ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2006
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Фильтрация и идентификация

ТИПИЧНАЯ РАЗЛИЧИМОСТЬ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО НАБЛЮДЕНИЮ ТРАЕКТОРИЙ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

П.Ю.ШЛЯГО

Россия, 197376, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, д. 5,
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»,
кафедра Высшей математики — 1,
e-mail: nick@bodunov.usr.etu.spb.ru

Аннотация.

Получены условия, при которых различимость фиксированной системы дифференциальных уравнений, моделирующей некоторый сложный процесс, по фиксированному численному методу обеспечивается типичным измеряющим устройством.

1 Введение

Основными математическими моделями сложных процессов являются нелинейные системы дифференциальных уравнений, траектории которых моделируют динамику изучаемых процессов. Работа измеряющих устройств моделируется отображениями фазового пространства в евклидово пространство некоторой размерности.

Различимость по наблюдению означает, что различные траектории отображаются измеряющими устройствами на несовпадающие множества пространства измерений. Так как основным методом практического исследования нелинейных систем дифференциальных уравнений является их численное интегрирование, важной проблемой является проблема различимости нелинейных систем дифференциальных уравнений по наблюдению траекторий численных методов.

В данной работе получены условия, при которых различимость фиксированной системы дифференциальных уравнений по фиксированному численному методу обеспечивается типичным измеряющим устройством.

2 Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим гладкое многообразие X класса гладкости C^l, где l достаточно велико, и систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x),\ x \in X. \tag{1}$$

Пусть $F \in \mathscr{X}^r, r \geq 1$, где $\mathscr{X}^r$ — пространство всех векторных полей класса C^r, определенных на X. Пусть $H \in \mathscr{C}^r(X, \mathbb{R}^k)$, где $\mathscr{C}^r(X, \mathbb{R}^k)$ — пространство всех отображений класса C^r из X в $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$. В $\mathscr{C}^r(X, \mathbb{R}^k)$ введем C^r-топологию Уитни [1].

Через $\phi(t, x)$ обозначим решение системы (1) с начальными данными $t_0 = 0,\ x_0 = x$. Предположим для определенности, что все решения рассматриваемых систем продолжимы для всех $t \in \mathbb{R}$.

Будем говорить, что пара (F, H) различима на множестве $Y \subset X$ по конечному набору точек $P = \{t_1, \dots, t_n\},\ 0 \leq t_1 < \dots < t_n$, если для любых точек $x, y \in Y$, $x \neq y$, существует такой индекс $i \in \{1, \dots, n\}$, что

$$H(\phi(t_i, x)) \neq H(\phi(t_i, y)).$$

Данное определение обобщает соответствующее определение из работы [3] (в котором $Y = X$) на случай $k > 1$. Приведем результат, полученный в работе [3], переформулированный в наших обозначениях.

Теорема 1. *При фиксированных векторном поле F и числе $T > 0$ множество таких отображений $H \in \mathscr{C}^r(X, \mathbb{R})$, что пара (F, H) различима на многообразии X по набору точек P, открыто и плотно в $\mathscr{C}^r(X, \mathbb{R})$ почти* *для любого набора P из $2n+1$ точки $0 \le t_i \le T$, где n — размерность многообразия X.*

Пусть dist — риманова метрика на многообразии X, обозначим через $\mathbb{R}_+$ множество положительных чисел.

Будем называть гладким численным методом класса C^m и степени p диффеоморфизм

$$\Phi:\ \mathbb{R}_+ \times X \to X$$

класса C^m $(m \ge 1,\ p \ge 0)$, аппроксимирующий решения ϕ системы (1) в следующем смысле: для любого ограниченного подмножества $Y \subset X$ существует такая константа $C(Y)$, что

$$\mathrm{dist}\,(\Phi(h,x), \phi(h,x)) \le C(Y)h^{p+1}$$

для всех $h > 0$ и $x \in Y$.

Как обычно, будем обозначать

$$\Phi^l(h,x) = \Phi(h, \Phi(h, \dots \Phi(h,x) \dots)), \tag{2}$$

где справа в формуле (2) функциональный знак Φ повторяется l раз.

Будем полагать $\Phi^0(h,x) = x$ для всех h и x.

Рассмотрим для системы (1) гладкий численный метод Φ с шагом $h > 0$.

Фиксируем некоторое натуральное число N. Назовем пару (F,H) различимой на множестве $Y \subset X$ по численному методу Φ за N шагов, если для любой пары точек (x,y), $x \ne y$, $x,y \in Y$, существует такое натуральное число $n \le N$, что

$$H(\Phi^n(h,x)) \ne H(\Phi^n(h,y)).$$

Наша цель — доказать аналог теоремы 1 для различимости по численному методу и для случая $k > 1$. Отметим, что в случае «точного» численного метода $\Phi^i(h,x) = \phi(ih,x)$ наш результат обобщает теорему 1 на случай $k > 1$.

Рассмотрим систему (1) в $\mathbb{R}^n$. Пусть K_0 — такое открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, что K_0 положительно инвариантно относительно системы (1), т. е.

$$\phi(t,x) \in K_0 \text{ при } x \in K_0,\ t \ge 0.$$

Подобные множества часто рассматривают, например, при изучении аттракторов автономных систем [1].

Кроме того, предположим, что

$$F(x) \neq 0 \text{ при } x \in K = \overline{K_0}. \tag{3}$$

Заметим, что компакт K имеет размерность n.

Основной результат работы — следующее утверждение.

Теорема 2. *Для фиксированного векторного поля F класса гладкости C^2, обладающего свойством (3), C^r-гладкого ($r \geq 1$) численного метода Φ степени 1 и числа $N = \left[\frac{2n}{k}\right] + 1$, где $[\,\cdot\,]$ — целая часть числа, существует такое $h_0 > 0$, что множество таких функций $H \in \mathscr{C}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, для которых пара (F, H) различима по численному методу Φ с шагом $h \leq h_0$ за N шагов на компакте K, является множеством второй категории по Бэру в $\mathscr{C}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$.*

Под множеством второй категории по Бэру в некотором топологическом пространстве Q подразумевается множество $G \subset Q$, для которого существует такой счетный набор открытых и плотных в Q подмножеств $\{Y_i\}$, $Y_i \subset Q$, что

$$\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} Y_i \subset G.$$

Будем говорить, что некоторое свойство (+) является типичным для элементов пространства Q, если множество элементов, обладающих свойством (+), является множеством второй категории по Бэру в Q.

3 Вспомогательные утверждения о трансверсальности гладких отображений

Пусть A, Y, Z — многообразия класса C^r, и $\mathscr{C}^r(Y, Z)$ — пространство отображений класса C^r из Y в Z. Отображение $\rho : A \to \mathscr{C}^r(Y, Z)$ называется C^r-представлением, если разрешающее отображение

$$ev_\rho : A \times Y \to Z,$$

где $ev_\rho(a, y) = \rho(a)(y)$, является отображением класса C^r из $A \times Y$ в Z. Далее будем использовать обозначение ρ_a вместо $\rho(a)$, т. е. будем рассматривать отображение $\rho_a : Y \to Z$ класса C^r.

Пусть K, M — гладкие многообразия, $L \subset M$ — гладкое подмногообразие, а $g : K \to M$ — некоторое гладкое отображение. Рассмотрим произвольную точку $p \in K$. Через T_pK обозначим касательное пространство в точке p к многообразию K, аналогично будем обозначать и остальные касательные пространства.

Будем говорить, что отображение g трансверсально к подмногообразию L в точке p (обозначение: $g \pitchfork_p L$), если выполнено одно из двух условий:

1. $g(p) \notin L$;
2. $g(p) \in L$ и $Dg(p)T_pK + T_{g(p)}L = T_{g(p)}M$,

где $Dg(p) : T_pK \to T_{g(p)}M$ — дифференциал отображения g в точке p.

Дополнительно будем говорить, что отображение g трансверсально к подмногообразию L (обозначение: $g \pitchfork L$), если g трансверсально к L в любой точке $p \in K$.

Для дальнейшего изложения нам понадобится теорема плотности из книги [2], переформулированная в наших обозначениях.

Теорема 3. *Пусть A, Y, Z — многообразия класса C^r, W — подмногообразие Z. Рассмотрим множество $A_W \subset A$, где*

$$A_W = \{a \in A : \rho_a \pitchfork W\}.$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

1. *Y имеет конечную размерность l, а W имеет конечную коразмерность q в Z;*
2. *A и Y имеют счетные базы окрестностей топологий;*
3. *$r > \max\,(0,\, l - q)$;*
4. *$ev_\rho \pitchfork W$ (условие трансверсальности разрешающего отображения).*

Тогда A_W является множеством второй категории в A.

Пусть $f : Y \to Z$ — некоторое отображение. Будем говорить что отображение f инъективно, если образы любых двух точек $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$, различны, т. е. $f(y_1) \neq f(y_2)$.

Через $(f \times f)$ будем обозначать отображение из $Y \times Y$ в $Z \times Z$ вида

$$(f \times f)(y_1, y_2) = (f(y_1), f(y_2)), \quad y_1, y_2 \in Y.$$

Диагональю декартова произведения $Y \times Y$ будем называть множество

$$\Delta(Y \times Y) = \{(y, y) : \, y \in Y\}.$$

Очевидно, что отображение $f : Y \to Z$ инъективно тогда и только тогда, когда образ множества $Y \times Y \setminus \Delta(Y \times Y)$ при отображении

$$(f \times f) : Y \times Y \to Z \times Z$$

не пересекает $\Delta(Z \times Z)$.

Лемма 1. *Если*

$$\dim\, (Y \times Y) < \operatorname{codim}\, \Delta(Z \times Z) \tag{4}$$

и отображение

$$(f \times f) : \, Y \times Y \setminus \Delta(Y \times Y) \to Z \times Z$$

трансверсально к $\Delta(Z \times Z)$*, то отображение*

$$f : \, Y \to Z$$

инъективно.

Доказательство. Рассмотрим точку $(y_1, y_2) \in Y \times Y \setminus \Delta(Y \times Y)$ и покажем, что $f(y_1) \neq f(y_2)$.

Возможны два случая:

Случай 1. $(f \times f)(y_1, y_2) \notin \Delta(Z \times Z)$.

В этом случае очевидно $f(y_1) \neq f(y_2)$.

Случай 2. $(f \times f)(y_1, y_2) \in \Delta(Z \times Z)$.

По определению трансверсальности должно выполняться равенство

$$D(f \times f)(y_1, y_2) T_{(y_1, y_2)}(Y \times Y) + T_{(f \times f)(y_1, y_2)} \Delta(Z \times Z) = T_{(f \times f)(y_1, y_2)}(Z \times Z).$$

Случай 2 невозможен, так как

$$\dim\, T_{(f \times f)(y_1, y_2)}(Z \times Z) = \dim\, Z \times Z,$$

$$\dim\, D(f\times f)(y_1,y_2)T_{(y_1,y_2)}(Y\times Y)=\dim Y\times Y,$$

$$\dim\, T_{(f\times f)(y_1,y_2)}\Delta(Z\times Z)=\dim\,\Delta(Z\times Z)=\dim\,(Z\times Z)-\mathrm{codim}\,\Delta(Z\times Z),$$

а согласно условию (4) на размерности $\dim\,(Y\times Y)<\mathrm{codim}\,\Delta(Z\times Z)$.

$\blacksquare$

4 Доказательство основной теоремы

Из условия (3) следует, что существуют такие числа $\epsilon,\mu>0$, что

$$\|F(x)\|\ge\mu \tag{5}$$

при $x\in K'$, где K' — ϵ-окрестность компакта K.

Для погрешности численного метода Φ выполнена оценка

$$\|\Phi(h,x)-\phi(h,x)\|\le Ch^2,\quad x\in K',\ h>0, \tag{6}$$

где $C>0$ — некоторая константа. Для $N=\left[\frac{2n}{k}\right]+1$ определим разрешающее отображение

$$ev:\ \Delta(\mathscr{C}^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)\times\mathscr{C}^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k))\times(K\times K)\to\mathbb{R}^{Nk}\times\mathbb{R}^{Nk},$$

$$ev(H,H,x,y)=\left\{\begin{array}{c}H\circ\Phi(h,x)\\ \vdots\\ H\circ\Phi^N(h,x)\end{array}\right\},\left\{\begin{array}{c}H\circ\Phi(h,y)\\ \vdots\\ H\circ\Phi^N(h,y)\end{array}\right\}, \tag{7}$$

где $H\in\mathscr{C}^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k),\ x,y\in K$.

Очевидно, что отображение ev является C^r-гладким.

Отметим, что по определению различимость пары (F,H) по численному методу Φ за N шагов на компакте K эквивалентна инъективности отображения

$$\left\{\begin{array}{c}H\circ\Phi(h,x)\\ \vdots\\ H\circ\Phi^N(h,x)\end{array}\right\}.$$

Лемма 2. *Существует такое число $h_0>0$, что если шаг h численного метода Φ удовлетворяет условию $0<h<h_0$ и $x\in K$, то все точки $\Phi^m(h,x),\ m=1,\dots,N$, различны.*

Доказательство. Выберем такой достаточно малый шаг численного метода $h = h_1$, что

$$\Phi^l(h, x) \in K' \text{ при } x \in K,\ 0 \leq l \leq N.$$

Пусть L — константа Липшица векторного поля F на K'. Представим решение системы (1) в виде

$$\phi(h, x) = \phi(0, x) + h\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, x) + G(h, x) = x + hF(x) + G(h, x), \tag{8}$$

где $\|G(h, x)\| \leq C_1 h^2$ для $x \in K'$, а $C_1 > 0$ — некоторая константа.

Из (6) и (8) следует оценка

$$\|\Phi(h, x) - (x + hF(x))\| \leq (C + C_1)h^2,\ x \in K'. \tag{9}$$

Очевидно, что оценка (9) не зависит от точки x, следовательно,

$$\left\|\Phi^2(h, x) - (\Phi(h, x) + hF(\Phi(h, x)))\right\| \leq (C + C_1)h^2. \tag{10}$$

Заметим, что существует такая константа $T > 0$, что

$$\|\Phi(h, x) - x\| \leq hT,\ x \in K'. \tag{11}$$

Действительно,

$$\|\Phi(h, x) - x\| \leq \|\Phi(h, x) - \phi(h, x)\| + \|\phi(h, x) - x\|.$$

По теореме о среднем для любого $x \in K'$ существует такая точка $\theta(x) \in K'$, что

$$\|\phi(h, x) - x\| = \|\phi(h, x) - \phi(0, x)\| = \|F(\theta(x))\|h \leq T_0 h,$$

где T_0 — такая константа, что $\|F(x)\| \leq T_0$ для $x \in K'$.

Используя (6), получим

$$\|\Phi(h, x) - x\| \leq Ch^2 + T_0 h,\ x \in K'$$

и выберем такую константу T, что $Th \geq Ch^2 + T_0 h$ для достаточно малых значений h.

Из (11) следует, что справедлива оценка

$$\|hF(\Phi(h, x)) - hF(x)\| \leq hL\,\|\Phi(h, x) - x\| \leq h^2 LT. \tag{12}$$

Из (9), (10) и (12) следует, что

$$\begin{gathered}\left\|\Phi^2(h,x)-(x+2hF(x))\right\|=\\=\|\,(\Phi(h,x)-x-hF(x))+\big(\Phi^2(h,x)-\Phi(h,x)-hF(\Phi(h,x))\big)+\\+(hF(\Phi(h,x))-hF(x))\,\|\le(C+C_1)h^2+(C+C_1)h^2+h^2LT=\\=h^2(2(C+C_1)+LT),\ x\in K.\end{gathered}\tag{13}$$

Докажем по индукции, что если $x\in K,\ 0\le m\le N$, и $h\in(0,h_1)$, то

$$\|\Phi^m(h,x)-(x+mhF(x))\|\le h^2\left(m(C+C_1)+TL\sum_{l=1}^{m-1}l\right).\tag{14}$$

База индукции — оценка (9). Покажем, что из оценки (14) можно получить оценку для шага $m+1$.

Так как $\Phi^m(h,x)\in K'$, а $\Phi^{m+1}(h,x)=\Phi(h,\Phi^m(h,x))$, то

$$\left\|\Phi^{m+1}(h,x)-(\Phi^m(h,x)+hF(\Phi^m(h,x)))\right\|\le(C+C_1)h^2.\tag{15}$$

Дополнительно оценим, используя неравенство (11):

$$\begin{gathered}\|x-\Phi^m(h,x)\|\le\|x-\Phi(h,x)\|+\left\|\Phi(h,x)-\Phi^2(h,x)\right\|+\dots\\\dots+\left\|\Phi^{m-1}(h,x)-\Phi^m(h,x)\right\|\le mhT.\end{gathered}\tag{16}$$

Следовательно,

$$\|hF(x)-hF(\Phi^m(h,x))\|\le hL\,\|x-\Phi^m(h,x)\|\le mh^2TL.\tag{17}$$

Из (14), (15) и (17) следует, что

$$\begin{gathered}\left\|\Phi^{m+1}(h,x)-(x+(m+1)hF(x))\right\|=\\=\|\,(\Phi^m(h,x)-x-mhF(x))+\big(\Phi^{m+1}(h,x)-\Phi^m(h,x)-hF(\Phi^m(h,x))\big)-\\-(hF(x))-hF(\Phi^m(h,x)))\,\|\le\\\le h^2\left(m(C+C_1)+TL\sum_{l=1}^{m-1}l\right)+(C+C_1)h^2+mh^2LT=\\=h^2\left((m+1)(C+C_1)+TL\sum_{l=1}^{m}l\right).\end{gathered}$$

Используя (14) и (5), оценим для $x \in K$ и $0 \le l, m \le N$:

$$\left\|\Phi^m(h,x) - \Phi^l(h,x)\right\| = \|\Phi^m(h,x) - (x - mhF(x)) +$$
$$-\Phi^l(h,x) + (x - lhF(x)) - mhF(x) + lhF(x)\| \ge$$
$$\ge h|m-l|\|F(x)\| - \|\Phi^m(h,x) - (x - mhF(x))\| -$$
$$-\left\|\Phi^l(h,x) - (x - lhF(x))\right\|;$$

следовательно,

$$\left\|\Phi^m(h,x) - \Phi^l(h,x)\right\| \ge h|m-l|\mu - h^2(C_m + C_l), \tag{18}$$

где C_m и C_l — соответствующие константы при h^2 из оценки (14).

Из оценки (18) очевидно следует, что при фиксированном N всегда можно найти столь малое значение h_0, что если $h \in (0, h_0)$, то для любых $1 \le m, l \le N$, $m \ne l$, все точки $\Phi^m(h,x)$ различны.

■

Доказательство основной теоремы. Рассмотрим разрешающее отображение

$$ev: \Delta(\mathscr{C}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \times \mathscr{C}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)) \times (K \times K) \to \mathbb{R}^{Nk} \times \mathbb{R}^{Nk}$$

вида (7).

Пара (F, H) различима по численному методу Φ с шагом h за N шагов тогда и только тогда, когда

$$ev(H, H, K \times K \setminus \Delta(K \times K)) \cap \Delta(\mathbb{R}^{Nk} \times \mathbb{R}^{Nk}) = \emptyset,$$

т. е. отображение

$$\left\{\begin{array}{c} H \circ \Phi(h,x) \\ \vdots \\ H \circ \Phi^N(h,x) \end{array}\right\} : K \to \mathbb{R}^{Nk}$$

инъективно. По лемме 1 для этого достаточно доказать трансверсальность отображения

$$ev(H, H, \cdot\,) \pitchfork_{(x,y)} \Delta(\mathbb{R}^{Nk} \times \mathbb{R}^{Nk}), \quad (x,y) \in K \times K \setminus \Delta(K \times K),$$

так как выполнено условие на размерности

$$\operatorname{codim} \Delta(\mathbb{R}^{Nk} \times \mathbb{R}^{Nk}) = Nk = k\left[\frac{2n}{k}\right] + k > 2n = \dim\,(K \times K).$$

Заметим, что наш выбор $N = \left[\frac{2n}{k}\right] + 1$ используется именно в этом неравенстве.

Для окончания доказательства применим теорему 3. В обозначениях этой теоремы

$$A = \Delta(\mathscr{C}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \times \mathscr{C}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)),$$

$$Y = K \times K,$$

$$Z = \mathbb{R}^{Nk} \times \mathbb{R}^{Nk},$$

$$W = \Delta(\mathbb{R}^{Nk} \times \mathbb{R}^{Nk}),$$

$$A_W = \left\{(H, H): \ H \in \mathscr{C}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k), \ ev(H, H, \cdot) \pitchfork_{(x,y)} \Delta(\mathbb{R}^{Nk} \times \mathbb{R}^{Nk})\right\}.$$

Условия 1–3 теоремы 3, очевидно, выполнены, так как $\dim Y = 2n$. Покажем, что выполнено условие 4. Для этого докажем, что если для некоторых $x^*, y^* \in K$, $H^* \in \mathscr{C}^r(K, \mathbb{R}^k)$

$$(w, w) = ev(H^*, H^*, x^*, y^*) \in W,$$

то

$$DT = D_H\, ev(H^*, H^*, x^*, y^*)\, T_{(H^*, H^*, x^*, y^*)}(A \times Y)$$

содержит дополнение $T_{(w,w)}W$ в $T_{(w,w)}Z$, отсюда будет следовать трансверсальность отображения ev к W в точке (x^*, y^*). Последнее верно, если возможно выбрать такую функцию $g \in \mathscr{C}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, что множество векторов

$$\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}(ev(H^* + \lambda g, H^* + \lambda g, x^*, y^*)), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

содержит $T_w\mathbb{R}^{Nk} \times \{0\}$ или $\{0\} \times T_w\mathbb{R}^{Nk}$.

Действительно,

$$\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}(ev(H^* + \lambda g, H^* + \lambda g, x^*, y^*)) =$$

$$= \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}\left(\left\{ \begin{array}{c} H^* \circ \Phi(h, x^*) + \lambda(g \circ \Phi(h, x^*)) \\ \vdots \\ H^* \circ \Phi^N(h, x^*) + \lambda(g \circ \Phi^N(h, x^*)) \end{array} \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \begin{array}{c} H^* \circ \Phi(h, y^*) + \lambda(g \circ \Phi(h, y^*)) \\ \vdots \\ H^* \circ \Phi^N(h, y^*) + \lambda(g \circ \Phi^N(h, y^*)) \end{array} \right\} \right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} g \circ \Phi(h, x^*) \\ \vdots \\ g \circ \Phi^N(h, x^*) \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} g \circ \Phi(h, y^*) \\ \vdots \\ g \circ \Phi^N(h, y^*) \end{array} \right\} = (V_x, V_y).$$

Очевидно, что для любых двух конечных наборов точек

$$\{x_i\} \in \mathbb{R}^n, \ x_i \neq x_j, \ i \neq j \ \text{ и } \ \{y_i\} \in \mathbb{R}^n,$$

где $i, j = 1, \ldots, N$, существует такая функция $f \in \mathscr{C}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, что $f(x_i) = y_i$.

Заметим, что пространство DT является линейным, следовательно, достаточно доказать, что для любого вектора $\alpha \in T_w\mathbb{R}^{Nk}$ существует такая функция g, что

$$(V_x, V_y) - (V_y, V_y) = (V_x - V_y, 0) = (\alpha, 0).$$

По лемме 2 при достаточно малом шаге h все точки $x_m = \Phi^m(h, x^*)$, как и $y_m = \Phi^m(h, y^*)$, различны, т. е.

$$x_i \neq x_j, \ y_i \neq y_j, \ i \neq j, \ i, j = 1, \ldots, N. \tag{19}$$

Будем строить функцию g пошагово.

$$g(x_1) = \alpha_1, \ g(y_1) = 0,$$

$$g(x_2) = \alpha_2, \ g(y_2) = 0,$$

и так далее.

Заметим, что в наборах точек x_i и y_j могут существовать точки, принадлежащие обоим наборам. В таких случаях будем строить функцию g следующим образом:

Вариант 1. Если $x_i = y_j$, $i \leq j$, то по построению значение g в точке x_i уже фиксировано, следовательно, $g(y_j) = g(x_i) = \beta$, положим $g(x_j) = \alpha_j + \beta$.

Вариант 2. Если $x_i = y_j$, $i \geq j$, то по построению значение g в точке y_j уже фиксировано, следовательно, $g(x_i) = g(y_j) = \beta$, положим $g(y_i) = \beta - \alpha_j$.

Отметим, что не исключено возникновение ситуации, при которой построение функции g невозможно:

$$x_i = y_j, \ x_j = y_k, \ i, k < j. \tag{20}$$

Пусть по построению фиксированы значения $g(x_i) = \beta_1$, $g(y_k) = \beta_2$, следовательно, на j-ом шаге построения оба значения функции g в точках x_j и y_j уже фиксированы на предыдущих шагах, т. е. $g(x_j) = \beta_2$, $g(y_j) = \beta_1$ и

$$g(x_j) - g(y_j) = \beta_1 - \beta_2,$$

а равенство $\beta_1 - \beta_2 = \alpha_j$ возможно лишь при определенном выборе вектора α.

Докажем, что существует такое значение $h_0 > 0$, зависящее лишь от F, Φ и K, что при $h \in (0, h_0)$ ситуация вида (20) в наших условиях невозможна.

Случай 1. $i \neq k$.

По условию $x_i = y_j,\ x_j = y_k$, следовательно,

$$x_i - x_j = y_j - y_k. \tag{21}$$

Покажем, что (21) невозможно.

Верны следующие равенства

$$\begin{aligned} &\|x_i - x_j\| = \|\Phi_i(h, x^*) - \Phi_j(h, x^*)\| = |i - j|h\|F(x^*)\| + O(h^2),\ h \to 0, \\ &\|y_k - y_j\| = \|\Phi_k(h, y^*) - \Phi_j(h, y^*)\| = |k - j|h\|F(y^*)\| + O(h^2),\ h \to 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Пусть $j - i < j - k$. Фиксируем такую константу c, что

$$c < \frac{\mu}{2(j-k)L}, \tag{23}$$

где μ из (5), а L — глобальная константа Липшица для F на K'.

Если $\|x^* - y^*\| < c$, то справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} &(j-k)h\|F(y^*)\| \geq (j-k)h(\|F(x^*)\| - \|F(x^*) - F(y^*)\|) \geq \\ &\geq (j-k)h(\|F(x^*)\| - L\|x^* - y^*\|) > (j-k)h(\|F(x^*)\| - Lc) > \\ &> (j-k)h\|F(x^*)\| - \frac{h\mu}{2} > |i-j|h\|F(x^*)\|, \end{aligned} \tag{24}$$

следовательно, равенство (21) невозможно.

Если $\|x^* - y^*\| \geq c$, то существует такое достаточно малое значение шага h, зависящее лишь от μ и L (т. е. от F и K), что

$$\Phi^i(h, x^*) \neq \Phi^j(h, y^*),\ 1 \leq i, j \leq N.$$

Последнее противоречит условию $x_i = y_j$.

Случай 2. $i = k$.

Очевидно, что

$$y_i = x_j = \Phi^{j-i}(h, x_i) = \Phi^{j-i}(h, y_j).$$

Используя (22), получим

$$0 = \|y_i - y_i\| = \|y_i - \Phi^{j-i}(h, y_j)\| = \|\Phi^i(h, y^*) - \Phi^{2j-i}(h, y^*)\| =$$

$$= |i - (2j - i)|h\|F(y^*)\| + O(h^2),\ h \to 0. \tag{25}$$

Так как $h\|F(y^*)\| > h\mu$, то существует такое h_0, зависящее лишь от F и K, что если выполнено равенство (25), то $i = j$, что противоречит условию $i < j$.

■

Список литературы

[1] *Pilyugin S. Yu.* The Space of Dynamical Systems with the C^0-topology. Lecture Notes in Math. 1994. Vol. 1571. Springer-Verlag.

[2] *Abraham R., Robbin J. W.* Transversal mappings and flows. Benjamin W. A. New York. 1967.

[3] *Aeyels D.* Generic observability of differentiable systems. // SIAM J. Control and optimization. 1981. Vol. 19. No. 5. P. 595–603.