\ &\quad - \sum_{r=1, r\neq k}^{N} \mathcal{B}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x) + \sum_{r=1, r\neq k}^{N} \mathcal{H}_{rk}\varphi^{<r>}(t,x)\Bigg)\Bigg|_{\varphi^{<k>}(t,\pm\infty)=0}\Bigg], \\ &k = 1,2,\ldots,N.\end{aligned}$$

Тогда, принимая во внимание свойство линейности спектрального преобразования (см. разд. 1.3.3), получаем

$$\begin{aligned}&\mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial \varphi^{<k>}(t,x)}{\partial t}\right|_{\varphi^{<k>}(t_0,x)=\varphi_0^{<k>}(x)}\right] = \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_i^{<k>}(t,x)\,\varphi^{<k>}(t,x)\right]\right|_{\varphi^{<k>}(t,\pm\infty)=0}\right] + \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[g_{ij}^{<k>}(t,x)\,\varphi^{<k>}(t,x)\right]\right|_{\varphi^{<k>}(t,\pm\infty)=0}\right] - \\ &\quad - \sum_{r=1, r\neq k}^{N} \mathbb{S}\left[\mathcal{B}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x)\right] + \sum_{r=1, r\neq k}^{N} \mathbb{S}\left[\mathcal{H}_{rk}\varphi^{<r>}(t,x)\right], \qquad (3.23) \\ &k = 1,2,\ldots,N.\end{aligned}$$

Используя соотношение (1.71), нестационарную спектральную характеристику частной производной ненормированной плотности вероятности для структуры с номером k по времени с учетом начального условия (3.13) можно выразить следующим образом:

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial\varphi^{<k>}(t,x)}{\partial t}\right|_{\varphi^{<k>}(t_0,x)=\varphi_0^{<k>}(x)}\right] = P(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0) -$$

$$- \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<k>}(n,0), \tag{3.24}$$

где $P(n+1,n+1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования $\tilde{\mathcal{D}}_t$ по времени с учетом значения функции в начальный момент, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.3), причем, согласно (1.70), $P(n+1,n+1)$ представляется в виде тензорного произведения нестационарной спектральной характеристики $P(1,1)$ оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенной относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.3), и единичной матрицы $E(n,n)$ (см. разд. 1.2.3), т.е.

$$P(n+1,n+1) = P(1,1)\otimes E(n,n),$$

$\Phi^{<k>}(n+1,0)$ – нестационарная спектральная характеристика ненормированной плотности вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.3), т.е.

$$\mathbb{S}\left[\varphi^{<k>}(t,x)\right] = \Phi^{<k>}(n+1,0) = \left(\varphi^{<k>}_{i_0 i_1\ldots i_n}\right),$$

где

$$\varphi^{<k>}_{i_0 i_1\ldots i_n} = \left(e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),\varphi^{<k>}(t,x)\right)_{L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))},$$

$$i_0,i_1,\ldots,i_n = 0,1,2,\ldots,$$

$\nu(t_0)$ – значение весовой функции $\nu(t)$ в точке t_0, $q(1,0;t_0)$ – матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке t_0 (см. (2.21)), $\Phi_0^{<k>}(n,0)$ – спектральная характеристика ненормированной плотности вероятности $\varphi_0^{<k>}(x)$ начального состояния X_0 для структуры с номером k, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.2), т.е.

$$\mathbb{S}\left[\varphi_0^{<k>}(x)\right] = \Phi_0^{<k>}(n,0) = \left(\varphi^{<k>}_{0 i_1 i_2\ldots i_n}\right),$$

где

$$\varphi^{<k>}_{0 i_1 i_2\ldots i_n} = \left(p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x),\varphi_0^{<k>}(x)\right)_{L_2(\mathbb{R}^n;\,\rho(x))},$$

$$i_1,i_2,\ldots,i_n = 0,1,2,\ldots\ .$$

По аналогии с нестационарной спектральной характеристикой плотности вероятности стохастических систем управления с фиксированной структурой нестационарные спектральные характеристики $\Phi^{<k>}(n+1,0)$ ненормированных плотностей вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$ будем называть **обобщенными характеристическими функциями**, а элементы $\varphi^{<k>}_{i_0 i_1 \ldots i_n}$ – **координатами обобщенных характеристических функций**.

Для представления первых двух слагаемых в правой части соотношения (3.23), как и при выводе уравнения обобщенной характеристической функции (см. разд. 2.2.1), будем рассматривать выражения

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\bigl[f_i^{<k>}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x)\bigr] \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\bigl[g_{ij}^{<k>}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x)\bigr]$$

как результат последовательного применения линейных операторов умножения и дифференцирования. Тогда, принимая во внимание соотношение (1.79), устанавливающее связь между нестационарными спектральными характеристиками функции времени и вектора состояния и ее частной производной первого порядка по координате вектора состояния в случае, когда областью изменения этой координаты является все пространство действительных чисел $\mathbb{R}$, и свойство спектрального преобразования композиции линейных операторов (см. разд. 1.4.1), получаем выражение для первого слагаемого:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \mathbb{S}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\bigl[f_i^{<k>}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x)\bigr]\bigg|_{\varphi^{<k>}(t,\pm\infty)=0} \right] = \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i(n+1,n+1)\cdot F_i^{<k>}(n+1,n+1)\cdot \Phi^{<k>}(n+1,0), \qquad (3.25) \\ &k = 1,2,\ldots,N, \end{aligned}$$

в котором $\mathcal{P}_i(n+1,n+1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования $\mathcal{D}_{x_i}$, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.3); $F_i^{<k>}(n+1,n+1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на коэффициент сноса $f_i^{<k>}(t,x)$, определенная относительно той же базисной системы (см. разд. 1.4.2).

Напомним (см. разд. 1.4.3), что нестационарная спектральная характеристика $\mathcal{P}_i(n+1,n+1)$ представляется в виде

$$\mathcal{P}_i(n+1,n+1) = E(1,1)\otimes \underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes \mathcal{P}_i(1,1)\otimes\ldots\otimes E(1,1)}_{n\ \text{сомножителей}},$$

где $\mathcal{P}_l(1,1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования $\mathcal{D}_x$ в одномерном случае, определенная относительно базисной системы

$\{p_l(i_l, x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.3), $l = 1, 2, \ldots, n$; $E(1, 1)$ – двумерная единичная матрица (см. разд. 1.2.3).

Используя соотношение (1.80) и свойство спектрального преобразования композиции линейных операторов (см. разд. 1.4.1), получаем выражение для второго слагаемого в правой части (3.23):

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{S}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[g_{ij}^{<k>}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x)\right]\Big|_{\varphi^{<k>}(t,\pm\infty)=0}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}^{<k>}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0), \quad (3.26)$$
$$k = 1, 2, \ldots, N,$$

где $\mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования $\mathcal{D}_{x_i x_j}$, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.3); $G_{ij}^{<k>}(n+1, n+1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на коэффициент диффузии $g_{ij}^{<k>}(t, x)$, определенная относительно той же базисной системы (см. разд. 1.4.2). Для нестационарной спектральной характеристики $\mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1)$ справедливо представление

$$\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1) =$$
$$= \begin{cases} E(1,1)\otimes\underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i^2(1,1)\otimes\ldots\otimes E(1,1)}_{n \text{ сомножителей}}, & i=j,\\ E(1,1)\otimes\underbrace{E(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_j(1,1)\otimes}_{n \text{ сомножителей}} \\ \quad \underline{\otimes\ldots\otimes E(1,1)}, & i\neq j. \end{cases}$$

Учитывая теорему 1.4, можно записать выражение для третьего слагаемого в правой части соотношения (3.23):

$$\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\mathbb{S}\left[\mathcal{B}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x)\right] = \sum_{r=1,r\neq k}^{N} B_{kr}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0), \quad (3.27)$$

где $B_{kr}(n+1, n+1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора $\mathcal{B}_{kr}$, определенная относительно базиса $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.1).

Поскольку в рассматриваемом случае оператор $\mathcal{B}_{kr}$ представляет собой оператор умножения на функцию $\lambda_{kr}(t, x)$, задающую интенсивность перехода из структуры с номером k в структуру с номером r (см. разд. 3.1.1), то

$$B_{kr}(n+1,n+1) = \Lambda_{kr}(n+1,n+1), \quad k,r = 1,2,\ldots,n, \quad k\neq r, \quad (3.28)$$

где $\Lambda_{kr}(n+1,n+1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\lambda_{kr}(t,x)$, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.2).

В силу соотношения (3.7) можно сделать вывод о том, что нестационарная спектральная характеристика $B_{kr}(n+1,0)$ функции поглощения $b_{kr}(t,x)$, определенная относительно базиса $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, представляется в форме

$$B_{kr}(n+1,0)=\begin{cases} B_{kr}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0), & k\neq r,\\ \mathcal{O}(n+1,0), & k=r,\end{cases}$$
$$k,r=1,2,\ldots,n,$$

где $\mathcal{O}(n+1,0)$ – гиперстолбцовая нулевая матрица размерности $(n+1)$ (см. разд. 1.2.3).

Перейдем к последнему слагаемому в правой части соотношения (3.23). На основании теоремы 1.4 получаем выражение

$$\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\mathbb{S}\left[\mathcal{H}_{rk}\varphi^{<r>}(t,x)\right]=\sum_{r=1,r\neq k}^{N}H_{rk}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<r>}(n+1,0),\qquad(3.29)$$

в котором $H_{rk}(n+1,n+1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора $\mathcal{H}_{rk}$, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.1).

Подчеркнем, что в общем случае оператор $\mathcal{H}_{rk}$ задается соотношением (3.10) и, следовательно, не принадлежит ни к одному из типов линейных операторов, рассмотренных в разд. 1.4.2–1.4.4. Поэтому воспользуемся определением (1.51) для вычисления элементов нестационарной спектральной характеристики $H_{rk}(n+1,n+1)$:

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{H}_{rk}\right]=H_{rk}(n+1,n+1)=\left(h^{rk}_{i_0i_1\ldots i_nj_0j_1\ldots j_n}\right),$$

где

$$h^{rk}_{i_0i_1\ldots i_nj_0j_1\ldots j_n}=$$
$$=\left(e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),\mathcal{H}_{rk}e(j_0,j_1,\ldots,j_n,t,x)\right)_{L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))}=$$
$$=\Bigg(e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\lambda_{rk}(t,\tilde{x})e(j_0,j_1,\ldots,j_n,t,\tilde{x})q_{rk}(t,x\mid\tilde{x})\,d\tilde{x}\Bigg)_{L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))},$$
$$i_0,i_1,\ldots,i_n,j_0,j_1,\ldots,j_n=0,1,2,\ldots,\quad k,r=1,2,\ldots,n,\quad k\neq r.$$

По аналогии с нестационарной спектральной характеристикой $B_{kr}(n+1,0)$ функции поглощения $b_{kr}(t,x)$ можно записать выражение для нестационарной спектральной характеристики $H_{rk}(n+1,0)$ функции восстановления $h_{rk}(t,x)$, определенной относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$:

$$H_{rk}(n+1,0)=\begin{cases} H_{rk}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<r>}(n+1,0),\ k\neq r,\\ \mathcal{O}(n+1,0),\ k=r,\end{cases}$$
$$k,r=1,2,\ldots,n.$$

В частном случае при точном восстановлении реализаций случайного процесса $X(t)$, т.е. если траектории $X(t)$ непрерывны, нестационарные спектральные характеристики $B_{kr}(n+1,n+1)$ и $H_{kr}(n+1,n+1)$ операторов $\mathcal{B}_{kr}$ и $\mathcal{H}_{kr}$ соответственно совпадают:

$$B_{kr}(n+1,n+1)=H_{kr}(n+1,n+1)=\Lambda_{kr}(n+1,n+1), \tag{3.30}$$
$$k,r=1,2,\ldots,n,\quad k\neq r.$$

Таким образом,

$$\mathbb{S}\Bigg[\Bigg(-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_i^{<k>}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{S}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left[g_{ij}^{<k>}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x)\right]\right]-$$
$$-\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\mathcal{B}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x)+\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\mathcal{H}_{rk}\varphi^{<r>}(t,x)\Bigg)\Bigg|_{\varphi^{<k>}(t,\pm\infty)=0}\Bigg]=$$
$$=-\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i(n+1,n+1)\cdot F_i^{<k>}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}^{<k>}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0)-$$
$$-\sum_{r=1,r\neq k}^{N}B_{kr}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0)+$$
$$+\sum_{r=1,r\neq k}^{N}H_{rk}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<r>}(n+1,0),$$

$$k=1,2,\ldots,N,$$

и, следовательно, уравнение (3.23) записывается в виде

$$
\begin{aligned}
&P(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0)-\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<k>}(n,0)=\\
&\quad=-\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i(n+1,n+1)\cdot F_i^{<k>}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0)+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}^{<k>}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0)-\\
&\qquad-\sum_{r=1,r\neq k}^{N}B_{kr}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0)+\\
&\qquad+\sum_{r=1,r\neq k}^{N}H_{rk}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<r>}(n+1,0),\quad k=1,2,\ldots,N.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Уравнения (3.31) будем называть **уравнениями обобщенных характеристических функций**.

Перепишем (3.31) в виде системы уравнений относительно обобщенных характеристических функций $\Phi^{<1>}(n+1,0)$, $\Phi^{<2>}(n+1,0)$, $\ldots$, $\Phi^{<N>}(n+1,0)$:

$$
\begin{cases}
P(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<1>}(n+1,0)-\\
\quad -A_{11}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<1>}(n+1,0)-\ldots-\\
\quad\quad -A_{1N}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<N>}(n+1,0)=\\
\quad\quad\quad =\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(n,0)\,,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
P(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<N>}(n+1,0)-\\
\quad -A_{N1}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<1>}(n+1,0)-\ldots-\\
\quad\quad -A_{NN}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<N>}(n+1,0)=\\
\quad\quad\quad =\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<N>}(n,0)\,,
\end{cases}
\tag{3.32}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&A_{kk}(n+1,n+1)=-\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i(n+1,n+1)\cdot F_i^{<k>}(n+1,n+1)+\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}^{<k>}(n+1,n+1)-\sum_{r=1,r\neq k}^{N}B_{kr}(n+1,n+1),
\end{aligned}
$$

$$
A_{kr}(n+1,n+1)=H_{rk}(n+1,n+1),\quad k,r=1,2,\ldots,N,\quad k\neq r,
\tag{3.33}
$$

причем гиперквадратные матрицы $A_{kr}(n+1,n+1)$ представляют собой нестационарные спектральные характеристики операторов $\mathcal{A}_{kr}$ (см. (3.16)), определенные относительно базисной системы

$$\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty},$$

т.е.

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{A}_{kr}\right] = A_{kr}(n+1,n+1), \quad k,r=1,2,\ldots,N,$$

что следует из свойств спектрального преобразования линейных операторов (см. разд. 1.4.1–1.4.3).

Таким образом, решение задачи анализа систем управления со случайной структурой сводится к решению системы линейных неоднородных алгебраических уравнений (3.32).

Для решения этой задачи с помощью операции агрегатирования многомерных матриц (см. разд. 1.2.3) построим гиперквадратные матрицы $A(n+2,n+2)$ и $P(n+2,n+2)$:

$$A(n+2,n+2) =$$
$$= \begin{bmatrix} A_{11}(n+1,n+1) & A_{12}(n+1,n+1) & \ldots & A_{1N}(n+1,n+1) \\ A_{21}(n+1,n+1) & A_{22}(n+1,n+1) & \ldots & A_{2N}(n+1,n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1}(n+1,n+1) & A_{N2}(n+1,n+1) & \ldots & A_{NN}(n+1,n+1) \end{bmatrix},$$

$$P(n+2,n+2) =$$
$$= \begin{bmatrix} P(n+1,n+1) & \mathcal{O}(n+1,n+1) & \ldots & \mathcal{O}(n+1,n+1) \\ \mathcal{O}(n+1,n+1) & P(n+1,n+1) & \ldots & \mathcal{O}(n+1,n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{O}(n+1,n+1) & \mathcal{O}(n+1,n+1) & \ldots & P(n+1,n+1) \end{bmatrix},$$

где $\mathcal{O}(n+1,n+1)$ – гиперквадратная нулевая матрица размерности $2(n+1)$, т.е.

$$A(n+2,n+2) = \big(a_{ki_0i_1\ldots i_nrj_0j_1\ldots j_n}\big),$$

$$P(n+2,n+2) = \big(P_{ki_0i_1\ldots i_nrj_0j_1\ldots j_n}\big),$$

причем элементы $a_{ki_0i_1\ldots i_nrj_0j_1\ldots j_n}$ матрицы $A(n+2,n+2)$ выражаются через элементы $a^{kr}_{i_0i_1\ldots i_nj_0j_1\ldots j_n}$ матриц $A_{kr}(n+1,n+1)$:

$$a_{ki_0i_1\ldots i_nrj_0j_1\ldots j_n} = a^{kr}_{i_0i_1\ldots i_nj_0j_1\ldots j_n},$$

$$i_0,i_1,\ldots,i_n,j_0,j_1,\ldots,j_n = 0,1,2,\ldots, \quad k,r=1,2,\ldots,N,$$

а элементы $P_{ki_0i_1\ldots i_nrj_0j_1\ldots j_n}$ матрицы $P(n+2,n+2)$ зависят от элементов $P_{i_0i_1\ldots i_nj_0j_1\ldots j_n}$ матрицы $P(n+1,n+1)$:

$$P_{ki_0i_1\ldots i_nrj_0j_1\ldots j_n} = \begin{cases} P_{i_0i_1\ldots i_nj_0j_1\ldots j_n}, \ k=r, \\ 0, \ k \neq r, \end{cases}$$

$$i_0,i_1,\ldots,i_n,j_0,j_1,\ldots,j_n = 0,1,2,\ldots, \quad k,r = 1,2,\ldots,N.$$

Аналогичным образом построим гиперстолбцовые матрицы $\Phi(n+2,0)$ и $B(n+2,0)$:

$$\Phi(n+2,0) = \begin{bmatrix} \Phi^{<1>}(n+1,0) \\ \Phi^{<2>}(n+1,0) \\ \vdots \\ \Phi^{<N>}(n+1,0) \end{bmatrix},$$

$$B(n+2,0) = \begin{bmatrix} \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(n,0) \\ \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(n,0) \\ \vdots \\ \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<N>}(n,0) \end{bmatrix},$$

т.е.

$$\Phi(n+2,0) = \big(\varphi_{ki_0i_1\ldots i_n}\big),$$

$$B(n+2,0) = \big(b_{ki_0i_1\ldots i_n}\big),$$

где элементы $\varphi_{ki_0i_1\ldots i_n}$ матрицы $\Phi(n+2,0)$ выражаются через координаты $\varphi^{<k>}_{i_0i_1\ldots i_n}$ обобщенных характеристических функций $\Phi^{<k>}(n+1,0)$:

$$\varphi_{ki_0i_1\ldots i_n} = \varphi^{<k>}_{i_0i_1\ldots i_n},$$

$$i_0,i_1,\ldots,i_n = 0,1,2,\ldots, \quad k=1,2,\ldots,N.$$

Элементы $b_{ki_0i_1\ldots i_n}$ матрицы $B(n+2,0)$ с учетом правила тензорного умножения многомерных матриц (см. разд. 1.2.3) определяются следующим образом:

$$b_{ki_0i_1\ldots i_n} = \nu(t_0)\cdot q^*(i_0,t_0)\cdot\varphi^{<k>}_{0i_1\ldots i_n},$$

$$i_0,i_1,\ldots,i_n = 0,1,2,\ldots, \quad k=1,2,\ldots,N,$$

где $q^*(i_0,t_0)$ – комплексное сопряженное число по отношению к значению функции базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ с номером i_0 в точке t_0; $\varphi^{<k>}_{0i_1\ldots i_n}$ – координаты спектральной характеристики $\Phi_0^{<k>}(n,0)$ ненормированной плотности вероятности $\varphi_0^{<k>}(x)$ начального состояния X_0, определенной относительно базисной системы $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.2).

Нетрудно видеть, что с использованием введенных обозначений система уравнений (3.32) может быть записана в форме

$$\begin{aligned} &P(n+2,n+2)\cdot\Phi(n+2,0)-\\ &\quad -A(n+2,n+2)\cdot\Phi(n+2,0)=B(n+2,0). \end{aligned} \tag{3.34}$$

З а м е ч а н и е 3.7. Матрицы $A_{kr}(n+1,n+1)$ представляют собой гиперквадратные бесконечные матрицы размерности $2(n+1)$, однако, гиперквадратная матрица $A(n+2,n+2)$ размерности $2(n+2)$ по первому измерению как для строчного, так и для столбцового индекса имеет порядок N:

$$A(n+2,n+2)=\big(a_{ki_0i_1\ldots i_nrj_0j_1\ldots j_n}\big),$$

где индексы $i_0,i_1,\ldots,i_n,j_0,j_1,\ldots,j_n$ пробегают весь ряд целых неотрицательных чисел $0,1,2,\ldots$, а $k,r=1,2,\ldots,N$. Тем не менее, операции над такими матрицами аналогичны операциям над бесконечными многомерными матрицами (см. разд. 1.2.3). Аналогичная ситуация справедлива для гиперквадратной матрицы $P(n+2,n+2)$, а также для гиперстолбцовых матриц $\Phi(n+2,0)$ и $B(n+2,0)$.

Выразим гиперстолбцовую матрицу $\Phi(n+2,0)$ из уравнения (3.34). Для этого обозначим разность матриц $P(n+2,n+2)$ и $A(n+2,n+2)$ через $Z(n+2,n+2)$:

$$Z(n+2,n+2)=P(n+2,n+2)-A(n+2,n+2),$$

т.е.

$$\begin{aligned} &Z(n+2,n+2)=\\ &=\begin{bmatrix} Z_{11}(n+1,n+1) & Z_{12}(n+1,n+1) & \ldots & Z_{1N}(n+1,n+1)\\ Z_{21}(n+1,n+1) & Z_{22}(n+1,n+1) & \ldots & Z_{2N}(n+1,n+1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ Z_{N1}(n+1,n+1) & Z_{N2}(n+1,n+1) & \ldots & Z_{NN}(n+1,n+1) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} &Z_{kk}(n+1,n+1)=P(n+1,n+1)-A_{kk}(n+1,n+1),\\ &Z_{kr}(n+1,n+1)=-A_{kr}(n+1,n+1),\\ &k,r=1,2,\ldots,N,\quad k\neq r. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (3.34) примет вид

$$Z(n+2,n+2)\cdot\Phi(n+2,0)=B(n+2,0), \tag{3.35}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} Z_{11}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<1>}(n+1,0)+\ldots+ \\ \quad +Z_{1N}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<N>}(n+1,0)= \\ \quad\quad =\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(n,0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_{N1}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<1>}(n+1,0)+\ldots+ \\ \quad +Z_{NN}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<N>}(n+1,0)= \\ \quad\quad =\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<N>}(n,0), \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} &Z_{kk}(n+1,n+1)=P(n+1,n+1)+ \\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i(n+1,n+1)\cdot F_i^{<k>}(n+1,n+1)- \\ &\quad-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}^{<k>}(n+1,n+1)+ \\ &\quad+\sum_{r=1,r\neq k}^{N}B_{kr}(n+1,n+1), \\ &Z_{kr}(n+1,n+1)=-H_{rk}(n+1,n+1), \\ &k,r=1,2,\ldots,N, \quad k\neq r. \end{aligned}$$

Умножая левую и правую части полученного соотношения слева на $Z^{-1}(n+2,n+2)$, где $Z^{-1}(n+2,n+2)$ – обратная матрица (см. разд. 1.2.3 и замечание 3.7), находим решение уравнения (3.35) и, следовательно, уравнения (3.34):

$$\Phi(n+2,0)=Z^{-1}(n+2,n+2)\cdot B(n+2,0). \tag{3.36}$$

Затем, используя операцию декомпозиции многомерных матриц (см. разд. 1.2.3), получаем решение уравнений обобщенных характеристических функций (3.31), т.е. нестационарные спектральные характеристики

$$\Phi^{<1>}(n+1,0), \quad \Phi^{<2>}(n+1,0), \quad \ldots, \quad \Phi^{<N>}(n+1,0).$$

Таким образом, выражение (3.36) определяет решение задачи анализа систем со случайной структурой (см. разд. 3.1.1) в спектральной форме математического описания.

Переход от обобщенных характеристических функций $\Phi^{<k>}(n+1,0)$ к соответствующим ненормированным плотностям вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$ осуществляется по формуле обращения (1.46):

$$\varphi^{<k>}(t,x) = \mathbb{S}^{-1}\left[\Phi^{<k>}(n+1,0)\right] = \\ = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}\varphi^{<k>}_{i_0 i_1\ldots i_n}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x), \qquad (3.37) \\ k=1,2,\ldots,N,$$

где $\varphi^{<k>}_{i_0 i_1\ldots i_n}$ – координаты обобщенной характеристической функции $\Phi^{<k>}(n+1,0)$, $t\in T$, $x\in\mathbb{R}^n$.

Замечание 3.8. Для получения нестационарной спектральной характеристики $\Phi(n+1,0)$ плотности вероятности $\varphi(t,x)$ вектора состояния (см. замечание 3.3) достаточно найти сумму обобщенных характеристических функций $\Phi^{<k>}(n+1,0)$, где $k=1,2,\ldots,N$. Действительно,

$$\Phi(n+1,0) = \mathbb{S}\left[\varphi(t,x)\right] = \mathbb{S}\left[\varphi^{<1>}(t,x)+\varphi^{<2>}(t,x)+\ldots+\varphi^{<N>}(t,x)\right] = \\ = \mathbb{S}\left[\varphi^{<1>}(t,x)\right]+\mathbb{S}\left[\varphi^{<2>}(t,x)\right]+\ldots+\mathbb{S}\left[\varphi^{<N>}(t,x)\right] = \\ = \Phi^{<1>}(n+1,0)+\Phi^{<2>}(n+1,0)+\ldots+\Phi^{<N>}(n+1,0).$$

Формула обращения для нестационарной спектральной характеристики $\Phi(n+1,0)$ совпадает с (2.28) при условии $\Omega=\mathbb{R}^n$.

Пример 3.1. Записать обобщенные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова и уравнения обобщенных характеристических функций для одномерной стохастической системы с двумя структурами. Первая структура описывается уравнением

$$dX(t) = f^{<1>}(t,X(t))\,dt + \sigma^{<1>}(t,X(t))\,dW(t),$$

а вторая – уравнением

$$dX(t) = f^{<2>}(t,X(t))\,dt + \sigma^{<2>}(t,X(t))\,dW(t),$$

где $t\in T=[t_0,+\infty)$, $X\in\mathbb{R}$, $W(t)$ – одномерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от начального состояния $X_0=X(t_0)$, которое задается ненормированными плотностями вероятности $\varphi_0^{<1>}(x)$ и $\varphi_0^{<2>}(x)$ для первой и второй структуры соответственно, при этом выполняется условие

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi_0^{<1>}(x)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}}\varphi_0^{<2>}(x)\,dx = 1.$$

Интенсивность перехода из первой структуры во вторую характеризуется функцией $\lambda_{12}(t,x)$, а возврат из второй в первую – функцией $\lambda_{21}(t,x)$. Восстановление реализаций случайного процесса $X(t)$ точное, т.е. в моменты смены структуры траектория $X(t)$ непрерывна.

□ Из постановки задачи анализа (см. разд. 3.1.1) следует, что $n = s = 1$ и $N = 2$. В этом случае обобщенные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi^{<k>}(t,x)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[f^{<k>}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x)\right] + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g^{<k>}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x)\right] - \\ &- \sum_{r=1}^{2} b_{kr}(t,x) + \sum_{r=1}^{2} h_{rk}(t,x),\\ k = 1,2,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi^{<k>}(t,x)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[f^{<k>}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x)\right] + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g^{<k>}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x)\right] - \\ &- \sum_{r=1,r\neq k}^{2} \mathcal{B}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x) + \sum_{r=1,r\neq k}^{2} \mathcal{H}_{rk}\varphi^{<r>}(t,x),\\ k = 1,2,\end{aligned}$$

где

$$g^{<1>}(t,x) = \left[\sigma^{<1>}(t,x)\right]^2, \quad g^{<2>}(t,x) = \left[\sigma^{<2>}(t,x)\right]^2,$$
$$(t,x) \in Q_T = T \times \mathbb{R}.$$

Начальные условия определяются функциями $\varphi_0^{<1>}(x)$ и $\varphi_0^{<2>}(x)$, т.е.

$$\varphi^{<k>}(t,x)\big|_{t=t_0} = \varphi_0^{<k>}(x), \quad k = 1,2,$$

а краевые условия записываются в виде

$$\varphi^{<k>}(t,x)\big|_{x=\pm\infty} = 0, \quad k = 1,2.$$

Операторы $\mathcal{B}_{kr}$ и $\mathcal{H}_{kr}$, определяются с помощью заданных функций $\lambda_{kr}(t,x)$, характеризующих интенсивности переходов, и для рассматриваемого примера

$$\mathcal{B}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x) = \mathcal{H}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x) = \lambda_{kr}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x), \quad k,r = 1,2, \quad k \neq r,$$

так как по условию восстановление реализаций случайного процесса $X(t)$ точное. Следовательно,

$$\mathcal{B}_{12}\varphi^{<1>}(t,x) = \mathcal{H}_{12}\varphi^{<1>}(t,x) = \lambda_{12}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x),$$

$$\mathcal{B}_{21}\varphi^{<2>}(t,x) = \mathcal{H}_{21}\varphi^{<2>}(t,x) = \lambda_{21}(t,x)\varphi^{<2>}(t,x).$$

На основании записанных соотношений и с учетом формул (3.7), (3.9) и (3.11) получаем выражения для функций поглощения $b_{kr}(t,x)$ и восстановления $h_{kr}(t,x)$:

$$b_{kr}(t,x) = h_{kr}(t,x) = \lambda_{kr}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x),$$

$$b_{kk}(t,x) = h_{kk}(t,x) = 0, \quad k,r = 1,2, \quad k \neq r.$$

Таким образом, уравнения для определения ненормированных плотностей вероятности $\varphi^{<1>}(t,x)$ и $\varphi^{<2>}(t,x)$ представляются в виде

$$\frac{\partial\varphi^{<1>}(t,x)}{\partial t} =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[f^{<1>}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g^{<1>}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x)\right] -$$
$$- \lambda_{12}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x) + \lambda_{21}(t,x)\varphi^{<2>}(t,x),$$

$$\frac{\partial\varphi^{<2>}(t,x)}{\partial t} =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[f^{<2>}(t,x)\varphi^{<2>}(t,x)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g^{<2>}(t,x)\varphi^{<2>}(t,x)\right] -$$
$$- \lambda_{21}(t,x)\varphi^{<2>}(t,x) + \lambda_{12}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x).$$

Эти уравнения следует решать с начальными условиями

$$\varphi^{<1>}(t,x)\big|_{t=t_0} = \varphi_0^{<1>}(x),$$

$$\varphi^{<2>}(t,x)\big|_{t=t_0} = \varphi_0^{<2>}(x)$$

и краевыми условиями

$$\varphi^{<1>}(t,x)\big|_{x=\pm\infty} = \varphi^{<2>}(t,x)\big|_{x=\pm\infty} = 0.$$

Обобщенные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова можно записать иначе, а именно в векторно-операторной форме (3.15):

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varphi}(t,x),$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t,x)\big|_{t=t_0} = \boldsymbol{\varphi}_0(x), \quad \boldsymbol{\varphi}(t,x)\big|_{x=\pm\infty} = 0,$$

где

$$\varphi(t,x) = \begin{bmatrix} \varphi^{<1>}(t,x) \\ \varphi^{<2>}(t,x) \end{bmatrix}, \quad \varphi_0(x) = \begin{bmatrix} \varphi_0^{<1>}(x) \\ \varphi_0^{<2>}(x) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{bmatrix},$$

причем

$$\mathcal{A}_{11}\varphi^{<1>}(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[f^{<1>}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x)\right] + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g^{<1>}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x)\right] - \lambda_{12}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x),$$

$$\mathcal{A}_{12}\varphi^{<2>}(t,x) = \lambda_{21}(t,x)\varphi^{<2>}(t,x),$$

$$\mathcal{A}_{21}\varphi^{<1>}(t,x) = \lambda_{12}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x),$$

$$\mathcal{A}_{22}\varphi^{<2>}(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[f^{<2>}(t,x)\varphi^{<2>}(t,x)\right] + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g^{<2>}(t,x)\varphi^{<2>}(t,x)\right] - \lambda_{21}(t,x)\varphi^{<2>}(t,x).$$

Перейдем к выводу уравнений обобщенных характеристических функций. Будем предполагать, что система функций $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))$ (см. разд. 1.1.3), и при этом системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ представляют собой базисы пространств $L_2(T;\,\nu(t))$ и $L_2(\mathbb{R};\,\rho(x))$ соответственно (см. разд. 1.1.1 и 1.1.2).

Положив в соотношении (3.31) $n=1$ и $N=2$, получаем искомые уравнения для определения обобщенных характеристических функций:

$$P(2,2)\cdot\Phi^{<k>}(2,0) - \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<k>}(1,0) = \\ = -\,\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<k>}(2,2)\cdot\Phi^{<k>}(2,0) + \\ + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<k>}(2,2)\cdot\Phi^{<k>}(2,0) - \\ - \sum_{r=1,r\neq k}^{2} B_{kr}(2,2)\cdot\Phi^{<k>}(2,0) + \\ + \sum_{r=1,r\neq k}^{2} H_{rk}(2,2)\cdot\Phi^{<r>}(2,0),$$

$$k = 1,2,$$

т.е.

$$P(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)-\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0)=$$

$$=-\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<1>}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<1>}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)-$$

$$-B_{12}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)+H_{21}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0),$$

$$P(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0)-\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0)=$$

$$=-\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<2>}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0)+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<2>}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0)-$$

$$-B_{21}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0)+H_{12}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0),$$

где $P(2,2)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент, $\mathcal{P}_1(2,2)$ и $\mathcal{P}_{11}(2,2)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов дифференцирования по переменной x первого и второго порядков соответственно (см. разд. 1.4.3); $F^{<1>}(2,2)$, $F^{<2>}(2,2)$ и $G^{<1>}(2,2)$, $G^{<2>}(2,2)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов умножения на коэффициенты сноса $f^{<1>}(t,x)$, $f^{<2>}(t,x)$ и диффузии $g^{<1>}(t,x)$, $g^{<2>}(t,x)$ соответственно (см. разд. 1.4.2); $\Phi^{<1>}(2,0)$ и $\Phi^{<2>}(2,0)$ – обобщенные характеристические функции, т.е. нестационарные спектральные характеристики ненормированных плотностей вероятности $\varphi^{<1>}(t,x)$ и $\varphi^{<2>}(t,x)$ соответственно. Нестационарные спектральные характеристики $P(2,2)$, $\mathcal{P}_1(2,2)$, $\mathcal{P}_{11}(2,2)$, $F^{<k>}(2,2)$, $G^{<k>}(2,2)$ и $\Phi^{<k>}(2,0)$ определены относительно базисной системы $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$, $k=1,2$.

Кроме того, $B_{12}(2,2)$, $B_{21}(2,2)$, $H_{12}(2,2)$ и $H_{21}(2,2)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов $\mathcal{B}_{12}$, $\mathcal{B}_{21}$, $\mathcal{H}_{12}$ и $\mathcal{H}_{21}$ соответственно, которые, согласно (3.30), выражаются следующим образом:

$$B_{12}(2,2)=H_{12}(2,2)=\Lambda_{12}(2,2),$$

$$B_{21}(2,2)=H_{21}(2,2)=\Lambda_{21}(2,2),$$

где $\Lambda_{12}(2,2)$ и $\Lambda_{21}(2,2)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов умножения на функции $\lambda_{12}(t,x)$ и $\lambda_{21}(t,x)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.2).

Наряду с этим через $q(1,0;t_0)$ обозначена матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке t_0 (см. (2.21)), а через

$\Phi_0^{<1>}(1,0)$ и $\Phi_0^{<2>}(1,0)$ – спектральные характеристики ненормированных плотностей вероятности $\varphi_0^{<1>}(x)$ и $\varphi_0^{<2>}(x)$ начального состояния X_0, определенные относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.2).

Напомним (см. разд. 1.4.3), что нестационарные спектральные характеристики $P(2,2)$, $\mathcal{P}_1(2,2)$ и $\mathcal{P}_{11}(2,2)$ операторов дифференцирования представляются в виде

$$
\begin{aligned}
P(2,2) &= P(1,1)\otimes E(1,1),\\
\mathcal{P}_1(2,2) &= E(1,1)\otimes \mathcal{P}(1,1),\\
\mathcal{P}_{11}(2,2) &= E(1,1)\otimes \mathcal{P}^2(1,1),
\end{aligned}
$$

где $P(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$; $\mathcal{P}(1,1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$.

Уравнения обобщенных характеристических функций можно записать в виде системы (3.32). Тогда с учетом полученных выражений для нестационарных спектральных характеристик $B_{12}(2,2)$, $B_{21}(2,2)$, $H_{12}(2,2)$ и $H_{21}(2,2)$ будем иметь

$$
\begin{cases}
P(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0) - A_{11}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0) -\\
\quad - A_{12}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0) = \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0),\\
P(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0) - A_{21}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0) -\\
\quad - A_{22}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0) = \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0),
\end{cases}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&A_{11}(2,2) = -\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<1>}(2,2) + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<1>}(2,2) - \Lambda_{12}(2,2),\\
&A_{12}(2,2) = \Lambda_{21}(2,2),\\
&A_{21}(2,2) = \Lambda_{12}(2,2),\\
&A_{22}(2,2) = -\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<2>}(2,2) + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<2>}(2,2) - \Lambda_{21}(2,2),
\end{aligned}
$$

причем четырехмерные гиперквадратные матрицы $A_{11}(2,2)$, $A_{12}(2,2)$, $A_{21}(2,2)$ и $A_{22}(2,2)$ представляют собой нестационарные спектральные характеристики операторов $\mathcal{A}_{11}$, $\mathcal{A}_{12}$, $\mathcal{A}_{21}$ и $\mathcal{A}_{22}$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.1).

Кратко полученная система уравнений представляется в виде

$$
\big(P(3,3) - A(3,3)\big)\cdot\Phi(3,0) = B(3,0),
$$

где шестимерные гиперквадратные матрицы $P(3,3)$, $A(3,3)$ и трехмерные гиперстолбцовые матрицы $\Phi(3,0)$, $B(3,0)$ образованы при помощи операции агрегатирования соответствующих многомерных матриц меньшей размерности (см. разд. 1.2.3 и замечание 3.7):

$$P(3,3)=\begin{bmatrix} P(2,2) & \mathcal{O}(2,2) \\ \mathcal{O}(2,2) & P(2,2) \end{bmatrix},$$

$$A(3,3)=\begin{bmatrix} A_{11}(2,2) & A_{12}(2,2) \\ A_{21}(2,2) & A_{22}(2,2) \end{bmatrix},$$

$$\Phi(3,0)=\begin{bmatrix} \Phi^{<1>}(2,0) \\ \Phi^{<2>}(2,0) \end{bmatrix},$$

$$B(3,0)=\begin{bmatrix} \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0) \\ \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0) \end{bmatrix},$$

где $\mathcal{O}(2,2)$ – четырехмерная гиперквадратная нулевая матрица.

Обозначая разность матриц $P(3,3)$ и $A(3,3)$ через $Z(3,3)$, получаем, что гиперстолбец $\Phi(3,0)$ удовлетворяет уравнению

$$Z(3,3)\cdot\Phi(3,0)=B(3,0),$$

в котором

$$Z(3,3)=P(3,3)-A(3,3)=$$
$$=\begin{bmatrix} P(2,2)-A_{11}(2,2) & -A_{12}(2,2) \\ -A_{21}(2,2) & P(2,2)-A_{22}(2,2) \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует выражение, определяющее решение уравнений обобщенных характеристических функций:

$$\Phi(3,0)=Z^{-1}(3,3)\cdot B(3,0),$$

где $Z^{-1}(3,3)$ – обратная матрица по отношению к матрице $Z(3,3)$.

Искомые обобщенные характеристические функции $\Phi^{<1>}(2,0)$ и $\Phi^{<2>}(2,0)$ получаются посредством декомпозиции гиперстолбца $\Phi(3,0)$ (см. разд. 1.2.3).

В качестве базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ можно использовать полиномы Лагерра (1.10) с весовой функцией $\nu(t)=\mathrm{e}^{-t}$ или функции Лагерра (1.11) с весовой функцией $\nu(t)\equiv 1$, а в качестве базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ – полиномы Эрмита (1.20) с весовой функцией $\rho(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ или функции Эрмита (1.21) с весовой функцией $\rho(x)\equiv 1$. ■

Пример 3.2. Записать обобщенные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова и уравнения обобщенных характеристических функций для двумерной стохастической системы с двумя структурами, описываемой уравнениями Ито

$$\begin{aligned} &dX_1(t) = f_1^{<k>}(t, X_1(t), X_2(t))\, dt + \sigma_{11}^{<k>}(t, X_1(t), X_2(t))\, dW_1(t),\\ &dX_2(t) = f_2^{<k>}(t, X_1(t), X_2(t))\, dt + \sigma_{22}^{<k>}(t, X_1(t), X_2(t))\, dW_2(t),\\ &k = 1, 2, \end{aligned}$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, $X_1, X_2 \in \mathbb{R}$, $W_1(t)$, $W_2(t)$ – одномерные стандартные винеровские случайные процессы, не зависящие от начального состояния $X_0 = [X_{10} \;\; X_{20}]^{\mathrm{T}}$, задаваемого ненормированными плотностями вероятности $\varphi_0^{<1>}(x_1, x_2)$ и $\varphi_0^{<2>}(x_1, x_2)$, для которых справедливо условие

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_0^{<1>}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 + \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_0^{<2>}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 1.$$

Интенсивности переходов из первой структуры во вторую и из второй в первую задаются функциями $\lambda_{12}(t, x_1, x_2)$ и $\lambda_{21}(t, x_1, x_2)$ соответственно. Восстановление реализаций случайного процесса $X(t) = [X_1(t) \; X_2(t)]^{\mathrm{T}}$ точное, т.е. в моменты смены структуры траектория $X(t)$ непрерывна.

□ Сравнивая с постановкой задачи анализа (см. разд. 3.1.1), получаем, что $n = s = 2$ и $N = 2$. Функции $f^{<k>}(t, x)$ и $\sigma^{<k>}(t, x)$, входящие в уравнение (3.1), определяются выражениями

$$f^{<k>}(t, x) = \begin{bmatrix} f_1^{<k>}(t, x_1, x_2) \\ f_2^{<k>}(t, x_1, x_2) \end{bmatrix},$$

$$\sigma^{<k>}(t, x) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{<k>}(t, x_1, x_2) & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^{<k>}(t, x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

Следовательно, обобщенные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^{<k>}(t, x_1, x_2)}{\partial t} &= -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[f_i^{<k>}(t, x_1, x_2)\, \varphi^{<k>}(t, x_1, x_2) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[g_{ij}^{<k>}(t, x_1, x_2)\, \varphi^{<k>}(t, x_1, x_2) \right] - \\ &- \sum_{r=1}^{2} b_{kr}(t, x_1, x_2) + \sum_{r=1}^{2} h_{rk}(t, x_1, x_2), \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi^{<k>}(t,x_1,x_2)}{\partial t} = \\
&\quad = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[f_1^{<k>}(t,x_1,x_2)\,\varphi^{<k>}(t,x_1,x_2)\right] - \\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[f_2^{<k>}(t,x_1,x_2)\,\varphi^{<k>}(t,x_1,x_2)\right] + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[g_{11}^{<k>}(t,x_1,x_2)\,\varphi^{<k>}(t,x_1,x_2)\right] + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[g_{22}^{<k>}(t,x_1,x_2)\,\varphi^{<k>}(t,x_1,x_2)\right] - \\
&\qquad - \sum_{r=1, r\neq k}^{2} \mathcal{B}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x_1,x_2) + \sum_{r=1, r\neq k}^{2} \mathcal{H}_{rk}\varphi^{<r>}(t,x_1,x_2), \\
&k = 1,2,
\end{aligned}$$

где

$$g_{11}^{<k>}(t,x_1,x_2) = \left[\sigma_{11}^{<k>}(t,x_1,x_2)\right]^2, \quad g_{22}^{<k>}(t,x_1,x_2) = \left[\sigma_{22}^{<k>}(t,x_1,x_2)\right]^2,$$

$$(t,x_1,x_2) \in Q_T = T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = T \times \mathbb{R}^2.$$

Начальные и краевые условия определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\varphi^{<k>}(t,x_1,x_2)\big|_{t=t_0} = \varphi_0^{<k>}(x_1,x_2), \\
&\varphi^{<k>}(t,x_1,x_2)\big|_{x_1,x_2=\pm\infty} = 0, \\
&k = 1,2.
\end{aligned}$$

Далее приведем соотношения для операторов $\mathcal{B}_{kr}$ и $\mathcal{H}_{kr}$. Из (3.8), (3.10) и условия точного восстановления реализаций случайного процесса $X(t)$ получаем

$$\mathcal{B}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x_1,x_2) = \mathcal{H}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x_1,x_2) = \lambda_{kr}(t,x_1,x_2)\,\varphi^{<k>}(t,x_1,x_2),$$

$$k,r = 1,2, \quad k \neq r,$$

т.е.

$$\mathcal{B}_{12}\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2) = \mathcal{H}_{12}\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2) = \lambda_{12}(t,x_1,x_2)\,\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2),$$

$$\mathcal{B}_{21}\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2) = \mathcal{H}_{21}\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2) = \lambda_{21}(t,x_1,x_2)\,\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2).$$

Из приведенных соотношений для операторов $\mathcal{B}_{kr}$ и $\mathcal{H}_{kr}$ с учетом формул (3.7) и (3.9) следуют выражения для функций поглощения $b_{kr}(t,x_1,x_2)$ и восстановления $h_{kr}(t,x_1,x_2)$:

$$b_{kr}(t,x_1,x_2) = h_{kr}(t,x_1,x_2) = \lambda_{kr}(t,x_1,x_2)\varphi^{<k>}(t,x_1,x_2),$$

$$b_{kk}(t,x_1,x_2) = h_{kk}(t,x_1,x_2) = 0, \quad k,r = 1,2, \quad k \neq r.$$

Таким образом, обобщенные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова записываются в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2)}{\partial t} = \\
&\quad = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[f_1^{<1>}(t,x_1,x_2)\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2)\right] - \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[f_2^{<1>}(t,x_1,x_2)\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2)\right] + \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[g_{11}^{<1>}(t,x_1,x_2)\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2)\right] + \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[g_{22}^{<1>}(t,x_1,x_2)\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2)\right] - \\
&\quad - \lambda_{12}(t,x_1,x_2)\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2) + \lambda_{21}(t,x_1,x_2)\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2)}{\partial t} = \\
&\quad = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[f_1^{<2>}(t,x_1,x_2)\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2)\right] - \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[f_2^{<2>}(t,x_1,x_2)\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2)\right] + \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[g_{11}^{<2>}(t,x_1,x_2)\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2)\right] + \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[g_{22}^{<2>}(t,x_1,x_2)\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2)\right] - \\
&\quad - \lambda_{21}(t,x_1,x_2)\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2) + \lambda_{12}(t,x_1,x_2)\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2),
\end{aligned}$$

а начальные и краевые условия задаются выражениями

$$\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2)\big|_{t=t_0} = \varphi_0^{<1>}(x_1,x_2), \quad \varphi^{<2>}(t,x_1,x_2)\big|_{t=t_0} = \varphi_0^{<2>}(x_1,x_2),$$

$$\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2)\big|_{x_1,x_2=\pm\infty} = 0, \quad \varphi^{<2>}(t,x_1,x_2)\big|_{x_1,x_2=\pm\infty} = 0.$$

Кратко уравнения для определения ненормированных плотностей вероятности $\varphi^{<1>}(t, x_1, x_2)$ и $\varphi^{<2>}(t, x_1, x_2)$ записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(t, x_1, x_2)}{\partial t} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varphi}(t, x_1, x_2),$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t, x_1, x_2)|_{t=t_0} = \boldsymbol{\varphi}_0(x_1, x_2),$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t, x_1, x_2)|_{x_1, x_2 = \pm\infty} = 0,$$

где

$$\boldsymbol{\varphi}(t, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \varphi^{<1>}(t, x_1, x_2) \\ \varphi^{<2>}(t, x_1, x_2) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_0(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \varphi_0^{<1>}(x_1, x_2) \\ \varphi_0^{<2>}(x_1, x_2) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{bmatrix},$$

причем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{11}\varphi^{<1>}(t, x_1, x_2) = {} & -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[f_1^{<1>}(t, x_1, x_2)\varphi^{<1>}(t, x_1, x_2)\right] - \\ & -\frac{\partial}{\partial x_2}\left[f_2^{<1>}(t, x_1, x_2)\varphi^{<1>}(t, x_1, x_2)\right] + \\ & +\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[g_{11}^{<1>}(t, x_1, x_2)\varphi^{<1>}(t, x_1, x_2)\right] + \\ & +\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[g_{22}^{<1>}(t, x_1, x_2)\varphi^{<1>}(t, x_1, x_2)\right] - \\ & -\lambda_{12}(t, x_1, x_2)\varphi^{<1>}(t, x_1, x_2), \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_{12}\varphi^{<2>}(t, x_1, x_2) = \lambda_{21}(t, x_1, x_2)\varphi^{<2>}(t, x_1, x_2),$$

$$\mathcal{A}_{21}\varphi^{<1>}(t, x_1, x_2) = \lambda_{12}(t, x_1, x_2)\varphi^{<1>}(t, x_1, x_2),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{22}\varphi^{<2>}(t, x_1, x_2) = {} & -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[f_1^{<2>}(t, x_1, x_2)\varphi^{<2>}(t, x_1, x_2)\right] - \\ & -\frac{\partial}{\partial x_2}\left[f_2^{<2>}(t, x_1, x_2)\varphi^{<2>}(t, x_1, x_2)\right] + \\ & +\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[g_{11}^{<2>}(t, x_1, x_2)\varphi^{<2>}(t, x_1, x_2)\right] + \\ & +\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[g_{22}^{<2>}(t, x_1, x_2)\varphi^{<2>}(t, x_1, x_2)\right] - \\ & -\lambda_{21}(t, x_1, x_2)\varphi^{<2>}(t, x_1, x_2). \end{aligned}$$

Предположим, что система функций

$$\{q(i_0,t)p_1(i_1,x_1)p_2(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$$

представляет собой базис пространства $L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$, причем система $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2(T;\nu(t))$, а системы $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ образуют базисы пространств $L_2(\mathbb{R};\rho_1(x_1))$ и $L_2(\mathbb{R};\rho_2(x_2))$ соответственно, $\rho(x)=\rho_1(x_1)\rho_2(x_2)$.

Далее будем использовать следующие обозначения. Пусть $P(3,3)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент, $\mathcal{P}_i(3,3)$ и $\mathcal{P}_{ii}(3,3)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов дифференцирования по переменной x_i первого и второго порядков соответственно (см. разд. 1.4.3); $F_i^{<k>}(3,3)$ и $G_{ii}^{<k>}(3,3)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов умножения на коэффициенты сноса $f_i^{<k>}(t,x)$ и диффузии $g_{ii}^{<k>}(t,x)$ соответственно (см. разд. 1.4.2); $\Phi^{<k>}(3,0)$ – обобщенная характеристическая функция, т.е. нестационарная спектральная характеристика ненормированной плотности вероятности $\varphi^{<k>}(t,x_1,x_2)$; $i=1,2$, $k=1,2$.

Нестационарные спектральные характеристики операторов $\mathcal{B}_{kr}$ и $\mathcal{H}_{kr}$ обозначены через $B_{kr}(3,3)$ и $H_{kr}(3,3)$ соответственно, причем

$$B_{kr}(3,3)=H_{kr}(3,3)=\Lambda_{kr}(3,3),\quad k,r=1,2,\quad k\neq r,$$

т.е.

$$B_{12}(3,3)=H_{12}(3,3)=\Lambda_{12}(3,3),$$

$$B_{21}(3,3)=H_{21}(3,3)=\Lambda_{21}(3,3),$$

где $\Lambda_{12}(3,3)$ и $\Lambda_{21}(3,3)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов умножения на функции $\lambda_{12}(t,x_1,x_2)$ и $\lambda_{21}(t,x_1,x_2)$ соответственно, что следует из (3.30). Отметим, что все перечисленные выше нестационарные спектральные характеристики определены относительно базисной системы

$$\{q(i_0,t)p_1(i_1,x_1)p_2(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}.$$

Пусть также $q(1,0;t_0)$ – матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке t_0 (см. (2.21)), $\Phi_0^{<k>}(2,0)$ – спектральная характеристика ненормированной плотности вероятности $\varphi_0^{<k>}(x_1,x_2)$ начального состояния X_0, определенная относительно базисной системы

$$\{p_1(i_1,x_1)p_2(i_2,x_2)\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$$

пространства $L_2(\mathbb{R}\times\mathbb{R};\rho(x))$ (см. разд. 1.3.2), $k=1,2$.

С учетом введенных обозначений можно записать уравнения обобщенных характеристических функций:

$$
\begin{aligned}
&P(3,3)\cdot\Phi^{<k>}(3,0)-\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<k>}(2,0)=\\
&\quad=-\sum_{i=1}^{2}\mathcal{P}_i(3,3)\cdot F_i^{<k>}(3,3)\cdot\Phi^{<k>}(3,0)+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\mathcal{P}_{ij}(3,3)\cdot G_{ij}^{<k>}(3,3)\cdot\Phi^{<k>}(3,0)-\\
&\qquad-\sum_{r=1,r\neq k}^{2}B_{kr}(3,3)\cdot\Phi^{<k>}(3,0)+\\
&\qquad+\sum_{r=1,r\neq k}^{2}H_{rk}(3,3)\cdot\Phi^{<r>}(3,0),\\
&k=1,2,
\end{aligned}
$$

т.е.

$$
\begin{aligned}
&P(3,3)\cdot\Phi^{<1>}(3,0)-\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(2,0)=\\
&\quad=-\mathcal{P}_1(3,3)\cdot F_1^{<1>}(3,3)\cdot\Phi^{<1>}(3,0)-\\
&\qquad-\mathcal{P}_2(3,3)\cdot F_2^{<1>}(3,3)\cdot\Phi^{<1>}(3,0)+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(3,3)\cdot G_{11}^{<1>}(3,3)\cdot\Phi^{<1>}(3,0)+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{22}(3,3)\cdot G_{22}^{<1>}(3,3)\cdot\Phi^{<1>}(3,0)-\\
&\qquad-B_{12}(3,3)\cdot\Phi^{<1>}(3,0)+H_{21}(3,3)\cdot\Phi^{<2>}(3,0),\\
&P(3,3)\cdot\Phi^{<2>}(3,0)-\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(2,0)=\\
&\quad=-\mathcal{P}_1(3,3)\cdot F_1^{<2>}(3,3)\cdot\Phi^{<2>}(3,0)-\\
&\qquad-\mathcal{P}_2(3,3)\cdot F_2^{<2>}(3,3)\cdot\Phi^{<2>}(3,0)+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(3,3)\cdot G_{11}^{<2>}(3,3)\cdot\Phi^{<2>}(3,0)+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{22}(3,3)\cdot G_{22}^{<2>}(3,3)\cdot\Phi^{<2>}(3,0)-\\
&\qquad-B_{21}(3,3)\cdot\Phi^{<2>}(3,0)+H_{12}(3,3)\cdot\Phi^{<1>}(3,0).
\end{aligned}
$$

Напомним (см. разд. 1.4.3 и пример 2.2), что рассматриваемые нестационарные спектральные характеристики операторов дифференцирования представляются в виде

$$\begin{aligned}
P(3,3) &= P(1,1) \otimes E(1,1) \otimes E(1,1), \\
\mathcal{P}_1(3,3) &= E(1,1) \otimes \mathcal{P}_1(1,1) \otimes E(1,1), \\
\mathcal{P}_2(3,3) &= E(1,1) \otimes E(1,1) \otimes \mathcal{P}_2(1,1), \\
\mathcal{P}_{11}(3,3) &= E(1,1) \otimes \mathcal{P}_1^2(1,1) \otimes E(1,1), \\
\mathcal{P}_{22}(3,3) &= E(1,1) \otimes E(1,1) \otimes \mathcal{P}_2^2(1,1),
\end{aligned}$$

где $P(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$; $\mathcal{P}_1(1,1)$ и $\mathcal{P}_2(1,1)$ – спектральные характеристики операторов дифференцирования, определенные относительно базисных систем $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ соответственно.

Уравнения обобщенных характеристических функций можно записать следующим образом:

$$\begin{cases}
P(3,3) \cdot \Phi^{<1>}(3,0) - A_{11}(3,3) \cdot \Phi^{<1>}(3,0) - \\
\quad - A_{12}(3,3) \cdot \Phi^{<2>}(3,0) = \nu(t_0) \cdot q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0^{<1>}(2,0), \\
P(3,3) \cdot \Phi^{<2>}(3,0) - A_{21}(3,3) \cdot \Phi^{<1>}(3,0) - \\
\quad - A_{22}(3,3) \cdot \Phi^{<2>}(3,0) = \nu(t_0) \cdot q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0^{<2>}(2,0),
\end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{11}(3,3) &= -\mathcal{P}_1(3,3) \cdot F_1^{<1>}(3,3) - \mathcal{P}_2(3,3) \cdot F_2^{<1>}(3,3) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_{11}(3,3) \cdot G_{11}^{<1>}(3,3) + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_{22}(3,3) \cdot G_{22}^{<1>}(3,3) - \Lambda_{12}(3,3), \\
A_{12}(3,3) &= \Lambda_{21}(3,3), \\
A_{21}(3,3) &= \Lambda_{12}(3,3), \\
A_{22}(3,3) &= -\mathcal{P}_1(3,3) \cdot F_1^{<2>}(3,3) - \mathcal{P}_2(3,3) \cdot F_2^{<2>}(3,3) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_{11}(3,3) \cdot G_{11}^{<2>}(3,3) + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_{22}(3,3) \cdot G_{22}^{<2>}(3,3) - \Lambda_{21}(3,3),
\end{aligned}$$

или

$$\big(P(4,4) - A(4,4)\big) \cdot \Phi(4,0) = B(4,0),$$

где восьмимерные гиперквадратные матрицы $P(4,4)$, $A(4,4)$ и четырехмерные гиперстолбцовые матрицы $\Phi(4,0)$, $B(4,0)$ образованы при помощи операции агрегатирования соответствующих многомерных матриц меньшей размерности (см. разд. 1.2.3 и замечание 3.7):

$$P(4,4) = \begin{bmatrix} P(3,3) & \mathcal{O}(3,3) \\ \mathcal{O}(3,3) & P(3,3) \end{bmatrix},$$

$$A(4,4) = \begin{bmatrix} A_{11}(3,3) & A_{12}(3,3) \\ A_{21}(3,3) & A_{22}(3,3) \end{bmatrix},$$

$$\Phi(4,0) = \begin{bmatrix} \Phi^{<1>}(3,0) \\ \Phi^{<2>}(3,0) \end{bmatrix},$$

$$B(4,0) = \begin{bmatrix} \nu(t_0) \cdot q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0^{<1>}(2,0) \\ \nu(t_0) \cdot q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0^{<2>}(2,0) \end{bmatrix},$$

где $\mathcal{O}(3,3)$ – шестимерная гиперквадратная нулевая матрица.

Заметим, что шестимерные гиперквадратные матрицы $A_{kr}(3,3)$ представляют собой нестационарные спектральные характеристики операторов $\mathcal{A}_{kr}$, определенные относительно базиса $\{q(i_0,t)p_1(i_1,x_1)p_2(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.1), $k,r=1,2$.

Пусть

$$Z(4,4) = P(4,4) - A(4,4) =$$

$$= \begin{bmatrix} P(3,3) - A_{11}(3,3) & -A_{12}(3,3) \\ -A_{21}(3,3) & P(3,3) - A_{22}(3,3) \end{bmatrix}.$$

Тогда гиперстолбцовая матрица $\Phi(4,0)$ является решением уравнения

$$Z(4,4) \cdot \Phi(4,0) = B(4,0),$$

т.е.

$$\Phi(4,0) = Z^{-1}(4,4) \cdot B(4,0),$$

где $Z^{-1}(4,4)$ – обратная матрица по отношению к матрице $Z(4,4)$.

Обобщенные характеристические функции $\Phi^{<1>}(3,0)$ и $\Phi^{<2>}(3,0)$ получаются в результате декомпозиции гиперстолбцовой матрицы $\Phi(4,0)$ (см. разд. 1.2.3).

Как и в примере 2.2, в качестве базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ можно использовать нестационарные полиномы Лежандра (1.4), нестационарные косинусоиды (1.5), нестационарные экспоненциальные функции (1.6) или нестационарные функции Уолша (1.7), а в качестве базисных систем $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ – полиномы Эрмита (1.20) или функции Эрмита (1.21), причем в общем случае системы функций $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ могут быть различными. ■

Частные случаи систем со случайной структурой

Рассмотрим частные случаи систем со случайной структурой, для которых достаточно просто можно получить решение уравнений обобщенных характеристических функций, не прибегая при этом к операциями агрегатирования и декомпозиции многомерных матриц.

1. **Системы управления с двумя структурами.**

Уравнения обобщенных характеристических функций в форме (3.35) для систем с двумя структурами записываются следующим образом:

$$\begin{cases} Z_{11}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<1>}(n+1,0)+ \\ \quad +Z_{12}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<2>}(n+1,0)= \\ \quad\quad =\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(n,0), \\ Z_{21}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<1>}(n+1,0)+ \\ \quad +Z_{22}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<2>}(n+1,0)= \\ \quad\quad =\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(n,0). \end{cases} \tag{3.38}$$

Выражая обобщенную характеристическую функцию $\Phi^{<2>}(n+1,0)$ из второго уравнения системы (3.38) и подставляя ее в первое, получаем

$$\begin{aligned} &\Phi^{<1>}(n+1,0)= \\ &\quad=\left[Z_{11}(n+1,n+1)-\Gamma_1(n+1,n+1)\cdot Z_{21}(n+1,n+1)\right]^{-1}\cdot \\ &\quad\quad\cdot\left[\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(n,0)-\Gamma_1(n+1,n+1)\cdot\right. \\ &\quad\quad\quad\left.\cdot\left(\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(n,0)\right)\right], \end{aligned} \tag{3.39}$$

где

$$\Gamma_1(n+1,n+1)=Z_{12}(n+1,n+1)\cdot Z_{22}^{-1}(n+1,n+1).$$

Аналогичное выражение получается для $\Phi^{<2>}(n+1,0)$:

$$\begin{aligned} &\Phi^{<2>}(n+1,0)= \\ &\quad=\left[Z_{22}(n+1,n+1)-\Gamma_2(n+1,n+1)\cdot Z_{12}(n+1,n+1)\right]^{-1}\cdot \\ &\quad\quad\cdot\left[\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(n,0)-\Gamma_2(n+1,n+1)\cdot\right. \\ &\quad\quad\quad\left.\cdot\left(\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(n,0)\right)\right], \end{aligned} \tag{3.40}$$

где

$$\Gamma_2(n+1,n+1)=Z_{21}(n+1,n+1)\cdot Z_{11}^{-1}(n+1,n+1).$$

2. **Системы управления с однонаправленными переходами между структурами.**

Отметим, что подобные задачи возникают при анализе систем с возможными нарушениями и отказами [26] и в этом случае интенсивности переходов $\lambda_{kr}(t,x)=0$ при $k>r$. Тогда система (3.35) принимает вид

$$\begin{cases} Z_{11}\left(n+1,n+1\right)\cdot\Phi^{<1>}\left(n+1,0\right)= \\ \quad =\nu(t_0)\cdot q\left(1,0;t_0\right)\otimes\Phi_0^{<1>}\left(n,0\right), \\ Z_{21}\left(n+1,n+1\right)\cdot\Phi^{<1>}\left(n+1,0\right)+ \\ \quad +Z_{22}\left(n+1,n+1\right)\cdot\Phi^{<2>}\left(n+1,0\right)= \\ \quad\quad =\nu(t_0)\cdot q\left(1,0;t_0\right)\otimes\Phi_0^{<2>}\left(n,0\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Z_{N1}\left(n+1,n+1\right)\cdot\Phi^{<1>}\left(n+1,0\right)+ \\ \quad +Z_{N2}\left(n+1,n+1\right)\cdot\Phi^{<2>}\left(n+1,0\right)+ \\ \quad\quad +\ldots+Z_{N,N-1}\left(n+1,n+1\right)\cdot\Phi^{<N-1>}\left(n+1,0\right)= \\ \quad\quad\quad +Z_{NN}\left(n+1,n+1\right)\cdot\Phi^{<N>}\left(n+1,0\right)= \\ \quad\quad\quad\quad =\nu(t_0)\cdot q\left(1,0;t_0\right)\otimes\Phi_0^{<N>}\left(n,0\right). \end{cases} \tag{3.41}$$

Нетрудно видеть, что решение этой системы также возможно без перехода к многомерным матрицам более высокой размерности. Оно заключается в последовательном выражении неизвестных $\Phi^{<k>}(n+1,0)$, начиная с $\Phi^{<1>}(n+1,0)$:

$$\begin{gathered} \Phi^{<1>}(n+1,0)=Z_{11}^{-1}(n+1,n+1)\cdot\left(\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(n,0)\right), \\ \Phi^{<2>}(n+1,0)=Z_{22}^{-1}(n+1,n+1)\cdot \\ \cdot\left(\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(n,0)-Z_{21}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<1>}(n+1,0)\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi^{<N>}(n+1,0)=Z_{NN}^{-1}(n+1,n+1)\cdot \\ \cdot\left[\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<N>}(n,0)-\sum_{r=1}^{N-1}Z_{Nr}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<r>}(n+1,0)\right]. \end{gathered} \tag{3.42}$$

3. **Системы управления, в которых возможны переходы только между соседними структурами.**

В данном случае интенсивности переходов $\lambda_{kr}(t,x)=0$ при $|k-r|>1$. Следовательно, систему (3.35) можно представить в виде

$$\begin{cases} Z_{11}\,(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<1>}\,(n+1,0)+\\ \quad +Z_{12}\,(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<2>}\,(n+1,0)=\\ \qquad =\nu(t_0)\cdot q\,(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}\,(n,0)\,,\\ Z_{21}\,(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<1>}\,(n+1,0)+\\ \quad +Z_{22}\,(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<2>}\,(n+1,0)+\\ \qquad +Z_{23}\,(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<3>}\,(n+1,0)=\\ \qquad\quad =\nu(t_0)\cdot q\,(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}\,(n,0)\,,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ Z_{N,N-1}\,(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<N-1>}\,(n+1,0)+\\ \quad +Z_{NN}\,(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<N>}\,(n+1,0)=\\ \qquad =\nu(t_0)\cdot q\,(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<N>}\,(n,0)\,. \end{cases} \tag{3.43}$$

Решение (3.43) проводится в два этапа аналогично методу прогонки [28] и состоит из итерационной процедуры прямого хода

$$\begin{aligned} &\tilde{Z}_{kk}(n+1,n+1)=Z_{kk}(n+1,n+1)-\\ &\quad -Z_{k,k-1}(n+1,n+1)\cdot\tilde{Z}^{-1}_{k-1,k-1}(n+1,n+1)\cdot Z_{k-1,k}(n+1,n+1),\\ &\tilde{B}_k(n+1,0)=\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<k>}(n,0)-\\ &\quad -Z_{k,k-1}(n+1,n+1)\cdot\tilde{Z}^{-1}_{k-1,k-1}(n+1,n+1)\cdot\tilde{B}_{k-1}(n+1,0),\\ &k=2,3,\dots,N, \end{aligned}$$

с начальным условием

$$\begin{aligned} &\tilde{Z}_{11}(n+1,n+1)=Z_{11}(n+1,n+1),\\ &\tilde{B}_1(n+1,0)=\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(n,0), \end{aligned}$$

и обратного хода

$$\begin{aligned} &\Phi^{<N>}(n+1,0)=\tilde{Z}^{-1}_{NN}(n+1,n+1)\cdot\tilde{B}_N(n+1,0),\\ &\Phi^{<k-1>}(n+1,0)=\tilde{Z}^{-1}_{k-1,k-1}(n+1,n+1)\cdot\\ &\quad\cdot\Big[\tilde{B}_{k-1}(n+1,0)-Z_{k-1,k}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0)\Big],\\ &k=N,N-1,\dots,2. \end{aligned}$$

Пример 3.3. Записать решение уравнений обобщенных характеристических функций для одномерной стохастической системы с двумя структурами, рассмотренной в примере 3.1, не используя при этом операций агрегатирования и декомпозиции многомерных матриц.

□ В общем случае для одномерной стохастической системы с двумя структурами при точном восстановлении реализаций (см. разд. 3.1.2) уравнения обобщенных характеристических функций записываются в виде (см. пример 3.1)

$$
\begin{aligned}
&P(2,2)\cdot\Phi^{<k>}(2,0)-\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<k>}(1,0)=\\
&\quad=-\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<k>}(2,2)\cdot\Phi^{<k>}(2,0)+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<k>}(2,2)\cdot\Phi^{<k>}(2,0)-\\
&\qquad-\sum_{r=1,r\neq k}^{2}B_{kr}(2,2)\cdot\Phi^{<k>}(2,0)+\\
&\qquad+\sum_{r=1,r\neq k}^{2}H_{rk}(2,2)\cdot\Phi^{<r>}(2,0),\\
&k=1,2,
\end{aligned}
$$

где $P(2,2)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент, $\mathcal{P}_1(2,2)$ и $\mathcal{P}_{11}(2,2)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов дифференцирования по переменной x первого и второго порядков соответственно (см. разд. 1.4.3), $F^{<k>}(2,2)$ и $G^{<k>}(2,2)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов умножения на коэффициенты сноса $f^{<k>}(t,x)$ и диффузии $g^{<k>}(t,x)$ соответственно (см. разд. 1.4.2), $\Phi^{<k>}(2,0)$ – обобщенная характеристическая функция, $k=1,2$; $B_{kr}(2,2)$ и $H_{kr}(2,2)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов $\mathcal{B}_{kr}$ и $\mathcal{H}_{kr}$ соответственно, которые удовлетворяют соотношению (см. (3.30))

$$B_{kr}(2,2)=H_{kr}(2,2)=\Lambda_{kr}(2,2),$$

в котором $\Lambda_{kr}(2,2)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\lambda_{kr}(t,x)$, $k,r=1,2$, $k\neq r$. Все перечисленные выше нестационарные спектральные характеристики определены относительно выбранной базисной системы $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$, $Q_T=T\times\mathbb{R}$.

Кроме того, $q(1,0;t_0)$ – матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T;\nu(t))$ в точке t_0 (см. (2.21)),

$\Phi_0^{<k>}(1,0)$ – спектральная характеристика ненормированной плотности вероятности $\varphi_0^{<k>}(x)$ начального состояния X_0, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{R};\rho(x))$ (см. разд. 1.3.2), $k=1,2$.

Уравнения обобщенных характеристических функций можно записать в виде системы

$$\begin{cases} P(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0) - A_{11}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0) - \\ \quad - A_{12}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0) = \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0), \\ P(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0) - A_{21}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0) - \\ \quad - A_{22}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0) = \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0), \end{cases}$$

где

$$A_{11}(2,2) = -\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<1>}(2,2) + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<1>}(2,2) - \Lambda_{12}(2,2),$$

$$A_{12}(2,2) = \Lambda_{21}(2,2),$$

$$A_{21}(2,2) = \Lambda_{12}(2,2),$$

$$A_{22}(2,2) = -\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<2>}(2,2) + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<2>}(2,2) - \Lambda_{21}(2,2),$$

или

$$\begin{cases} Z_{11}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0) + Z_{12}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0) = \\ \quad = \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0), \\ Z_{21}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0) + Z_{22}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0) = \\ \quad = \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0), \end{cases}$$

где

$$Z_{11}(2,2) = P(2,2) - A_{11}(2,2), \quad Z_{12}(2,2) = -A_{12}(2,2),$$

$$Z_{21}(2,2) = -A_{21}(2,2), \quad Z_{22}(2,2) = P(2,2) - A_{22}(2,2),$$

т.е.

$$Z_{11}(2,2) = P(2,2) + \mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<1>}(2,2) - \\ - \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<1>}(2,2) + \Lambda_{12}(2,2),$$

$$Z_{12}(2,2) = -\Lambda_{21}(2,2),$$

$$Z_{21}(2,2) = -\Lambda_{12}(2,2),$$

$$Z_{22}(2,2) = P(2,2) + \mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<2>}(2,2) - \\ - \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<2>}(2,2) + \Lambda_{21}(2,2).$$

Для решения полученной системы двух уравнений воспользуемся соотношениями (3.39) и (3.40), положив в них $n=1$. Тогда

$$\Phi^{<1>}(2,0) = \big[Z_{11}(2,2) - \Gamma_1(2,2)\cdot Z_{21}(2,2)\big]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\big[\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0) - \Gamma_1(2,2)\cdot\big(\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0)\big)\big],$$
$$\Phi^{<2>}(2,0) = \big[Z_{22}(2,2) - \Gamma_2(2,2)\cdot Z_{12}(2,2)\big]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\big[\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0) - \Gamma_2(2,2)\cdot\big(\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0)\big)\big],$$

где

$$\Gamma_1(2,2) = Z_{12}(2,2)\cdot Z_{22}^{-1}(2,2),$$

$$\Gamma_2(2,2) = Z_{21}(2,2)\cdot Z_{11}^{-1}(2,2).$$

Учитывая выражения для матриц $Z_{11}(2,2)$, $Z_{12}(2,2)$, $Z_{21}(2,2)$, $Z_{22}(2,2)$ и нестационарных спектральных характеристик $P(2,2)$, $\mathcal{P}_1(2,2)$, $\mathcal{P}_{11}(2,2)$, находим окончательные соотношения для определения обобщенных характеристических функций:

$$\Phi^{<1>}(2,0) = \Big[P(1,1)\otimes E(1,1) + \big(E(1,1)\otimes\mathcal{P}(1,1)\big)\cdot F^{<1>}(2,2) -$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\big(E(1,1)\otimes\mathcal{P}^2(1,1)\big)\cdot G^{<1>}(2,2) + \Lambda_{12}(2,2) + \Gamma_1(2,2)\cdot\Lambda_{12}(2,2)\Big]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\Big[\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0) - \Gamma_1(2,2)\cdot\big(\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0)\big)\Big],$$
$$\Phi^{<2>}(2,0) = \Big[P(1,1)\otimes E(1,1) + \big(E(1,1)\otimes\mathcal{P}(1,1)\big)\cdot F^{<2>}(2,2) -$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\big(E(1,1)\otimes\mathcal{P}^2(1,1)\big)\cdot G^{<2>}(2,2) + \Lambda_{21}(2,2) + \Gamma_2(2,2)\cdot\Lambda_{21}(2,2)\Big]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\Big[\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0) - \Gamma_2(2,2)\cdot\big(\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0)\big)\Big],$$

где

$$\Gamma_1(2,2) =$$
$$= -\Lambda_{21}(2,2)\cdot\Big[P(1,1)\otimes E(1,1) + \big(E(1,1)\otimes\mathcal{P}(1,1)\big)\cdot F^{<2>}(2,2) -$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\big(E(1,1)\otimes\mathcal{P}^2(1,1)\big)\cdot G^{<2>}(2,2) + \Lambda_{21}(2,2)\Big]^{-1},$$

$$\Gamma_2(2,2) =$$

$$= -\Lambda_{12}(2,2)\cdot\Big[P(1,1)\otimes E(1,1) + \big(E(1,1)\otimes\mathcal{P}(1,1)\big)\cdot F^{<1>}(2,2) -$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\big(E(1,1)\otimes\mathcal{P}^2(1,1)\big)\cdot G^{<1>}(2,2) + \Lambda_{12}(2,2)\Big]^{-1}. \quad \blacksquare$$

Пример 3.4. Записать обобщенные уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова и уравнения обобщенных характеристических функций для одномерной стохастической системы с тремя структурами, каждая из которых описывается уравнением Ито

$$dX(t) = f^{<k>}(t, X(t))\,dt + \sigma^{<k>}(t, X(t))\,dW(t), \quad X(t_0) = X_0,$$

$$k = 1, 2, 3,$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, $X \in \mathbb{R}$, $W(t)$ – одномерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от X_0. Начальное состояние X_0 задается ненормированными плотностями вероятности $\varphi_0^{<k>}(x)$, $k = 1, 2, 3$. Функции $\varphi_0^{<k>}(x)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_0^{<k>}(x)\,dx = 1.$$

Переходы между структурами являются однонаправленными и возможны только в сторону увеличения номера структуры, при этом интенсивности этих переходов задаются функциями $\lambda_{12}(t,x)$, $\lambda_{13}(t,x)$ и $\lambda_{23}(t,x)$. Следовательно,

$$\lambda_{21}(t,x) = \lambda_{31}(t,x) = \lambda_{32}(t,x) = 0.$$

Восстановление реализаций случайного процесса $X(t)$ точное, т.е. в моменты смены структуры траектория $X(t)$ непрерывна.

□ Сравнивая с постановкой задачи анализа (см. разд. 3.1.1), можно сделать вывод о том, что $n = s = 1$ и $N = 3$. При таких значениях n, s и N обобщенные уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова имеют вид

$$\frac{\partial\varphi^{<k>}(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[f^{<k>}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g^{<k>}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x)\right] - \sum_{r=1}^{3} b_{kr}(t,x) + \sum_{r=1}^{3} h_{rk}(t,x),$$

$$k = 1, 2, 3,$$

или

$$\frac{\partial \varphi^{<k>}(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[f^{<k>}(t,x)\,\varphi^{<k>}(t,x)\right] + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g^{<k>}(t,x)\,\varphi^{<k>}(t,x)\right] - \\ - \sum_{r=1, r\neq k}^{3} \mathcal{B}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x) + \sum_{r=1, r\neq k}^{3} \mathcal{H}_{rk}\varphi^{<r>}(t,x),$$

$$k = 1, 2, 3,$$

где $g^{<k>}(t,x) = \left[\sigma^{<k>}(t,x)\right]^2$, $(t,x) \in Q_T = T \times \mathbb{R}$.

Начальные и краевые условия записываются следующим образом:

$$\varphi^{<k>}(t,x)\Big|_{t=t_0} = \varphi_0^{<k>}(x),$$

$$\varphi^{<k>}(t,x)\Big|_{x=\pm\infty} = 0,$$

$$k = 1, 2, 3.$$

Операторы $\mathcal{B}_{kr}$ и $\mathcal{H}_{kr}$, входящие в обобщенные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, задаются с помощью функций $\lambda_{kr}(t,x)$, а именно

$$\mathcal{B}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x) = \mathcal{H}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x) = \lambda_{kr}(t,x)\,\varphi^{<k>}(t,x),$$

$$k, r = 1, 2, 3, \quad k \neq r,$$

что следует из условия точного восстановления реализаций случайного процесса $X(t)$ (см. разд. 3.1.2). Таким образом,

$$\mathcal{B}_{12}\varphi^{<1>}(t,x) = \mathcal{H}_{12}\varphi^{<1>}(t,x) = \lambda_{12}(t,x)\,\varphi^{<1>}(t,x),$$
$$\mathcal{B}_{13}\varphi^{<1>}(t,x) = \mathcal{H}_{13}\varphi^{<1>}(t,x) = \lambda_{13}(t,x)\,\varphi^{<1>}(t,x),$$
$$\mathcal{B}_{21}\varphi^{<2>}(t,x) = \mathcal{H}_{21}\varphi^{<2>}(t,x) = 0,$$
$$\mathcal{B}_{23}\varphi^{<2>}(t,x) = \mathcal{H}_{23}\varphi^{<2>}(t,x) = \lambda_{23}(t,x)\,\varphi^{<2>}(t,x),$$
$$\mathcal{B}_{31}\varphi^{<3>}(t,x) = \mathcal{H}_{31}\varphi^{<3>}(t,x) = 0,$$
$$\mathcal{B}_{32}\varphi^{<3>}(t,x) = \mathcal{H}_{32}\varphi^{<3>}(t,x) = 0,$$

следовательно, соотношения для функций поглощения $b_{kr}(t,x)$ и восстановления $h_{kr}(t,x)$ с учетом (3.7), (3.9) и (3.11) записываются в виде

$$b_{kr}(t,x) = h_{kr}(t,x) = \begin{cases} \lambda_{kr}(t,x)\,\varphi^{<k>}(t,x), & k < r, \\ 0, & k \geqslant r, \end{cases}$$

$$k, r = 1, 2, 3.$$

Принимая во внимание полученные соотношения, уравнения для определения ненормированных плотностей вероятности $\varphi^{<1>}(t,x)$, $\varphi^{<2>}(t,x)$ и $\varphi^{<3>}(t,x)$ можно представить в форме

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi^{<1>}(t,x)}{\partial t} = \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\left[f^{<1>}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g^{<1>}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x)\right] - \\
&\quad - \lambda_{12}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x) - \lambda_{13}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x)\,, \\
&\frac{\partial\varphi^{<2>}(t,x)}{\partial t} = \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\left[f^{<2>}(t,x)\varphi^{<2>}(t,x)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g^{<2>}(t,x)\varphi^{<2>}(t,x)\right] - \\
&\quad - \lambda_{23}(t,x)\varphi^{<2>}(t,x) + \lambda_{12}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x)\,. \\
&\frac{\partial\varphi^{<3>}(t,x)}{\partial t} = \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\left[f^{<3>}(t,x)\varphi^{<3>}(t,x)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g^{<3>}(t,x)\varphi^{<3>}(t,x)\right] + \\
&\quad + \lambda_{13}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x) + \lambda_{23}(t,x)\varphi^{<2>}(t,x)\,.
\end{aligned}$$

Начальные и краевые условия для этих уравнений имеют вид

$$\varphi^{<1>}(t,x)\big|_{t=t_0} = \varphi_0^{<1>}(x), \quad \varphi^{<2>}(t,x)\big|_{t=t_0} = \varphi_0^{<2>}(x),$$

$$\varphi^{<3>}(t,x)\big|_{t=t_0} = \varphi_0^{<3>}(x),$$

$$\varphi^{<1>}(t,x)\big|_{x=\pm\infty} = \varphi^{<2>}(t,x)\big|_{x=\pm\infty} = \varphi^{<3>}(t,x)\big|_{x=\pm\infty} = 0.$$

Приведем также краткую форму обобщенных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова, т.е. запишем их в векторно-операторной форме (3.15):

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varphi}(t,x),$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t,x)|_{t=t_0} = \boldsymbol{\varphi}_0(x), \quad \boldsymbol{\varphi}(t,x)|_{x=\pm\infty} = 0,$$

где

$$\boldsymbol{\varphi}(t,x) = \begin{bmatrix} \varphi^{<1>}(t,x) \\ \varphi^{<2>}(t,x) \\ \varphi^{<3>}(t,x) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_0(x) = \begin{bmatrix} \varphi_0^{<1>}(x) \\ \varphi_0^{<2>}(x) \\ \varphi_0^{<3>}(x) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{13} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{23} \\ \mathcal{A}_{31} & \mathcal{A}_{32} & \mathcal{A}_{33} \end{bmatrix},$$

причем

$$\mathcal{A}_{11}\varphi^{<1>}(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[f^{<1>}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x)\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g^{<1>}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x)\right] - \lambda_{12}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x) - \lambda_{13}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x),$$

$$\mathcal{A}_{12}\varphi^{<2>}(t,x) = 0,$$

$$\mathcal{A}_{13}\varphi^{<3>}(t,x) = 0,$$

$$\mathcal{A}_{21}\varphi^{<1>}(t,x) = \lambda_{12}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x),$$

$$\mathcal{A}_{22}\varphi^{<2>}(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[f^{<2>}(t,x)\varphi^{<2>}(t,x)\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g^{<2>}(t,x)\varphi^{<2>}(t,x)\right] - \lambda_{23}(t,x)\varphi^{<2>}(t,x),$$

$$\mathcal{A}_{23}\varphi^{<3>}(t,x) = 0,$$

$$\mathcal{A}_{31}\varphi^{<1>}(t,x) = \lambda_{13}(t,x)\varphi^{<1>}(t,x),$$

$$\mathcal{A}_{32}\varphi^{<2>}(t,x) = \lambda_{23}(t,x)\varphi^{<2>}(t,x),$$

$$\mathcal{A}_{33}\varphi^{<3>}(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[f^{<3>}(t,x)\varphi^{<3>}(t,x)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g^{<3>}(t,x)\varphi^{<3>}(t,x)\right].$$

Заметим, что в данном случае уравнение для определения ненормированной плотности вероятности $\varphi^{<1>}(t,x)$ можно решать независимо от двух других уравнений. Далее, уравнение для определения $\varphi^{<2>}(t,x)$ после подстановки $\varphi^{<1>}(t,x)$ решается независимо от последнего уравнения. В этом проявляется специфика задачи анализа систем управления с однонаправленными переходами. При такой постановке задачи матрица $\mathcal{A}$ является нижней треугольной [8], так как операторы $\mathcal{A}_{12}$, $\mathcal{A}_{13}$ и $\mathcal{A}_{23}$ нулевые.

Перейдем к выводу уравнений обобщенных характеристических функций. Как и в примере 3.1, предположим, что система функций

$$\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$$

является базисом пространства $L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$ (см. разд. 1.1.3), и при этом системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ представляют собой базисы пространств $L_2(T;\nu(t))$ и $L_2(\mathbb{R};\rho(x))$ соответственно (см. разд. 1.1.1 и 1.1.2).

Уравнения (3.31) для определения обобщенных характеристических функций с учетом того, что $n = 1$ и $N = 2$, записываются в виде

$$\begin{aligned}
&P(2,2)\cdot\Phi^{<k>}(2,0)-\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<k>}(1,0)=\\
&\quad=-\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<k>}(2,2)\cdot\Phi^{<k>}(2,0)+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<k>}(2,2)\cdot\Phi^{<k>}(2,0)-\\
&\qquad-\sum_{r=1,r\neq k}^{3}B_{kr}(2,2)\cdot\Phi^{<k>}(2,0)+\sum_{r=1,r\neq k}^{3}H_{rk}(2,2)\cdot\Phi^{<r>}(2,0),\\
&k=1,2,3,
\end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned}
&P(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)-\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0)=\\
&\quad=-\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<1>}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<1>}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)-\\
&\qquad-B_{12}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)-B_{13}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)+\\
&\qquad+H_{21}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0)+H_{31}(2,2)\cdot\Phi^{<3>}(2,0),\\
&P(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0)-\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0)=\\
&\quad=-\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<2>}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0)+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<2>}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0)-\\
&\qquad-B_{21}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0)-B_{23}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0)+\\
&\qquad+H_{12}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)+H_{32}(2,2)\cdot\Phi^{<3>}(2,0),\\
&P(2,2)\cdot\Phi^{<3>}(2,0)-\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<3>}(1,0)=\\
&\quad=-\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<3>}(2,2)\cdot\Phi^{<3>}(2,0)+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<3>}(2,2)\cdot\Phi^{<3>}(2,0)-\\
&\qquad-B_{31}(2,2)\cdot\Phi^{<3>}(2,0)-B_{32}(2,2)\cdot\Phi^{<3>}(2,0)+\\
&\qquad+H_{13}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)+H_{23}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0),
\end{aligned}$$

где $P(2,2)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент, $\mathcal{P}_1(2,2)$ и $\mathcal{P}_{11}(2,2)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов дифференцирования по переменной x первого и второго порядков соответственно (см. разд. 1.4.3); $F^{<k>}(2,2)$ и $G^{<k>}(2,2)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов умножения на коэффициенты сноса $f^{<k>}(t,x)$ и диффузии $g^{<k>}(t,x)$ соответственно (см. разд. 1.4.2); $\Phi^{<k>}(2,0)$ – обобщенная характеристическая функция, т.е. нестационарная спектральная характеристика ненормированной плотности вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$; $k=1,2,3$. Нестационарные спектральные характеристики $P(2,2)$, $\mathcal{P}_1(2,2)$, $\mathcal{P}_{11}(2,2)$, $F^{<k>}(2,2)$, $G^{<k>}(2,2)$ и $\Phi^{<k>}(2,0)$ определены относительно базисной системы $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$, $k=1,2,3$.

Через $B_{kr}(2,2)$ и $H_{kr}(2,2)$ обозначены нестационарные спектральные характеристики операторов $\mathcal{B}_{kr}$ и $\mathcal{H}_{kr}$ соответственно, где $k,r=1,2,3$ и $k\neq r$, для которых справедливы соотношения

$$
\begin{aligned}
&B_{12}(2,2)=H_{12}(2,2)=\Lambda_{12}(2,2), && B_{13}(2,2)=H_{13}(2,2)=\Lambda_{13}(2,2),\\
&B_{21}(2,2)=H_{21}(2,2)=\mathcal{O}(2,2), && B_{23}(2,2)=H_{23}(2,2)=\Lambda_{23}(2,2),\\
&B_{31}(2,2)=H_{31}(2,2)=\mathcal{O}(2,2), && B_{32}(2,2)=H_{32}(2,2)=\mathcal{O}(2,2),
\end{aligned}
$$

что является следствием (3.30), причем $\Lambda_{12}(2,2)$, $\Lambda_{13}(2,2)$ и $\Lambda_{23}(2,2)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов умножения на функции $\lambda_{12}(t,x)$, $\lambda_{13}(t,x)$ и $\lambda_{23}(t,x)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.2), $\mathcal{O}(2,2)$ – четырехмерная гиперквадратная нулевая матрица (см. разд. 1.2.3). Отметим, что нестационарные спектральные характеристики $B_{21}(2,2)$, $B_{31}(2,2)$, $B_{32}(2,2)$ и $H_{21}(2,2)$, $H_{31}(2,2)$, $H_{32}(2,2)$ представляют собой нулевые матрицы из-за равенства нулю функций $\lambda_{21}(t,x)$, $\lambda_{31}(t,x)$, $\lambda_{32}(t,x)$.

Остальные обозначения аналогичны обозначениям, введенным в ходе решения примера 3.1, а именно $q(1,0;t_0)$ – матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке t_0 (см. (2.21)), $\Phi_0^{<k>}(1,0)$ – спектральная характеристика ненормированной плотности вероятности $\varphi_0^{<k>}(x)$ начального состояния X_0, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.2), $k=1,2,3$.

Для рассматриваемого примера нестационарные спектральные характеристики $P(2,2)$, $\mathcal{P}_1(2,2)$ и $\mathcal{P}_{11}(2,2)$ операторов дифференцирования определяются соотношениями

$$
\begin{aligned}
P(2,2)&=P(1,1)\otimes E(1,1),\\
\mathcal{P}_1(2,2)&=E(1,1)\otimes\mathcal{P}(1,1),\\
\mathcal{P}_{11}(2,2)&=E(1,1)\otimes\mathcal{P}^2(1,1),
\end{aligned}
$$

где $P(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$; $\mathcal{P}(1,1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.3).

Учитывая выражения для нестационарных спектральных характеристик $B_{kr}(2,2)$ и $H_{kr}(2,2)$ операторов $\mathcal{B}_{kr}$ и $\mathcal{H}_{kr}$ соответственно ($k,r=1,2,3$, $k\neq r$), можно записать уравнения обобщенных характеристических функций в виде системы

$$\begin{cases} P(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0) - A_{11}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0) - \\ \quad - A_{12}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0) - A_{13}(2,2)\cdot\Phi^{<3>}(2,0) = \\ \quad\quad = \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0), \\ P(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0) - A_{21}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0) - \\ \quad - A_{22}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0) - A_{23}(2,2)\cdot\Phi^{<3>}(2,0) = \\ \quad\quad = \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0), \\ P(2,2)\cdot\Phi^{<3>}(2,0) - A_{31}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0) - \\ \quad - A_{32}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0) - A_{33}(2,2)\cdot\Phi^{<3>}(2,0) = \\ \quad\quad = \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<3>}(1,0), \end{cases}$$

где

$$A_{11}(2,2) = -\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<1>}(2,2) + $$
$$+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<1>}(2,2) - \Lambda_{12}(2,2) - \Lambda_{13}(2,2),$$

$$A_{12}(2,2) = \mathcal{O}(2,2),$$

$$A_{13}(2,2) = \mathcal{O}(2,2),$$

$$A_{21}(2,2) = \Lambda_{12}(2,2),$$

$$A_{22}(2,2) = -\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<2>}(2,2) + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<2>}(2,2) - \Lambda_{23}(2,2),$$

$$A_{23}(2,2) = \mathcal{O}(2,2),$$

$$A_{31}(2,2) = \Lambda_{13}(2,2),$$

$$A_{32}(2,2) = \Lambda_{23}(2,2),$$

$$A_{33}(2,2) = -\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<3>}(2,2) + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<3>}(2,2).$$

Найдем решение полученных уравнений двумя способами.

Первый способ. Построим шестимерные гиперквадратные матрицы $P(3,3)$, $A(3,3)$ и трехмерные гиперстолбцовые матрицы $\Phi(3,0)$, $B(3,0)$ при помощи операции агрегатирования (см. разд. 1.2.3):

$$P(3,3) = \begin{bmatrix} P(2,2) & \mathcal{O}(2,2) & \mathcal{O}(2,2) \\ \mathcal{O}(2,2) & P(2,2) & \mathcal{O}(2,2) \\ \mathcal{O}(2,2) & \mathcal{O}(2,2) & P(2,2) \end{bmatrix},$$

$$A(3,3) = \begin{bmatrix} A_{11}(2,2) & A_{12}(2,2) & A_{13}(2,2) \\ A_{21}(2,2) & A_{22}(2,2) & A_{23}(2,2) \\ A_{31}(2,2) & A_{32}(2,2) & A_{33}(2,2) \end{bmatrix},$$

$$\Phi(3,0) = \begin{bmatrix} \Phi^{<1>}(2,0) \\ \Phi^{<2>}(2,0) \\ \Phi^{<3>}(2,0) \end{bmatrix}, B(3,0) = \begin{bmatrix} \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes \Phi_0^{<1>}(1,0) \\ \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes \Phi_0^{<2>}(1,0) \\ \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes \Phi_0^{<3>}(1,0) \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнения обобщенных характеристических функций можно представить в виде (3.34):

$$\big(P(3,3) - A(3,3)\big)\cdot\Phi(3,0) = B(3,0).$$

Далее, обозначая разность матриц $P(3,3)$ и $A(3,3)$ через $Z(3,3)$, перепишем это уравнение в форме (3.35), т.е.

$$Z(3,3)\cdot\Phi(3,0) = B(3,0),$$

где

$$Z(3,3) = P(3,3) - A(3,3) =$$

$$= \begin{bmatrix} P(2,2) - A_{11}(2,2) & -A_{12}(2,2) & -A_{13}(2,2) \\ -A_{21}(2,2) & P(2,2) - A_{22}(2,2) & -A_{23}(2,2) \\ -A_{31}(2,2) & -A_{32}(2,2) & P(2,2) - A_{33}(2,2) \end{bmatrix}.$$

Умножая левую и правую части этого равенства слева на $Z^{-1}(3,3)$, получаем решение уравнений обобщенных характеристических функций:

$$\Phi(3,0) = Z^{-1}(3,3)\cdot B(3,0).$$

На заключительном этапе с помощью декомпозиции гиперстолбцовой матрицы $\Phi(3,0)$ (см. разд. 1.2.3) можно найти искомые обобщенные характеристические функции $\Phi^{<1>}(2,0)$, $\Phi^{<2>}(2,0)$ и $\Phi^{<3>}(2,0)$.

В т о р о й с п о с о б. Перепишем систему уравнений для определения обобщенных характеристических функций в виде

$$\begin{cases} Z_{11}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)=\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0),\\ Z_{21}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)+Z_{22}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0)=\\ \quad=\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0),\\ Z_{31}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)+Z_{32}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0)+\\ \quad+Z_{33}(2,2)\cdot\Phi^{<3>}(2,0)=\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<3>}(1,0),\end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} &Z_{11}(2,2)=P(2,2)+\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<1>}(2,2)-\\ &\quad-\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<1>}(2,2)+\Lambda_{12}(2,2)+\Lambda_{13}(2,2),\\ &Z_{21}(2,2)=-\Lambda_{12}(2,2),\\ &Z_{22}(2,2)=P(2,2)+\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<2>}(2,2)-\\ &\quad-\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<2>}(2,2)+\Lambda_{23}(2,2),\\ &Z_{31}(2,2)=-\Lambda_{13}(2,2),\\ &Z_{32}(2,2)=-\Lambda_{23}(2,2),\\ &Z_{33}(2,2)=P(2,2)+\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<3>}(2,2)-\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot G^{<3>}(2,2).\end{aligned}$$

Как показано выше, решение этой системы определяется соотношениями (3.42), т.е.

$$\begin{aligned} &\Phi^{<1>}(2,0)=Z_{11}^{-1}(2,2)\cdot\left(\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0)\right),\\ &\Phi^{<2>}(2,0)=Z_{22}^{-1}(2,2)\cdot\\ &\quad\cdot\left(\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0)-Z_{21}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)\right),\\ &\Phi^{<3>}(2,0)=Z_{33}^{-1}(2,2)\cdot\\ &\quad\cdot\Big[\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<3>}(1,0)-\\ &\qquad-Z_{31}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)-Z_{32}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0)\Big],\end{aligned}$$

которые с учетом выражений для матриц $Z_{kr}(2,2)$, где $k,r = 1,2,3$ и $k \geqslant r$, и нестационарных спектральных характеристик $P(2,2)$, $\mathcal{P}_1(2,2)$, $\mathcal{P}_{11}(2,2)$ записываются следующим образом:

$$\Phi^{<1>}(2,0) = \Big[P(1,1) \otimes E(1,1) + \big(E(1,1) \otimes \mathcal{P}(1,1)\big) \cdot F^{<1>}(2,2) - \\ - \frac{1}{2} \cdot \big(E(1,1) \otimes \mathcal{P}^2(1,1)\big) \cdot G^{<1>}(2,2) + \Lambda_{12}(2,2) + \Lambda_{13}(2,2)\Big]^{-1} \cdot \\ \cdot \Big[\nu(t_0) \cdot q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0^{<1>}(1,0)\Big],$$

$$\Phi^{<2>}(2,0) = \Big[P(1,1) \otimes E(1,1) + \big(E(1,1) \otimes \mathcal{P}(1,1)\big) \cdot F^{<2>}(2,2) - \\ - \frac{1}{2} \cdot \big(E(1,1) \otimes \mathcal{P}^2(1,1)\big) \cdot G^{<2>}(2,2) + \Lambda_{23}(2,2)\Big]^{-1} \cdot \\ \cdot \Big[\nu(t_0) \cdot q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0^{<2>}(1,0) + \Lambda_{12}(2,2) \cdot \Phi^{<1>}(2,0)\Big],$$

$$\Phi^{<3>}(2,0) = \Big[P(1,1) \otimes E(1,1) + \big(E(1,1) \otimes \mathcal{P}(1,1)\big) \cdot F^{<3>}(2,2) - \\ - \frac{1}{2} \cdot \big(E(1,1) \otimes \mathcal{P}^2(1,1)\big) \cdot G^{<3>}(2,2)\Big]^{-1} \cdot \\ \cdot \Big[\nu(t_0) \cdot q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0^{<3>}(1,0) + \\ + \Lambda_{13}(2,2) \cdot \Phi^{<1>}(2,0) + \Lambda_{23}(2,2) \cdot \Phi^{<2>}(2,0)\Big].$$

Как и в примере 2.1, для решения задачи анализа в качестве базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ можно использовать нестационарные полиномы Лежандра (1.4), нестационарные косинусоиды (1.5), нестационарные экспоненциальные функции (1.6) или нестационарные функции Уолша (1.7), а в качестве базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ – полиномы Эрмита (1.20) с весовой функцией $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ или функции Эрмита (1.21) с весовой функцией $\rho(x) \equiv 1$. ■

Методика расчета ненормированных плотностей вероятности

1. По функциям $f^{<k>}(t,x)$ и $\sigma^{<k>}(t,x)$, входящим в уравнение (3.1), ненормированным плотностям вероятности $\varphi_0^{<k>}(x)$ начального состояния X_0, интенсивностям переходов $\lambda_{kr}(t,x)$ и условным плотностям вероятно-

сти восстановления реализаций $q_{kr}(t, x \mid \tilde{x})$ сформировать соответствующую начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t,x), \\ &\varphi(t,x)|_{t=t_0} = \varphi_0(x), \\ &\varphi(t,x)|_{x=\pm\infty} = 0, \end{aligned} \tag{I}$$

где

$$\varphi(t,x) = \begin{bmatrix} \varphi^{<1>}(t,x) \\ \varphi^{<2>}(t,x) \\ \vdots \\ \varphi^{<N>}(t,x) \end{bmatrix}, \quad \varphi_0(x) = \begin{bmatrix} \varphi_0^{<1>}(x) \\ \varphi_0^{<2>}(x) \\ \vdots \\ \varphi_0^{<N>}(x) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \dots & \mathcal{A}_{1N} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \dots & \mathcal{A}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_{N1} & \mathcal{A}_{N2} & \dots & \mathcal{A}_{NN} \end{bmatrix}.$$

Линейные операторы $\mathcal{A}_{kr}$, где $k, r = 1, 2, \dots, N$, задаются следующим образом:

$$\mathcal{A}_{kk}\varphi^{<k>}(t,x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_i^{<k>}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[g_{ij}^{<k>}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x)\right] - \sum_{r=1, r\neq k}^{N} \mathcal{B}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x),$$

$$\mathcal{A}_{kr}\varphi^{<r>}(t,x) = \mathcal{H}_{rk}\varphi^{<r>}(t,x), \quad k, r = 1, 2, \dots, N, \quad k \neq r,$$

где

$$g_{ij}^{<k>}(t,x) = \sum_{r=1}^{s} \sigma_{ir}^{<k>}(t,x)\sigma_{jr}^{<k>}(t,x),$$

$$\mathcal{B}_{kr}\varphi^{<k>}(t,x) = \lambda_{kr}(t,x)\varphi^{<k>}(t,x),$$

$$\mathcal{H}_{rk}\varphi^{<r>}(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lambda_{rk}(t,\tilde{x})\varphi^{<r>}(t,\tilde{x})q_{rk}(t,x \mid \tilde{x})\,d\tilde{x}.$$

2. Выбрать базисную систему

$$\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) = q(i_0, t) \cdot p_1(i_1, x_1) \cdots p_n(i_n, x_n)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n = 0}^{\infty}$$

пространства $L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$ для представления ненормированных плотностей вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$ (см. разд. 1.1.3), оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент, операторов дифференцирования первого и второго порядков по координатам вектора состояния (см. разд. 1.4.3), операторов умножения на коэффициенты сноса $f_i^{<k>}(t,x)$ и диффузии $g_{ij}^{<k>}(t,x)$ (см. разд. 1.4.2), операторов $\mathcal{B}_{kr}$ и $\mathcal{H}_{kr}$ (см. разд. 1.4.1), характеризующих поглощение и восстановление реализаций случайного процесса $X(t)$.

Базисная система $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ должна быть выбрана таким образом, чтобы система функций $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ являлась базисом пространства $L_2(T;\nu(t))$ (см. разд. 1.1.1), а системы функций $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$, $\ldots$, $\{p_n(i_n,x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$ представляли собой базисы пространств $L_2(\mathbb{R};\rho_1(x_1))$, $\ldots$, $L_2(\mathbb{R};\rho_n(x_n))$ соответственно и при этом $\rho(x)=\rho_1(x_1)\ldots\rho_n(x_n)$ (см. разд. 1.1.2).

Например, в качестве системы функций $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ можно выбрать:

а) нестационарные полиномы Лежандра (1.4), нестационарные косинусоиды (1.5), нестационарные экспоненциальные функции (1.6) или нестационарные функции Уолша (1.7) с весовой функцией $\nu(t)\equiv 1$, если $T=[0,t_1]$, т.е. $t_0=0$, t_1 – заданный момент времени окончания процесса;

б) полиномы Лагерра (1.10) с весовой функцией $\nu(t)=\mathrm{e}^{-t}$, если $T=[0,+\infty)$, т.е. $t_0=0$;

в) функции Лагерра (1.11) с весовой функцией $\nu(t)\equiv 1$, если $T=[0,+\infty)$, т.е. $t_0=0$;

г) другие базисные системы пространства $L_2(T;\nu(t))$ (см. [7, 57, 78]), если T – произвольный конечный отрезок $[t_0,t_1]$ или полубесконечный промежуток $[t_0,+\infty)$.

В качестве системы функций $\{p_l(i_l,x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$, $l=1,2,\ldots,n$, могут быть использованы:

а) полиномы Эрмита (1.20) с весовой функцией $\rho_l(x_l)=\mathrm{e}^{-x_l^2}$;

б) функции Эрмита (1.21) с весовой функцией $\rho_l(x_l)\equiv 1$;

в) другие базисные системы пространства $L_2(\mathbb{R};\rho_l(x_l))$,

причем различным значениям l могут соответствовать разные базисные системы $\{p_l(i_l,x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$.

Сформировать базисную систему

$$\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)=p_1(i_1,x_1)\cdot p_2(i_2,x_2)\cdots p_n(i_n,x_n)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$$

пространства $L_2(\mathbb{R}^n;\rho(x))$ для представления ненормированных плотностей вероятности $\varphi_0^{<k>}(x)$ начального состояния X_0 (см. разд. 1.1.2).

3. Вычислить:

а) нестационарные спектральные характеристики операторов:

1) $P(n+1,n+1)$ – нестационарную спектральную характеристику оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент (см. разд. 1.4.3);

2) $\mathcal{P}_i(n+1,n+1)$ – нестационарную спектральную характеристику оператора дифференцирования первого порядка по координате x_i вектора состояния (см. разд. 1.4.3), $i=1,2,\ldots,n$;

3) $\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)$ – нестационарную спектральную характеристику оператора дифференцирования второго порядка по координатам x_i и x_j вектора состояния (см. разд. 1.4.3), $i,j=1,2,\ldots,n$;

4) $F_i^{<k>}(n+1,n+1)$ – нестационарную спектральную характеристику оператора умножения на коэффициент сноса $f_i^{<k>}(t,x)$ (см. разд. 1.4.2), $i=1,2,\ldots,n$, $k=1,2,\ldots,N$;

5) $G_{ij}^{<k>}(n+1,n+1)$ – нестационарную спектральную характеристику оператора умножения на коэффициент диффузии $g_{ij}^{<k>}(t,x)$ (см. разд. 1.4.2), $i,j=1,2,\ldots,n$, $k=1,2,\ldots,N$;

6) $B_{kr}(n+1,n+1)$ – нестационарную спектральную характеристику оператора $\mathcal{B}_{kr}$ (см. разд. 1.4.1), $k,r=1,2,\ldots,N$, $k\neq r$;

7) $H_{kr}(n+1,n+1)$ – нестационарную спектральную характеристику оператора $\mathcal{H}_{kr}$ (см. разд. 1.4.1), $k,r=1,2,\ldots,N$, $k\neq r$;

б) спектральную характеристику $\Phi_0^{<k>}(n,0)$ ненормированной плотности вероятности $\varphi_0^{<k>}(x)$ начального состояния X_0 (см. разд. 1.3.2), $k=1,2,\ldots,N$;

в) $\nu(t_0)$ – значение весовой функции $\nu(t)$ в точке t_0;

г) $q(1,0;t_0)$ – матрицу-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке t_0 (см. (2.21)).

4. Составить уравнения обобщенных характеристических функций в форме

$$Z(n+2,n+2)\cdot\Phi(n+2,0)=B(n+2,0), \tag{II}$$

где

$$Z(n+2,n+2)=$$

$$=\begin{bmatrix} Z_{11}(n+1,n+1) & Z_{12}(n+1,n+1) & \ldots & Z_{1N}(n+1,n+1) \\ Z_{21}(n+1,n+1) & Z_{22}(n+1,n+1) & \ldots & Z_{2N}(n+1,n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1}(n+1,n+1) & Z_{N2}(n+1,n+1) & \ldots & Z_{NN}(n+1,n+1) \end{bmatrix},$$

$$\Phi(n+2,0) = \begin{bmatrix} \Phi^{<1>}(n+1,0) \\ \Phi^{<2>}(n+1,0) \\ \vdots \\ \Phi^{<N>}(n+1,0) \end{bmatrix},$$

$$B(n+2,0) = \begin{bmatrix} \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes \Phi_0^{<1>}(n,0) \\ \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes \Phi_0^{<2>}(n,0) \\ \vdots \\ \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes \Phi_0^{<N>}(n,0) \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{cases} Z_{11}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<1>}(n+1,0)+\ldots+ \\ \quad + Z_{1N}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<N>}(n+1,0) = \\ \quad\quad = \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(n,0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_{N1}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<1>}(n+1,0)+\ldots+ \\ \quad + Z_{NN}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<N>}(n+1,0) = \\ \quad\quad = \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<N>}(n,0), \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

где

$$Z_{kk}(n+1,n+1) = P(n+1,n+1) - A_{kk}(n+1,n+1),$$

$$A_{kk}(n+1,n+1) = -\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i(n+1,n+1)\cdot F_i^{<k>}(n+1,n+1) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}^{<k>}(n+1,n+1) -$$

$$-\sum_{r=1,r\neq k}^{N} B_{kr}(n+1,n+1),$$

$$Z_{kr}(n+1,n+1) = -A_{kr}(n+1,n+1),$$

$$A_{kr}(n+1,n+1) = H_{rk}(n+1,n+1),$$

$$k,r = 1,2,\ldots,N, \quad k\neq r.$$

5. Найти решение уравнений обобщенных характеристических функций.

Если уравнения обобщенных характеристических функций представлены в форме (II), то выразить гиперстолбцовую матрицу $\Phi(n+2,0)$ следующим образом:

$$\Phi(n+2,0) = Z^{-1}(n+2,n+2)\cdot B(n+2,0), \qquad \text{(IV)}$$

а затем с помощью декомпозиции $\Phi(n+2,0)$ получить обобщенные характеристические функции

$$\Phi^{<1>}(n+1,0), \quad \Phi^{<2>}(n+1,0), \quad \ldots, \quad \Phi^{<N>}(n+1,0).$$

Если уравнения обобщенных характеристических функций представлены в форме (III), то возможны следующие варианты:

а) для систем управления с двумя структурами ($N=2$), т.е. в случае, когда система уравнений (III) имеет вид

$$\begin{cases} Z_{11}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<1>}(n+1,0)+ \\ \quad + Z_{12}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<2>}(n+1,0)= \\ \quad\quad = \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(n,0), \\ Z_{21}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<1>}(n+1,0)+ \\ \quad + Z_{22}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<2>}(n+1,0)= \\ \quad\quad = \nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(n,0), \end{cases}$$

найти обобщенные характеристические функции $\Phi^{<1>}(n+1,0)$ и $\Phi^{<2>}(n+1,0)$, используя соотношения

$$\begin{aligned} &\Phi^{<1>}(n+1,0)= \\ &\quad = \left[Z_{11}(n+1,n+1)-\Gamma_1(n+1,n+1)\cdot Z_{21}(n+1,n+1)\right]^{-1}\cdot \\ &\quad\quad \cdot\left[\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(n,0)-\Gamma_1(n+1,n+1)\cdot\right. \\ &\quad\quad\quad \left.\cdot\left(\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(n,0)\right)\right], \end{aligned} \tag{V}$$

где

$$\Gamma_1(n+1,n+1)=Z_{12}(n+1,n+1)\cdot Z_{22}^{-1}(n+1,n+1),$$

и

$$\begin{aligned} &\Phi^{<2>}(n+1,0)= \\ &\quad = \left[Z_{22}(n+1,n+1)-\Gamma_2(n+1,n+1)\cdot Z_{12}(n+1,n+1)\right]^{-1}\cdot \\ &\quad\quad \cdot\left[\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<2>}(n,0)-\Gamma_2(n+1,n+1)\cdot\right. \\ &\quad\quad\quad \left.\cdot\left(\nu(t_0)\cdot q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{<1>}(n,0)\right)\right], \end{aligned} \tag{VI}$$

где

$$\Gamma_2(n+1,n+1)=Z_{21}(n+1,n+1)\cdot Z_{11}^{-1}(n+1,n+1);$$

б) для систем управления, в которых возможны только однонаправленные переходы между структурами ($\lambda_{kr}(t,x) = 0$ при $k > r$), найти $\Phi^{<k>}(n+1,0)$ по формулам

$$\Phi^{<1>}(n+1,0) = Z_{11}^{-1}(n+1,n+1) \cdot \left(\nu(t_0) \cdot q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0^{<1>}(n,0)\right),$$

$$\Phi^{<2>}(n+1,0) = Z_{22}^{-1}(n+1,n+1) \cdot$$

$$\cdot \left(\nu(t_0) \cdot q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0^{<2>}(n,0) - Z_{21}(n+1,n+1) \cdot \Phi^{<1>}(n+1,0)\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Phi^{<N>}(n+1,0) = Z_{NN}^{-1}(n+1,n+1) \cdot$$

$$\cdot \Bigg[\nu(t_0) \cdot q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0^{<N>}(n,0) -$$

$$- \sum_{r=1}^{N-1} Z_{Nr}(n+1,n+1) \cdot \Phi^{<r>}(n+1,0)\Bigg]; \tag{VII}$$

в) для систем управления, в которых возможны переходы только между соседними структурами ($\lambda_{kr}(t,x) = 0$ при $|k-r| > 1$), найти вспомогательные многомерные матрицы $\tilde{Z}_{kk}(n+1,n+1)$ и $\tilde{B}_k(n+1,0)$, где $k = 1,2,\dots,N$, используя рекуррентные формулы

$$\tilde{Z}_{kk}(n+1,n+1) = Z_{kk}(n+1,n+1) -$$

$$- Z_{k,k-1}(n+1,n+1) \cdot \tilde{Z}_{k-1,k-1}^{-1}(n+1,n+1) \cdot Z_{k-1,k}(n+1,n+1),$$

$$\tilde{B}_k(n+1,0) = \nu(t_0) \cdot q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0^{<k>}(n,0) -$$

$$- Z_{k,k-1}(n+1,n+1) \cdot \tilde{Z}_{k-1,k-1}^{-1}(n+1,n+1) \cdot \tilde{B}_{k-1}(n+1,0), \tag{VIII}$$

с учетом того, что

$$\tilde{Z}_{11}(n+1,n+1) = Z_{11}(n+1,n+1),$$

$$\tilde{B}_1(n+1,0) = \nu(t_0) \cdot q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0^{<1>}(n,0).$$

Затем найти $\Phi^{<k>}(n+1,0)$ с помощью следующей процедуры:

$$\Phi^{<N>}(n+1,0) = \tilde{Z}_{NN}^{-1}(n+1,n+1) \cdot \tilde{B}_N(n+1,0),$$

$$\Phi^{<k-1>}(n+1,0) = \tilde{Z}_{k-1,k-1}^{-1}(n+1,n+1) \cdot$$

$$\cdot \left[\tilde{B}_{k-1}(n+1,0) - Z_{k-1,k}(n+1,n+1) \cdot \Phi^{<k>}(n+1,0)\right], \tag{IX}$$

$k = N, N-1, \dots, 2;$

г) для систем другого типа, например, для систем с тремя структурами, с помощью последовательного исключения неизвестных найти обобщенные характеристические функции

$$\Phi^{<1>}(n+1,0), \quad \Phi^{<2>}(n+1,0), \quad \ldots, \quad \Phi^{<N>}(n+1,0).$$

6. Найти ненормированные плотности вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$ по решению уравнений обобщенных характеристических функций, используя формулу обращения

$$\varphi^{<k>}(t,x) = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}\varphi^{<k>}_{i_0 i_1\ldots i_n}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x), \qquad \text{(X)}$$

$$k = 1,2,\ldots,N,$$

где $\varphi^{<k>}_{i_0 i_1\ldots i_n}$ – координаты обобщенной характеристической функции $\Phi^{<k>}(n+1,0)$, $t\in T$, $x\in\mathbb{R}^n$.

Замечание 3.9.

1. Как и в случае решения задачи анализа стохастических систем управления с фиксированной структурой (см. замечание 2.7), при практических расчетах на ЭВМ используются базисные системы с конечным числом функций, т.е. индексы i_0, i_1, …, i_n принимают конечное число значений:

$$\begin{aligned} &i_0 = 0,1,\ldots,L_0-1,\\ &i_1 = 0,1,\ldots,L_1-1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &i_n = 0,1,\ldots,L_n-1, \end{aligned}$$

где натуральные числа L_0, L_1, …, L_n называются **порядками усечения спектральных характеристик**. В этом случае формула обращения (X) записывается в виде

$$\varphi^{<k>}(t,x) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\ldots\sum_{i_n=0}^{L_n-1}\varphi^{<k>}_{i_0 i_1\ldots i_n}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),$$

$$k = 1,2,\ldots,N,$$

где $\varphi^{<k>}_{i_0 i_1\ldots i_n}$ – элементы конечной гиперстолбцовой матрицы $\Phi^{<k>}(n+1,0)$, $t\in T$, $x\in\mathbb{R}^n$.

2. В случае, если множество T представляет собой полубесконечный промежуток $[t_0,+\infty)$, как в примере 3.1, в качестве базиса $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ можно применять не только системы функций, ортонормированные на множестве T, но и базисные системы, заданные на нестационарных отрезках времени, например, на отрезке с подвижным правым концом (см. разд. 1.1.1).

Тогда решение уравнений обобщенных характеристических функций будет зависеть от параметра τ (см. замечание 1.2), что позволит получать ненормированные плотности вероятности вектора состояния для любого конечного момента времени $t \in T$.

Пример 3.5. Решить задачу анализа одномерной стохастической системы управления с двумя структурами, представляющую собой математическую модель системы поиска и захвата цели [26]. Первая структура этой системы описывается уравнением

$$dX(t) = \left(-\frac{\gamma+1}{\xi}X(t) + \frac{\varkappa}{\xi}\right)dt + \frac{\gamma}{\xi}dW(t),$$

а вторая – уравнением

$$dX(t) = \left(-\frac{1}{\xi}X(t) + \frac{\varkappa}{\xi}\right)dt + \frac{\gamma}{\xi}dW(t),$$

где $t \in T = [0,1]$, $X \in \mathbb{R}$, $W(t)$ – одномерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от начального состояния $X_0 = X(0)$, распределение которого определяется ненормированными плотностями вероятности

$$\varphi_0^{<1>}(x) = \alpha\varphi_N(x) \quad \text{и} \quad \varphi_0^{<2>}(x) = (1-\alpha)\varphi_N(x),$$

причем $\varphi_N(x)$ – плотность вероятности стандартной гауссовской случайной величины, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

При выходе координаты X из множества $[-\Delta_0, \Delta_0]$ возможен переход из первой структуры во вторую (срыв слежения за целью), причем интенсивность этого перехода постоянна и равна c_1, а при попадании координаты X в область $[-\Delta, \Delta]$, где $\Delta > \Delta_0$, система может перейти обратно с интенсивностью c_2 (срыв слежения за целью и переход в состояние поиска). Восстановление реализаций случайного процесса $X(t)$ точное.

Числовые параметры системы γ, $\varkappa$, ξ, α, Δ, Δ_0, c_1 и c_2 заданы следующим образом:

$$\gamma = 1.4, \qquad \varkappa = 2, \qquad \xi = 0.5, \qquad \alpha = 0.7,$$
$$\Delta = 2.5, \qquad \Delta_0 = 2, \qquad c_1 = 2, \qquad c_2 = 0.4.$$

□ 1. Сравнивая с постановкой задачи анализа (см. разд. 3.1.1), получаем, что $n = s = 1$, $N = 2$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$.

Выражения для коэффициентов сноса и диффузии имеют вид

$$f^{<1>}(t,x) = -\frac{\gamma+1}{\xi}x + \frac{\varkappa}{\xi}, \qquad g^{<1>}(t,x) = \frac{\gamma^2}{\xi^2},$$
$$f^{<2>}(t,x) = -\frac{1}{\xi}x + \frac{\varkappa}{\xi}, \qquad g^{<2>}(t,x) = \frac{\gamma^2}{\xi^2}.$$

Так как по условию переход из первой структуры во вторую происходит вне отрезка $[-\Delta_0, \Delta_0]$ с интенсивностью c_1, интенсивность перехода $\lambda_{12}(t,x)$ задается следующим выражением:

$$\lambda_{12}(t,x) = c_1 \cdot \mathbb{I}_{(-\infty,-\Delta_0)\bigcup(\Delta_0,+\infty)}(x),$$

где $\mathbb{I}_{(-\infty,-\Delta_0)\bigcup(\Delta_0,+\infty)}(x)$ – индикатор множества $(-\infty,-\Delta_0)\bigcup(\Delta_0,+\infty)$:

$$\mathbb{I}_{(-\infty,-\Delta_0)\bigcup(\Delta_0,+\infty)}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\Delta_0, \Delta_0], \\ 1, & x \notin [-\Delta_0, \Delta_0]. \end{cases}$$

Обратный переход возможен только при $x \in [-\Delta, \Delta]$, поэтому

$$\lambda_{21}(t,x) = c_2 \cdot \mathbb{I}_{[-\Delta,\Delta]}(x),$$

где $\mathbb{I}_{[-\Delta,\Delta]}(x)$ – индикатор множества $[-\Delta,\Delta]$, т.е.

$$\mathbb{I}_{[-\Delta,\Delta]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\Delta, \Delta], \\ 0, & x \notin [-\Delta, \Delta], \end{cases}$$

следовательно, операторы $\mathcal{B}_{12}$, $\mathcal{B}_{21}$, $\mathcal{H}_{12}$ и $\mathcal{H}_{21}$ определяются выражениями

$$\mathcal{B}_{12}\varphi^{<1>}(t,x) = \mathcal{H}_{12}\varphi^{<1>}(t,x) = c_1\mathbb{I}_{(-\infty,-\Delta_0)\bigcup(\Delta_0,+\infty)}(x)\,\varphi^{<1>}(t,x),$$

$$\mathcal{B}_{21}\varphi^{<2>}(t,x) = \mathcal{H}_{21}\varphi^{<2>}(t,x) = c_2\mathbb{I}_{[-\Delta,\Delta]}(x)\,\varphi^{<2>}(t,x).$$

Плотность вероятности $\varphi_N(x)$ стандартной гауссовской случайной величины определяется формулой

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

поэтому ненормированные плотности вероятности $\varphi_0^{<1>}(x)$ и $\varphi_0^{<2>}(x)$ начального состояния X_0 задаются так:

$$\varphi_0^{<1>}(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \varphi_0^{<2>}(x) = \frac{1-\alpha}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Таким образом, с учетом выражений для коэффициентов сноса и диффузии, интенсивностей переходов и начальных условий можно записать начально-краевую задачу (I) в виде

$$\frac{\partial\varphi^{<1>}(t,x)}{\partial t} = \\ = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(-\frac{\gamma+1}{\xi}x + \frac{\varkappa}{\xi}\right)\varphi^{<1>}(t,x)\right] + \frac{\gamma^2}{2\xi^2}\frac{\partial^2\varphi^{<1>}(t,x)}{\partial x^2} - \\ - c_1\mathbb{I}_{(-\infty,-\Delta_0)\bigcup(\Delta_0,+\infty)}(x)\,\varphi^{<1>}(t,x) + c_2\mathbb{I}_{[-\Delta,\Delta]}(x)\,\varphi^{<2>}(t,x),$$

$$\frac{\partial \varphi^{<2>}(t,x)}{\partial t} =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(-\frac{1}{\xi}x+\frac{\varkappa}{\xi}\right)\varphi^{<2>}(t,x)\right] + \frac{\gamma^2}{2\xi^2}\frac{\partial^2\varphi^{<2>}(t,x)}{\partial x^2} -$$
$$- c_2\mathbb{I}_{[-\Delta,\Delta]}(x)\varphi^{<2>}(t,x) + c_1\mathbb{I}_{(-\infty,-\Delta_0)\bigcup(\Delta_0,+\infty)}(x)\varphi^{<1>}(t,x),$$
$$\varphi^{<1>}(t,x)\big|_{t=0} = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \varphi^{<2>}(t,x)\big|_{t=0} = \frac{1-\alpha}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$\varphi^{<1>}(t,x)\big|_{x=\pm\infty} = \varphi^{<2>}(t,x)\big|_{x=\pm\infty} = 0,$$

где $(t,x) \in Q_T = [0,1]\times\mathbb{R}$.

2. Выберем в качестве базисной системы $\{e(i_0,i_1,t,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$ систему функций

$$\{\hat{P}(i_0,t)\,\hat{\Phi}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty},$$

где $\{\hat{P}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ – система нестационарных полиномов Лежандра (1.4), определенная на стационарном отрезке $T=[0,1]$ и представляющая собой базис пространства $L_2(T;\nu(t))$ при $\nu(t)\equiv 1$, т.е. система функций $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$; $\{\hat{\Phi}(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ – система функций Эрмита (1.21), которая является базисной системой пространства $L_2(\mathbb{R};\rho(x))$ с весом $\rho(x)\equiv 1$, т.е. система функций $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$.

3. Вычислим нестационарные спектральные характеристики операторов дифференцирования по времени и координате x, а также операторов умножения на коэффициенты сноса, коэффициенты диффузии и интенсивности переходов относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0,t)\,\hat{\Phi}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$.

Из (1.70) следует, что нестационарная спектральная характеристика $P(2,2)$ оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент представляется в виде тензорного произведения нестационарной спектральной характеристики $P(1,1)$ оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенной относительно системы полиномов Лежандра (см. примеры нестационарных спектральных характеристик операторов дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени в разд. 1.4.3), и двумерной единичной матрицы $E(1,1)$:

$$P(2,2) = P(1,1)\otimes E(1,1).$$

Нестационарные спектральные характеристики $\mathcal{P}_1(2,2)$ и $\mathcal{P}_{11}(2,2)$ операторов дифференцирования по координате x первого и второго порядков соответственно выражаются через спектральную характеристику $\mathcal{P}(1,1)$ оператора дифференцирования, определенную относительно системы функций

Эрмита (см. примеры спектральных характеристик операторов дифференцирования в разд. 1.4.3):

$$\mathcal{P}_1(2,2) = E(1,1) \otimes \mathcal{P}(1,1),$$

$$\mathcal{P}_{11}(2,2) = E(1,1) \otimes \mathcal{P}^2(1,1),$$

что также является следствием (1.70).

Далее найдем нестационарные спектральные характеристики $F^{<1>}(2,2)$ и $F^{<2>}(2,2)$ операторов умножения на коэффициенты сноса $f^{<1>}(t,x)$ и $f^{<2>}(t,x)$ соответственно. Опираясь на утверждение 1.15 и свойства спектрального преобразования операторов умножения, заданных на пространстве функций времени (см. разд. 1.4.2), получаем выражения для нестационарных спектральных характеристик $F^{<1>}(2,2)$ и $F^{<2>}(2,2)$:

$$F^{<1>}(2,2) = E(1,1) \otimes \tilde{A}^{<1>}(1,1),$$

$$F^{<2>}(2,2) = E(1,1) \otimes \tilde{A}^{<2>}(1,1),$$

где $\tilde{A}^{<1>}(1,1)$ и $\tilde{A}^{<2>}(1,1)$ – спектральные характеристики операторов умножения на функции

$$\tilde{a}^{<1>}(x) = -\frac{\gamma+1}{\xi}x + \frac{\varkappa}{\xi} \quad \text{и} \quad \tilde{a}^{<2>}(x) = -\frac{1}{\xi}x + \frac{\varkappa}{\xi}$$

соответственно. Они определены относительно системы функций Эрмита и задаются выражениями

$$\tilde{A}^{<1>}(1,1) = \left(\tilde{a}^{<1>}_{i_1 j_1}\right), \quad \tilde{A}^{<2>}(1,1) = \left(\tilde{a}^{<2>}_{i_1 j_1}\right),$$

причем

$$\tilde{a}^{<1>}_{i_1 j_1} = \big(p(i_1,x), \tilde{a}^{<1>}(x)\cdot p(j_1,x)\big)_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= -\frac{\gamma+1}{\xi}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\hat{\Phi}(i_1,x)\hat{\Phi}(j_1,x)\,dx}_{a_{i_1 j_1}} + \frac{\varkappa}{\xi}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{\Phi}(i_1,x)\hat{\Phi}(j_1,x)\,dx}_{\delta_{i_1 j_1}},$$

$$\tilde{a}^{<2>}_{i_1 j_1} = \big(p(i_1,x), \tilde{a}^{<2>}(x)\cdot p(j_1,x)\big)_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= -\frac{1}{\xi}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\hat{\Phi}(i_1,x)\hat{\Phi}(j_1,x)\,dx}_{a_{i_1 j_1}} + \frac{\varkappa}{\xi}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{\Phi}(i_1,x)\hat{\Phi}(j_1,x)\,dx}_{\delta_{i_1 j_1}},$$

$$i_1, j_1 = 0,1,2,\ldots,$$

где $a_{i_1 j_1}$ – элементы спектральной характеристики $A(1,1)$ оператора умножения на функцию $a(x) = x$, определенной относительно системы функций

Эрмита (см. примеры спектральных характеристик операторов умножения на функцию $a(x) = x$ в разд. 1.4.2); $\delta_{i_1 j_1}$ – символ Кронекера, т.е.

$$\delta_{i_1 j_1} = \begin{cases} 1, & i_1 = j_1, \\ 0, & i_1 \neq j_1. \end{cases}$$

Коэффициенты диффузии $g^{<1>}(t,x)$ и $g^{<2>}(t,x)$ по условию постоянны, следовательно, нестационарные спектральные характеристики $G^{<1>}(2,2)$ и $G^{<2>}(2,2)$ операторов умножения на эти функции, согласно свойству спектрального преобразования операторов умножения, заданных на пространстве функций времени и вектора состояния (см. разд. 1.4.2), представляются в виде

$$G^{<1>}(2,2) = G^{<2>}(2,2) = \frac{\Upsilon^2}{\xi^2} \cdot E(2,2),$$

где $E(2,2)$ – четырехмерная единичная матрица (см. разд. 1.2.3).

Для нестационарных спектральных характеристик $\Lambda_{12}(2,2)$ и $\Lambda_{21}(2,2)$ операторов умножения на функции $\lambda_{12}(t,x)$ и $\lambda_{21}(t,x)$ соответственно справедливы соотношения

$$\Lambda_{12}(2,2) = c_1 \cdot \big(E(1,1) \otimes \mathrm{I}^{<1>}(1,1)\big),$$
$$\Lambda_{21}(2,2) = c_2 \cdot \big(E(1,1) \otimes \mathrm{I}^{<2>}(1,1)\big),$$

в которых $\mathrm{I}^{<1>}(1,1)$ и $\mathrm{I}^{<2>}(1,1)$ – спектральные характеристики операторов умножения на индикаторы $\mathbb{I}_{(-\infty,-\Delta_0)\bigcup(\Delta_0,+\infty)}(x)$ и $\mathbb{I}_{[-\Delta,\Delta]}(x)$ соответственно, определенные относительно системы функций Эрмита, что, как и в случае нестационарных спектральных характеристик $F^{<1>}(2,2)$ и $F^{<2>}(2,2)$, следует из утверждения 1.15, а также свойств спектрального преобразования операторов умножения, заданных на пространствах функций времени и функций времени и вектора состояния (см. разд. 1.4.2). При этом

$$\mathrm{I}^{<1>}(1,1) = \left(\mathrm{I}^{<1>}_{i_1 j_1}\right), \quad \mathrm{I}^{<2>}(1,1) = \left(\mathrm{I}^{<2>}_{i_1 j_1}\right),$$

где

$$\mathrm{I}^{<1>}_{i_1 j_1} = \big(p(i_1,x), \mathbb{I}_{(-\infty,-\Delta_0)\bigcup(\Delta_0,+\infty)}(x) \cdot p(j_1,x)\big)_{L_2(\mathbb{R})} =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{-\Delta_0} \hat{\Phi}(i_1,x)\hat{\Phi}(j_1,x)\,dx + \int\limits_{\Delta_0}^{+\infty} \hat{\Phi}(i_1,x)\hat{\Phi}(j_1,x)\,dx,$$

$$\mathrm{I}^{<2>}_{i_1 j_1} = \big(p(i_1,x), \mathbb{I}_{[-\Delta,\Delta]}(x) \cdot p(j_1,x)\big)_{L_2(\mathbb{R})} = \int\limits_{-\Delta}^{+\Delta} \hat{\Phi}(i_1,x)\hat{\Phi}(j_1,x)\,dx,$$

$$i_1, j_1 = 0,1,2,\ldots\ .$$

Следовательно, нестационарные спектральные характеристики $B_{12}(2,2)$, $B_{21}(2,2)$, $H_{12}(2,2)$ и $H_{21}(2,2)$ операторов $\mathcal{B}_{12}$, $\mathcal{B}_{21}$, $\mathcal{H}_{12}$ и $\mathcal{H}_{21}$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0,t)\hat{\Phi}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$, задаются соотношениями

$$B_{12}(2,2) = H_{12}(2,2) = \Lambda_{12}(2,2),$$

$$B_{21}(2,2) = H_{21}(2,2) = \Lambda_{21}(2,2).$$

Спектральные характеристики $\Phi_0^{<1>}(1,0)$ и $\Phi_0^{<2>}(1,0)$ ненормированных плотностей вероятности $\varphi_0^{<1>}(x)$ и $\varphi_0^{<2>}(x)$ начального состояния X_0 вычисляются относительно системы функций Эрмита по определению (1.40):

$$\Phi_0^{<1>}(1,0) = \left(\varphi_{0i_1}^{<1>}\right), \quad \Phi_0^{<2>}(1,0) = \left(\varphi_{0i_1}^{<2>}\right),$$

где

$$\varphi_{0i_1}^{<1>} = \left(p(i_1,x), \varphi_0^{<1>}(x)\right)_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \hat{\Phi}(i_1,x)\,dx,$$

$$\varphi_{0i_1}^{<2>} = \left(p(i_1,x), \varphi_0^{<2>}(x)\right)_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1-\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \hat{\Phi}(i_1,x)\,dx,$$

$$i_1 = 0,1,2,\ldots\,.$$

Матрица-столбец $q(1,0;0)$ значений функций $\hat{P}(i_0,t)$ в точке $t=0$ с учетом (2.21) и того, что полиномы Лежандра принимают значения из пространства $\mathbb{R}$, представляется следующим образом:

$$q(1,0;0) = \begin{bmatrix} \hat{P}(0,0) & \hat{P}(1,0) & \hat{P}(2,0) & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Значение весовой функции $\nu(t)$ в точке $t=0$ равно единице.

4. Запишем уравнения обобщенных характеристических функций, используя результаты, полученные при решении примеров 3.1 и 3.3 с учетом равенства $\nu(0)=1$ и выражения для нестационарных спектральных характеристик $G^{<1>}(2,2)$ и $G^{<2>}(2,2)$:

$$P(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0) - q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0) =$$
$$= -\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<1>}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0) + \frac{\gamma^2}{2\xi^2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0) -$$
$$-\Lambda_{12}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0) + \Lambda_{21}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0),$$

$$P(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0) - q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0) =$$
$$= -\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<2>}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0) + \frac{\gamma^2}{2\xi^2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0) -$$
$$-\Lambda_{21}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0) + \Lambda_{12}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0),$$

или кратко в форме (IV):

$$\begin{cases} Z_{11}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0) + Z_{12}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0) = q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0), \\ Z_{21}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0) + Z_{22}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0) = q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0), \end{cases}$$

где

$$Z_{11}(2,2) = P(2,2) - A_{11}(2,2),$$
$$A_{11}(2,2) = -\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<1>}(2,2) + \frac{\gamma^2}{2\xi^2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2) - \Lambda_{12}(2,2),$$
$$Z_{12}(2,2) = -A_{12}(2,2), \quad A_{12}(2,2) = \Lambda_{21}(2,2),$$
$$Z_{21}(2,2) = -A_{21}(2,2), \quad A_{21}(2,2) = \Lambda_{12}(2,2),$$
$$Z_{22}(2,2) = P(2,2) - A_{22}(2,2),$$
$$A_{22}(2,2) = -\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<2>}(2,2) + \frac{\gamma^2}{2\xi^2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2) - \Lambda_{21}(2,2).$$

Через $\Phi^{<1>}(2,0)$ и $\Phi^{<2>}(2,0)$ обозначены обобщенные характеристические функции, т.е. нестационарные спектральные характеристики ненормированных плотностей вероятности $\varphi^{<1>}(t,x)$ и $\varphi^{<2>}(t,x)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0,t)\hat{\Phi}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.3.3):

$$\Phi^{<1>}(2,0) = \left(\varphi_{i_0 i_1}^{<1>}\right), \quad \Phi^{<2>}(2,0) = \left(\varphi_{i_0 i_1}^{<2>}\right),$$

где

$$\varphi_{i_0 i_1}^{<1>} = \big(e(i_0,i_1,t,x), \varphi^{<1>}(t,x)\big)_{L_2(Q_T)} = \int\limits_0^1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi^{<1>}(t,x)\hat{P}(i_0,t)\hat{\Phi}(i_1,x)\,dt\,dx,$$

$$\varphi_{i_0 i_1}^{<2>} = \big(e(i_0,i_1,t,x), \varphi^{<2>}(t,x)\big)_{L_2(Q_T)} = \int\limits_0^1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi^{<2>}(t,x)\hat{P}(i_0,t)\hat{\Phi}(i_1,x)\,dt\,dx,$$

$i_0, i_1 = 0,1,2,\ldots$.

5. Поскольку $N = 2$, решение уравнений обобщенных характеристических функций определяется формулами (V) и (VI), которые в рассматриваемом случае записываются в виде

$$\Phi^{<1>}(2,0) = \big[Z_{11}(2,2) - \Gamma_1(2,2)\cdot Z_{21}(2,2)\big]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\big[q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0) - \Gamma_1(2,2)\cdot\big(q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0)\big)\big],$$
$$\Phi^{<2>}(2,0) = \big[Z_{22}(2,2) - \Gamma_2(2,2)\cdot Z_{12}(2,2)\big]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\big[q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0) - \Gamma_2(2,2)\cdot\big(q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0)\big)\big],$$

где

$$\Gamma_1(2,2) = Z_{12}(2,2)\cdot Z_{22}^{-1}(2,2),$$
$$\Gamma_2(2,2) = Z_{21}(2,2)\cdot Z_{11}^{-1}(2,2),$$

т.е.

$$\Phi^{<1>}(2,0) = \Bigg[P(2,2) + \mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<1>}(2,2) - \frac{\Upsilon^2}{2\xi^2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2) +$$
$$+\Lambda_{12}(2,2) + \Gamma_1(2,2)\cdot\Lambda_{12}(2,2)\Bigg]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\Bigg[q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0) - \Gamma_1(2,2)\cdot\big(q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0)\big)\Bigg],$$
$$\Phi^{<2>}(2,0) = \Bigg[P(2,2) + \mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<2>}(2,2) - \frac{\Upsilon^2}{2\xi^2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2) +$$
$$+\Lambda_{21}(2,2) + \Gamma_2(2,2)\cdot\Lambda_{21}(2,2)\Bigg]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\Bigg[q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0) - \Gamma_2(2,2)\cdot\big(q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0)\big)\Bigg],$$

где

$$\Gamma_1(2,2) = -\Lambda_{21}(2,2)\cdot\Bigg[P(2,2) + \mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<2>}(2,2) -$$
$$-\frac{\Upsilon^2}{2\xi^2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2) + \Lambda_{21}(2,2)\Bigg]^{-1},$$
$$\Gamma_2(2,2) = -\Lambda_{12}(2,2)\cdot\Bigg[P(2,2) + \mathcal{P}_1(2,2)\cdot F^{<1>}(2,2) -$$
$$-\frac{\Upsilon^2}{2\xi^2}\cdot\mathcal{P}_{11}(2,2) + \Lambda_{12}(2,2)\Bigg]^{-1}.$$

6. Используя формулу обращения (X), получаем выражения для искомых ненормированных плотностей вероятности $\varphi^{<1>}(t,x)$ и $\varphi^{<2>}(t,x)$:

$$\varphi^{<1>}(t,x) = \mathbb{S}^{-1}\left[\Phi^{<1>}(2,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\varphi^{<1>}_{i_0 i_1}\cdot\hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{\Phi}(i_1,x),$$

$$\varphi^{<2>}(t,x) = \mathbb{S}^{-1}\left[\Phi^{<2>}(2,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\varphi^{<2>}_{i_0 i_1}\cdot\hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{\Phi}(i_1,x),$$

где $\varphi^{<1>}_{i_0 i_1}$ и $\varphi^{<2>}_{i_0 i_1}$ – координаты обобщенных характеристических функций $\Phi^{<1>}(2,0)$ и $\Phi^{<2>}(2,0)$ соответственно, $t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}$.

При численном расчете зададим порядки усечения спектральных характеристик L_0 и L_1 (см. замечание 3.9). В этом случае все спектральные характеристики, входящие в уравнения обобщенных характеристических функций, представляют собой многомерные матрицы с конечным числом элементов, а решение задачи анализа приближенно определяется формулами

$$\varphi^{<1>}(t,x) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\varphi^{<1>}_{i_0 i_1}\cdot\hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{\Phi}(i_1,x),$$

$$\varphi^{<2>}(t,x) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\varphi^{<2>}_{i_0 i_1}\cdot\hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{\Phi}(i_1,x),$$

где $\varphi^{<1>}_{i_0 i_1}$ и $\varphi^{<2>}_{i_0 i_1}$ – элементы конечных гиперстолбцовых матриц $\Phi^{<1>}(2,0)$ и $\Phi^{<2>}(2,0)$ соответственно, $t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}$. Положим $L_0 = 12$, $L_1 = 16$.

На рис. 3.5 и 3.6 изображены графики функции $\varphi^{<1>}(t,x)$ и ее сечений в различные моменты времени t, а графики функции $\varphi^{<2>}(t,x)$ и ее сечений в различные моменты времени t показаны на рис. 3.7 и 3.8. ■

Пример 3.6. Решить задачу анализа двумерной системы управления движением малого искусственного спутника, находящегося под действием гравитационного и управляющего моментов [19]. Математическая модель этой системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{\theta}(t) = q(t), \quad \dot{q}(t) = -\sin\theta(t)\cos\theta(t) + u(t),$$

где $t \in T = [0,1]$, $\theta, q \in \mathbb{R}$, с начальными условиями $\theta(0) = \theta_0$ и $q(0) = q_0$, причем θ_0 и q_0 являются независимыми случайными величинами, имеющими гауссовское распределение с параметрами $m_0^{\theta} = -0.3$, $D_0^{\theta} = 1$ и $m_0^{q} = 0.1$, $D_0^{q} = 1$ соответственно.

Управляющее воздействие $u(t)$ задается соотношением

$$u(t) = \frac{c_1}{2}\cos t + \frac{c_2}{2}\sin t,$$

где $c_1 = 2.163$ и $c_2 = -5.009$.

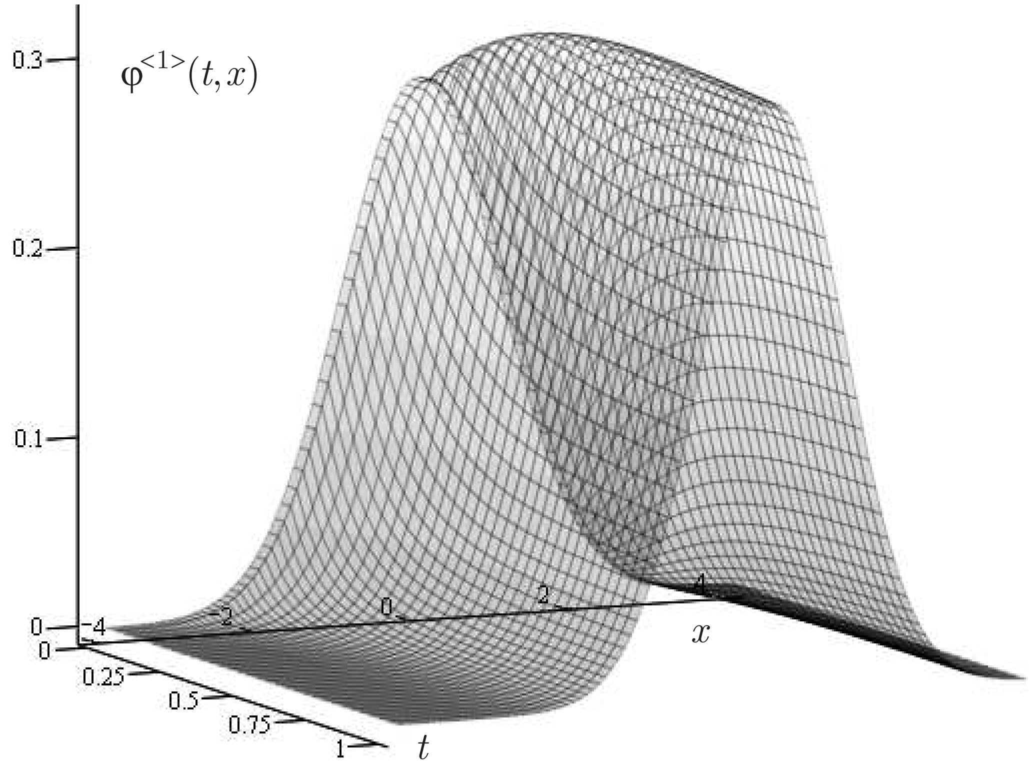

Рис. 3.5. Ненормированная плотность вероятности состояния системы для первой структуры

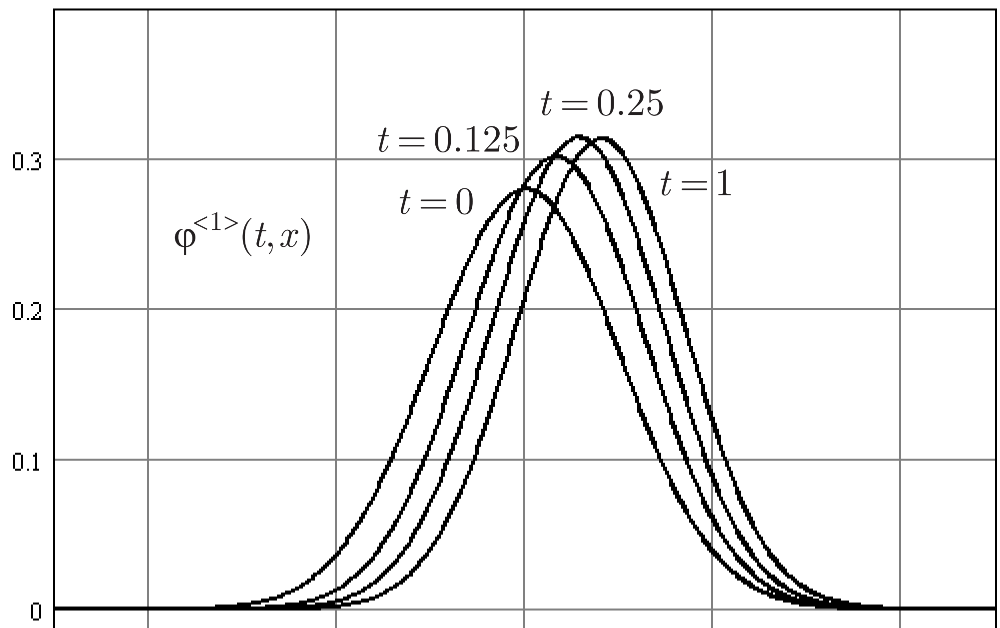

Рис. 3.6. Сечения ненормированной плотности вероятности состояния системы для первой структуры в различные моменты времени

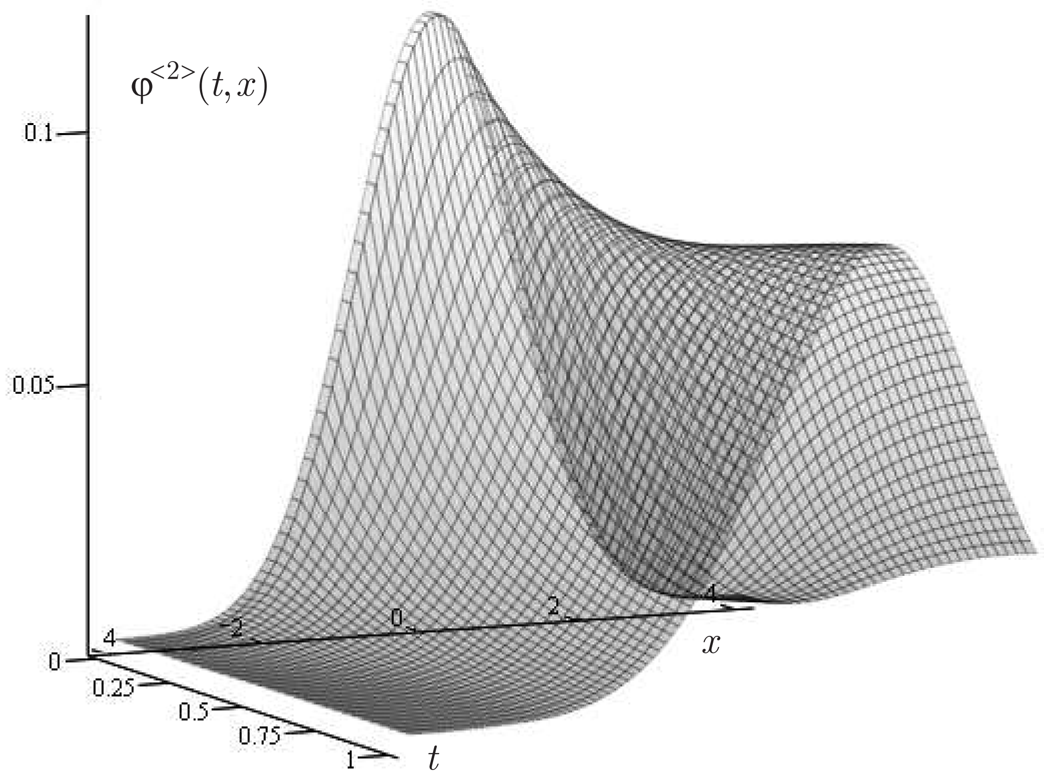

Рис. 3.7. Ненормированная плотность вероятности состояния системы для второй структуры

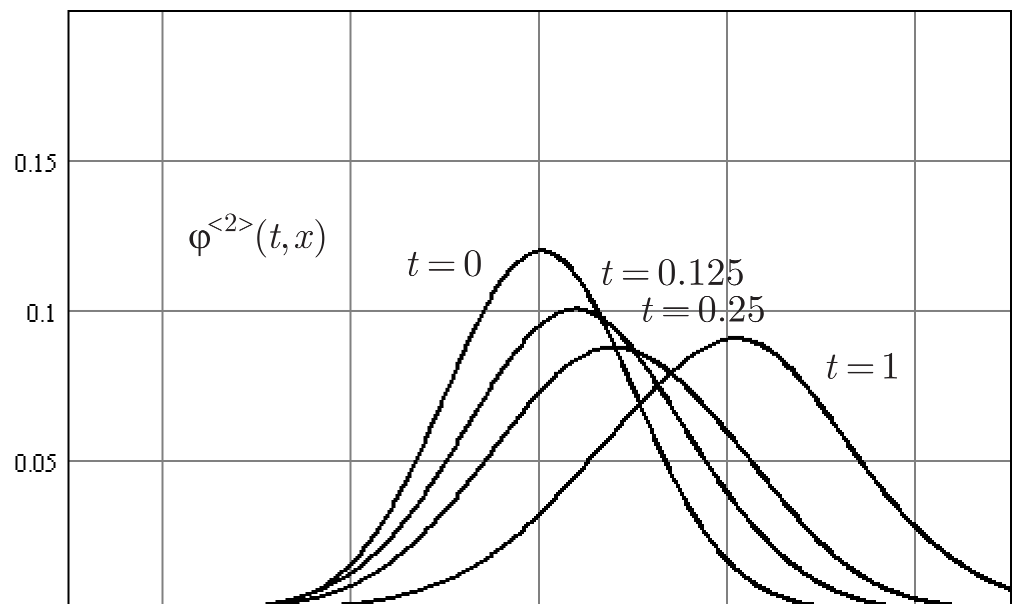

Рис. 3.8. Сечения ненормированной плотности вероятности состояния системы для второй структуры в различные моменты времени

В случайные моменты времени возможен отказ управляющего устройства ($u(t) = 0$) с интенсивностью $\lambda = 0.2$ без последующего восстановления нормального функционирования. В начальный момент времени система функционирует нормально, т.е. $u(t) \neq 0$.

Восстановление реализаций векторного случайного процесса $[\theta(t)\ q(t)]^{\mathrm{T}}$ точное.

□ В данном случае $[\theta(t)\ q(t)]^{\mathrm{T}}$ является векторным случайным процессом не только из-за случайных начальных данных θ_0 и q_0, как в примере 2.9, но и вследствие возможного отказа управляющего устройства в случайный момент времени.

Прежде чем приступить к решению, приведем уравнение, описывающее заданную систему управления к виду (3.1). Для этого положим $X_1(t) = \theta(t)$ и $X_2(t) = q(t)$. Тогда для первой структуры будем иметь

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= X_2(t)\,dt, \\ dX_2(t) &= \bigl(-\sin X_1(t)\cos X_1(t) + u(t)\bigr)dt, \end{aligned}$$

т.е.

$$f^{<1>}(t,x) = f^{<1>}(t,x_1,x_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 \cos x_1 + \dfrac{c_1}{2}\cos t + \dfrac{c_2}{2}\sin t \end{bmatrix},$$

а $\boldsymbol{\sigma}^{<1>}(t,x) = \boldsymbol{\sigma}^{<1>}(t,x_1,x_2)$ представляет собой нулевую матрицу.

Вторая структура описывается уравнениями

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= X_2(t)\,dt, \\ dX_2(t) &= -\sin X_1(t)\cos X_1(t)\,dt, \end{aligned}$$

т.е.

$$f^{<2>}(t,x) = f^{<2>}(t,x_1,x_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 \cos x_1 \end{bmatrix},$$

а $\boldsymbol{\sigma}^{<2>}(t,x) = \boldsymbol{\sigma}^{<2>}(t,x_1,x_2)$, как и $\boldsymbol{\sigma}^{<1>}(t,x_1,x_2)$, является нулевой матрицей.

Начальные условия задаются соотношениями $X_1(0) = \theta_0$ и $X_2(0) = q_0$.

1. Из постановки задачи анализа (см. разд. 3.1.1) следует, что $n = 2$, $N = 2$ и $t_0 = 0$, $t_1 = 1$.

По условию интенсивность перехода из первой структуры во вторую постоянна и равна λ, а обратный переход невозможен, следовательно,

$$\lambda_{12}(t,x_1,x_2) = \lambda, \quad \lambda_{21}(t,x_1,x_2) = 0,$$

т.е.

$$\mathcal{B}_{12}\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2) = \mathcal{H}_{12}\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2) = \lambda\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2),$$
$$\mathcal{B}_{21}\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2) = \mathcal{H}_{21}\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2) = 0.$$

Так как в начальный момент времени система функционирует нормально, т.е. активна первая структура, а случайные величины θ_0 и q_0 имеют гауссовское распределение, ненормированные плотности вероятности $\varphi_0^{<1>}(x_1,x_2)$ и $\varphi_0^{<2>}(x_1,x_2)$ начального состояния $X_0 = [\theta_0 \ q_0]^{\mathrm{T}}$ определяются следующим образом:

$$\varphi_0^{<1>}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left([x_1+0.3]^2+[x_2-0.1]^2\right)}, \quad \varphi_0^{<2>}(x_1,x_2) = 0.$$

В общем случае обобщенные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для двумерной стохастической системы с двумя структурами были получены в примере 3.2. В рассматриваемом случае они будут иметь более простой вид, поскольку все коэффициенты диффузии тождественно равны нулю вследствие равенства нулю функций $\sigma^{<1>}(t,x_1,x_2)$ и $\sigma^{<2>}(t,x_1,x_2)$. Следовательно, принимая во внимание выражения для коэффициентов сноса и интенсивностей переходов, а также ненормированных плотностей вероятности $\varphi_0^{<1>}(x_1,x_2)$ и $\varphi_0^{<2>}(x_1,x_2)$ начального состояния X_0, получаем начально-краевую задачу (I) в виде

$$\frac{\partial\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[x_2\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2)\right] -$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\left(-\sin x_1\cos x_1 + \frac{c_1}{2}\cos t + \frac{c_2}{2}\sin t\right)\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2)\right] -$$
$$-\lambda\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2),$$
$$\frac{\partial\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[x_2\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2)\right] -$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_2}\left[-\sin x_1\cos x_1\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2)\right] + \lambda\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2),$$
$$\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2)\big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left([x_1+0.3]^2+[x_2-0.1]^2\right)},$$
$$\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2)\big|_{t=0} = 0,$$
$$\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2)\big|_{x_1,x_2=\pm\infty} = 0,$$
$$\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2)\big|_{x_1,x_2=\pm\infty} = 0,$$

где $(t,x_1,x_2) \in Q_T = [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = [0,1]\times\mathbb{R}^2$.

2. В качестве базисной системы $\{e(i_0, i_1, i_2, t, x_1, x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$ пространства $L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$ выберем систему функций

$$\{\hat{P}(i_0, t)\hat{\Phi}(i_1, x_1)\hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty},$$

где $\{\hat{P}(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ – система нестационарных полиномов Лежандра (1.4), определенная на стационарном отрезке $T = [0, 1]$ и образующая базис пространства $L_2(T; \nu(t))$ при $\nu(t) \equiv 1$, т.е. система функций $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$; $\{\hat{\Phi}(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{\hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ – системы функций Эрмита (1.21), представляющие собой базисы пространств $L_2(\mathbb{R}; \rho_1(x_1))$ и $L_2(\mathbb{R}; \rho_2(x_2))$ соответственно при условии $\rho_1(x_1) \equiv 1$ и $\rho_2(x_2) \equiv 1$, т.е. системы функций $\{p_1(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{p_2(i_2, x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$.

Сформируем базисную систему $\{p(i_1, i_2, x_1, x_2)\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$:

$$p(i_1, i_2, x_1, x_2) = \hat{\Phi}(i_1, x_1) \cdot \hat{\Phi}(i_2, x_2).$$

3. Нестационарная спектральная характеристика $P(3, 3)$ оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент и нестационарные спектральные характеристики $\mathcal{P}_1(3, 3)$ и $\mathcal{P}_2(3, 3)$ операторов дифференцирования первого порядка по координатам x_1 и x_2 вычисляются так же, как и в примере 2.9, а именно:

$$P(3, 3) = P(1, 1) \otimes E(2, 2),$$

$$\mathcal{P}_1(3, 3) = E(1, 1) \otimes \mathcal{P}(1, 1) \otimes E(1, 1),$$

$$\mathcal{P}_2(3, 3) = E(1, 1) \otimes E(1, 1) \otimes \mathcal{P}(1, 1),$$

где $P(1, 1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенная относительно системы полиномов Лежандра, $\mathcal{P}(1, 1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно системы функций Эрмита (см. примеры спектральных характеристик операторов дифференцирования в разд. 1.4.3); $E(1, 1)$ и $E(2, 2)$ – двумерная и четырехмерная единичные матрицы соответственно (см. разд. 1.2.3).

Воспользуемся утверждениями 1.13 и 1.15 при вычислении нестационарных спектральных характеристик $F_1^{<1>}(3, 3)$, $F_2^{<1>}(3, 3)$ и $F_1^{<2>}(3, 3)$, $F_2^{<2>}(3, 3)$ операторов умножения на коэффициенты сноса $f_1^{<1>}(t, x_1, x_2)$, $f_2^{<1>}(t, x_1, x_2)$ и $f_1^{<2>}(t, x_1, x_2)$, $f_2^{<2>}(t, x_1, x_2)$ соответственно, учитывая, что функции $f_1^{<1>}(t, x_1, x_2)$ и $f_1^{<2>}(t, x_1, x_2)$ совпадают. Тогда

$$F_1^{<1>}(3, 3) = F_1^{<2>}(3, 3) = E(1, 1) \otimes E(1, 1) \otimes A_2(1, 1),$$

где $A_2(1, 1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_2(x_2) = x_2$, вычисленная относительно системы функций Эрмита по определению (1.54) (см. примеры спектральных характеристик операторов умножения на функцию $a(x) = x$ в разд. 1.4.2).

Нестационарная спектральная характеристика $F_2^{<1>}(3,3)$ представляется в виде

$$F_2^{<1>}(3,3) = E(1,1) \otimes A_1(1,1) \otimes E(1,1) + A_0(1,1) \otimes E(1,1) \otimes E(1,1),$$

что следует из свойства линейности спектрального преобразования (см. разд. 1.3.3) и свойств спектрального преобразования операторов умножения, заданных на пространствах функций времени и функций вектора состояния (см. разд. 1.4.2). Здесь $A_0(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_0(t) = u(t) = \frac{c_1}{2}\cos t + \frac{c_2}{2}\sin t$, вычисленная относительно системы полиномов Лежандра, а $A_1(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_1(x_1) = = -\sin x_1 \cos x_1$, вычисленная относительно системы функций Эрмита, т.е.

$$A_0(1,1) = \left(a_{0\,i_0 j_0}\right), \quad A_1(1,1) = \left(a_{1\,i_1 j_1}\right),$$

где

$$\begin{aligned}
a_{0\,i_0 j_0} &= \big(q(i_0,t), a_0(t)\cdot q(j_0,t)\big)_{L_2(T)} = \\
&= \frac{c_1}{2}\int\limits_0^1 \cos t\,\hat{P}(i_0,t)\,\hat{P}(j_0,t)\,dt + \frac{c_2}{2}\int\limits_0^1 \sin t\,\hat{P}(i_0,t)\,\hat{P}(j_0,t)\,dt, \\
a_{1\,i_1 j_1} &= \big(p_1(i_1,x_1), a_1(x_1)\cdot p_1(j_1,x_1)\big)_{L_2(\mathbb{R})} = \\
&= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x_1 \cos x_1\,\hat{\Phi}(i_1,x_1)\,\hat{\Phi}(j_1,x_1)\,dx_1, \\
&i_0, i_1, j_0, j_1 = 0,1,2,\ldots\ .
\end{aligned}$$

Сравнивая выражения для функций $f_2^{<1>}(t,x_1,x_2)$ и $f_2^{<2>}(t,x_1,x_2)$, можно сделать вывод о том, что

$$F_2^{<2>}(3,3) = E(1,1) \otimes A_1(1,1) \otimes E(1,1).$$

Согласно свойствам спектрального преобразования операторов умножения, заданных на пространстве функций времени и вектора состояния (см. разд. 1.4.2), нестационарная спектральная характеристика $\Lambda_{12}(3,3)$ оператора умножения на функцию $\lambda_{12}(t,x_1,x_2)$ равна произведению константы λ на шестимерную единичную матрицу $E(3,3)$ (см. разд. 1.2.3), а нестационарная спектральная характеристика $\Lambda_{21}(3,3)$ оператора умножения на функцию $\lambda_{21}(t,x_1,x_2)$ представляет собой шестимерную гиперквадратную нулевую матрицу $\mathcal{O}(3,3)$, т.е.

$$\Lambda_{12}(3,3) = \lambda\cdot E(3,3), \quad \Lambda_{21}(3,3) = \mathcal{O}(3,3),$$

следовательно, для нестационарных спектральных характеристик $B_{12}(3,3)$, $B_{21}(3,3)$, $H_{12}(3,3)$ и $H_{21}(3,3)$ операторов $\mathcal{B}_{12}$, $\mathcal{B}_{21}$, $\mathcal{H}_{12}$ и $\mathcal{H}_{21}$ соответственно, определенных относительно выбранной базисной системы

$$\{\hat{P}(i_0,t)\,\hat{\Phi}(i_1,x_1)\,\hat{\Phi}(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty},$$

справедливы следующие соотношения:

$$B_{12}(3,3) = H_{12}(3,3) = \lambda \cdot E(3,3),$$
$$B_{21}(3,3) = H_{21}(3,3) = \mathcal{O}(3,3).$$

Перейдем к вычислению спектральных характеристик $\Phi_0^{<1>}(2,0)$ и $\Phi_0^{<2>}(2,0)$ ненормированных плотностей вероятности $\varphi_0^{<1>}(x_1,x_2)$ и $\varphi_0^{<2>}(x_1,x_2)$ относительно системы функций $\{\hat{\Phi}(i_1,x_1)\,\hat{\Phi}(i_2,x_2)\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$ по определению (1.40):

$$\Phi_0^{<1>}(2,0) = \left(\varphi_{0i_1i_2}^{<1>}\right), \quad \Phi_0^{<2>}(2,0) = \left(\varphi_{0i_1i_2}^{<2>}\right),$$

где

$$\varphi_{0i_1i_2}^{<1>} = \left(p(i_1,i_2,x_1,x_2), \varphi_0^{<1>}(x_1,x_2)\right)_{L_2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left([x_1+0.3]^2+[x_2-0.1]^2\right)}\,\hat{\Phi}(i_1,x_1)\,\hat{\Phi}(i_2,x_2)\,dx_1\,dx_2 =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{[x_1+0.3]^2}{2}}\,\hat{\Phi}(i_1,x_1)\,dx_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{[x_2-0.1]^2}{2}}\,\hat{\Phi}(i_2,x_2)\,dx_2,$$
$$\varphi_{0i_1i_2}^{<2>} = \left(p(i_1,i_2,x_1,x_2), \varphi_0^{<2>}(x_1,x_2)\right)_{L_2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} = 0,$$
$$i_1, i_2 = 0,1,2,\ldots,$$

т.е. $\Phi_0^{<2>}(2,0) = \mathcal{O}(2,0)$.

Матрица-столбец $q(1,0;0)$ значений функций $\hat{P}(i_0,t)$ в точке $t=0$, как и в примере 3.5, записывается в виде

$$q(1,0;0) = \begin{bmatrix} \hat{P}(0,0) & \hat{P}(1,0) & \hat{P}(2,0) & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Значение весовой функции $\nu(t)$ в точке $t=0$ равно единице.

4. На основании полученных соотношений для нестационарных спектральных характеристик операторов умножения на интенсивности переходов и для спектральных характеристик ненормированных плотностей вероятности начального состояния, а также с учетом равенства $\nu(0)=1$, равенства нулю коэффициентов диффузии и результата, полученного в ходе

решения примера 3.2, уравнения обобщенных характеристических функций записываются в виде

$$\begin{aligned}
&P(3,3)\cdot\Phi^{<1>}(3,0) - q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<1>}(2,0) = \\
&\quad = -\,\mathcal{P}_1(3,3)\cdot F_1^{<1>}(3,3)\cdot\Phi^{<1>}(3,0) - \\
&\qquad -\,\mathcal{P}_2(3,3)\cdot F_2^{<1>}(3,3)\cdot\Phi^{<1>}(3,0) - \lambda\cdot\Phi^{<1>}(3,0), \\
&P(3,3)\cdot\Phi^{<2>}(3,0) = \\
&\quad = -\,\mathcal{P}_1(3,3)\cdot F_1^{<2>}(3,3)\cdot\Phi^{<2>}(3,0) - \\
&\qquad -\,\mathcal{P}_2(3,3)\cdot F_2^{<2>}(3,3)\cdot\Phi^{<2>}(3,0) + \lambda\cdot\Phi^{<1>}(3,0),
\end{aligned}$$

или кратко в форме (III):

$$\begin{cases}
Z_{11}(3,3)\cdot\Phi^{<1>}(3,0) = q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<1>}(2,0), \\
Z_{21}(3,3)\cdot\Phi^{<1>}(3,0) + Z_{22}(3,3)\cdot\Phi^{<2>}(3,0) = \underbrace{q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<2>}(2,0)}_{\mathcal{O}(3,0)},
\end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}
&Z_{11}(3,3) = P(3,3) - A_{11}(3,3), \\
&A_{11}(3,3) = -\mathcal{P}_1(3,3)\cdot F_1^{<1>}(3,3) - \mathcal{P}_2(3,3)\cdot F_2^{<1>}(3,3) - \lambda\cdot E(3,3), \\
&Z_{21}(3,3) = -A_{21}(3,3), \\
&A_{21}(3,3) = \lambda\cdot E(3,3), \\
&Z_{22}(3,3) = P(3,3) - A_{22}(3,3), \\
&A_{22}(3,3) = -\mathcal{P}_1(3,3)\cdot F_1^{<2>}(3,3) - \mathcal{P}_2(3,3)\cdot F_2^{<2>}(3,3).
\end{aligned}$$

Обобщенные характеристические функции, т.е. нестационарные спектральные характеристики $\Phi^{<1>}(3,0)$ и $\Phi^{<2>}(3,0)$ ненормированных плотностей вероятности $\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2)$ и $\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0,t)\,\hat{\Phi}(i_1,x_1)\,\hat{\Phi}(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$, задаются следующим образом (см. разд. 1.3.3):

$$\Phi^{<1>}(3,0) = \left(\varphi_{i_0i_1i_2}^{<1>}\right), \quad \Phi^{<2>}(3,0) = \left(\varphi_{i_0i_1i_2}^{<2>}\right),$$

где

$$\begin{aligned}
\varphi_{i_0i_1i_2}^{<1>} &= \big(e(i_0,i_1,i_2,t,x_1,x_2), \varphi^{<1>}(t,x_1,x_2)\big)_{L_2(Q_T)} = \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{<1>}(t,x_1,x_2)\,\hat{P}(i_0,t)\,\hat{\Phi}(i_1,x_1)\,\hat{\Phi}(i_2,x_2)\,dt\,dx_1\,dx_2,
\end{aligned}$$

$$\varphi^{<2>}_{i_0 i_1 i_2} = \big(e(i_0, i_1, i_2, t, x_1, x_2), \varphi^{<2>}(t, x_1, x_2)\big)_{L_2(Q_T)} =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{<2>}(t, x_1, x_2)\, \hat{P}(i_0, t)\, \hat{\Phi}(i_1, x_1)\, \hat{\Phi}(i_2, x_2)\, dt\, dx_1\, dx_2,$$

$$i_0, i_1, i_2 = 0, 1, 2, \ldots \, .$$

5. Заметим, что рассматриваемая система управления относится к классу систем с однонаправленными переходами (см. частные случаи систем со случайной структурой), поэтому решение уравнений обобщенных характеристических функций определяется соотношениями (VII), которые в данном случае имеют вид

$$\Phi^{<1>}(3,0) = Z_{11}^{-1}(3,3) \cdot \big(q(1,0;0) \otimes \Phi_0^{<1>}(2,0)\big),$$

$$\Phi^{<2>}(3,0) = Z_{22}^{-1}(3,3) \cdot \big(-Z_{21}(3,3) \cdot \Phi^{<1>}(3,0)\big),$$

т.е.

$$\Phi^{<1>}(3,0) = \Big[P(3,3) + \mathcal{P}_1(3,3) \cdot F_1^{<1>}(3,3) +$$

$$+ \mathcal{P}_2(3,3) \cdot F_2^{<1>}(3,3) + \lambda \cdot E(3,3)\Big]^{-1} \cdot \Big[q(1,0;0) \otimes \Phi_0^{<1>}(2,0)\Big],$$

$$\Phi^{<2>}(3,0) = \lambda \cdot \Big[P(3,3) + \mathcal{P}_1(3,3) \cdot F_1^{<2>}(3,3) +$$

$$+ \mathcal{P}_2(3,3) \cdot F_2^{<2>}(3,3)\Big]^{-1} \cdot \Phi^{<1>}(3,0).$$

6. Найдем ненормированные плотности вероятности $\varphi^{<1>}(t, x_1, x_2)$ и $\varphi^{<2>}(t, x_1, x_2)$ по формуле обращения (X):

$$\varphi^{<1>}(t, x_1, x_2) = \mathbb{S}^{-1}\left[\Phi^{<1>}(3,0)\right] =$$

$$= \sum_{i_0=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \varphi^{<1>}_{i_0 i_1 i_2} \cdot \hat{P}(i_0, t) \cdot \hat{\Phi}(i_1, x_1) \cdot \hat{\Phi}(i_2, x_2),$$

$$\varphi^{<2>}(t, x_1, x_2) = \mathbb{S}^{-1}\left[\Phi^{<2>}(3,0)\right] =$$

$$= \sum_{i_0=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \varphi^{<2>}_{i_0 i_1 i_2} \cdot \hat{P}(i_0, t) \cdot \hat{\Phi}(i_1, x_1) \cdot \hat{\Phi}(i_2, x_2),$$

где $\varphi^{<1>}_{i_0 i_1 i_2}$ и $\varphi^{<2>}_{i_0 i_1 i_2}$ – координаты обобщенных характеристических функций $\Phi^{<1>}(3,0)$ и $\Phi^{<2>}(3,0)$ соответственно, $t \in [0,1]$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

При численном расчете зададим порядки усечения спектральных характеристик L_0, L_1 и L_2 (см. замечание 3.9). Тогда все спектральные характеристики, входящие в уравнения обобщенных характеристических функций, представляют собой многомерные матрицы с конечным числом элементов, а решение задачи анализа приближенно определяется выражениями

$$\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\sum_{i_2=0}^{L_2-1} \varphi^{<1>}_{i_0 i_1 i_2}\cdot \hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{\Phi}(i_1,x_1)\cdot\hat{\Phi}(i_2,x_2),$$

$$\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\sum_{i_2=0}^{L_2-1} \varphi^{<2>}_{i_0 i_1 i_2}\cdot \hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{\Phi}(i_1,x_1)\cdot\hat{\Phi}(i_2,x_2),$$

где $\varphi^{<1>}_{i_0 i_1 i_2}$ и $\varphi^{<2>}_{i_0 i_1 i_2}$ − элементы конечных гиперстолбцовых матриц $\Phi^{<1>}(3,0)$ и $\Phi^{<2>}(3,0)$ соответственно, $t\in[0,1]$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. Положим $L_0=L_1=L_2=8$.

Графики функции $\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2)$ и $\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2)$ в различные моменты времени t изображены на рис. 3.9, 3.11, 3.13 и 3.10, 3.12, 3.14 соответственно. ■

3.2.2. Спектральные характеристики маргинальных и условных плотностей вероятности

Рассмотрим задачу нахождения вероятностей $\mathbb{P}^{<k>}(t)$ активности структур в момент времени t (см. замечание 3.1), ненормированных маргинальных плотностей вероятности $\varphi^{<k>}_{(1)}\big(t,x_{(1)}\big)$, условных плотностей вероятности $\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)$ и $\varphi^{<k>}_{(2|1)}\big(t,x_{(2)}\mid x_{(1)}\big)$ (см. разд. 3.2.2) с использованием спектральной формы математического описания в предположении, что известны обобщенные характеристические функции $\Phi^{<k>}(n+1,0)$, т.е. нестационарные спектральные характеристики ненормированных плотностей вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$, определенные относительно базисной системы

$$\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$$

пространства $L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$, где $k=1,2,\ldots,N$ и $Q_T=T\times\mathbb{R}^n$.

Спектральные характеристики вероятностей $\mathbb{P}^{<k>}(t)$ и условных плотностей вероятности $\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)$

Напомним (см. разд. 3.1.1), что вероятность $\mathbb{P}^{<k>}(t)$ активности структуры с номером k определяется соотношением

$$\mathbb{P}^{<k>}(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi^{<k>}(t,x)\,dx,$$

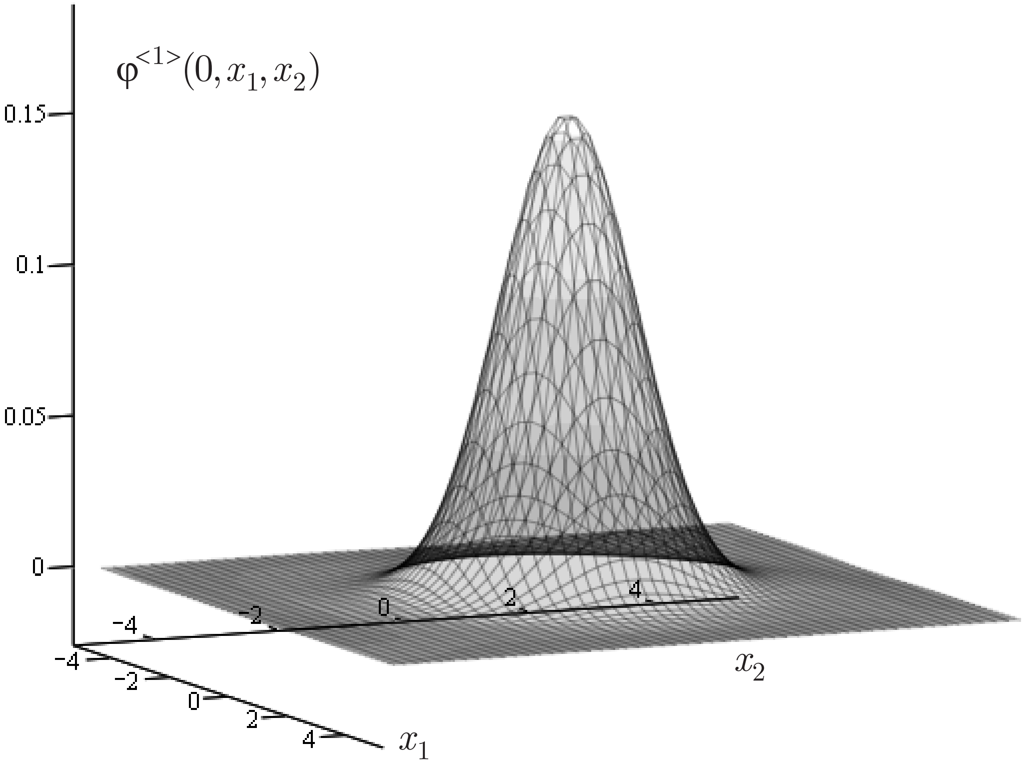

Рис. 3.9. Ненормированная плотность вероятности вектора состояния для первой структуры при $t = 0$

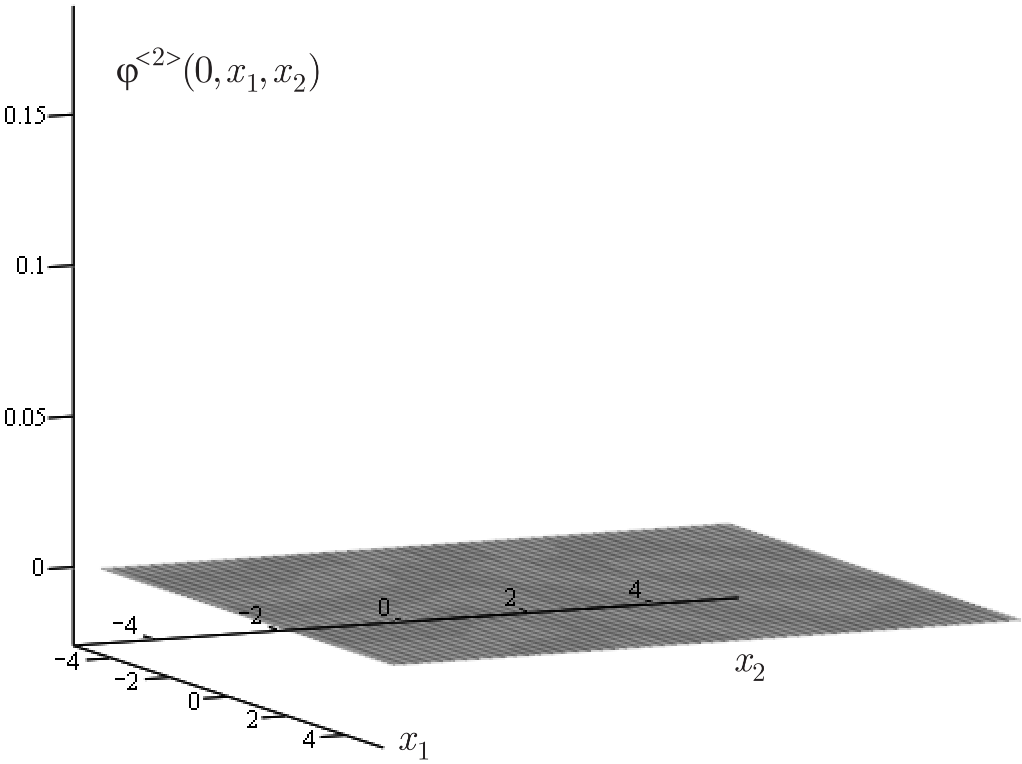

Рис. 3.10. Ненормированная плотность вероятности вектора состояния для второй структуры при $t = 0$

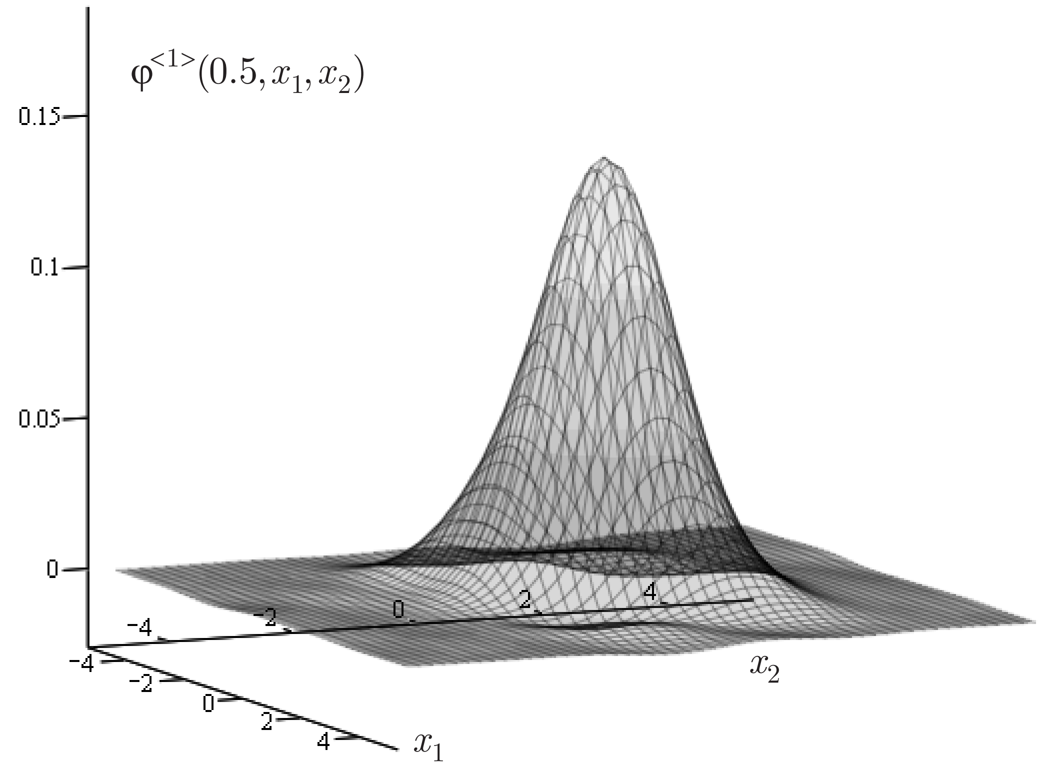

Рис. 3.11. Ненормированная плотность вероятности вектора состояния для первой структуры при $t = 0.5$

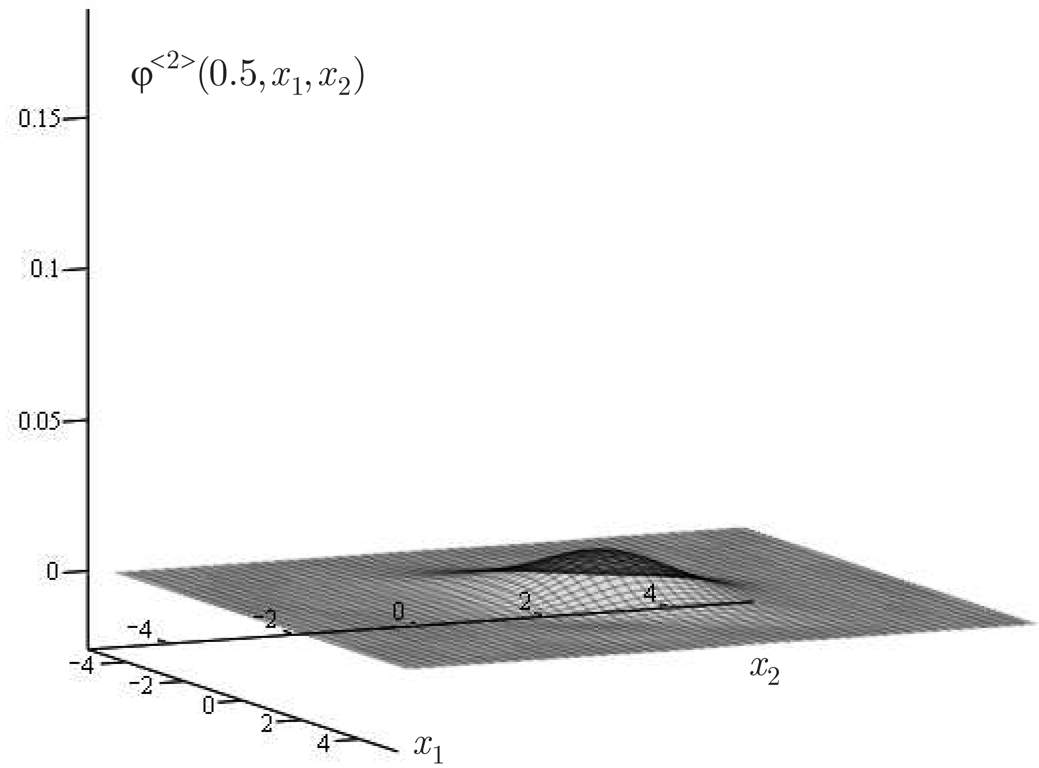

Рис. 3.12. Ненормированная плотность вероятности вектора состояния для второй структуры при $t = 0.5$

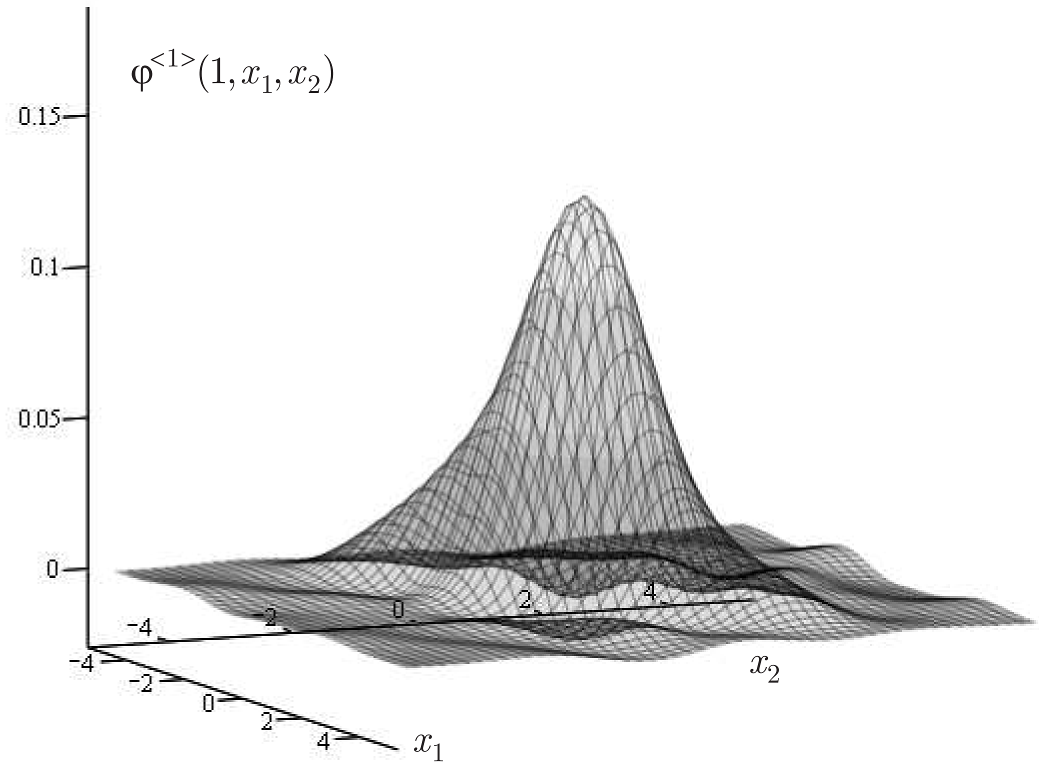

Рис. 3.13. Ненормированная плотность вероятности вектора состояния для первой структуры при $t = 1$

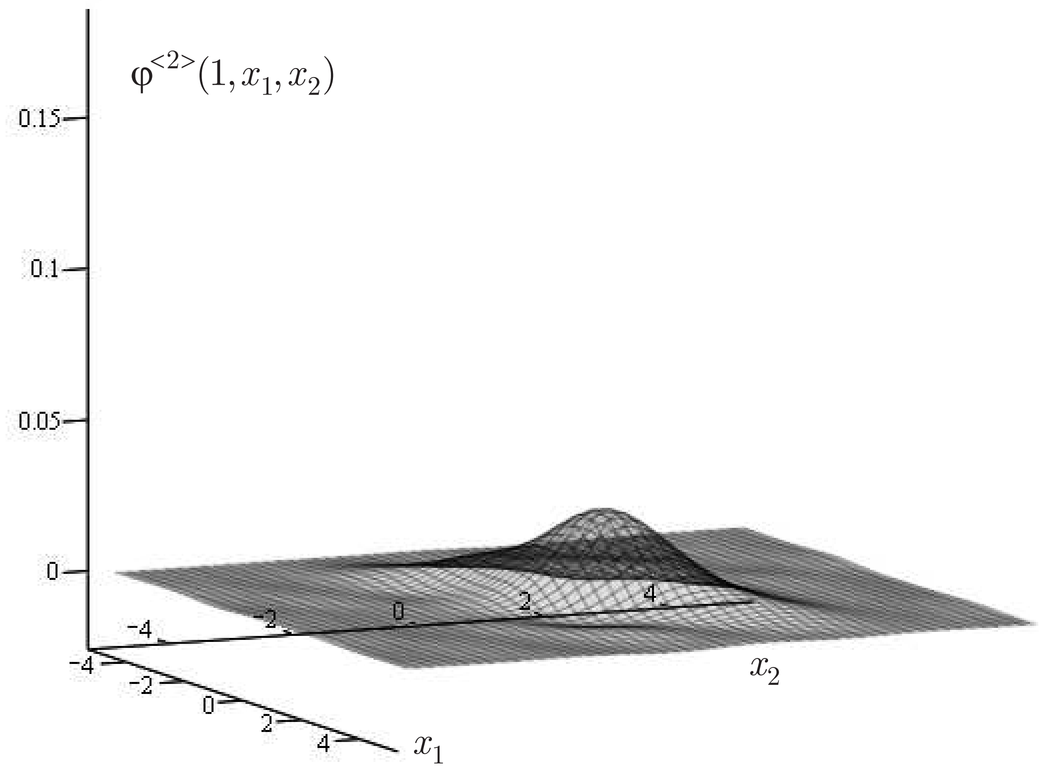

Рис. 3.14. Ненормированная плотность вероятности вектора состояния для второй структуры при $t = 1$

или кратко

$$\mathbb{P}^{<k>}(t) = \mathcal{J}\varphi^{<k>}(t,x), \tag{3.44}$$

где $\mathcal{J}$ – линейный функционал, ставящий в соответствие функции вектора состояния интеграл от этой функции по пространству $\mathbb{R}^n$, $k = 1,2,\ldots,N$:

$$\mathcal{J}h(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x)\,dx. \tag{3.45}$$

Применим спектральное преобразование к левой и правой частям равенства (3.44):

$$\mathbb{S}\left[\mathbb{P}^{<k>}(t)\right] = \mathbb{S}\left[\mathcal{J}\varphi^{<k>}(t,x)\right].$$

Левую часть, т.е. нестационарную спектральную характеристику функции $\mathbb{P}^{<k>}(t)$, обозначим через $\mathsf{P}^{<k>}(1,0)$, а правую часть по теореме 1.7 представим в виде

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{J}\varphi^{<k>}(t,x)\right] = \\ = \big(E(1,1)\otimes J(0,n)\big)\cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes R^{-1}(n,n)\big)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0)\Big),$$

где $J(0,n)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{J}$, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{R}^n;\,\rho(x))$ (см. разд. 1.5.1); $R(n,n)$ – спектральная характеристика оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$ (см. разд. 1.4.2), определенная относительно той же базисной системы.

Следовательно, нестационарная спектральная характеристика $\mathsf{P}^{<k>}(1,0)$ функции $\mathbb{P}^{<k>}(t)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T;\,\nu(t))$, выражается следующим образом:

$$\mathsf{P}^{<k>}(1,0) = \\ = \big(E(1,1)\otimes J(0,n)\big)\cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes R^{-1}(n,n)\big)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0)\Big), \tag{3.46}$$

$k = 1,2,\ldots,N.$

Запишем формулу обращения для перехода от нестационарной спектральной характеристики $\mathsf{P}^{<k>}(1,0)$ к соответствующей функции времени:

$$\mathbb{P}^{<k>}(t) = \mathbb{S}^{-1}\left[\mathsf{P}^{<k>}(1,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty}\mathsf{P}_{i_0}^{<k>}\cdot q(i_0,t), \quad k = 1,2,\ldots,N, \tag{3.47}$$

где $\mathsf{P}_{i_0}^{<k>}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $\mathsf{P}^{<k>}(1,0)$, $t\in T$.

Чтобы вывести соотношение для определения нестационарной спектральной характеристики условной плотности вероятности $\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)$, перепишем выражение, связывающее функции $\varphi^{<k>}(t,x)$ и $\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)$ (см. замечание 3.1), в виде равенства

$$\varphi^{<k>}(t,x) = \mathbb{P}(t)\cdot\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x), \quad k=1,2,\ldots,N,$$

и применим спектральное преобразование к его левой и правой частям:

$$\mathbb{S}\left[\varphi^{<k>}(t,x)\right] = \mathbb{S}\left[\mathbb{P}(t)\cdot\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)\right].$$

Тогда, согласно теореме 1.4, обобщенная характеристическая функция $\Phi^{<k>}(n+1,0)$ равна произведению нестационарной спектральной характеристики $\mathsf{P}^{<k>}(n+1,n+1)$ оператора умножения на функцию $\mathbb{P}(t)$ и искомой нестационарной спектральной характеристики условной плотности вероятности $\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)$, которую будем обозначать $\tilde{\Phi}^{<k>}(n+1,0)$, т.е.

$$\Phi^{<k>}(n+1,0) = \mathsf{P}^{<k>}(n+1,n+1)\cdot\tilde{\Phi}^{<k>}(n+1,0),$$

где для нестационарной спектральной характеристики $\mathsf{P}^{<k>}(n+1,n+1)$, определенной относительно базисной системы

$$\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty},$$

справедливо представление

$$\mathsf{P}^{<k>}(n+1,n+1) = \mathsf{P}^{<k>}(1,1)\otimes E(n,n),$$

в котором $\mathsf{P}^{<k>}(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\mathbb{P}^{<k>}(t)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, что следует из утверждения 1.15 и свойства спектрального преобразования операторов умножения, определенных на пространстве функций вектора состояния (см. разд. 1.4.2).

Принимая во внимание утверждение 1.11, получаем

$$\mathsf{P}^{<k>}(1,1) = V(1,2)\odot\mathsf{P}^{<k>}(1,0),$$

где $V(1,2)$ – нестационарная спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.2).

Таким образом, используя полученные соотношения, можно установить связь между нестационарными спектральными характеристиками $\Phi^{<k>}(n+1,0)$ и $\tilde{\Phi}^{<k>}(n+1,0)$:

$$\Phi^{<k>}(n+1,0) = \left[\left(V(1,2)\odot\mathsf{P}^{<k>}(1,0)\right)\otimes E(n,n)\right]\cdot\tilde{\Phi}^{<k>}(n+1,0),$$

следовательно,

$$\tilde{\Phi}^{<k>}(n+1,0) = \left[\left(V(1,2)\odot\mathsf{P}^{<k>}(1,0)\right)\otimes E(n,n)\right]^{-1}\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0).$$

Учитывая свойства обращения многомерных матриц (см. разд. 1.2.3), получаем окончательную формулу для нестационарной спектральной характеристики $\tilde{\Phi}^{<k>}(n+1,0)$, определенной относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$:

$$\begin{gathered}\tilde{\Phi}^{<k>}(n+1,0)= \\ =\Big(\big[V(1,2)\odot \mathsf{P}^{<k>}(1,0)\big]^{-1}\otimes E(n,n)\Big)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0), \\ k=1,2,\ldots,N.\end{gathered}\tag{3.48}$$

Переход от нестационарной спектральной характеристики $\tilde{\Phi}^{<k>}(n+1,0)$ к условной плотности вероятности $\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)$ осуществляется по формуле обращения (1.46):

$$\begin{gathered}\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)=\mathbb{S}^{-1}\big[\Phi^{<k>}(n+1,0)\big]= \\ =\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}\tilde{\varphi}_{i_0i_1\ldots i_n}^{<k>}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x), \\ k=1,2,\ldots,N,\end{gathered}\tag{3.49}$$

где $\tilde{\varphi}_{i_0i_1\ldots i_n}^{<k>}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $\tilde{\Phi}^{<k>}(n+1,0)$, $t\in T$, $x\in\mathbb{R}^n$.

Соотношения (3.46) и (3.47) позволяют найти решение задачи нахождения вероятностей $\mathbb{P}^{<k>}(t)$ активности структур, а соотношения (3.48) и (3.49) – задачи нахождения условной плотности вероятности $\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)$ для каждой структуры.

Пример 3.7. Записать выражения для определения вероятностей активности структур одномерной стохастической системы с двумя структурами, рассмотренной в примерах 3.1 и 3.3, с использованием спектральной формы математического описания.

□ Выражения для обобщенных характеристических функций $\Phi^{<1>}(2,0)$ и $\Phi^{<2>}(2,0)$, т.е. нестационарных спектральных характеристик ненормированных плотностей вероятности $\varphi^{<1>}(t,x)$ и $\varphi^{<2>}(t,x)$ соответственно, определенных относительно выбранной базисной системы $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$, где $Q_T=T\times\mathbb{R}$, были найдены при решении примера 3.3.

Выразим нестационарные спектральные характеристики $\mathsf{P}^{<1>}(1,0)$ и $\mathsf{P}^{<2>}(1,0)$ вероятностей

$$\mathbb{P}^{<1>}(t)=\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi^{<1>}(t,x)\,dx \quad \text{и} \quad \mathbb{P}^{<2>}(t)=\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi^{<2>}(t,x)\,dx$$

активности первой и второй структуры соответственно, воспользовавшись для этого соотношением (3.46). Тогда

$$\mathsf{P}^{<1>}(1,0)=\big(E(1,1)\otimes J(0,1)\big)\cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes R^{-1}(1,1)\big)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)\Big),$$

$$\mathsf{P}^{<2>}(1,0) = \big(E(1,1) \otimes J(0,1)\big) \cdot \Big(\big(E(1,1) \otimes R^{-1}(1,1)\big) \cdot \Phi^{<2>}(2,0)\Big),$$

где $J(0,1)$ – спектральная характеристика линейного функционала $\mathcal{J}$, ставящего в соответствие функции одной переменной интеграл от этой функции по пространству $\mathbb{R}$ (см. разд. 1.5.1); $R(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$ (см. разд. 1.4.2). Спектральные характеристики $J(0,1)$ и $R(1,1)$ определены относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$.

Для перехода от нестационарной спектральной характеристики $\mathsf{P}^{<k>}(1,0)$ к соответствующей функции времени используется формула обращения (3.47), $k=1,2$.

В частном случае, если $\rho(x) \equiv 1$, выражения для нестационарных спектральных характеристик $\mathsf{P}^{<1>}(1,0)$ и $\mathsf{P}^{<2>}(1,0)$ можно упростить:

$$\mathsf{P}^{<1>}(1,0) = \big(E(1,1) \otimes J(0,1)\big) \cdot \Phi^{<1>}(2,0),$$
$$\mathsf{P}^{<2>}(1,0) = \big(E(1,1) \otimes J(0,1)\big) \cdot \Phi^{<2>}(2,0),$$

так как спектральная характеристика $R(1,1)$ оператора умножения на функцию $\rho(x) \equiv 1$ равна единичной матрице $E(1,1)$, согласно свойству спектрального преобразования операторов умножения, заданных на пространстве функций вектора состояния (см. разд. 1.4.2).

По известным нестационарным спектральным характеристикам $\mathsf{P}^{<k>}(1,0)$ и $\Phi^{<k>}(2,0)$, используя соотношение (3.48), можно найти нестационарную спектральную характеристику $\tilde{\Phi}^{<k>}(2,0)$ условной плотности вероятности $\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)$, определяемой выражением (3.5), $k=1,2$:

$$\tilde{\Phi}^{<1>}(2,0) = \Big(\big[V(1,2) \odot \mathsf{P}^{<1>}(1,0)\big]^{-1} \otimes E(1,1)\Big) \cdot \Phi^{<1>}(2,0),$$
$$\tilde{\Phi}^{<2>}(2,0) = \Big(\big[V(1,2) \odot \mathsf{P}^{<2>}(1,0)\big]^{-1} \otimes E(1,1)\Big) \cdot \Phi^{<2>}(2,0),$$

где $V(1,2)$ – нестационарная спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.2).

Формула обращения (3.49) для нестационарных спектральных характеристик $\tilde{\Phi}^{<1>}(2,0)$ и $\tilde{\Phi}^{<2>}(2,0)$ записывается в виде

$$\tilde{\varphi}^{<1>}(t,x) = \mathbb{S}^{-1}\left[\Phi^{<1>}(2,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_{i_0 i_1}^{<1>} \cdot q(i_0,t) \cdot p(i_1,x),$$
$$\tilde{\varphi}^{<2>}(t,x) = \mathbb{S}^{-1}\left[\Phi^{<2>}(2,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_{i_0 i_1}^{<2>} \cdot q(i_0,t) \cdot p(i_1,x),$$

где $\tilde{\varphi}_{i_0 i_1}^{<1>}$ и $\tilde{\varphi}_{i_0 i_1}^{<2>}$ – координаты нестационарных спектральных характеристик $\tilde{\Phi}^{<1>}(2,0)$ и $\tilde{\Phi}^{<2>}(2,0)$ соответственно, $t \in T$, $x \in \mathbb{R}$. ■

Методика расчета вероятностей $\mathbb{P}^{<k>}(t)$ *и условных плотностей вероятности* $\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)$

Укажем этапы, необходимые для расчета вероятностей $\mathbb{P}^{<k>}(t)$ и условных плотностей вероятности $\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)$. При этом для представления функций $\mathbb{P}^{<k>}(t)$ используется базисная система $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, для представления линейного функционала $\mathcal{J}$ и оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$ – базисная система $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, а для представления функций $\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)$ – базисная система $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

1–6. Найти ненормированные плотности вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$ согласно методике, изложенной в разд. 3.2.1.

7. Записать выражения для определения вероятностей $\mathbb{P}^{<k>}(t)$:

$$\mathbb{P}^{<k>}(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi^{<k>}(t,x)\,dx,\quad k=1,2,\ldots,N,\tag{XI}$$

и условных плотностей вероятности $\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)$:

$$\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)=\frac{\varphi^{<k>}(t,x)}{\mathbb{P}^{<k>}(t)},\quad k=1,2,\ldots,N.\tag{XII}$$

8. Вычислить:

а) спектральные характеристики:

1) $J(0,n)$ – спектральную характеристику функционала $\mathcal{J}$ (см. разд. 1.5.1);
2) $R(n,n)$ – спектральную характеристику оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$ (см. разд. 1.4.2);

б) нестационарную спектральную характеристику $V(1,2)$ множительного звена (см. разд. 1.4.2).

9. Найти нестационарные спектральные характеристики $\mathsf{P}^{<k>}(1,0)$ функций $\mathbb{P}^{<k>}(t)$, используя выражение

$$\begin{gathered}\mathsf{P}^{<k>}(1,0)=\\ =\big(E(1,1)\otimes J(0,n)\big)\cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes R^{-1}(n,n)\big)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0)\Big),\\ k=1,2,\ldots,N,\end{gathered}\tag{XIII}$$

и нестационарные спектральные характеристики $\tilde{\Phi}^{<k>}(n+1,0)$ функций $\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)$, используя соотношение

$$\begin{gathered}\tilde{\Phi}^{<k>}(n+1,0)=\\ =\Big(\big[V(1,2)\odot\mathsf{P}^{<k>}(1,0)\big]^{-1}\otimes E(n,n)\Big)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0),\\ k=1,2,\ldots,N.\end{gathered}\tag{XIV}$$

10. Получить выражения для функций $\mathbb{P}^{<k>}(t)$ и $\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)$ по их нестационарным спектральным характеристикам $\mathsf{P}^{<k>}(1,0)$ и $\tilde{\Phi}^{<k>}(n+1,0)$ соответственно, используя формулы обращения:

$$\mathbb{P}^{<k>}(t) = \sum_{i_0=0}^{\infty} \mathsf{P}_{i_0}^{<k>} \cdot q(i_0,t), \qquad k = 1,2,\ldots,N, \tag{XV}$$

где $\mathsf{P}_{i_0}^{<k>}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $\mathsf{P}^{<k>}(1,0)$, $t \in T$;

$$\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x) = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_{i_0 i_1\ldots i_n}^{<k>} \cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x), \qquad k = 1,2,\ldots,N, \tag{XVI}$$

где $\tilde{\varphi}_{i_0 i_1\ldots i_n}^{<k>}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $\tilde{\Phi}^{<k>}(n+1,0)$, $t \in T$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Замечание 3.10. В результате усечения спектральных характеристик при численном решении (см. замечание 3.9) соотношения (XV) и (XVI) изменятся, а именно

$$\mathbb{P}^{<k>}(t) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \mathsf{P}_{i_0}^{<k>} \cdot q(i_0,t), \qquad k = 1,2,\ldots,N,$$

где $\mathsf{P}_{i_0}^{<k>}$ – элементы матрицы-столбца $\mathsf{P}^{<k>}(1,0)$, $t \in T$;

$$\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\ldots\sum_{i_n=0}^{L_n-1} \tilde{\varphi}_{i_0 i_1\ldots i_n}^{<k>} \cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x), \qquad k = 1,2,\ldots,N,$$

где $\tilde{\varphi}_{i_0 i_1\ldots i_n}^{<k>}$ – элементы конечной гиперстолбцовой матрицы $\tilde{\Phi}^{<k>}(n+1,0)$, $t \in T$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Пример 3.8. Найти вероятности активности структур одномерной стохастической системы с двумя структурами, рассмотренной в примере 3.5.

□ Будем использовать методику расчета вероятностей $\mathbb{P}^{<k>}(t)$ и условных плотностей вероятности $\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)$.

1–6. В результате решения примера 3.5 с использованием методики расчета ненормированных плотностей вероятности были найдены обобщенные характеристические функции $\Phi^{<1>}(2,0)$ и $\Phi^{<2>}(2,0)$, т.е. нестационарные спектральные характеристики функций $\varphi^{<1>}(t,x)$ и $\varphi^{<2>}(t,x)$, определенные относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0,t)\hat{\Phi}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$, где $Q_T = T\times\mathbb{R}$.

7. Запишем формулы для определения вероятностей $\mathbb{P}^{<1>}(t)$ и $\mathbb{P}^{<2>}(t)$ активности первой и второй структуры соответственно (см. (XI) и пример 3.7):

$$\mathbb{P}^{<1>}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^{<1>}(t,x)\,dx, \quad \mathbb{P}^{<2>}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^{<2>}(t,x)\,dx.$$

8. Вычислим спектральную характеристику $J(0,1)$ линейного функционала $\mathcal{J}$, ставящего в соответствие функции одной переменной интеграл от этой функции по пространству $\mathbb{R}$, и спектральную характеристику $R(1,1)$ оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$ относительно системы функций Эрмита.

Напомним (см. пример 1.38), что функционалу $\mathcal{J}$ соответствует функция $w(x)=1$, поэтому

$$J(0,1) = (J_{i_1}),$$

где

$$J_{i_1} = \big(p^*(i_1,x), w(x)\big)_{L_2(\mathbb{R})} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(i_1,x)\,dx,$$

$$i_1 = 0,1,2,\ldots\ .$$

Спектральная характеристика $R(1,1)$ оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$ представляет собой двумерную единичную матрицу $E(1,1)$, так как весовая функция $\rho(x)$ для базисной системы $\{\hat{\Phi}(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ тождественно равна единице:

$$R(1,1) = E(1,1).$$

9. Нестационарные спектральные характеристики

$$\mathsf{P}^{<1>}(1,0) \quad \text{и} \quad \mathsf{P}^{<2>}(1,0)$$

функций $\mathbb{P}^{<1>}(t)$ и $\mathbb{P}^{<2>}(t)$ соответственно, определенные относительно системы полиномов Лежандра, задаются выражением (XIII), которое с учетом того, что $R(1,1)=E(1,1)$, записывается в виде

$$\mathsf{P}^{<1>}(1,0) = \big(E(1,1)\otimes J(0,1)\big)\cdot\Phi^{<1>}(2,0),$$
$$\mathsf{P}^{<2>}(1,0) = \big(E(1,1)\otimes J(0,1)\big)\cdot\Phi^{<2>}(2,0),$$

при этом

$$\mathsf{P}^{<1>}(1,0) = \left(\mathsf{P}_{i_0}^{<1>}\right), \quad \mathsf{P}^{<2>}(1,0) = \left(\mathsf{P}_{i_0}^{<2>}\right),$$

где

$$\mathsf{P}_{i_0}^{<1>} = \big(q(i_0,t), \mathbb{P}^{<1>}(t)\big)_{L_2(T)} = \int\limits_0^1 \mathbb{P}^{<1>}(t)\,\hat{P}(i_0,t)\,dt,$$

$$\mathsf{P}_{i_0}^{<2>} = \big(q(i_0,t), \mathbb{P}^{<2>}(t)\big)_{L_2(T)} = \int\limits_0^1 \mathbb{P}^{<2>}(t)\,\hat{P}(i_0,t)\,dt,$$

$$i_0 = 0,1,2,\ldots\ .$$

10. Выражения для искомых вероятностей $\mathbb{P}^{<1>}(t)$ и $\mathbb{P}^{<2>}(t)$ получаются по формуле обращения (XV):

$$\mathbb{P}^{<1>}(t) = \mathbb{S}^{-1}\left[\mathsf{P}^{<1>}(1,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty} \mathsf{P}_{i_0}^{<1>} \cdot \hat{P}(i_0,t),$$

$$\mathbb{P}^{<2>}(t) = \mathbb{S}^{-1}\left[\mathsf{P}^{<2>}(1,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty} \mathsf{P}_{i_0}^{<2>} \cdot \hat{P}(i_0,t),$$

где $\mathsf{P}_{i_0}^{<1>}$ и $\mathsf{P}_{i_0}^{<2>}$ – координаты нестационарных спектральных характеристик $\mathsf{P}^{<1>}(1,0)$ и $\mathsf{P}^{<2>}(1,0)$ соответственно, $t \in [0,1]$.

Если учитывать усечение спектральных характеристик (см. замечание 3.10 и пример 3.5), то формулы обращения примут вид

$$\mathbb{P}^{<1>}(t) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \mathsf{P}_{i_0}^{<1>} \cdot \hat{P}(i_0,t), \quad \mathbb{P}^{<2>}(t) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \mathsf{P}_{i_0}^{<2>} \cdot \hat{P}(i_0,t),$$

где $\mathsf{P}_{i_0}^{<1>}$ и $\mathsf{P}_{i_0}^{<2>}$ – элементы матриц-столбцов $\mathsf{P}^{<1>}(1,0)$ и $\mathsf{P}^{<2>}(1,0)$ соответственно, $t \in [0,1]$. Положим $L_0 = 12$.

Графики функций $\mathbb{P}^{<1>}(t)$ и $\mathbb{P}^{<2>}(t)$ изображены на рис. 3.15. ■

Спектральные характеристики ненормированных маргинальных плотностей вероятности $\varphi_{(1)}^{<k>}\big(t,x_{(1)}\big)$ и условных плотностей вероятности $\varphi_{(2|1)}^{<k>}\big(t,x_{(2)} \mid x_{(1)}\big)$

При выводе соотношений для определения ненормированных маргинальных плотностей вероятности $\varphi_{(1)}^{<k>}\big(t,x_{(1)}\big)$ и условных плотностей вероятности вида $\varphi_{(2|1)}^{<k>}\big(t,x_{(2)} \mid x_{(1)}\big)$ будем использовать обозначения, введенные в разд. 2.2.2. Таким образом, пусть $\big\{p_{(1)}\big(i_1,i_2,\ldots,i_m,x_{(1)}\big)\big\}_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{\infty}$ – базисная система пространства $L_2\big(\mathbb{R}^m;\rho_{(1)}\big(x_{(1)}\big)\big)$, функции которой

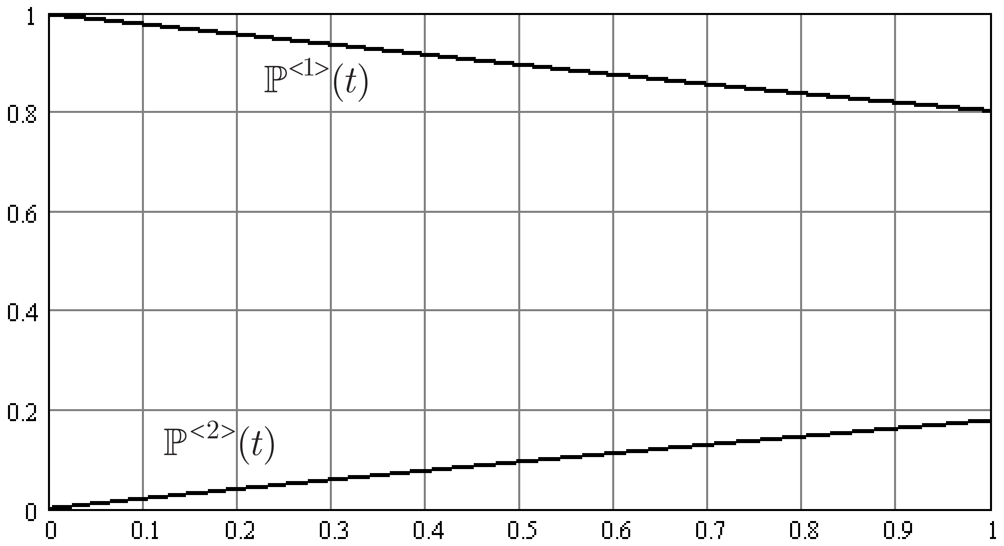

Рис. 3.15. Вероятности активности первой и второй структур

порождаются всевозможными произведениями функций, образующих базисные системы $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$, $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$, ..., $\{p_m(i_m,x_m)\}_{i_m=0}^{\infty}$ пространств $L_2(\mathbb{R};\,\rho_1(x_1))$, $L_2(\mathbb{R};\,\rho_2(x_2))$, ..., $L_2(\mathbb{R};\,\rho_m(x_m))$ соответственно (см. разд. 1.1.2):

$$
\begin{aligned}
&x_{(1)} = [x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_m]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m,\\
&\rho_{(1)}\big(x_{(1)}\big) = \rho_1(x_1)\cdot\rho_2(x_2)\cdots\rho_m(x_m),\\
&p_{(1)}\big(i_1,i_2,\ldots,i_m,x_{(1)}\big) = p_1(i_1,x_1)\cdot p_2(i_2,x_2)\cdots p_m(i_m,x_m).
\end{aligned}
$$

Кроме того, $\big\{p_{(2)}\big(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)}\big)\big\}_{i_{m+1},\ldots,i_n=0}^{\infty}$ – базисная система пространства $L_2\big(\mathbb{R}^{n-m};\,\rho_{(2)}\big(x_{(2)}\big)\big)$, порождаемая всевозможными произведениями функций, образующих базисы $\{p_{m+1}(i_{m+1},x_{m+1})\}_{i_{m+1}=0}^{\infty}$, ..., $\{p_n(i_n,x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$ пространств $L_2(\mathbb{R};\,\rho_{m+1}(x_{m+1}))$, ..., $L_2(\mathbb{R};\,\rho_n(x_n))$ соответственно, т.е.

$$
\begin{aligned}
&x_{(2)} = [x_{m+1} \;\; \ldots \;\; x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-m},\\
&\rho_{(2)}\big(x_{(2)}\big) = \rho_{m+1}(x_{m+1})\cdots\rho_n(x_n),\\
&p_{(2)}\big(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)}\big) = p_{m+1}(i_{m+1},x_{m+1})\cdots p_n(i_n,x_n).
\end{aligned}
$$

Тогда система функций

$$
\big\{e_{(1)}\big(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)}\big) = q(i_0,t)\cdot p_{(1)}\big(i_1,\ldots,i_m,x_{(1)}\big)\big\}_{i_0,i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty},
$$

является базисом пространства $L_2\big(T\times\mathbb{R}^m;\,\nu(t)\,\rho_{(1)}\big(x_{(1)}\big)\big)$, что следует из утверждения 1.4.

Заметим, что формула (3.18) для определения ненормированных маргинальных плотностей вероятности вектора состояния отличается от формулы (2.14), определяющей маргинальную плотность вероятности вектора состояния системы управления (2.1), только индексом ${}^{<k>}$, обозначающим номер структуры. Исходя из этого не будем полностью приводить вывод соотношений для определения нестационарных спектральных характеристик $\Phi_{(1)}^{<k>}(m+1,0)$ ненормированных маргинальных плотностей вероятности $\varphi_{(1)}^{<k>}\big(t,x_{(1)}\big)$, а воспользуемся результатами, полученными в разд. 2.2.2. Таким образом, нестационарная спектральная характеристика $\Phi_{(1)}^{<k>}(m+1,0)$ функции $\varphi_{(1)}^{<k>}\big(t,x_{(1)}\big)$, определенная относительно базисной системы

$$\big\{e_{(1)}\big(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)}\big)\big\}_{i_0,i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty},$$

задается выражением

$$\begin{aligned}
&\Phi_{(1)}^{<k>}(m+1,0)=\big(E(1,1)\otimes E(m,m)\otimes J_{(2)}(0,n-m)\big)\cdot\\
&\quad\cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes E(m,m)\otimes R_{(2)}^{-1}(n-m,n-m)\big)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0)\Big),\qquad(3.50)\\
&k=1,2,\ldots,N,
\end{aligned}$$

где $J_{(2)}(0,n-m)$ – спектральная характеристика линейного функционала $\mathcal{J}_{(2)}$ (см. разд. 1.5.1), который ставит в соответствие функции $h\big(x_{(2)}\big)$ значение интеграла от этой функции по пространству $\mathbb{R}^{n-m}$, $R_{(2)}(n-m,n-m)$ – спектральная характеристика оператора умножения на весовую функцию $\rho_{(2)}\big(x_{(2)}\big)$ (см. разд. 1.4.2); $E(m,m)$ – единичная матрица размерности $2m$ (см. разд. 1.2.3); $\Phi^{<k>}(n+1,0)$ – обобщенная характеристическая функция (см. разд. 3.2.1). Спектральные характеристики $J_{(2)}(0,n-m)$ и $R_{(2)}(n-m,n-m)$ определены относительно базисной системы $\big\{p_{(2)}\big(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)}\big)\big\}_{i_{m+1},\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Аналогичная ситуация справедлива для выражений (3.17) и (2.15), определяющих условные плотности вероятности вектора состояния систем управления (3.1) и (2.1) соответственно. Следовательно, соотношение для вычисления нестационарных спектральных характеристик $\Phi_{(2|1)}^{<k>}(n+1,0)$ функций $\varphi_{(2|1)}^{<k>}\big(t,x_{(2)}\mid x_{(1)}\big)$, определенных относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, имеет вид

$$\begin{aligned}
&\Phi_{(2|1)}^{<k>}(n+1,0)=\Big(\big[V(m+1,2m+2)\odot\Phi_{(1)}^{<k>}(m+1,0)\big]^{-1}\otimes\\
&\quad\otimes E(n-m,n-m)\Big)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0),\qquad(3.51)\\
&k=1,2,\ldots,N,
\end{aligned}$$

где $V(m+1,2m+2)$ – нестационарная спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно базисной системы $\big\{e_{(1)}\big(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)}\big)\big\}_{i_0,i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.2 и замечание 2.8), $E(n-m,n-m)$ – единичная матрица размерности $2(n-m)$.

Переход от нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(1)}^{<k>}(m+1,0)$ к функции $\varphi_{(1)}^{<k>}\bigl(t,x_{(1)}\bigr)$ осуществляется по формуле обращения

$$\begin{aligned}&\varphi_{(1)}^{<k>}\bigl(t,x_{(1)}\bigr)=\mathbb{S}^{-1}\left[\Phi_{(1)}^{<k>}(m+1,0)\right]=\\&=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_m=0}^{\infty}\varphi_{(1)\,i_0i_1\ldots i_m}^{<k>}\cdot e_{(1)}\bigl(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)}\bigr),\\&k=1,2,\ldots,N,\end{aligned}\tag{3.52}$$

где $\varphi_{(1)\,i_0i_1\ldots i_m}^{<k>}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(1)}^{<k>}(m+1,0)$, $t\in T$, $x_{(1)}\in\mathbb{R}^m$.

Формула обращения (1.46) для нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(2|1)}^{<k>}(n+1,0)$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}&\varphi_{(2|1)}^{<k>}\bigl(t,x_{(2)}\mid x_{(1)}\bigr)=\mathbb{S}^{-1}\left[\Phi_{(2|1)}^{<k>}(n+1,0)\right]=\\&=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}\varphi_{(2|1)\,i_0i_1\ldots i_n}^{<k>}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),\\&k=1,2,\ldots,N,\end{aligned}\tag{3.53}$$

где $\varphi_{(2|1)\,i_0i_1\ldots i_n}^{<k>}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $\Phi_{(2|1)}^{<k>}(n+1,0)$, $t\in T$, $x_{(1)}\in\mathbb{R}^m$, $x_{(2)}\in\mathbb{R}^{n-m}$.

Решение задачи нахождения ненормированных маргинальных плотностей вероятности определяется соотношениями (3.50) и (3.52), а задачи нахождения условных плотностей вероятности – соотношениями (3.51) и (3.53).

Замечание 3.11. Нестационарную спектральную характеристику $\Phi_{(1)}(m+1,0)$ маргинальной плотности вероятности $\varphi_{(1)}\bigl(t,x_{(1)}\bigr)$ и нестационарную спектральную характеристику $\Phi_{(2|1)}(n+1,0)$ условной плотности вероятности $\varphi_{(2|1)}\bigl(t,x_{(2)}\mid x_{(1)}\bigr)$ можно найти по известной нестационарной спектральной характеристике $\Phi(n+1,0)$ плотности вероятности $\varphi(t,x)$ вектора состояния (см. замечания 3.3 и 3.8), используя при этом соотношения (2.54) и (2.57) соответственно.

Пример 3.9. Найти нестационарные спектральные характеристики ненормированных маргинальных плотностей вероятности для двумерной стохастической системы с двумя структурами.

□ Для двумерной стохастической системы с двумя структурами могут быть определены следующие ненормированные маргинальные плотности вероятности (см. разд. 3.1.3):

$$\varphi_{(1)}^{<k>}(t,x_1)=\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi^{<k>}(t,x_1,x_2)\,dx_2,$$

$$\varphi_{(2)}^{<k>}(t,x_2) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^{<k>}(t,x_1,x_2)\,dx_1,$$

где $k = 1, 2$.

Пусть $\Phi^{<k>}(3,0)$ – обобщенная характеристическая функция, т.е. нестационарная спектральная характеристика ненормированной плотности вероятности $\varphi^{<k>}(t,x_1,x_2)$, определенная относительно выбранной базисной системы $\{q(i_0,t)p_1(i_1,x_1)p_2(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$ пространства $L_2(Q_T;\,\nu(t)\rho(x))$, где $k = 1, 2$ и $Q_T = T \times \mathbb{R}^2$ (см. пример 3.2).

Тогда, учитывая соотношение (3.50) и результаты примера 1.42, получаем выражения для нестационарных спектральных характеристик $\Phi_{(1)}^{<k>}(2,0)$ и $\Phi_{(2)}^{<k>}(2,0)$ функций $\varphi_{(1)}^{<k>}(t,x_1)$ и $\varphi_{(2)}^{<k>}(t,x_2)$, определенных относительно базисных систем $\{q(i_0,t)p_1(i_1,x_1)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ и $\{q(i_0,t)p_2(i_2,x_2)\}_{i_0,i_2=0}^{\infty}$ пространств $L_2(T\times\mathbb{R};\,\nu(t)\rho_1(x_1))$ и $L_2(T\times\mathbb{R};\,\nu(t)\rho_2(x_2))$ соответственно:

$$\begin{aligned}
&\Phi_{(1)}^{<k>}(2,0) = \big(E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes J_2(0,1)\big)\,\cdot\\
&\quad\cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes R_2^{-1}(1,1)\big)\cdot\Phi^{<k>}(3,0)\Big),\\
&\Phi_{(2)}^{<k>}(2,0) = \big(E(1,1)\otimes J_1(0,1)\otimes E(1,1)\big)\,\cdot\\
&\quad\cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes R_1^{-1}(1,1)\otimes E(1,1)\big)\cdot\Phi^{<k>}(3,0)\Big),\\
&k = 1, 2,
\end{aligned}$$

где $J_1(0,1)$ и $J_2(0,1)$ – спектральные характеристики линейного функционала $\mathcal{J}$, ставящего в соответствие функции одной переменной интеграл от этой функции по пространству $\mathbb{R}$ (см. разд. 1.5.1); $R_1(1,1)$ и $R_2(1,1)$ – спектральные характеристики операторов умножения на функции $\rho_1(x_1)$ и $\rho_2(x_2)$ соответственно (см. разд. 1.4.2). Спектральные характеристики $J_1(0,1)$ и $R_1(1,1)$ определены относительно базисной системы $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{R};\,\rho_1(x_1))$, а спектральные характеристики $J_2(0,1)$ и $R_2(1,1)$ – относительно базисной системы $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{R};\,\rho_2(x_2))$.

Заметим, что если $\rho_1(x_1)\equiv 1$ и $\rho_2(x_2)\equiv 1$, то $R_1(1,1) = R_2(1,1) = E(1,1)$, согласно свойству спектрального преобразования операторов умножения, определенных на пространстве функций вектора состояния (см. разд. 1.4.2). В этом случае соотношения для нестационарных спектральных характеристик $\Phi_{(1)}^{<k>}(2,0)$ и $\Phi_{(2)}^{<k>}(2,0)$ могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\Phi_{(1)}^{<k>}(2,0) = \big(E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes J_2(0,1)\big)\cdot\Phi^{<k>}(3,0),\\
&\Phi_{(2)}^{<k>}(2,0) = \big(E(1,1)\otimes J_1(0,1)\otimes E(1,1)\big)\cdot\Phi^{<k>}(3,0),\\
&k = 1, 2.
\end{aligned}$$

Формула обращения (3.52) для нестационарных спектральных характеристик $\Phi_{(1)}^{<k>}(2,0)$ и $\Phi_{(2)}^{<k>}(2,0)$ имеет вид

$$\varphi_{(1)}^{<k>}(t,x_1)=\mathbb{S}^{-1}\left[\Phi_{(1)}^{<k>}(2,0)\right]=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\varphi_{(1)\,i_0 i_1}^{<k>}\cdot q(i_0,t)\cdot p_1(i_1,x_1),$$

$$\varphi_{(2)}^{<k>}(t,x_2)=\mathbb{S}^{-1}\left[\Phi_{(2)}^{<k>}(2,0)\right]=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\varphi_{(2)\,i_0 i_2}^{<k>}\cdot q(i_0,t)\cdot p_2(i_2,x_2),$$

$$k=1,2,$$

где $\varphi_{(1)\,i_0 i_1}^{<k>}$ и $\varphi_{(2)\,i_0 i_2}^{<k>}$ – координаты нестационарных спектральных характеристик $\Phi_{(1)}^{<k>}(2,0)$ и $\Phi_{(2)}^{<k>}(2,0)$ соответственно, $t\in T$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. ■

Методика расчета ненормированных маргинальных плотностей вероятности $\varphi_{(1)}^{<k>}\big(t,x_{(1)}\big)$ *и условных плотностей вероятности* $\varphi_{(2|1)}^{<k>}\big(t,x_{(2)}\mid x_{(1)}\big)$

Для расчета ненормированных маргинальных плотностей вероятности $\varphi_{(1)}^{<k>}\big(t,x_{(1)}\big)$ и условных плотностей вероятности $\varphi_{(2|1)}^{<k>}\big(t,x_{(2)}\mid x_{(1)}\big)$ требуется выполнить следующие этапы.

1–6. Найти ненормированные плотности вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$ согласно методике, изложенной в разд. 3.2.1.

7. Записать соотношения для искомых ненормированных маргинальных и условных плотностей вероятности в соответствии со структурой матриц-столбцов $x_{(1)}$ и $x_{(2)}$:

$$\varphi_{(1)}^{<k>}\big(t,x_{(1)}\big)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}}\varphi^{<k>}(t,x)\,dx_{(2)},\tag{XVII}$$

$$\varphi_{(2|1)}^{<k>}\big(t,x_{(2)}\mid x_{(1)}\big)=\frac{\varphi^{<k>}(t,x)}{\varphi_{(1)}^{<k>}\big(t,x_{(1)}\big)},\tag{XVIII}$$

$$k=1,2,\ldots,N.$$

8. Сформировать базисную систему

$$\Big\{e_{(1)}\big(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)}\big)=q(i_0,t)\cdot p_{(1)}\big(i_1,\ldots,i_m,x_{(1)}\big)\Big\}_{i_0,i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty}$$

пространства $L_2\big(T\times\mathbb{R}^m;\nu(t)\,\rho_{(1)}\big(x_{(1)}\big)\big)$ для представления ненормированных маргинальных плотностей вероятности $\varphi_{(1)}^{<k>}\big(t,x_{(1)}\big)$ (см. разд. 1.1.3) и базисную систему

$$\Big\{p_{(2)}\big(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)}\big)=p_{m+1}(i_{m+1},x_{m+1})\cdots p_n(i_n,x_n)\Big\}_{i_{m+1},\ldots,i_n=0}^{\infty}$$

пространства $L_2\big(\mathbb{R}^{n-m}; \rho_{(2)}\big(x_{(2)}\big)\big)$ для представления линейного функционала $\mathcal{J}_{(2)}$, ставящего в соответствие функции $h\big(x_{(2)}\big)$ значение интеграла от этой функции по пространству $\mathbb{R}^{n-m}$ (см. разд. 1.5.1), и оператора умножения на весовую функцию $\rho_{(2)}\big(x_{(2)}\big)$ (см. разд. 1.4.2).

9. Вычислить:

а) спектральные характеристики:

1) $J_{(2)}(0, n-m)$ – спектральную характеристику функционала $\mathcal{J}_{(2)}$ (см. разд. 1.5.1);
2) $R_{(2)}(n-m, n-m)$ – спектральную характеристику оператора умножения на весовую функцию $\rho_{(2)}\big(x_{(2)}\big)$ (см. разд. 1.4.2);

б) нестационарную спектральную характеристику $V(m+1, 2m+2)$ множительного звена (см. разд. 1.4.2).

10. Найти нестационарные спектральные характеристики $\Phi_{(1)}^{<k>}(m+1, 0)$ ненормированных маргинальных плотностей вероятности $\varphi_{(1)}^{<k>}\big(t, x_{(1)}\big)$, используя формулу

$$\Phi_{(1)}^{<k>}(m+1,0) = \big(E(1,1) \otimes E(m,m) \otimes J_{(2)}(0, n-m)\big) \cdot \\ \cdot \Big(\big(E(1,1) \otimes E(m,m) \otimes R_{(2)}^{-1}(n-m, n-m)\big) \cdot \Phi^{<k>}(n+1, 0)\Big), \qquad \text{(XIX)}$$
$$k = 1, 2, \ldots, N,$$

и нестационарные спектральные характеристики $\Phi_{(2|1)}^{<k>}(n+1, 0)$ условных плотностей вероятности $\varphi_{(2|1)}^{<k>}\big(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\big)$, используя выражение

$$\Phi_{(2|1)}^{<k>}(n+1,0) = \Big(\big[V(m+1, 2m+2) \odot \Phi_{(1)}^{<k>}(m+1,0)\big]^{-1} \otimes \\ \otimes E(n-m, n-m)\Big) \cdot \Phi^{<k>}(n+1, 0), \qquad \text{(XX)}$$
$$k = 1, 2, \ldots, N.$$

11. Получить ненормированные маргинальные плотности вероятности $\varphi_{(1)}^{<k>}\big(t, x_{(1)}\big)$ и условные плотности вероятности $\varphi_{(2|1)}^{<k>}\big(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\big)$ по найденным нестационарным спектральным характеристикам $\Phi_{(1)}^{<k>}(m+1, 0)$ и $\Phi_{(2|1)}^{<k>}(n+1, 0)$ соответственно, используя формулы обращения

$$\varphi_{(1)}^{<k>}\big(t, x_{(1)}\big) = \\ = \sum_{i_0=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{i_m=0}^{\infty} \varphi_{(1)\,i_0 i_1 \ldots i_m}^{<k>} \cdot e_{(1)}\big(i_0, i_1, \ldots, i_m, t, x_{(1)}\big), \qquad \text{(XXI)}$$
$$k = 1, 2, \ldots, N,$$

где $\varphi^{<k>}_{(1)\,i_0 i_1 \ldots i_m}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $\Phi^{<k>}_{(1)}(m+1,0)$, $t \in T$, $x_{(1)} \in \mathbb{R}^m$;

$$\varphi^{<k>}_{(2|1)}\big(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\big) = \\ = \sum_{i_0=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{i_n=0}^{\infty} \varphi^{<k>}_{(2|1)\,i_0 i_1 \ldots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x), \\ k = 1, 2, \ldots, N, \tag{XXII}$$

где $\varphi^{<k>}_{(2|1)\,i_0 i_1 \ldots i_n}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $\Phi^{<k>}_{(2|1)}(n+1,0)$, $t \in T$, $x_{(1)} \in \mathbb{R}^m$, $x_{(2)} \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Замечание 3.12. При задании порядков усечения спектральных характеристик (см. замечание 3.9) формулы обращения (XXI) и (XXII) примут вид

$$\varphi^{<k>}_{(1)}\big(t, x_{(1)}\big) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \ldots \sum_{i_m=0}^{L_m-1} \varphi^{<k>}_{(1)\,i_0 i_1 \ldots i_m} \cdot e_{(1)}\big(i_0, i_1, \ldots, i_m, t, x_{(1)}\big), \\ k = 1, 2, \ldots, N,$$

где $\varphi^{<k>}_{(1)\,i_0 i_1 \ldots i_m}$ – элементы конечной гиперстолбцовой матрицы $\Phi^{<k>}_{(1)}(m+1,0)$, $t \in T$, $x_{(1)} \in \mathbb{R}^m$;

$$\varphi^{<k>}_{(2|1)}\big(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\big) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \ldots \sum_{i_n=0}^{L_n-1} \varphi^{<k>}_{(2|1)\,i_0 i_1 \ldots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x), \\ k = 1, 2, \ldots, N,$$

где $\varphi^{<k>}_{(2|1)\,i_0 i_1 \ldots i_n}$ – элементы конечной гиперстолбцовой матрицы $\Phi^{<k>}_{(2|1)}(n+1,0)$, $t \in T$, $x_{(1)} \in \mathbb{R}^m$, $x_{(2)} \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Пример 3.10. Найти ненормированные маргинальные плотности вероятности для двумерной системы с двумя структурами, рассмотренной в примере 3.6.

☐ Найдем ненормированные маргинальные плотности вероятности

$$\varphi^{<1>}_{(1)}(t, x_1), \quad \varphi^{<1>}_{(2)}(t, x_2), \quad \varphi^{<2>}_{(1)}(t, x_1) \quad \text{и} \quad \varphi^{<2>}_{(2)}(t, x_2)$$

с помощью методики расчета ненормированных маргинальных плотностей вероятности $\varphi^{<k>}_{(1)}\big(t, x_{(1)}\big)$ и условных плотностей вероятности $\varphi^{<k>}_{(2|1)}\big(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\big)$.

1–6. При решении примера 3.6 были найдены обобщенные характеристические функции $\Phi^{<1>}(3,0)$ и $\Phi^{<2>}(3,0)$, т.е. нестационарные спектральные характеристики ненормированных плотностей вероятности $\varphi^{<1>}(t, x_1, x_2)$ и

$\varphi^{<2>}(t, x_1, x_2)$ вектора состояния $X = [X_1\ X_2]^{\mathrm{T}}$, определенные относительно базисной системы

$$\{\hat{P}(i_0, t)\,\hat{\Phi}(i_1, x_1)\,\hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_0, i_1, i_2 = 0}^{\infty}$$

пространства $L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$, где $Q_T = T \times \mathbb{R}^2$.

7. Запишем выражения для ненормированных маргинальных плотностей вероятности $\varphi_{(1)}^{<k>}(t, x_1)$ и $\varphi_{(2)}^{<k>}(t, x_2)$, используя (XVII):

$$\varphi_{(1)}^{<k>}(t, x_1) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^{<k>}(t, x_1, x_2)\,dx_2,$$
$$\varphi_{(2)}^{<k>}(t, x_2) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^{<k>}(t, x_1, x_2)\,dx_1,$$
$$k = 1, 2.$$

8. Сформируем базисные системы

$$\{e_{(1)}(i_0, i_1, t, x_1) = \hat{P}(i_0, t)\,\hat{\Phi}(i_1, x_1)\}_{i_0, i_1 = 0}^{\infty}$$

и

$$\{e_{(2)}(i_0, i_2, t, x_2) = \hat{P}(i_0, t)\,\hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_0, i_2 = 0}^{\infty}$$

пространства $L_2(T \times \mathbb{R})$ для представления ненормированных маргинальных плотностей вероятности $\varphi_{(1)}^{<k>}(t, x_1)$ и $\varphi_{(2)}^{<k>}(t, x_2)$ соответственно.

Для представления линейного функционала $\mathcal{J}$, ставящего в соответствие функции одной переменной интеграл от этой функции по пространству $\mathbb{R}$ (см. разд. 1.5.1), будем использовать системы функций Эрмита $\{\hat{\Phi}(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{\hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$.

9. Спектральные характеристики $J_1(0, 1)$ и $J_2(0, 1)$ функционала $\mathcal{J}$, определенные относительно базисных систем $\{\hat{\Phi}(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{\hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$, вычисляются аналогично спектральной характеристике $J(0, 1)$ в примере 3.8:

$$J_1(0, 1) = (J_{1 i_1}), \quad J_2(0, 1) = (J_{2 i_2}),$$

где

$$J_{1 i_1} = \big(p^*(i_1, x_1), w_1(x_1)\big)_{L_2(\mathbb{R})} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(i_1, x_1)\,dx_1,$$
$$J_{2 i_2} = \big(p^*(i_2, x_2), w_2(x_2)\big)_{L_2(\mathbb{R})} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(i_2, x_2)\,dx_2,$$
$$i_1, j_2 = 0, 1, 2, \ldots,$$

так как справедливо равенство $w_1(x_1) = w_2(x_2) = 1$ (см. примеры линейных функционалов в разд. 1.5.1). Нетрудно видеть, что $J_1(0, 1) = J_2(0, 1)$.

Вследствие того, что весовые функции $\rho_1(x_1)$ и $\rho_2(x_2)$ для базисных систем $\{\hat{\Phi}(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{\hat{\Phi}(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ тождественно равны единице, спектральные характеристики $R_1(1,1)$ и $R_2(1,1)$ операторов умножения на эти функции равны двумерной единичной матрице $E(1,1)$:

$$R_1(1,1) = R_2(1,1) = E(1,1).$$

10. Нестационарные спектральные характеристики $\Phi_{(1)}^{<k>}(2,0)$ и $\Phi_{(2)}^{<k>}(2,0)$ функций $\varphi_{(1)}^{<k>}(t,x_1)$ и $\varphi_{(2)}^{<k>}(t,x_2)$, определенные относительно базисных систем $\{\hat{P}(i_0,t)\hat{\Phi}(i_1,x_1)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ и $\{\hat{P}(i_0,t)\hat{\Phi}(i_2,x_2)\}_{i_0,i_2=0}^{\infty}$ соответственно, вычисляются с помощью формулы (XIX), которая в рассматриваемом случае с учетом того, что весовые функции $\rho_1(x_1)$ и $\rho_2(x_2)$ тождественно равны единице, примет вид (см. пример 3.9):

$$\begin{aligned}
&\Phi_{(1)}^{<k>}(2,0) = \big(E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes J_2(0,1)\big)\cdot \Phi^{<k>}(3,0),\\
&\Phi_{(2)}^{<k>}(2,0) = \big(E(1,1)\otimes J_1(0,1)\otimes E(1,1)\big)\cdot \Phi^{<k>}(3,0),\\
&k = 1,2.
\end{aligned}$$

11. По формуле обращения (XXI) получаем ненормированные маргинальные плотности вероятности $\varphi_{(1)}^{<k>}(t,x_1)$ и $\varphi_{(2)}^{<k>}(t,x_2)$:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{(1)}^{<k>}(t,x_1) = \mathbb{S}^{-1}\left[\Phi_{(1)}^{<k>}(2,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty} \varphi_{(1)\,i_0 i_1}^{<k>}\cdot \hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{\Phi}(i_1,x_1),\\
&\varphi_{(2)}^{<k>}(t,x_2) = \mathbb{S}^{-1}\left[\Phi_{(2)}^{<k>}(2,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty} \varphi_{(2)\,i_0 i_2}^{<k>}\cdot \hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{\Phi}(i_2,x_2),\\
&k = 1,2,
\end{aligned}$$

где $\varphi_{(1)\,i_0 i_1}^{<k>}$ и $\varphi_{(2)\,i_0 i_2}^{<k>}$ – координаты нестационарных спектральных характеристик $\Phi_{(1)}^{<k>}(2,0)$ и $\Phi_{(2)}^{<k>}(2,0)$ соответственно, $t\in T$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}$.

При задании порядков усечения спектральных характеристик (см. замечание 3.9 и пример 3.6) формула обращения (XXI) для определения приближенного решения задачи записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{(1)}^{<k>}(t,x_1) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1} \varphi_{(1)\,i_0 i_1}^{<k>}\cdot \hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{\Phi}(i_1,x_1),\\
&\varphi_{(2)}^{<k>}(t,x_2) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_2=0}^{L_2-1} \varphi_{(2)\,i_0 i_2}^{<k>}\cdot \hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{\Phi}(i_2,x_2),\\
&k = 1,2,
\end{aligned}$$

где $\varphi^{<k>}_{(1)\,i_0 i_1}$ и $\varphi^{<k>}_{(2)\,i_0 i_2}$ – элементы конечных гиперстолбцовых матриц $\Phi^{<k>}_{(1)}(2,0)$ и $\Phi^{<k>}_{(2)}(2,0)$ соответственно, $t\in T$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $L_1=L_2=8$.

Возвращаясь к примеру 3.6, нетрудно видеть, что функции $\varphi^{<1>}_{(1)}(t,x_1)$ и $\varphi^{<2>}_{(1)}(t,x_1)$ характеризуют распределение координаты θ, а функции $\varphi^{<1>}_{(2)}(t,x_2)$ и $\varphi^{<2>}_{(2)}(t,x_2)$ – распределение координаты q.

Графики функций $\varphi^{<k>}_{(1)}(t,x_1)$, $\varphi^{<k>}_{(2)}(t,x_2)$ и их сечений в различные моменты времени t изображены на рис. 3.16–3.23. ■

3.2.3. Определение моментных характеристик в спектральной форме математического описания

Для нахождения координат $m_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$, математического ожидания $m(t)$ и элементов $R_{ij}(t)$, $i,j=1,2,\ldots,n$, ковариационной матрицы $R(t)$ по известной нестационарной спектральной характеристике $\Phi(n+1,0)$ плотности вероятности $\varphi(t,x)$ вектора состояния системы управления (3.1) (см. замечания 3.3 и 3.8) могут быть использованы соотношения (2.62) и (2.65) для определения нестационарных спектральных характеристик $M_i(1,0)$ и $R_{ij}(1,0)$, а затем формулы обращения (2.65) и (2.66) соответственно. Однако в ряде случаев требуется определить взвешенные моментные характеристики вектора состояния, т.е. функции $m_i^{<k>}(t)$ и $R_{ij}^{<k>}(t)$ (см. разд. 2.1.4), $i,j=1,2,\ldots,n$, $k=1,2,\ldots,N$.

При выводе соотношений для нестационарных спектральных характеристик функций $m_i^{<k>}(t)$ и $R_{ij}^{<k>}(t)$ будем использовать тот же прием, что и в разд. 2.2.3, т.е. перепишем выражения для этих функций в виде

$$m_i^{<k>}(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i\varphi^{<k>}(t,x)\,dx=\mathcal{J}\big[x_i\varphi^{<k>}(t,x)\big], \tag{3.54}$$

$$i=1,2,\ldots,n,\quad k=1,2,\ldots,N,$$

$$R_{ij}^{<k>}(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_ix_j\varphi^{<k>}(t,x)\,dx-\frac{m_i^{<k>}(t)\,m_j^{<k>}(t)}{\mathbb{P}^{<k>}(t)}=$$

$$=\mathcal{J}\big[x_ix_j\varphi^{<k>}(t,x)\big]-\frac{m_i^{<k>}(t)\,m_j^{<k>}(t)}{\mathbb{P}^{<k>}(t)}, \tag{3.55}$$

$$i,j=1,2,\ldots,n,\quad k=1,2,\ldots,N,$$

где $\mathcal{J}$ – линейный функционал, ставящий в соответствие функции вектора состояния интеграл от этой функции по пространству $\mathbb{R}^n$ (см. (3.45)).

Заметим, что выражения (3.54) и (2.59) отличаются только индексом $^{<k>}$, обозначающим номер структуры, из чего можно сделать вывод,

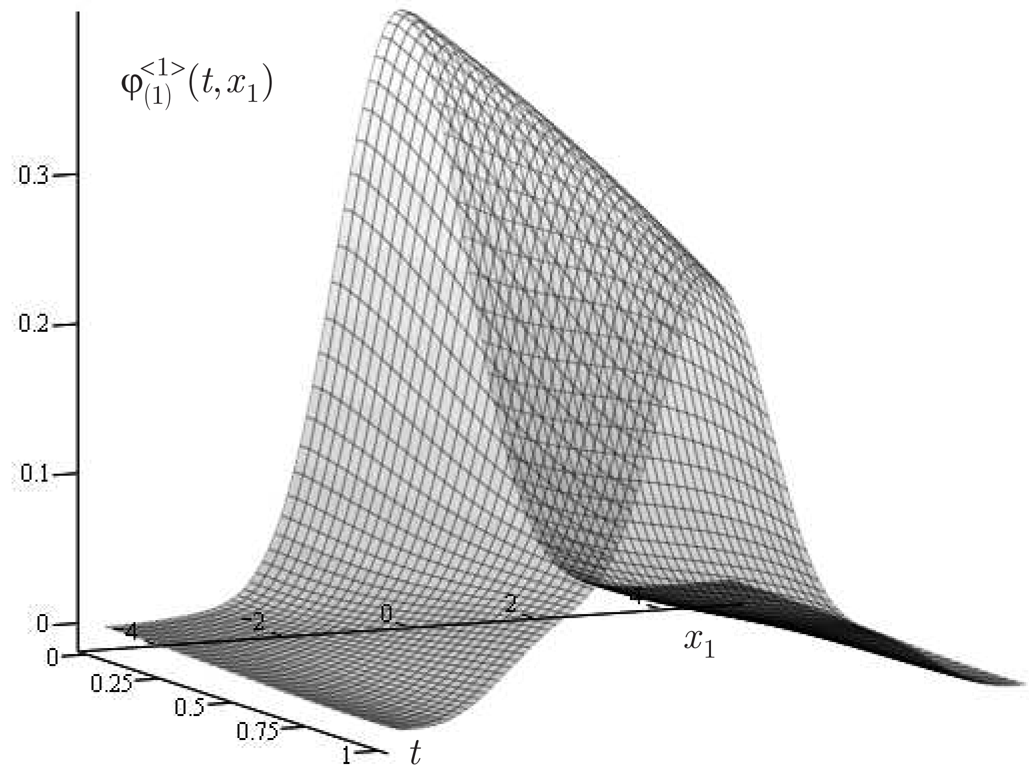

Рис. 3.16. Ненормированная маргинальная плотность вероятности $\varphi_{(1)}^{<1>}(t, x_1)$

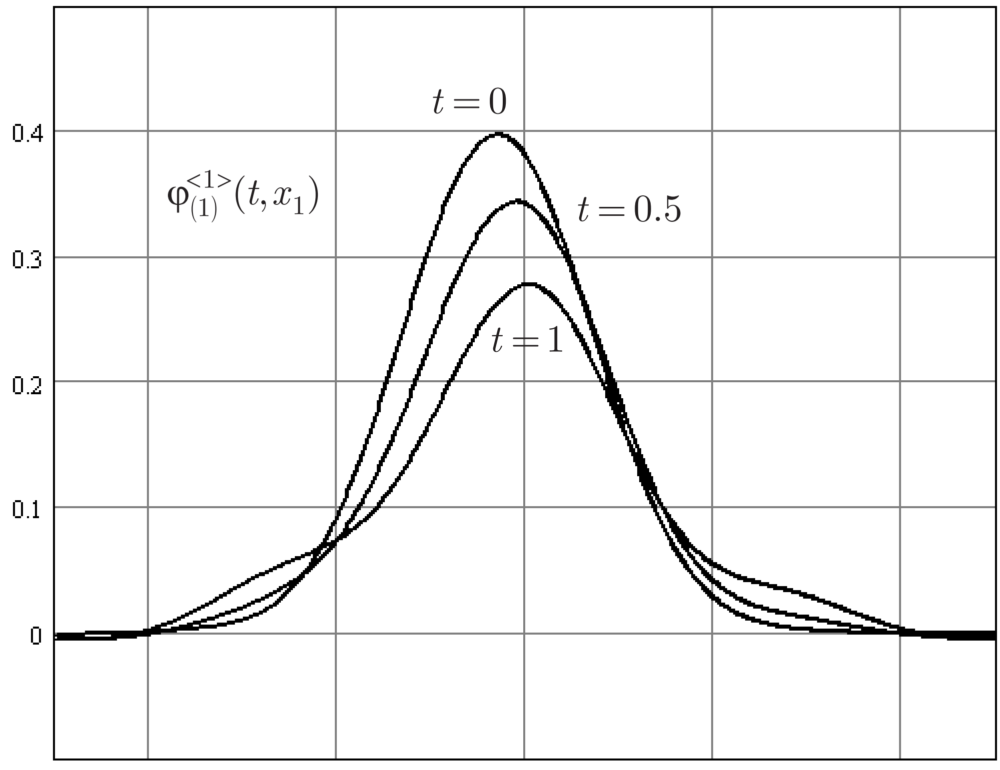

Рис. 3.17. Сечения ненормированной маргинальной плотности вероятности $\varphi_{(1)}^{<1>}(t, x_1)$ в различные моменты времени

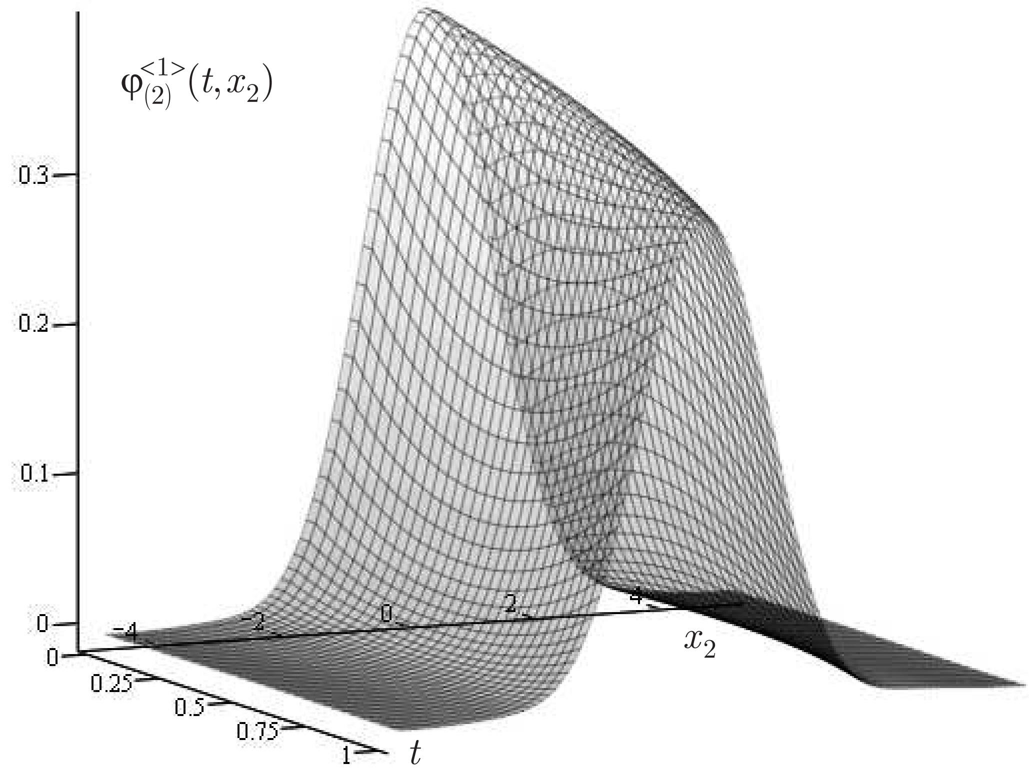

Рис. 3.18. Ненормированная маргинальная плотность вероятности $\varphi_{(2)}^{<1>}(t,x_2)$

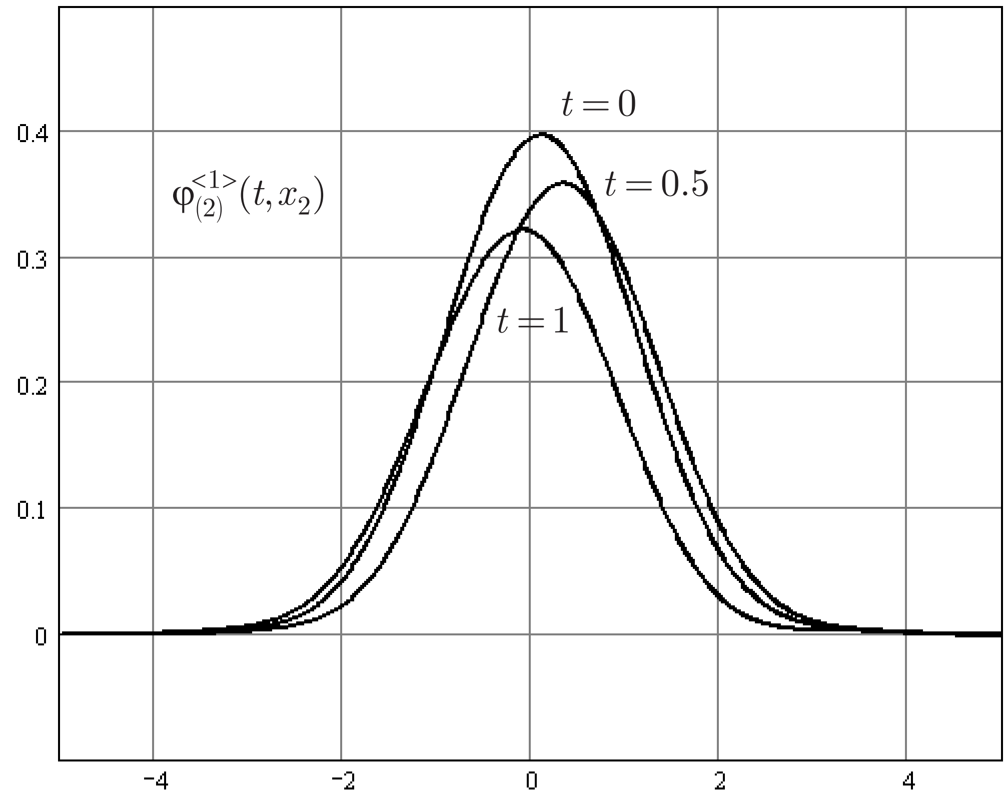

Рис. 3.19. Сечения ненормированной маргинальной плотности вероятности $\varphi_{(2)}^{<1>}(t,x_2)$ в различные моменты времени

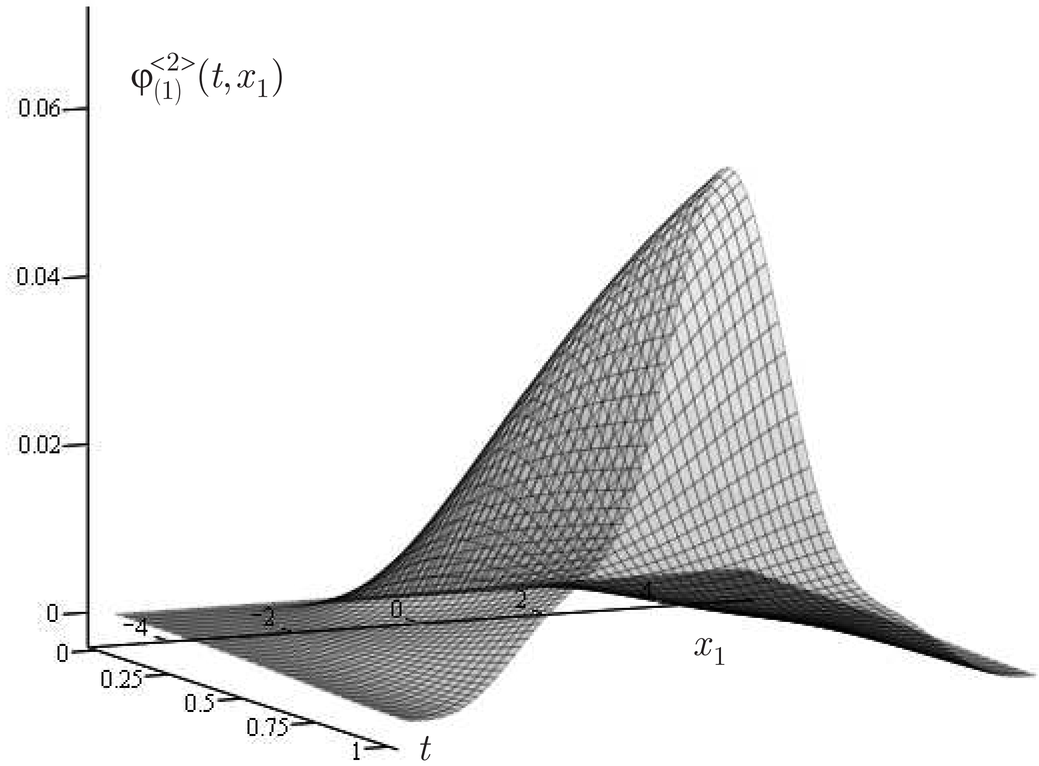

Рис. 3.20. Ненормированная маргинальная плотность вероятности $\varphi_{(1)}^{<2>}(t, x_1)$

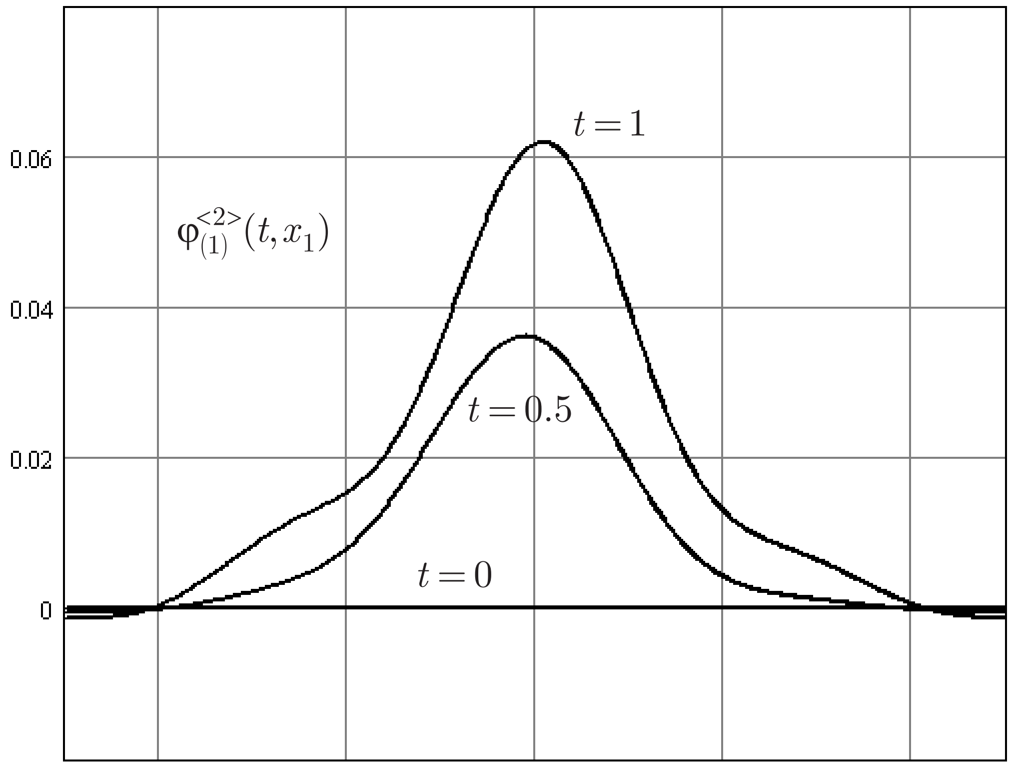

Рис. 3.21. Сечения ненормированной маргинальной плотности вероятности $\varphi_{(1)}^{<2>}(t, x_1)$ в различные моменты времени

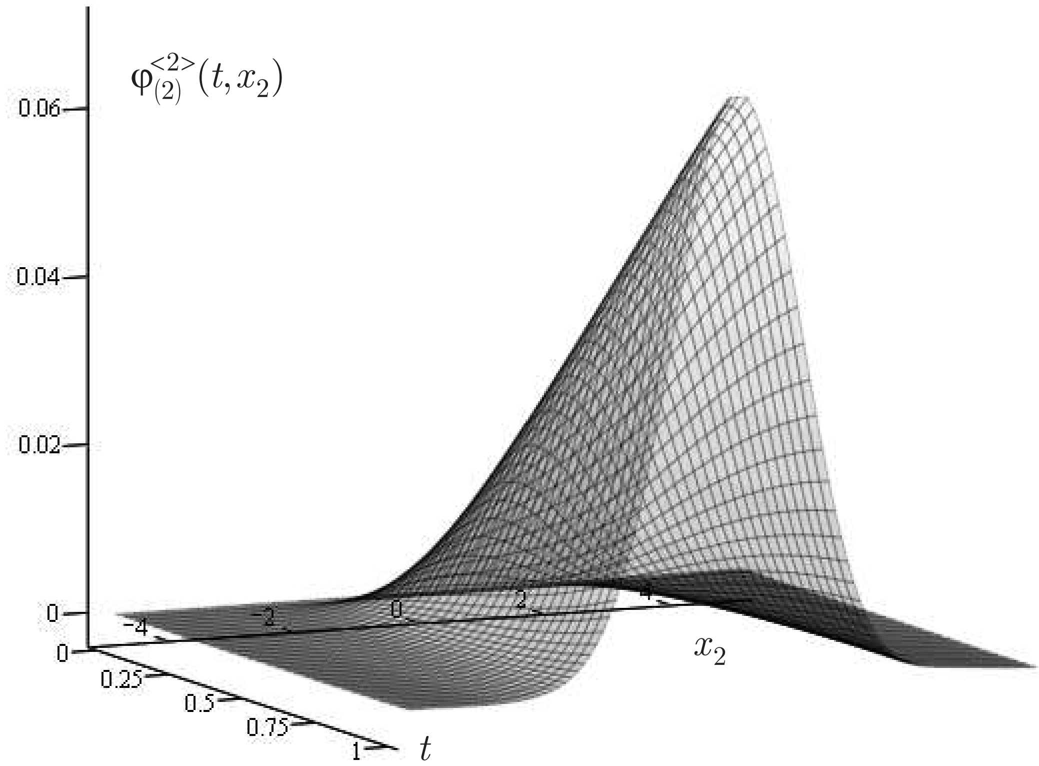

Рис. 3.22. Ненормированная маргинальная плотность вероятности $\varphi_{(2)}^{<2>}(t, x_2)$

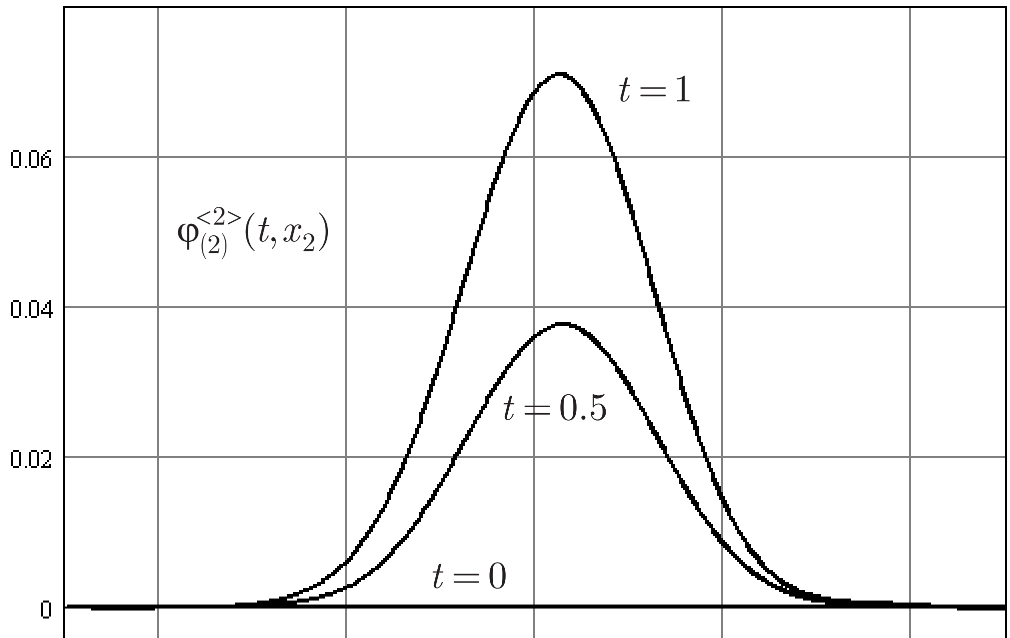

Рис. 3.23. Сечения ненормированной маргинальной плотности вероятности $\varphi_{(2)}^{<2>}(t, x_2)$ в различные моменты времени

что выражение для вычисления нестационарной спектральной характеристики $M_i^{<k>}(1,0)$ функции $m_i^{<k>}(t)$, определенной относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T;\nu(t))$, полностью аналогично соотношению (2.62):

$$M_i^{<k>}(1,0) = \big(E(1,1)\otimes J(0,n)\big)\cdot \\ \cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes R^{-1}(n,n)\big)\cdot X_i(n+1,n+1)\cdot \Phi^{<k>}(n+1,0)\Big), \qquad (3.56) \\ i=1,2,\ldots,n, \quad k=1,2,\ldots,N,$$

где $J(0,n)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{J}$ (см. разд. 1.5.1), $R(n,n)$ – спектральная характеристика оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$ (см. разд. 1.4.2), $X_i(n+1,n+1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_i(t,x)=x_i$, $\Phi^{<k>}(n+1,0)$ – обобщенная характеристическая функция, т.е. нестационарная спектральная характеристика ненормированной плотности вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$ (см. разд. 3.2). Спектральные характеристики $J(0,n)$ и $R(n,n)$ определены относительно базисной системы $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{R}^n;\rho(x))$, а нестационарные спектральные характеристики $X_i(n+1,n+1)$ и $\Phi^{<k>}(n+1,0)$ – относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(Q_T;\nu(t)\rho(x))$, $Q_T=T\times\mathbb{R}^n$.

Перейдем к определению нестационарной спектральной характеристики функции $R_{ij}^{<k>}(t)$. Применяя спектральное преобразование к левой и правой частям равенства (3.55) и учитывая свойство линейности спектрального преобразования (см. разд. 1.3.1), имеем

$$\mathbb{S}\Big[R_{ij}^{<k>}(t)\Big] = \mathbb{S}\Big[\mathcal{J}\big[x_i x_j \varphi^{<k>}(t,x)\big]\Big] - \mathbb{S}\left[\frac{m_i^{<k>}(t)\,m_j^{<k>}(t)}{\mathbb{P}^{<k>}(t)}\right], \qquad (3.57)$$

где левая часть полученного выражения представляет собой нестационарную спектральную характеристику $R_{ij}^{<k>}(1,0)$ функции $R_{ij}^{<k>}(t)$ (см. разд. 1.3.1):

$$\mathbb{S}\big[R_{ij}^{<k>}(t)\big] = R_{ij}^{<k>}(1,0).$$

Первое слагаемое в правой части (3.57) находится точно так же, как и первое слагаемое в правой части (2.63), т.е.

$$\mathbb{S}\Big[\mathcal{J}\big[x_i x_j \varphi^{<k>}(t,x)\big]\Big] = \big(E(1,1)\otimes J(0,n)\big)\cdot \\ \cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes R^{-1}(n,n)\big)\cdot X_{ij}(n+1,n+1)\cdot \Phi^{<k>}(n+1,0)\Big),$$

где $X_{ij}(n+1,n+1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_{ij}(t,x)=x_i x_j$, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.2).

Для представления второго слагаемого в правой части (2.63) применим свойства спектрального преобразования операторов умножения, заданных на пространстве функций времени (см. разд. 1.4.2). Тогда

$$\mathbb{S}\left[\frac{m_i^{<k>}(t)m_j^{<k>}(t)}{\mathbb{P}^{<k>}(t)}\right] = A_i^{<k>}(1,1)\cdot M_j(1,0),$$

где $A_i^{<k>}(1,1)$ – нестационарная спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_i^{<k>}(t) = [\mathbb{P}^{<k>}(t)]^{-1}\cdot m_i^{<k>}(t)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$; $M_j^{<k>}(1,0)$ – нестационарная спектральная характеристика функции $m_j^{<k>}(t)$, определенная относительно той же базисной системы, причем для нестационарной спектральной характеристики $A_i^{<k>}(1,1)$, согласно свойствам спектрального преобразования композиции линейных операторов и спектрального преобразования обратного оператора (см. разд. 1.4.1), справедливо соотношение

$$A_i^{<k>}(1,1) = \left[\mathsf{P}^{<k>}(1,1)\right]^{-1}\cdot M_i^{<k>}(1,1),$$

в котором $\mathsf{P}^{<k>}(1,1)$ и $M_i^{<k>}(1,1)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов умножения на функции $\mathbb{P}^{<k>}(t)$ и $m_i^{<k>}(t)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$.

Далее воспользуемся утверждением 1.11, согласно которому

$$\mathsf{P}^{<k>}(1,1) = V(1,2)\odot\mathsf{P}^{<k>}(1,0),$$
$$M_i^{<k>}(1,1) = V(1,2)\odot M_i^{<k>}(1,0),$$

где $V(1,2)$ – нестационарная спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.4.2); $\mathsf{P}^{<k>}(1,0)$ нестационарная спектральная характеристика функции $\mathbb{P}^{<k>}(t)$, определенная относительно той же базисной системы и задаваемая соотношением (3.46).

Следовательно, нестационарная спектральная характеристика $R_{ij}^{<k>}(1,0)$ функции $R_{ij}^{<k>}(t)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, задается выражением

$$\begin{aligned} R_{ij}^{<k>}(1,0) &= \big(E(1,1)\otimes J(0,n)\big)\cdot \\ &\cdot\Big(\big(E(1,1)\otimes R^{-1}(n,n)\big)\cdot X_{ij}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0)\Big) - \\ &- \left[V(1,2)\odot\mathsf{P}^{<k>}(1,0)\right]^{-1}\cdot\Big(V(1,2)\odot M_i^{<k>}(1,0)\Big)\cdot M_j^{<k>}(1,0), \end{aligned}\tag{3.58}$$

$$i,j = 1,2,\ldots,n, \quad k = 1,2,\ldots,N.$$

Следует отметить, что нестационарные спектральные характеристики $X_i(n+1,n+1)$ и $X_{ij}(n+1,n+1)$ связаны между собой соотношением (2.64). Кроме того, $X_i(n+1,n+1)$ и $X_{ij}(n+1,n+1)$ можно представить в виде тензорного произведения двумерных единичных матриц и спектральных характеристик $A_l(1,1)$ операторов умножения на функции $a_l(x_l) = x_l$, определенных относительно базисных систем $\{p_l(i_l, x_l)\}_{i_l=0}^{\infty}$ пространств $L_2(\mathbb{R}; \rho_l(x_l))$ (см. замечание 2.10), $l = 1, 2, \ldots, n$.

Для перехода от нестационарных спектральных характеристик $M_i^{<k>}(1,0)$ и $R_{ij}^{<k>}(1,0)$ к функциям $m_i^{<k>}(t)$ и $R_{ij}^{<k>}(t)$ применяются формулы обращения

$$m_i^{<k>}(t) = \mathbb{S}^{-1}\left[M_i^{<k>}(1,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty} m_{i i_0}^{<k>} \cdot q(i_0, t), \tag{3.59}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

$$R_{ij}^{<k>}(t) = \mathbb{S}^{-1}\left[R_{ij}^{<k>}(1,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty} r_{ij i_0}^{<k>} \cdot q(i_0, t), \tag{3.60}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

где $m_{i i_0}^{<k>}$ и $r_{ij i_0}^{<k>}$ – координаты нестационарных спектральных характеристик $M_i^{<k>}(1,0)$ и $R_{ij}^{<k>}(1,0)$ соответственно, $t \in T$.

Пример 3.11. Записать выражения для нестационарных спектральных характеристик взвешенных математического ожидания и дисперсии состояния одномерной стохастической системы с двумя структурами.

□ Выражения для взвешенных моментных характеристик состояния одномерной стохастической системы с двумя структурами с учетом замечания 3.6 записываются в виде

$$m^{<k>}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} x \varphi^{<k>}(t,x)\,dx,$$

$$D^{<k>}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} x^2 \varphi^{<k>}(t,x)\,dx - \frac{[m^{<k>}(t)]^2}{\mathbb{P}^{<k>}(t)},$$

$$k = 1, 2,$$

где $\varphi^{<k>}(t,x)$ – ненормированная плотность вероятности состояния для структуры с номером k, $\mathbb{P}^{<k>}(t)$ – вероятность активности структуры с номером k, $(t,x) \in Q_T = T \times \mathbb{R}$.

Пусть $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ – базисная система пространства

$$L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$$

такая, что системы функций $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ представляют собой базисы пространств $L_2(T; \nu(t))$ и $L_2(\mathbb{R}; \rho(x))$ соответственно.

Положим $n = 1$ в соотношениях (3.56) и (3.58) для вычисления нестационарных спектральных характеристик $M^{<k>}(1,0)$ и $D^{<k>}(1,0)$ функций $m^{<k>}(t)$ и $D^{<k>}(t)$ соответственно, определенных относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&M^{<k>}(1,0) = \\
&\quad = \big(E(1,1) \otimes J(0,1)\big) \cdot \big(\big(E(1,1) \otimes R^{-1}(1,1)\big) \cdot X_1(2,2) \cdot \Phi^{<k>}(2,0)\big), \\
&D^{<k>}(1,0) = \\
&\quad = \big(E(1,1) \otimes J(0,1)\big) \cdot \big(\big(E(1,1) \otimes R^{-1}(1,1)\big) \cdot X_{11}(2,2) \cdot \Phi^{<k>}(2,0)\big) - \\
&\qquad - \big[V(1,2) \odot \mathsf{P}^{<k>}(1,0)\big]^{-1} \cdot \big(V(1,2) \odot M^{<k>}(1,0)\big) \cdot M^{<k>}(1,0), \\
&k = 1, 2,
\end{aligned}
$$

где $J(0,1)$ – спектральная характеристика линейного функционала $\mathcal{J}$, ставящего в соответствие функции одной переменной интеграл от этой функции по пространству $\mathbb{R}$ (см. разд. 1.5.1); $R(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$; $X_1(2,2)$ и $X_{11}(2,2)$ – нестационарные спектральные характеристики операторов умножения на функции $a_1(t,x) = x$ и $a_{11}(t,x) = x^2$ соответственно, выражения для которых приведены в примере 2.10; $V(1,2)$ – нестационарная спектральная характеристика множительного звена; $\mathsf{P}^{<k>}(1,0)$ – нестационарная спектральная характеристика функции $\mathbb{P}^{<k>}(t)$ (см. пример 3.7), $\Phi^{<k>}(2,0)$ – нестационарная спектральная характеристика функции $\varphi^{<k>}(t,x)$ (см. пример 3.3), $k = 1, 2$. Нестационарные спектральные характеристики $V(1,2)$ и $\mathsf{P}^{<k>}(1,0)$ определены относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, спектральные характеристики $J(0,1)$ и $R(1,1)$ – относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$, а нестационарные спектральные характеристики $X_1(2,2)$, $X_{11}(2,2)$ и $\Phi^{<k>}(2,0)$, $k = 1, 2$, определены относительно базисной системы $\{q(i_0,t)p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$.

Как и в примерах 3.7 и 3.9, рассмотрим ситуацию, когда весовая функция $\rho(x)$ тождественно равна единице. В этом случае спектральная характеристика $R(1,1)$ оператора умножения на функцию $\rho(x)$ представляет собой двумерную единичную матрицу $E(1,1)$. Вследствие этого выражения для нестационарных спектральных характеристик можно упростить:

$$
\begin{aligned}
&M^{<k>}(1,0) = \big(E(1,1) \otimes J(0,1)\big) \cdot \big(X_1(2,2) \cdot \Phi^{<k>}(2,0)\big), \\
&D^{<k>}(1,0) = \big(E(1,1) \otimes J(0,1)\big) \cdot \big(X_{11}(2,2) \cdot \Phi^{<k>}(2,0)\big) - \\
&\quad - \big[V(1,2) \odot \mathsf{P}^{<k>}(1,0)\big]^{-1} \cdot \big(V(1,2) \odot M^{<k>}(1,0)\big) \cdot M^{<k>}(1,0), \\
&k = 1, 2.
\end{aligned}
$$

Для перехода от нестационарных спектральных характеристик $M^{<k>}(1,0)$ и $D^{<k>}(1,0)$ к функциям $m^{<k>}(t)$ и $D^{<k>}(t)$ используются формулы (3.59) и (3.60) соответственно с учетом обозначения $D^{<k>}(t)$ вместо $R^{<k>}(t)$ в одномерном случае. ■

Заметим, что, используя спектральную форму математического описания систем управления, можно получать не только взвешенные моментные характеристики вектора состояния, но и условные (см. разд. 3.1.4).

Методика расчета взвешенных моментных характеристик

Ниже приведены этапы, необходимые для расчета взвешенных моментных характеристик вектора состояния, при этом для представления функций $m_i^{<k>}(t)$ и $R_{ij}^{<k>}(t)$ используется базисная система $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, для представления линейного функционала $\mathcal{J}$ и оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$ – базисная система $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, а для представления операторов умножения на функции $a_i(t,x)=x_i$ и $a_{ij}(t,x)=x_ix_j$ – базисная система $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

1–6. Найти ненормированные плотности вероятности $\varphi^{<k>}(t,x)$ согласно методике, изложенной в разд. 3.2.1.

7–10. Найти вероятности $\mathbb{P}^{<k>}(t)$ активности структур, применяя методику расчета вероятностей $\mathbb{P}^{<k>}(t)$ и условных плотностей вероятности $\tilde{\varphi}^{<k>}(t,x)$, приведенную в разд. 3.2.2.

11. Записать выражения для определения взвешенных моментных характеристик вектора состояния:

$$m^{<k>}(t)=\begin{bmatrix} m_1^{<k>}(t)\\ m_2^{<k>}(t)\\ \vdots\\ m_n^{<k>}(t)\end{bmatrix},\quad R^{<k>}(t)=\begin{bmatrix} R_{11}^{<k>}(t) & R_{12}^{<k>}(t) & \ldots & R_{1n}^{<k>}(t)\\ R_{21}^{<k>}(t) & R_{22}^{<k>}(t) & \ldots & R_{2n}^{<k>}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ R_{n1}^{<k>}(t) & R_{n2}^{<k>}(t) & \ldots & R_{nn}^{<k>}(t)\end{bmatrix},$$

$$k=1,2,\ldots,N,$$

где

$$m_i^{<k>}(t)=\int_{\mathbb{R}^n} x_i\varphi^{<k>}(t,x)\,dx,\quad i=1,2,\ldots,n, \tag{XXIII}$$

$$R_{ij}^{<k>}(t)=\int_{\mathbb{R}^n} x_ix_j\varphi^{<k>}(t,x)\,dx-\frac{m_i^{<k>}(t)\,m_j^{<k>}(t)}{\mathbb{P}^{<k>}(t)}, \tag{XXIV}$$

$i,j=1,2,\ldots,n.$

12. Вычислить:

а) спектральные характеристики:

1) $J(0,n)$ – спектральную характеристику функционала $\mathcal{J}$ (см. разд. 1.5.1);
2) $R(n,n)$ – спектральную характеристику оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$ (см. разд. 1.4.2);

б) нестационарные спектральные характеристики:

1) $X_i(n+1,n+1)$ – нестационарную спектральную характеристику оператора умножения на функцию $a_i(t,x) = x_i$ (см. разд. 1.4.2), $i = 1,2,\ldots,n$;
2) $X_{ij}(n+1,n+1)$ – нестационарную спектральную характеристику оператора умножения на функцию $a_{ij}(t,x) = x_i x_j$ (см. разд. 1.4.2), $i,j = 1,2,\ldots,n$;

в) нестационарную спектральную характеристику $V(1,2)$ множительного звена (см. разд. 1.4.2).

13. Найти нестационарные спектральные характеристики $M_i^{<k>}(1,0)$ функций $m_i^{<k>}(t)$, используя формулу

$$
\begin{aligned}
&M_i^{<k>}(1,0) = \big(E(1,1) \otimes J(0,n)\big) \cdot \\
&\quad \cdot \Big(\big(E(1,1) \otimes R^{-1}(n,n)\big) \cdot X_i(n+1,n+1) \cdot \Phi^{<k>}(n+1,0)\Big), \qquad \text{(XXV)} \\
&i = 1,2,\ldots,n, \quad k = 1,2,\ldots,N,
\end{aligned}
$$

и нестационарные спектральные характеристики $R_{ij}^{<k>}(1,0)$ функций $R_{ij}^{<k>}(t)$, используя выражение

$$
\begin{aligned}
&R_{ij}^{<k>}(1,0) = \big(E(1,1) \otimes J(0,n)\big) \cdot \\
&\quad \cdot \Big(\big(E(1,1) \otimes R^{-1}(n,n)\big) \cdot X_{ij}(n+1,n+1) \cdot \Phi^{<k>}(n+1,0)\Big) - \\
&\quad - \big[V(1,2) \odot \mathsf{P}^{<k>}(1,0)\big]^{-1} \cdot \big(V(1,2) \odot M_i^{<k>}(1,0)\big) \cdot M_j^{<k>}(1,0), \quad \text{(XXVI)} \\
&i,j = 1,2,\ldots,n, \quad k = 1,2,\ldots,N.
\end{aligned}
$$

14. Получить функции $m_i^{<k>}(t)$ и $R_{ij}^{<k>}(t)$ по найденным нестационарным спектральным характеристикам $M_i^{<k>}(1,0)$ и $R_{ij}^{<k>}(1,0)$ соответственно, применяя формулы обращения

$$
m_i^{<k>}(t) = \sum_{i_0=0}^{\infty} m_{i i_0}^{<k>} \cdot q(i_0,t), \qquad \text{(XXVII)}
$$

$$
i = 1,2,\ldots,n, \quad k = 1,2,\ldots,N,
$$

где $m_{i\,i_0}^{<k>}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $M_i^{<k>}(1,0)$, $t \in T$;

$$R_{ij}^{<k>}(t) = \sum_{i_0=0}^{\infty} r_{ij\,i_0}^{<k>} \cdot q(i_0, t), \qquad \text{(XXVIII)}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

где $r_{ij\,i_0}^{<k>}$ – координаты нестационарной спектральной характеристики $R_{ij}^{<k>}(1,0)$, $t \in T$.

Замечание 3.13. При задании порядков усечения спектральных характеристик (см. замечания 3.9 и 3.10) соотношения (XXVII) и (XXVIII) записываются следующим образом:

$$m_i^{<k>}(t) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} m_{i\,i_0}^{<k>} \cdot q(i_0, t),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

где $m_{i\,i_0}^{<k>}$ – элементы матрицы-столбца $M_i^{<k>}(1,0)$, $t \in T$;

$$R_{ij}^{<k>}(t) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} r_{ij\,i_0}^{<k>} \cdot q(i_0, t),$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

где $r_{ij\,i_0}^{<k>}$ – элементы матрицы-столбца $R_{ij}^{<k>}(1,0)$, $t \in T$.

Пример 3.12. Найти математическое ожидание состояния одномерной стохастической системы с двумя структурами, рассмотренной в примере 3.5.

□ Найдем математическое ожидание $m(t)$ состояния одномерной стохастической системы с двумя структурами по формуле

$$m(t) = m^{<1>}(t) + m^{<2>}(t),$$

где $m^{<1>}(t)$ и $m^{<2>}(t)$ – взвешенные математические ожидания состояния системы (см. разд. 3.1.4).

Функции $m^{<1>}(t)$ и $m^{<2>}(t)$ определим по методике расчета взвешенных моментных характеристик.

1–10. При решении примера 3.5 были найдены обобщенные характеристические функции $\Phi^{<1>}(2,0)$ и $\Phi^{<2>}(2,0)$, т.е. нестационарные спектральные характеристики функций $\varphi^{<1>}(t,x)$ и $\varphi^{<2>}(t,x)$, определенные относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0,t)\hat{\Phi}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2(Q_T; \nu(t)\rho(x))$, где $Q_T = T \times \mathbb{R}$.

11. Выражения для взвешенных моментов $m^{<1>}(t)$ и $m^{<2>}(t)$ задаются следующим образом (см. пример 3.11):

$$m^{<1>}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} x\varphi^{<1>}(t,x)\,dx,$$

$$m^{<2>}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} x\varphi^{<2>}(t,x)\,dx.$$

12. Спектральная характеристика $J(0,1)$ функционала $\mathcal{J}$, ставящего в соответствие функции одной переменной интеграл от этой функции по пространству $\mathbb{R}$, и спектральная характеристика $R(1,1)$ оператора умножения на весовую функцию $\rho(x) \equiv 1$ были найдены в ходе решения примера 3.8, поэтому сразу перейдем к вычислению нестационарной спектральной характеристики $X_1(2,2)$ оператора умножения на функцию $a_1(t,x) = x$, определенной относительно базисной системы

$$\{\hat{P}(i_0,t)\,\hat{\Phi}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}.$$

Так, в разд. 2.2.3 показано (см. замечание 2.10 и пример 2.10), что нестационарная спектральная характеристика $X_1(2,2)$ представляется в виде

$$X_1(2,2) = E(1,1) \otimes A(1,1),$$

где $A(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a(x) = x$, вычисленная относительно системы функций Эрмита (см. примеры спектральных характеристик оператора умножения на функцию $a(x) = x$ в разд. 1.4.2).

13. Найдем нестационарные спектральные характеристики $M^{<1>}(1,0)$ и $M^{<2>}(1,0)$ функций $m^{<1>}(t)$ и $m^{<2>}(t)$ соответственно, используя (XXV):

$$M^{<1>}(1,0) =$$
$$= \big(E(1,1) \otimes J(0,1)\big) \cdot \Big(\big(E(1,1) \otimes R^{-1}(1,1)\big) \cdot X_1(2,2) \cdot \Phi^{<1>}(2,0)\Big),$$
$$M^{<2>}(1,0) =$$
$$= \big(E(1,1) \otimes J(0,1)\big) \cdot \Big(\big(E(1,1) \otimes R^{-1}(1,1)\big) \cdot X_1(2,2) \cdot \Phi^{<2>}(2,0)\Big).$$

Так как спектральная характеристика $R(1,1)$ представляет собой единичную матрицу (см. пример 3.8), получаем

$$M^{<1>}(1,0) = \big(E(1,1) \otimes J(0,1)\big) \cdot \big(X_1(2,2) \cdot \Phi^{<1>}(2,0)\big),$$
$$M^{<2>}(1,0) = \big(E(1,1) \otimes J(0,1)\big) \cdot \big(X_1(2,2) \cdot \Phi^{<2>}(2,0)\big),$$

при этом

$$M^{<1>}(1,0) = (m_{i_0}^{<1>}), \quad M^{<2>}(1,0) = (m_{i_0}^{<2>}),$$

где

$$m_{i_0}^{<1>} = \big(q(i_0,t), m^{<1>}(t)\big)_{L_2(T)} = \int\limits_0^1 \hat{P}(i_0,t) m^{<1>}(t)\,dt,$$

$$m_{i_0}^{<2>} = \big(q(i_0,t), m^{<2>}(t)\big)_{L_2(T)} = \int\limits_0^1 \hat{P}(i_0,t) m^{<2>}(t)\,dt,$$

$$i_0 = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

14. Запишем выражения для взвешенных математических ожиданий $m^{<1>}(t)$ и $m^{<2>}(t)$, используя формулу обращения (XXVII):

$$m^{<1>}(t) = \mathbb{S}^{-1}\left[M^{<1>}(1,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty} m_{i_0}^{<1>} \cdot \hat{P}(i_0,t),$$

$$m^{<2>}(t) = \mathbb{S}^{-1}\left[M^{<2>}(1,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty} m_{i_0}^{<2>} \cdot \hat{P}(i_0,t),$$

где $m_{i_0}^{<1>}$ и $m_{i_0}^{<2>}$ – координаты нестационарных спектральных характеристик $M^{<1>}(1,0)$ и $M^{<2>}(1,0)$ соответственно, $t \in T$.

Отметим, что в результате задания порядка усечения спектральных характеристик (см. замечание 3.13 и пример 3.5) функции $m^{<1>}(t)$ и $m^{<2>}(t)$ приближенно описываются выражениями

$$m^{<1>}(t) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} m_{i_0}^{<1>} \cdot \hat{P}(i_0,t), \quad m^{<2>}(t) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} m_{i_0}^{<2>} \cdot \hat{P}(i_0,t),$$

где $m_{i_0}^{<1>}$ и $m_{i_0}^{<2>}$ – элементы матриц-столбцов $M^{<1>}(1,0)$ и $M^{<2>}(1,0)$ соответственно, $t \in T$, $L_0 = 12$.

Таким образом, по известным функциям $m^{<1>}(t)$ и $m^{<2>}(t)$ можно получить решение задачи, т.е. математическое ожидание $m(t)$ состояния системы.

Графики функции $m^{<1>}(t)$, $m^{<2>}(t)$ и $m(t) = m^{<1>}(t) + m^{<2>}(t)$ изображены на рис. 3.24. ■

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти решение уравнений обобщенных характеристических функций для стохастической системы с тремя структурами без использования операций агрегатирования и декомпозиции многомерных матриц.

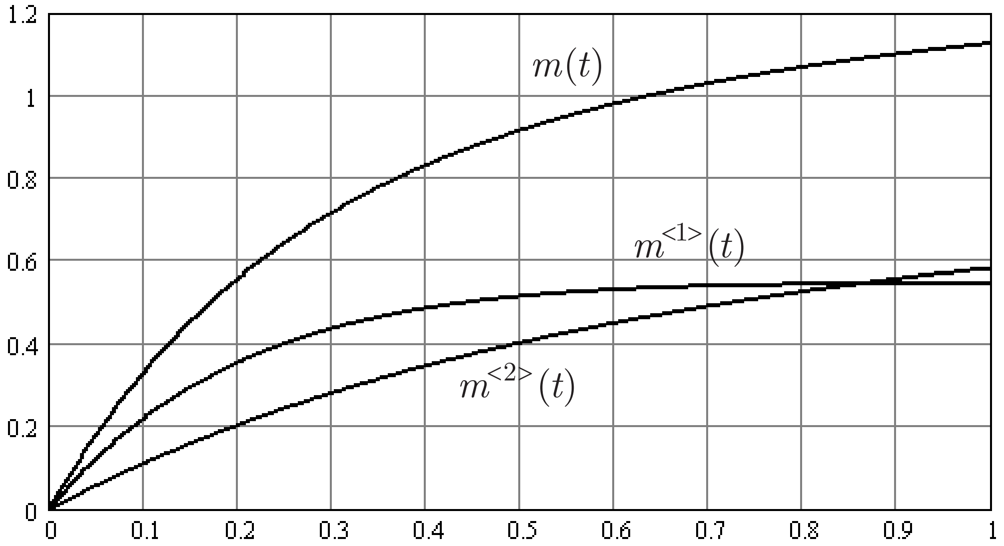

Рис. 3.24. Математическое ожидание состояния системы

2. Найти нестационарные спектральные характеристики вероятностей активности структур для четырехмерной стохастической системы с двумя структурами.

3. Найти нестационарные спектральные характеристики условных плотностей вероятности $\varphi^{<k>}_{(2|1)}(t, x_2 \mid x_1)$ для двумерной стохастической системы с тремя структурами.

4. Записать выражения для нестационарных спектральных характеристик взвешенных моментов вектора состояния двумерной стохастической системы с двумя структурами.

5. Решить задачу анализа одномерной стохастической системы с двумя структурами, заданной уравнениями Ито

$$dX(t) = -F(X(t))\,dt + \sigma\,dW(t) \qquad \text{(первая структура)},$$

$$dX(t) = \sigma\,dW(t) \qquad \text{(вторая структура)},$$

где $t \in T = [0, 1]$, $X \in \mathbb{R}$, функция $F(x)$ задается выражением

$$F(x) = \begin{cases} n, \ x > 0.1, \\ 0, \ |x| \leqslant 0.1, \\ -n, \ x < -0.1, \end{cases}$$

$\sigma = 0.25$, $W(t)$ – одномерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от начального состояния $X_0 = X(0)$. Распределение X_0 является гауссовским с параметрами $m_0 = 0$ и $D_0 = 2$. В начальный момент времени активна первая структура.

Интенсивность перехода из первой структуры во вторую постоянна и равна $\lambda = 1$, обратный переход невозможен. Восстановление реализаций случайного процесса $X(t)$ точное.

Найти вероятности активности структур и моментные характеристики состояния системы.

6. Решить задачу анализа одномерной стохастической системы с двумя структурами, заданной уравнениями Ито

$$dX(t) = -X(t)\,dt + dW(t) \qquad \text{(первая структура)},$$

$$dX(t) = -2X(t)\,dt + dW(t) \qquad \text{(вторая структура)},$$

где $t \in T = [0, 2]$, $X \in \mathbb{R}$, $W(t)$ – одномерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от начального состояния $X_0 = X(0)$. Распределение X_0 является гауссовским с параметрами $m_0 = n$ и $D_0 = 1$. В начальный момент времени активна вторая структура.

Интенсивность перехода из первой структуры во вторую постоянна и равна $\lambda_{12} = 1$, интенсивность обратного перехода также постоянна и равна $\lambda_{21} = 2$. Восстановление реализаций случайного процесса $X(t)$ точное.

Найти вероятности активности структур и моментные характеристики состояния системы.

7. Решить задачу анализа двумерной стохастической системы с двумя структурами, заданной уравнениями Ито

$$dX_1(t) = \big(X_2(t) + b^{<k>} X_1(t)\big)dt + dW(t), \quad X_1(0) = X_{10},$$

$$dX_2(t) = 0, \quad X_2(0) = X_{20}, \quad k = 1, 2, \quad b^{<k>} = 2 - k,$$

где $t \in T = [0, 1]$, $X_1, X_2 \in \mathbb{R}$, $W(t)$ – одномерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от начального состояния $X_0 = [X_{10}\ X_{20}]^{\mathrm{T}}$, X_{10} и X_{20} – независимые случайные величины, имеющие стандартное гауссовское распределение. В начальный момент времени активна первая структура.

Интенсивности переходов из первой структуры во вторую и из второй в первую определяются функциями

$$\lambda_{12}(t, x_1, x_2) = 0.2 \quad \text{и} \quad \lambda_{21}(t, x_1, x_2) = 0.1$$

соответственно. Восстановление реализаций случайного процесса $X(t) = [X_1(t)\ X_2(t)]^{\mathrm{T}}$ точное.

Найти вероятности активности структур и ненормированные маргинальные плотности вероятности.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аверина Т.А.* Метод Монте-Карло для анализа динамики нелинейных систем со случайной структурой // Тр. конф. «Идентификация систем и задачи управления SICPRO'03». – М.: ИПУ, 2003. – С. 2106–2121.

2. *Аверина Т.А.* Статистический анализ систем с переменной структурой управления // Тр. конф. «Идентификация систем и задачи управления SICPRO'04». – М.: ИПУ, 2004. – С. 490–501.

3. *Антосик П.*, *Микусинский Я.*, *Сикорский Р.* Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. – М.: Мир, 1976. – 312 с.

4. *Артемьев В.М.* Теория динамических систем со случайными изменениями структуры. – Минск: Вышэйшая школа, 1979. – 160 с.

5. *Артемьев В.М.*, *Ганэ В.А.*, *Степанов В.Л.* Управление в системах с разделением времени. – Минск: Вышэйшая школа, 1982. – 223 с.

6. *Балакришнан А.В.* Прикладной функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 382 с.

7. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Ч. II. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1966. – 295 с.

8. *Бортаковский А.С.*, *Пантелеев А.В.* Линейная алгебра в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2005. – 591 с.

9. *Бортаковский А.С.*, *Пантелеев А.В.* Аналитическая геометрия в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2005. – 496 с.

10. *Бухалев В.А.* Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скачкообразной структурой. – М.: Физматлит, 1996. – 288 с.

11. *Виноградов В.И.* СПЕКТР – интегрированная проблемно-ориентированная система моделирования // Информатика. Автоматизация проектирования. – М.: ВИМИ, 1992. Вып. 2–3. – С. 50–56.

12. *Вулих Б.З.* Введение в функциональный анализ. – М.: Наука, 1967. – 416 с.

13. *Галанина Е.Н.* Инструментальные средства обеспечения этапа алгоритмизации расчета систем управления спектральным методом // Информатика. Автоматизация проектирования. – М.: ВИМИ, 1992. Вып. 2–3. – С. 57–60.

14. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

15. *Ганэ В.А.*, *Куклев Е.А.*, *Степанов В.Л.* Системы управления при скачкообразных воздействиях. – Минск: Наука и техника, 1985. – 216 с.

16. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986. – 526 с.

17. *Гнеденко Б.В.*, *Беляев Ю.К.*, *Соловьев А.Д.* Математические методы в теории надежности. Основные характеристики надежности и их статистический анализ. – М.: Наука, 1965. – 524 с.

18. *Гришин В.Н.*, *Дятлов В.А.*, *Милов Л.Т.* Модели, алгоритмы и устройства идентификации сложных систем. – Л.: Энергоатомиздат, 1985. – 104 с.

19. *Гурман В.И.* Вырожденные задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1977. – 304 с.

20. *Джексон Д.* Ряды Фурье и ортогональные полиномы. – М.: ГИИЛ, 1948. – 260 с.

21. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. – М.: Наука, 1967. – 336 с.

22. *Иванов В.К.*, *Васин В.В.*, *Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978. – 206 с.

23. *Казаков И.Е.* Статистическая динамика систем с переменной структурой. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

24. *Казаков И.Е.* Стохастические системы со случайной сменой структуры // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1989. № 1. – С. 58–78.

25. *Казаков И.Е.*, *Артемьев В.М.* Оптимизация динамических систем случайной структуры. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

26. *Казаков И.Е.*, *Артемьев В.М.*, *Бухалев В.А.* Анализ систем случайной структуры. – М.: Физматлит, 1993. – 272 с.

27. *Казаков И.Е.*, *Мальчиков С.В.* Анализ стохастических систем в пространстве состояний. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

28. *Киреев В.И.*, *Пантелеев А.В.* Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2006. – 480 с.

29. *Колмогоров А.Н.*, *Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.

30. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1978. – 832 с.

31. *Красовский А.А.* Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. – М.: Наука, 1974. – 232 с.

32. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – М.: Физматгиз, 1960. – 471 с.

33. *Ладыженская О.А.*, *Солонников В.А.*, *Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

34. *Лапин С.В.*, *Егупов Н.Д.* Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 496 с.

35. *Лысенко Л.Н.*, *Нгуен Танг Кыонг.* Теоретические и прикладные аспекты синтеза мультиструктурных схем рекуррентной обработки информации в навигационных системах летательных аппаратов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1997. № 6. – С. 38–48.

36. *Миллер Б.М.*, *Панков А.Р.* Теория случайных процессов. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.

37. *Никитин Н.Н.* Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений при наличии поглощающих границ // Автоматика и телемеханика. – 1988. № 5. – С. 71–80.

38. *Пантелеев А.В.* Вариационное исчисление в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2006. – 272 с.

39. *Пантелеев А.В.*, *Бортаковский А.С.* Теория управления в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2003. – 583 с.

40. *Пантелеев А.В.*, *Летова Т.А.* Методы оптимизации в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2005. – 544 с.

41. *Пантелеев А.В.*, *Семенов В.В.* Синтез оптимальных систем управления при неполной информации. – М.: Издательство МАИ, 1992. – 192 с.

42. *Пантелеев А.В.*, *Сотскова И.Л.* Приближенный метод синтеза оптимальных стохастических систем при неполной информации // Проблемы математики в физико-технических и экономических задачах: Межвед. сб. науч. тр. – М.: МФТИ, 1993. – С. 135–142.

43. *Пантелеев А.В.*, *Якимова А.С.* Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2001. – 445 с.

44. *Пантелеев А.В.*, *Якимова А.С.*, *Босов А.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2001. – 376 с.

45. *Пугачев В.С.* Лекции по функциональному анализу: Учебное пособие. – М.: Издательство МАИ, 1996. – 744 с.

46. *Пугачев В.С.*, *Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. – 632 с.

47. *Рыбаков К.А.* Программное обеспечение спектральных преобразований Spectrum // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2003. № 14. – http://www.mai.ru.

48. *Рыбаков К.А.* Спектральные характеристики линейных функционалов и их приложения к анализу и синтезу стохастических систем управления // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2005. № 18. – http://www.mai.ru.

49. *Рыбаков К.А.* Оптимальное управление системами со случайной структурой при неполной информации о состоянии // Тр. конф. «Проблемы управления и приложения (техника, производство, экономика)». Т. 2. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2005. – С. 144–149.

50. *Рыбаков К.А.*, *Сотскова И.Л.* Алгоритм анализа многомерных стохастических непрерывно-дискретных систем спектральным методом // Теоретические вопросы вычислительной техники и программного обеспечения: Межвуз. сб. науч. тр. – М.: МИРЭА, 2003. – С. 81–89.

51. *Рыбаков К.А.*, *Сотскова И.Л.* Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2004. № 16. – http://www.mai.ru.

52. *Рыбаков К.А.*, *Сотскова И.Л.* Спектральный метод анализа нелинейных систем со случайной структурой // Авиакосмическое приборостроение. – 2006. № 2. – С. 12–16.

53. *Рыбин В.В.* Принципы построения и семантические особенности программной системы спектрального метода анализа систем управления ЛА // Семантическое программирование в автоматизированном проектировании систем управления летательными аппаратами: Тем. сб. науч. тр. – М.: МАИ, 1985. – С. 52–59.

54. *Рыбин В.В.* Описание сигналов и линейных нестационарных систем управления в базисах вейвлетов и их анализ в вычислительных средах: Учебное пособие. – М.: Издательство МАИ, 2003. – 96 с.

55. *Рыбин В.В.* Разработка и применение пакета расширения Spektr_SM пакета Simulink СКМ Matlab: Учебное пособие. – М.: Издательство МАИ, 2004. – 91 с.

56. *Рыбин В.В.* Разработка и применение пакета расширения Spektr_SM системы VisSim+Mathcad // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2004. № 17. – http://www.mai.ru.

57. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.

58. *Семенов В.В.* Спектральный анализ и синтез линейных систем с переменными параметрами на конечных нестационарных интервалах времени // Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования / Под ред. В.В. Солодовникова. Кн. 3, ч. 1. Теория нестационарных, нелинейных и самонастраивающихся систем автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1969. – С. 136–196.

59. *Семенов В.В.* Спектральный метод анализа нестационарных стохастических систем // Известия вузов. Приборостроение. – 1970. Т. XIII. № 2. – С. 37–42.

60. *Семенов В.В.* Уравнение обобщенной характеристической функции вектора состояния систем автоматического управления // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. науч. сб. – Саратов: СПИ, 1977. Вып. 2. – С. 3–36.

61. *Семенов В.В.* Синтез алгоритмов управления нелинейными системами при случайных воздействиях с ограниченным составом точных измерений // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. науч. сб. – Саратов: СПИ, 1978. Вып. 3. – С. 3–20.

62. *Семенов В.В.* Принципы организации математического обеспечения САПР динамики систем управления с диалоговыми формирователями программ // Переработка информации в задачах управления: Тем. сб. науч. тр. – М.: МАИ, 1980. – С. 4–14.

63. *Семенов В.В.*, *Пантелеев А.В.*, *Руденко Е.А.*, *Бортаковский А.С.* Методы описания, анализа и синтеза нелинейных систем управления. – М.: Издательство МАИ, 1993. – 312 с.

64. *Семенов В.В.*, *Рыбин В.В.* Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом: Учебное пособие. – М.: МАИ, 1984. – 84 с.

65. *Семенов В.В.*, *Сивцов В.И.* Обобщение спектрального метода анализа нестационарных систем на конечных интервалах времени на нелинейные системы // Известия вузов. Приборостроение. – 1969. Т. XII. № 12. – С. 63–68.

66. *Семенов В.В.*, *Солодовников В.В.* Спектральный анализ линейных систем с переменными параметрами на конечных нестационарных интервалах времени // Автоматика и телемеханика. – 1968. № 11. – С. 14–23.

67. *Скляревич А.Н.* Надежность систем с накоплением нарушений. – Рига: Зинатне, 1969. – 210 с.

68. *Скляревич А.Н.* Введение в статистическую динамику систем с возможными нарушениями. – Рига: Зинатне, 1973. – 260 с.

69. *Соколов Н.П.* Введение в теорию многомерных матриц. – Киев: Наукова думка, 1972. – 175 с.

70. *Солодовников В.В.*, *Дмитриев А.Н.*, *Егупов Н.Д.* Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. — М.: Машиностроение, 1986. — 440 с.

71. *Солодовников В.В.*, *Семенов В.В.* Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974. – 336 с.

72. *Солодовников В.В.*, *Семенов В.В.* Спектральный метод расчета нестационарных систем управления летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1975. – 272 с.
73. *Солодовников В.В.*, *Семенов В.В.*, *Пешель М.*, *Недо Д.* Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. – М.: Машиностроение, 1979. – 664 с.
74. *Сотскова И.Л.* Семантичекая модель анализа стохастических систем управления ЛА // Семантическое программирование в автоматизированном проектировании систем управления летательными аппаратами: Тем. сб. науч. тр. – М.: МАИ, 1985. – С. 59–68.
75. *Сотскова И.Л.* Применение аппарата обобщенной характеристической функции к анализу стохастических систем управления ЛА // Задачи стохастического управления: Тем. сб. науч. тр. – М.: МАИ, 1986. – С. 71–78.
76. *Сотскова И.Л.* Исследование корректности краевых задач для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова в классе обобщенных характеристических функций // Новые задачи оптимизации авиационных систем: Тем. сб. науч. тр. – М.: МАИ, 1989. – С. 26–33.
77. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.
78. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
79. *Суетин П.К.* Ортогональные многочлены по двум переменным. – М.: Наука, 1988. – 384 с.
80. Таблицы и математическое обеспечение спектрального метода теории автоматического управления / Под ред. В.В. Семенова. – М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1973. – 106 с.
81. Теория систем с переменной структурой / Под ред. С.В. Емельянова. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
82. *Тихонов А.Н.*, *Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
83. *Тихонов В.И.*, *Миронов М.А.* Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.
84. *Уткин В.И.* Системы с переменной структурой: состояние проблемы, перспективы // Автоматика и телемеханика. – 1983. № 9. – С. 5–25.
85. *Федосов Е.А.*, *Инсаров В.В.*, *Селивохин О.С.* Системы управления конечным положением в условиях противодействия среды. – М.: Наука, 1989. – 272 с.
86. *Формалев В.Ф.*, *Ревизников Д.Л.* Численные методы. – М.: Физматлит, 2004. – 398 с.

87. *Шайкин М.Е.* Бескоординатный подход к методу моментов в теории многомерных стохастических систем // Автоматика и телемеханика. – 2002. № 5. – С. 81–91.

88. *Di Paola M.*, *Sofi A.* Approximate solution of the Fokker–Planck–Kolmogorov equation // Probabilistic Engineering Mechanics. – 2002. V. 17. № 4. – P. 369–384.

89. *Fok J.*, *Guo B.*, *Tang T.* Combined Hermite spectral-finite difference method for the Fokker–Planck equation // Mathematics of computation. – 2001. V. 71. № 240. – P. 1497–1528.

90. *Ghosh M.K.*, *Arapostathis A.*, *Marcus S.I.* Ergodic control of switching diffusions // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1997. V. 35. № 6. – P. 1952–1988.

91. *Kontorovitch V.* Pontryagin equations for non-linear dynamic systems with random structure // Nonlinear Analysis. – 2001. V. 47. № 3. – P. 1501–1512.

92. *Liberzon D.*, *Brockett R.W.* Spectral analysis of Fokker–Planck and related operators arising from linear stochastic differential equations // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2000. V. 38. № 5. – P. 1453–1467.

93. *Risken H.* The Fokker–Planck equation: Methods of solution and applications. – New York: Springer-Verlag, 1996. – 472 p.

94. *Semenov V.V.*, *Sotskova I.L.* The spectral method for solving Fokker–Planck–Kolmogorov equation for stochastic control system analysis // Second IFAC symposium on stochastic control. Preprints, part 1. – 1986. – P. 131–136.

95. *Ulyanov S.V.*, *Feng M.*, *Ulyanov V.S.*, *Yamafuji K.*, *Fukuda T.*, *Arai F.* Stochastic analysis of time-variant nonlinear dynamic systems // Probabilistic Engineering Mechanics. – 1998. V. 13. № 3. – P. 183–226.

96. *Wei G.W.* A unified approach for the solution of the Fokker–Planck equation // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2000. V. 33. – P. 4935–4953.