ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 4, 2019
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Стохастические дифференциальные уравнения
Моделирование динамических систем

Применение спектральной формы математического описания для представления повторных стохастических интегралов*

К. А. Рыбаков
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет), Email: rkoffice@mail.ru

Аннотация. В статье изложены некоторые аспекты применения спектральной формы математического описания систем управления для представления повторных стохастических интегралов второй кратности и площади Леви в приложении к численному решению стохастических дифференциальных уравнений. Предложено использовать спектральные характеристики оператора интегрирования (двумерные нестационарные передаточные функции интегрирующего звена), определенные относительно различных базисных систем: полиномов Лежандра, косинусоид, функций Уолша и Хаара, а также тригонометрического базиса Фурье.

Ключевые слова: метод Мильштейна, ортонормированные функции, площадь Леви, повторный стохастический интеграл, ортогональное разложение, спектральная форма математического описания, спектральный метод, стохастические дифференциальные уравнения

Abstract. The article describes some aspects for applying the spectral form of mathematical description, which is used for the control systems analysis and synthesis, for the representation of iterated stochastic second multiplicity integrals with respect to the numerical solution of stochastic differential equations. It is proposed to use the spectral characteristics of the integration operator

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-08-00530-а).

(two-dimensional nonstationary transfer functions of the integrator) defined by different orthonormal function systems: Legendre polynomials, cosines, Walsh and Haar functions, as well as the trigonometric Fourier basis.

Keywords: iterated stochastic integrals, Lévi area, Milstein method, orthonormal functions, orthogonal expansion, spectral form of mathematical description, spectral method, stochastic differential equation

Введение

Развитие методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений обусловлено их важностью при моделировании реальных процессов в задачах физики, техники, финансовой и актуарной математики, биологии, медицины [1–7]. Построение методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений сложнее по сравнению с численными методами интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Не будем приводить подробный обзор всех существующих подходов (для этого можно рекомендовать специализированную литературу [2, 6, 8–14]), а остановимся на том направлении, которое непосредственно затрагивает эта статья.

Случайный процесс, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению, при определенных условиях может быть представлен в виде стохастических аналогов формулы Тейлора: разложений Тейлора – Ито и Тейлора – Стратоновича, включающих повторные стохастические интегралы [6, 8, 9, 11, 13, 15, 16]. Их совместное моделирование необходимо при реализации численных методов высоких порядков сильной или среднеквадратической сходимости, причем они появляются уже в методе с порядком сходимости 1.0, который был предложен Г.Н. Мильштейном [17]. Различные подходы к моделированию повторных стохастических интегралов описаны в работе [8]. Самый простой и очевидный способ — численное интегрирование, однако в [8] было показано, что можно предложить более эффективный метод на основе тригонометрических рядов Фурье. Для представления и аппроксимации повторных стохастических интегралов второй кратности было использовано разложение Карунена–Лоэва для броуновского моста. Однако этот подход не нашел развития для представления повторных стохастических интегралов кратности выше второй.

В работах Д.Ф. Кузнецова был предложен переход от повторных стохастических интегралов к кратным и построено семейство методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений на основе разложения весовой функции (подынтегральной функции многих переменных, число которых совпадает с кратностью стохастического интеграла; эта функция конструируется на основе подынтегральных функций, задающих повторный стохастический интеграл) в кратный ряд по полной ортонормированной системе функций (базисной системе) [6,15,16]. Наиболее интересные результаты получены при использовании в качестве базисных систем полиномов Лежандра и тригонометрических функций, также рассматривались функции Уолша и Хаара. Сформированы алгоритмы аппроксимации повторных стохастических интегралов, позволяющие реализовать численные методы, вообще говоря, любого порядка. Детально исследованы аппроксимации, необходимые при построении методов порядка сходимости 1.0, 1.5, ..., 3.5. Существенное преимущество разработанных методов проявляется с ростом кратности стохастических интегралов (с ростом порядка сходимости). В [18] для представления и аппроксимации повторных стохастических интегралов второй кратности было использовано разложение винеровского процесса по полиномам Лежандра и тригонометрическим функциям, исследована сходимость соответствующих аппроксимаций. Разложение винеровского процесса по тригонометрическим функциям и функциям Хаара для аппроксимации повторных стохастических интегралов второй кратности также предлагалось в [19].

При рассмотрении повторных стохастических интегралов второй кратности с использованием разложений случайных процессов по базисной системе возникает задача разложения первообразных базисных функций по этой же базисной системе. Аналогичная задача решалась в теории управления линейными детерминированными системами при их описании с помощью спектральной формы [20, 21], которая является основой спектрального метода анализа и синтеза линейных непрерывных, дискретных и непрерывно-дискретных систем управления. Упорядоченный набор коэффициентов разложения первообразных для базисных функций по этой же базисной системе, представленных в виде бесконечной матрицы в спектральной форме математического описания систем управления, соответствует интегрирующему звену, или оператору интегрирования. Алгоритмы расчета элементов этих матриц относительно различных базисных систем наряду с элементами других матриц, называемых двумерными нестационарными передаточными функциями, спектральными характеристиками линейных операторов или матричными операторами, которые соответствуют разным звеньям линейных непрерывных систем управления, или линейным операторам, например, усилительному звену (оператору умножения на функцию), дифференцирующему звену (оператору дифференцирования), звену упреждения или запаздывания (оператору сдвига) и другим звеньям, составляют неотъемлемую часть работ, посвященных спектральной форме математического описания и спектральному методу [20–26]. Такие алгоритмы реализованы в виде программ на разных языках программирования и для различных систем компьютерной математики [27]. Это направление продолжает развиваться: разрабатываются алгоритмы и программное обеспечение для новых базисных систем [28–30].

Цель статьи состоит в применении спектральной формы математического описания систем управления для представления повторных стохастических интегралов второй кратности. Спектральная форма дает возможность получить такое представление с помощью спектральных характеристик оператора интегрирования (двумерных нестационарных передаточных функций интегрирующего звена) и базовых операций матричной алгебры. Причем оно не зависит от выбора базисной системы. Представление повторных стохастических интегралов с применением спектральной формы вряд ли можно считать принципиально новым, поскольку, например, для полиномов Лежандра и тригонометрических функций оно обеспечивает такой же результат, как и в [18], однако универсальность такого представления и имеющееся алгоритмическое и программное обеспечение спектрального метода [27] могут послужить основой для построения алгоритмов численного решения стохастических дифференциальных уравнений с порядком сходимости 1.0 и их реализации в виде пакета программ при выборе произвольной базисной системы.

Представление функций и случайных процессов

Дадим определение спектральной характеристики функции времени со значениями в $\mathbb{R}$, следуя обозначениям работы [26]. Пусть $\mathbb{T} = [0, \theta]$, $t \in \mathbb{T}$ и $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система функций (базисная система) пространства $L_2(\mathbb{T})$ квадратично интегрируемых на отрезке $\mathbb{T}$ функций. Тогда упорядоченный набор коэффициентов разложения функции времени $x(t) \in L_2(\mathbb{T})$ в ряд по функциям базисной системы, представленный в виде бесконечной матрицы-столбца X, будем называть спектральной характеристикой функции $x(t)$. Будем использовать обозначения $\mathbb{S}$ для линейного преобразования, ставящего в соответствие функции ее спектральную характеристику, и $\mathbb{S}^{-1}$ для линейного преобразования, ставящего в соответствие спектральной характеристике функцию:

$$X = \mathbb{S}[x(t)] \quad \Leftrightarrow \quad X = [\, X_0 \;\; X_1 \;\; X_2 \;\; \ldots \,]^{\mathrm{T}} \quad ({}^{\mathrm{T}} \text{ — транспонирование}),$$

$$X_i = \big(q(i,t), x(t)\big)_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i,t)x(t)\,dt, \quad i = 0,1,2,\ldots, \tag{1}$$

и

$$x(t) = \mathbb{S}^{-1}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} X_i q(i,t), \tag{2}$$

при этом X является элементом пространства квадратично суммируемых последовательностей ℓ_2. Спектральное преобразование $\mathbb{S}$ устанавливает изоморфизм пространств $L_2(\mathbb{T})$ и ℓ_2, оно сохраняет скалярное произведение и, следовательно, норму, т.е. если $x_j(t) \in L_2(\mathbb{T})$ и $X_j = \mathbb{S}[x_j(t)]$, $j = 1, 2$, то

$$\big(x_1(t), x_2(t)\big)_{L_2(\mathbb{T})} = (X_1, X_2)_{\ell_2},$$

или

$$\int_{\mathbb{T}} x_1(t)x_2(t)dt = X_1^{\mathrm{T}} X_2 = \sum_{i=0}^{\infty} (X_1)_i (X_2)_i. \qquad (3)$$

Определив спектральную характеристику $\mathcal{E}$ функции $e(t) = 1$, т.е. $\mathcal{E} = \mathbb{S}[e(t)]$, можно записать соотношение для вычисления интеграла

$$I^{(1)} = \int_0^{\theta} x_1(\tau)d\tau = \big(e(t), x_1(t)\big)_{L_2(\mathbb{T})}$$

с помощью спектральных характеристик подынтегральных функций (здесь $\mathcal{E}$ задает линейный функционал на пространстве ℓ_2 [26]):

$$I^{(1)} = \mathcal{E}^{\mathrm{T}} X_1 = X_1^{\mathrm{T}} \mathcal{E}. \qquad (4)$$

Линейный оператор на пространстве ℓ_2 или, вообще, на пространстве последовательностей, не обладающих свойством квадратичной суммируемости, задается бесконечной матрицей, которая зависит от базисной системы. Пусть бесконечная матрица A соответствует линейному оператору $\mathcal{A}$, заданному на пространстве $L_2(\mathbb{T})$ либо на некотором подпространстве $L_2(\mathbb{T})$. Матрица A определяется следующей формулой:

$$A = \mathbb{S}[\mathcal{A}] = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & \dots \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & \dots \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$A_{ij} = \big(q(i,t), \mathcal{A}q(j,t)\big)_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i,t)\mathcal{A}q(j,t)dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \qquad (5)$$

Матрицу A будем называть спектральной характеристикой оператора $\mathcal{A}$. Для преобразования, ставящего в соответствие линейному оператору его спектральную характеристику, используется введенное ранее обозначение $\mathbb{S}$.

Далее будем применять спектральную характеристику P^{-1} оператора интегрирования $\mathcal{J}$, ставящего в соответствие функции времени $x(t)$ ее первообразную:

$$\mathcal{J}x(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau, \quad \mathbb{S}[\mathcal{J}] = P^{-1}.$$

Элементы матрицы P^{-1} согласно (5) задаются соотношением

$$P_{ij}^{-1} = \int_{\mathbb{T}} q(i,t) \int_0^t q(j,\tau)\, d\tau dt, \quad i,j = 0,1,2,\ldots, \tag{6}$$

тогда

$$\mathbb{S}\big[\mathcal{J}x(t)\big] = \mathbb{S}\left[\int_0^t x(\tau)\, d\tau\right] = P^{-1}\,\mathbb{S}\big[x(t)\big]. \tag{7}$$

Комбинируя свойства (3) и (7), можно записать соотношение для вычисления повторного интеграла

$$I^{(12)} = \int_0^\theta x_2(\tau_2) \int_0^{\tau_2} x_1(\tau_1)\, d\tau_1 d\tau_2 = \big(x_2(t), \mathcal{J}x_1(t)\big)_{L_2(\mathbb{T})}$$

с помощью спектральных характеристик подынтегральных функций и спектральной характеристики оператора интегрирования:

$$I^{(12)} = X_2^{\mathrm{T}} P^{-1} X_1 = X_1^{\mathrm{T}} [P^{-1}]^{\mathrm{T}} X_2. \tag{8}$$

Для того чтобы соотношение (8) имело смысл, достаточно выполнения условия $\mathcal{J}x_1(t) \in L_2(\mathbb{T})$.

Отметим, что в спектральной форме математического описания систем управления [20–23,25] вектор X называется нестационарной спектральной характеристикой с учетом параметризации отрезка $\mathbb{T}$ (зависимости его границ от времени), матрица A называется двумерной нестационарной передаточной функцией и определятся через импульсную переходную функцию линейного звена. В частности, оператору интегрирования соответствует интегрирующее звено с импульсной переходной функцией $k(t,\tau) = 1(t-\tau)$, где $1(t-\tau)$ — единичная ступенчатая функция, или индикатор множества $t > \tau$ при фиксированном τ.

Оператор $\mathcal{J}$ является компактным, поэтому согласно необходимому условию компактности [31, 32]

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (P_{ij}^{-1})^2 = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (P_{ij}^{-1})^2 = 0.$$

Такое условие позволяет преобразовать с помощью соотношения (7) спектральные характеристики функций, не принадлежащих пространству $L_2(\mathbb{T})$, в том числе и обобщенных. При этом элементы спектральных характеристик определяются тем же выражением (1), но сама спектральная характеристика не принадлежит пространству ℓ_2. Характерным примером является связь спектральных характеристик дельта-функции $\delta(t-\tau)$ и единичной ступенчатой функции $1(t-\tau)$, $\tau \in [0,\theta)$, а именно $\mathbb{S}[1(t-\tau)] = P^{-1}\,\mathbb{S}[\delta(t-\tau)]$ [20].

Важная особенность спектральной формы математического описания состоит в том, что при линейных преобразованиях функций все операции производятся только с коэффициентами разложения, т.е. со спектральной характеристикой. Этот же подход целесообразно реализовать и для случайных процессов, расширяя определение спектральной характеристики функции времени для случайного процесса. Если $x(t)$ — случайный процесс, то его спектральная характеристика представляет собой бесконечную матрицу-столбец X, образованную коэффициентами разложения X_i, которые являются случайными величинами. При этом остается справедливым соотношение (1), а функциональный ряд в правой части (2) сходится к $x(t)$ в среднеквадратическом смысле. Это определение можно применить и для более широкого класса случайных процессов. Фактически, можно рассматривать функции времени и случайные процессы, для которых имеет смысл формула (1), без указания того, в каком смысле понимается соотношение (2).

Ключевым примером является стандартный винеровский случайный процесс $W(t)$ и связанный с ним стандартный гауссовский белый шум $V(t)$. Случайный процесс $V(t)$ будем представлять в виде [33, 34]

$$V(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i q(i,t), \tag{9}$$

где ζ_i — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Это формальное представление, так как ряд в правой части (9) не сходится к $V(t)$ в среднеквадратическом смысле. Таким образом, спектральная характеристика $\mathcal{V}$ стандартного гауссовского белого шума $V(t)$ задается следующим образом

$$\mathcal{V} = [\,\zeta_0 \;\; \zeta_1 \;\; \zeta_2 \;\; \ldots\,]^{\mathrm{T}}$$

и это представление не зависит от выбора базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$.

Спектральную характеристику $\mathcal{W}$ стандартного винеровского процесса $W(t)$ будем представлять в виде

$$\mathcal{W} = P^{-1}\mathcal{V}. \tag{10}$$

Поскольку каждый столбец матрицы P^{-1} образован коэффициентами разложения первообразных для базисных функций по этой же базисной системе, то соотношение (10) определяет коэффициенты разложения случайного процесса $W(t)$ по функциям базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$, выраженные через коэффициенты следующего функционального ряда со случайными коэффициентами [36]:

$$W(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_i \int_0^t q(j,\tau)d\tau.$$

Вычисление спектральных характеристик оператора интегрирования для различных базисных систем

В этом разделе будут приведены соотношения для вычисления элементов матрицы P^{-1} относительно наиболее часто используемых базисных систем: полиномов Лежандра, косинусоид, функций Уолша и Хаара, а также относительно тригонометрического базиса Фурье. Но прежде получим свойство спектральной характеристики оператора интегрирования, которое будет использовано в дальнейшем.

Применим правило интегрирования по частям к правой части формулы (6):

$$P_{ij}^{-1} = \int_{\mathbb{T}} q(i,t) \int_0^t q(j,\tau)d\tau dt = \int_{\mathbb{T}} q(i,t)dt \int_{\mathbb{T}} q(j,t)dt -$$
$$- \int_{\mathbb{T}} q(j,t) \int_0^t q(i,\tau)d\tau dt = \Lambda_{ij} - P_{ji}^{-1}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots,$$

где

$$\Lambda_{ij} = \int_{\mathbb{T}} q(i,t)dt \int_{\mathbb{T}} q(j,t)dt$$

— элементы симметрической матрицы $\Lambda = \mathcal{E}\mathcal{E}^{\mathrm{T}}$, $\mathcal{E}$ — спектральная характеристика функции $e(t) = 1$.

Это позволяет представить матрицу P^{-1} в виде

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\Lambda + \bar{P}^{-1}, \tag{11}$$

где $\bar{P}^{-1}$ — кососимметрическая матрица: $[\bar{P}^{-1}]^{\mathrm{T}} = -\bar{P}^{-1}$, которая отличается от матрицы P^{-1} только тем, что $\bar{P}_{00}^{-1} = 0$.

Для всех перечисленных в начале этого раздела базисных систем со стандартной нумерацией функция $e(t)$ отличается от базисной функции $q(0,t)$ числовым коэффициентом: $e(t) = \sqrt{\theta}\, q(0,t)$, а при $\theta = 1$ совпадает с ней, следовательно,

$$\mathcal{E} = [\, \sqrt{\theta} \;\; 0 \;\; 0 \;\; \ldots \,]^{\mathrm{T}},$$

поэтому матрица Λ для этих базисных систем содержит всего один ненулевой элемент Λ_{00}, так как $\Lambda_{ij} = \mathcal{E}_i\mathcal{E}_j = \theta\delta_{i0}\delta_{j0}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

В результате соотношение (8) при $X_1 = X_2$ упрощается, так как для кососимметрической матрицы $X_1^{\mathrm{т}} \bar{P}^{-1} X_1 = 0$. Аналогично имеет смысл записать и соотношение (4) с учетом структуры спектральной характеристики $\mathcal{E}$. Таким образом,

$$I^{(1)} = \mathcal{E}^{\mathrm{т}} X_1 = \sqrt{\theta}\,(X_1)_0, \tag{12}$$

$$I^{(12)} = X_1^{\mathrm{т}} P^{-1} X_1 = \frac{1}{2}\,X_1^{\mathrm{т}} \Lambda X_1 + X_1^{\mathrm{т}} \bar{P}^{-1} X_1 = \frac{1}{2}\,X_1^{\mathrm{т}} \Lambda X_1 = \frac{\theta}{2}\,(X_1)_0^2. \tag{13}$$

Далее приведем соотношения для вычисления элементов матрицы P^{-1} для различных базисных систем [20–22, 26].

1. Для полиномов Лежандра $\{\hat{P}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$:

$$\hat{P}(i,t) = \sqrt{\frac{2i+1}{\theta}} \sum_{k=0}^{i} l_{ik}\,\frac{t^k}{\theta^k}, \quad i = 0,1,2,\ldots, \tag{14}$$

где

$$l_{ik} = (-1)^{i-k} C_{i+k}^{i} C_{i}^{i-k}, \quad C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!},$$

матрица P^{-1} имеет вид

$$P^{-1} = \theta \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{35}} & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{35}} & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & C_{m-1,m} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{m,m-1} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$C_{00} = \frac{1}{2}, \quad C_{m-1,m} = -C_{m,m-1} = -\frac{1}{2\sqrt{4m^2-1}}, \quad C_{m-k,m} = C_{m,m-k} = 0,$$
$$m = 1,2,3,\ldots, \quad k = 0,2,3,\ldots,m.$$

2. Для косинусоид $\{\hat{C}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$:

$$\hat{C}(i,t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{\theta}}, & i = 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\theta}}\cos\dfrac{i\pi t}{\theta}, & i = 1,2,\ldots, \end{cases} \tag{15}$$

матрица P^{-1} имеет вид

$$P^{-1} = \theta \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{9\pi^2} & \dots & C_{0m} & \dots \\ -\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} & 0 & \frac{4}{3\pi^2} & 0 & \dots & C_{1m} & \dots \\ 0 & -\frac{4}{3\pi^2} & 0 & \frac{4}{5\pi^2} & \dots & C_{2m} & \dots \\ -\frac{2\sqrt{2}}{9\pi^2} & 0 & -\frac{4}{5\pi^2} & 0 & \dots & C_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ C_{m0} & C_{m1} & C_{m2} & C_{m3} & \dots & C_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$C_{00} = \frac{1}{2}, \quad C_{0m} = -C_{m0} = \frac{\sqrt{2}(1-(-1)^m)}{m^2\pi^2}, \quad C_{mm} = 0,$$
$$C_{m-k,m} = -C_{m,m-k} = \frac{2(1-(-1)^k)}{k(2m-k)\pi^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, m-1.$$

3. Для функций Уолша:

$$\hat{\Omega}(i,t) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \prod\limits_{\{k:\, \gamma_k = 1\}} r(k,t), & i = 1, 2, \dots, \end{cases} \tag{16}$$

где γ_k — коэффициенты в двоичном представлении числа $i = \gamma_1 2^0 + \gamma_2 2^1 + \ldots + \gamma_k 2^{k-1} + \ldots + \gamma_{m+1} 2^m$, m — наибольшая степень в этом двоичном представлении, $\gamma_k \in \{0, 1\}$, а $r(k,t)$ — функции Радемахера:

$$r(k,t) = \operatorname{sign}\big(\sin(2^k \pi t)\big) = \begin{cases} 1, & \sin(2^k \pi t) \geqslant 0, \\ -1, & \sin(2^k \pi t) < 0, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \dots,$$

матрица P^{-1} имеет вид

$$P^{-1} = \theta \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \dots & C_{0m} & \dots \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \dots & C_{1m} & \dots \\ -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{2m} & \dots \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & \dots & C_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ C_{m0} & C_{m1} & C_{m2} & C_{m3} & \dots & C_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$C_{00} = \frac{1}{2}, \quad C_{k,2^m+k} = -C_{2^m+k,k} = \frac{1}{2^{m+2}}, \quad C_{ml} = 0 \quad \text{в остальных случаях,}$$
$$m, l = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^m - 1.$$

4. Для функций Хаара:

$$\hat{X}(i,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\theta}}, & 0 \leqslant t \leqslant \theta, \quad i = 0; \\ \sqrt{\dfrac{2^m}{\theta}}, & \dfrac{2k\theta}{2^{m+1}} \leqslant t < \dfrac{(2k+1)\theta}{2^{m+1}}, \\ -\sqrt{\dfrac{2^m}{\theta}}, & \dfrac{(2k+1)\theta}{2^{m+1}} \leqslant t < \dfrac{2(k+1)\theta}{2^{m+1}}, \\ 0, & \dfrac{2l\theta}{2^{m+1}} \leqslant t < \dfrac{(2l+1)\theta}{2^{m+1}}, \end{cases} \tag{17}$$

$$i = 2^m + k = 1, 2, \ldots, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$k, l = 0, 1, \ldots, 2^m - 1, \quad k \neq l,$$

матрица P^{-1} имеет вид

$$P^{-1} = \theta \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{16} & \frac{\sqrt{2}}{16} & \ldots & C_{0m} & \ldots \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{16} & -\frac{\sqrt{2}}{16} & \ldots & C_{1m} & \ldots \\ -\frac{\sqrt{2}}{16} & -\frac{\sqrt{2}}{16} & 0 & 0 & \ldots & C_{2m} & \ldots \\ -\frac{\sqrt{2}}{16} & \frac{\sqrt{2}}{16} & 0 & 0 & \ldots & C_{3m} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ C_{m0} & C_{m1} & C_{m2} & C_{m3} & \ldots & C_{mm} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$C_{00} = \frac{1}{2}, \quad C_{0,2^s+k} = -C_{2^s+k,0} = \frac{\sqrt{2^s}}{2^{2(s+1)}},$$
$$C_{2^s+k,2^m(2^s+k)+l} = -C_{2^s+k,2^m(2^s+k)+2^{m-1}+l} =$$
$$= -C_{2^m(2^s+k)+l,2^s+k} = C_{2^m(2^s+k)+2^{m-1}+l,2^s+k} = \frac{\sqrt{2^{2s+m}}}{2^{2(m+s+1)}},$$
$$C_{ns} = 0 \quad \text{в остальных случаях,}$$
$$n, s = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$k = 0, 1, \ldots, 2^s - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, 2^{m-1} - 1.$$

5. Для тригонометрических функций:

$$\hat{F}(i,t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{\theta}}, \quad i = 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\theta}} \cos \dfrac{i\pi t}{\theta}, \quad i = 2k, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\theta}} \sin \dfrac{(i+1)\pi t}{\theta}, \quad i = 2k-1, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 0,1,2,\ldots, \\ k = 1,2,3,\ldots, \end{array} \tag{18}$$

воспользуемся определением (6) для нахождения элементов матрицы P^{-1}.

В спектральной форме математического описания для представления функций на отрезке $[0,\theta]$ традиционно применялись либо косинусоиды, либо комплексные экспоненциальные функции [20–23,25]. Базисная система тригонометрических функций выбиралась для представления функций на отрезке $[-a,a]$, где $a > 0$ [26]. Естественно, две последние системы тривиальным образом связаны между собой при условии $\theta = 2a$, а при $\theta \neq 2a$ потребуется только линейная замена переменной t. Спектральные характеристики оператора интегрирования для этих базисных систем приведены в [20–22,26], а для тригонометрических функций на отрезке $[0,\theta]$ найдем ее элементы согласно определению (6).

Учитывая свойства матрицы P^{-1}, достаточно вычислить элементы P^{-1}_{ij} при $i < j$ ($P^{-1}_{00} = \theta/2$, $P^{-1}_{ij} = -P^{-1}_{ji}$ при $i^2 + j^2 \neq 0$). Для этого потребуются следующие интегралы (в правых частях приведенных равенств i или j в аргументе косинуса, а также $i+1$ или $j+1$ в аргументе синуса — четные и неравные нулю):

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}} \int_0^t \cos \frac{j\pi\tau}{\theta}\, d\tau dt = \frac{\theta}{j\pi} \int_{\mathbb{T}} \sin \frac{j\pi t}{\theta}\, dt = 0, \\
&\int_{\mathbb{T}} \int_0^t \sin \frac{(j+1)\pi\tau}{\theta}\, d\tau dt = \frac{\theta}{(j+1)\pi} \int_{\mathbb{T}} \left[1 - \cos \frac{(j+1)\pi t}{\theta} \right] dt = \\
&\qquad = \frac{\theta}{(j+1)\pi} \int_{\mathbb{T}} dt = \frac{\theta^2}{(j+1)\pi}, \\
&\int_{\mathbb{T}} \cos \frac{i\pi t}{\theta} \int_0^t \cos \frac{j\pi\tau}{\theta}\, d\tau dt = \frac{\theta}{j\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos \frac{i\pi t}{\theta}\, \sin \frac{j\pi t}{\theta}\, dt = 0, \\
&\int_{\mathbb{T}} \cos \frac{i\pi t}{\theta} \int_0^t \sin \frac{(j+1)\pi\tau}{\theta}\, d\tau dt = \\
&\qquad = -\frac{\theta}{(j+1)\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos \frac{i\pi t}{\theta}\, \cos \frac{(j+1)\pi t}{\theta}\, dt = 0,
\end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{T}} \sin\frac{(i+1)\pi t}{\theta} \int_0^t \cos\frac{j\pi\tau}{\theta}\, d\tau dt = \frac{\theta}{j\pi} \int_{\mathbb{T}} \sin\frac{(i+1)\pi t}{\theta}\, \sin\frac{j\pi t}{\theta}\, dt =$$
$$= \frac{\theta}{2j\pi} \int_{\mathbb{T}} \left[\cos\frac{(i-j+1)\pi t}{\theta} - \cos\frac{(i+j+1)\pi t}{\theta}\right] dt =$$
$$= \frac{\theta}{2j\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos\frac{(i-j+1)\pi t}{\theta}\, dt = \begin{cases} \dfrac{\theta^2}{2j\pi}, & i+1=j, \\ 0, & i+1\neq j, \end{cases}$$
$$\int_{\mathbb{T}} \sin\frac{(i+1)\pi t}{\theta} \int_0^t \sin\frac{(j+1)\pi\tau}{\theta}\, d\tau dt =$$
$$= -\frac{\theta}{(j+1)\pi} \int_{\mathbb{T}} \sin\frac{(i+1)\pi t}{\theta}\, \cos\frac{(j+1)\pi t}{\theta}\, dt = 0,$$

поскольку в силу ортогональности функций базисной системы

$$\int_{\mathbb{T}} \cos\frac{k\pi t}{\theta}\, dt = \int_{\mathbb{T}} \sin\frac{k\pi t}{\theta}\, dt = \int_{\mathbb{T}} \cos\frac{k\pi t}{\theta}\, \sin\frac{l\pi t}{\theta}\, dt = 0, \quad k,l = 2,4,6,\ldots,$$

и

$$\int_{\mathbb{T}} \cos\frac{k\pi t}{\theta}\, \cos\frac{l\pi t}{\theta}\, dt = \int_{\mathbb{T}} \sin\frac{k\pi t}{\theta}\, \sin\frac{l\pi t}{\theta}\, dt = 0, \quad k,l = 2,4,6,\ldots, \quad k\neq l.$$

Таким образом,

$$P^{-1} = \theta\cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2\pi} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4\pi} & \ldots & C_{0m} & \ldots \\ -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} & 0 & \frac{1}{2\pi} & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & -\frac{1}{2\pi} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ -\frac{\sqrt{2}}{4\pi} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & C_{m-1,m} & \ldots \\ C_{m0} & 0 & 0 & 0 & C_{m,m-1} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$C_{00} = \frac{1}{2}, \quad C_{0m} = -C_{m0} = \frac{\sqrt{2}}{(m+1)\pi}, \quad C_{l-1,l} = -C_{l,l-1} = \frac{1}{l\pi},$$
$$C_{ns} = 0 \quad \text{в остальных случаях},$$
$$n,s = 0,1,2,\ldots, \quad k = 1,2,3,\ldots, \quad m = 2k-1, \quad l = 2k.$$

Отметим общее свойство, которое заключается в том, что для любой базисной системы

$$P^{-1} = \theta\, C, \tag{19}$$

где матрица C не зависит от θ. Матрица C — спектральная характеристика оператора интегрирования, определенная относительно базисной системы функций, ортонормированных на отрезке $[0,1]$ и полученных из $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ с помощью масштабирования (линейной замены переменной t и нормировки).

Другое свойство — это подобие. Оно относится вообще к спектральным характеристикам линейных операторов, а не только к спектральной характеристике оператора интегрирования, и состоит в следующем. Пусть наряду с базисной системой $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ задана другая базисная система $\{p(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$. Определим бесконечную матрицу $\underset{qp}{\Delta}$ с элементами

$$\underset{qp}{\Delta}_{ij} = \big(q(i,t), p(j,t)\big)_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i,t)p(j,t)\,dt,$$

которая называется матрицей изменения базисной системы [20–23, 25]. Она зависит не только от двух базисных систем, но и того, в каком порядке они взяты, при этом $\underset{pq}{\Delta} = \underset{qp}{\Delta}^{\mathrm{T}}$. Тогда спектральные характеристики оператора интегрирования, определенные относительно этих базисных систем и обозначенные $\underset{q}{P}^{-1}$ и $\underset{p}{P}^{-1}$, связаны соотношением

$$\underset{p}{P}^{-1} = \underset{pq}{\Delta}\,\underset{q}{P}^{-1}\,\underset{qp}{\Delta}. \tag{20}$$

Матрица $\underset{qp}{\Delta}$, образованная коэффициентами разложения функций одной базисной системы по функциям другой базисной системы, является ортогональной и задает ортогональное преобразование пространства ℓ_2. Если функции двух базисных систем связаны между собой простыми соотношениями, например, линейными комбинациями, то и матрица изменения базисной системы будет иметь простой вид. Например, функции Уолша (16) и функции Хаара (17) связаны между собой линейными комбинациями [35], причем эти связи возникают между функциями с номерами $2^m, 2^m+1, \ldots, 2^{m+1}-1$ для всех $m = 1,2,3,\ldots$ Функции с номерами $i = 0,1$ для этих базисных систем совпадают. Сформируем из коэффициентов линейных комбинаций матрицу $\underset{\Omega X}{\Delta}$ с элементами [21, 23]:

$$\underset{\Omega X}{\Delta}_{ij} = \big(\hat{\Omega}(i,t), \hat{X}(j,t)\big)_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} \hat{\Omega}(i,t)\hat{X}(j,t)\,dt =$$

$$= \begin{cases} 1, \quad i=j=0 \quad \text{или} \quad i=j=1, \\ \sqrt{\dfrac{1}{2^m}}\,\hat{\Omega}_l\Big(l, \dfrac{(2k+1)\theta}{2^{m+1}}\Big), & \begin{array}{l} i = 2^m+k, \quad j = 2^m+l, \\ m = 1,2,3,\ldots, \\ k,l = 0,1,\ldots,2^m-1. \end{array} \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{21}$$

В данном случае $\underset{\Omega X}{\Delta}$ — это ортогональная, симметрическая и инволютивная матрица, т.е. $\underset{\Omega X}{\Delta} = \underset{\Omega X}{\Delta}^{-1} = \underset{\Omega X}{\Delta}^{\mathrm{т}}$, с блочно-диагональной структурой, с блоками размеров 2×2, 2×2, 4×4, 8×8, $\ldots$, $2^m \times 2^m$, $\ldots$

Метод Мильштейна приближенного решения стохастических дифференциальных уравнений

Рассмотрим метод, предложенный в [17], для решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$dX(t) = f\bigl(t, X(t)\bigr)dt + \sum_{j=1}^{s} \sigma_j\bigl(t, X(t)\bigr)dW_j(t), \quad X(0) = X_0, \tag{22}$$

где $X(t) \in \mathbb{R}^n$ — n-мерный случайный процесс, $t \in [0,T]$, $f(t,x)$, $\sigma_1(t,x), \ldots, \sigma_s(t,x)\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $W_1(t)$, $\ldots$, $W_s(t)$ — независимые стандартные винеровские процессы. Закон распределения начального состояния X_0 задан. Предполагается, что выполнены условия существования и единственности сильного решения уравнения (22). Помимо обычных условий [4,36] дополнительно потребуем непрерывной дифференцируемости функций $\sigma_1(t,x), \ldots, \sigma_s(t,x)$ по координатам вектора x.

Введем равномерную сетку $\{t_k\}$ с заданным постоянным шагом h, определяющую разбиение отрезка $[0,T]$:

$$t_{k+1} = t_k + h, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1; \quad t_0 = 0, \quad t_N = T, \quad N = \frac{T}{h}.$$

Более общий случай переменного шага, задающего разбиение отрезка $[0,T]$ также может быть рассмотрен.

Обозначим через X_k численное решение уравнения (22) в момент времени t_k. Согласно [8, 17]

$$X_{k+1} = X_k + hf(t_k, X_k) + \sum_{i_1=1}^{s} \sigma_{i_1}(t_k, X_k) I_{0_{t_{k+1},t_k}}^{(i_1)} +$$
$$+ \sum_{i_1=1}^{s}\sum_{i_2=1}^{s} \bigl(\sigma_{i_1}(t_k, X_k), \nabla\bigr)\sigma_{i_2}(t_k, X_k) I_{00_{t_{k+1},t_k}}^{(i_1 i_2)},$$

где ∇ — оператор градиента, $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ — евклидово скалярное произведение, $I_{0_{t_{k+1},t_k}}^{(i_1)}$, $I_{00_{t_{k+1},t_k}}^{(i_1 i_2)}$ — стохастические интегралы Ито кратности 1 и 2 соответственно:

$$I_{0_{t_{k+1},t_k}}^{(i_1)} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} dW_{i_1}(\tau), \quad I_{00_{t_{k+1},t_k}}^{(i_1 i_2)} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{\tau_2} dW_{i_1}(\tau_1) dW_{i_2}(\tau_2).$$

Совместное моделирование стохастических интегралов $I_{0_{t_{k+1},t_k}}^{(i_1)}$ и $I_{00_{t_{k+1},t_k}}^{(i_1 i_2)}$ при $i_1 = i_2$ не составляет труда [8]:

$$I_{0_{t_{k+1},t_k}}^{(i_1)} = \sqrt{h}\,\zeta_k^{(i_1)}, \tag{23}$$

$$I_{00_{t_{k+1},t_k}}^{(i_1 i_1)} = \frac{h}{2}\big((\zeta_k^{(i_1)})^2 - 1\big), \tag{24}$$

где $\zeta_k^{(i_1)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Моделирование стохастических интегралов $I_{00_{t_{k+1},t_k}}^{(i_1 i_2)}$ при $i_1 \neq i_2$ существенно сложнее, оно будет рассмотрено в следующем разделе.

Важно подчеркнуть, что метод Мильштейна имеет порядок среднеквадратической сходимости $p = 1.0$, т.е.

$$\max_{k\in\{1,2,\ldots,N\}} \big(\mathrm{E}\,|X(t_k) - X_k|^2\big)^{1/2} \leqslant ch^p,$$

где E означает математическое ожидание, $c > 0$ — некоторая константа, не зависящая от шага h. Причем такой порядок сходимости достигается именно при учете слагаемых со стохастическими интегралами $I_{00_{t_{k+1},t_k}}^{(i_1 i_2)}$. Не учитывая их, для уравнения (22) в общем случае при $n, s > 1$ и зависимости функций $\sigma_1(t,x), \ldots, \sigma_s(t,x)$ от x, т.е. при мультипликативном шуме, возможно построить численный метод только порядка не выше $p = 0.5$ [8]. Это справедливо, например, для системы стохастических дифференциальных уравнений [37]

$$dX_1(t) = dW_1(t), \quad X_1(0) = 0,$$

$$dX_2(t) = X_1(t)dW_2(t), \quad X_2(0) = 0,$$

решение которой — стохастические интегралы $X_1(t) = I_{0_{t,0}}^{(1)}$ и $X_2(t) = I_{00_{t,0}}^{(12)}$.

Отметим, что достаточно рассмотреть стохастические интегралы $I_{0_h}^{(i_1)}$, $I_{00_h}^{(i_1 i_2)}$, принимая во внимание свойство однородности и независимости приращений винеровского процесса [13]:

$$\begin{aligned} I_{0_h}^{(i_1)} &= \int_0^h dW_{i_1}(\tau), \\ I_{00_h}^{(i_1 i_2)} &= \int_0^h \int_0^{\tau_2} dW_{i_1}(\tau_1)dW_{i_2}(\tau_2). \end{aligned} \tag{25}$$

Дополнительно рассмотрим площадь Леви — случайную величину, которая выражается через стохастические интегралы кратности 2 [18,38,39]. Каждая реализация этой случайной величины равна по модулю площади плоской фигуры, ограниченной реализациями винеровских процессов $W_{i_1}(t)$ и $W_{i_2}(t)$:

$$A_h^{(i_1i_2)} = \frac{1}{2}\,(I_{00_h}^{(i_1i_2)} - I_{00_h}^{(i_2i_1)}), \quad i_1 \neq i_2. \tag{26}$$

Используя связь между стохастическими интегралами $I_{00_h}^{(i_1i_2)}$ и $I_{00_h}^{(i_2i_1)}$ (здесь и далее равенства случайных величин понимаются с вероятностью 1):

$$I_{00_h}^{(i_1i_2)} = I_{0_h}^{(i_1)} I_{0_h}^{(i_2)} - I_{00_h}^{(i_2i_1)},$$

находим соотношения

$$I_{00_h}^{(i_1i_2)} = A_h^{(i_1i_2)} + \frac{1}{2}\, I_{0_h}^{(i_1)} I_{0_h}^{(i_2)}, \quad I_{00_h}^{(i_2i_1)} = -A_h^{(i_1i_2)} + \frac{1}{2}\, I_{0_h}^{(i_1)} I_{0_h}^{(i_2)},$$

которые можно использовать для моделирования стохастических интегралов $I_{00_h}^{(i_1i_2)}$ и $I_{00_h}^{(i_2i_1)}$ с помощью моделирования $A_h^{(i_1i_2)}$.

В общем же случае при построении и реализации численных методов более высокого порядка требуется совместное моделирование повторных стохастических интегралов кратности $K > 2$ [6]:

$$J[\psi^{(K)}]_h^{(i_1\ldots i_K)} = \int_0^h \psi_K(\tau_K) \ldots \int_0^{\tau_2} \psi_1(\tau_1)\, dW_{i_1}(\tau_1) \ldots dW_{i_K}(\tau_K), \tag{27}$$

$$J^*[\psi^{(K)}]_h^{(i_1\ldots i_K)} = \int_0^h \psi_K(\tau_K) \ldots \int_0^{\tau_2} \psi_1(\tau_1) \circ dW_{i_1}(\tau_1) \circ \ldots \circ dW_{i_K}(\tau_K), \tag{28}$$

где $i_1, \ldots, i_n = 0, 1, \ldots, s$; $\psi_1(t), \ldots, \psi_K(t)$ непрерывные функции, заданные на отрезке $[0, h]$; $W_0(t) = t$; $W_1(t), \ldots, W_s(t)$ — независимые стандартные винеровские процессы. Интегралы в (27) понимаются в смысле Ито, а в (28) — в смысле Стратоновича.

Легко видеть, что $I_{0_h}^{(i_1)}$ — частный случай повторного стохастического интеграла Ито (27) при $K = 1$ и $\psi_1(t) \equiv 1$, а $I_{00_h}^{(i_1i_2)}$ — частный случай повторного стохастического интеграла Ито (27) при $K = 2$, $\psi_1(t) \equiv 1$ и $\psi_2(t) \equiv 1$. В работах [6,16] рассматриваются степенные функции $\psi_l(t) = t^{\gamma_l}$, где $l = 1, \ldots, K$ и $\gamma_l \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, и показатель степени γ_l указывается в нижнем индексе повторного стохастического интеграла, в стохастических интегралах $I_{0_h}^{(i_1)}$ и $I_{00_h}^{(i_1i_2)}$ эти показатели нулевые. Стохастические интегралы Стратоновича связаны со стохастическими интегралами Ито [16], в частности

$$\begin{gathered} I_{0_h}^{*(i_1)} = \int_0^h dW_{i_1}(\tau) = I_{0_h}^{(i_1)}, \\ I_{00_h}^{*(i_1i_2)} = \int_0^h \int_0^{\tau_2} dW_{i_1}(\tau_1) \circ dW_{i_2}(\tau_2) = I_{00_h}^{(i_1i_2)} + \frac{h}{2}\, \delta_{i_1i_2}. \end{gathered} \tag{29}$$

Представление стохастических интегралов в спектральной форме математического описания для различных базисных систем

Пусть $j = 1, 2, \ldots, s$. Обозначим через $V_j(t)$ гауссовский белый шум, соответствующий винеровскому процессу $W_j(t)$, а через $\mathcal{V}_j$ и $\mathcal{W}_j$ — их спектральные характеристики соответственно, определенные относительно базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ для представления функций времени на отрезке $[0,h]$, т.е. $\mathcal{V}_j$ — это бесконечная матрица-столбец, элементы которой являются независимыми случайными величинами $\zeta_i^{(j)}$, имеющими стандартное нормальное распределение, $i = 0, 1, 2, \ldots$, а $\mathcal{W}_j = P^{-1}\mathcal{V}_j$ согласно (10).

Далее перепишем формулы (29) для стохастических интегралов Стратоновича в виде

$$I_{0_h}^{*(i_1)} = \int_0^h V_{i_1}(\tau)d\tau,$$

$$I_{00_h}^{*(i_1 i_2)} = \int_0^h V_{i_2}(\tau_2) \int_0^{\tau_2} V_{i_1}(\tau_1)d\tau_1 d\tau_2,$$

учитывая формальную связь винеровского процесса и гауссовского белого шума, и воспользуемся свойствами (4) и (8):

$$I_{0_h}^{*(i_1)} = \mathcal{E}^{\mathrm{T}}\mathcal{V}_{i_1} = \mathcal{V}_{i_1}^{\mathrm{T}}\mathcal{E}, \quad I_{00_h}^{*(i_1 i_2)} = \mathcal{V}_{i_2}^{\mathrm{T}} P^{-1}\mathcal{V}_{i_1} = \mathcal{V}_{i_1}^{\mathrm{T}}[P^{-1}]^{\mathrm{T}}\mathcal{V}_{i_2},$$

где $\mathcal{E}$ — спектральная характеристика функции $e(t) = 1$, а P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования, определенные относительно базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$, т.е. стохастический интеграл кратности 2 можно представить как скалярное произведение спектральных характеристик винеровского процесса и гауссовского белого шума с соответствующими индексами: $I_{00_h}^{*(i_1 i_2)} = \mathcal{V}_{i_2}^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_{i_1} = \mathcal{W}_{i_1}^{\mathrm{T}}\mathcal{V}_{i_2}$.

Спектральная форма математического описания используется для представления стохастических интегралов Стратоновича, поскольку свойства (4) и (8) получены в предположении, что все интегралы понимаются в классическом смысле, а не в смысле стохастического исчисления Ито. Используя соотношения между стохастическими интегралами Ито и Стратоновича (29), находим

$$I_{0_h}^{(i_1)} = \mathcal{E}^{\mathrm{T}}\mathcal{V}_{i_1}, \tag{30}$$

$$I_{00_h}^{(i_1 i_2)} = \mathcal{V}_{i_2}^{\mathrm{T}} P^{-1}\mathcal{V}_{i_1} - \frac{h}{2}\,\delta_{i_1 i_2}. \tag{31}$$

Нетрудно видеть, что соотношение (30) совпадает с (23) с учетом свойства (12), а соотношение (31) при $i_1 = i_2$ совпадает с (24) с учетом свойства (13), в которых следует положить $\theta = h$ и зафиксировать k.

Перейдем к выводу соотношений для повторных стохастических интегралов $I_{00_h}^{(i_1 i_2)}$ при $i_1 \neq i_2$ и выборе различных базисных систем, принимая во внимание общую формулу

$$I_{00_h}^{(i_1 i_2)} = \mathcal{V}_{i_2}^{\mathrm{T}} P^{-1} \mathcal{V}_{i_1} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} P_{j_1 j_2}^{-1} \zeta_{j_1}^{(i_2)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} = h \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_1 j_2} \zeta_{j_1}^{(i_2)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} =$$

$$= h \left(\frac{1}{2} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{j_1=1}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} \left(C_{j_1 j_2} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_1}^{(i_2)} + C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right) \right) =$$

$$= h \left(\frac{1}{2} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{j_1=1}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} C_{j_1 j_2} \left(\zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_1}^{(i_2)} - \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right) \right),$$

которая является следствием представления (11) для матрицы P^{-1} и свойства (19), т.е. C — спектральная характеристика оператора интегрирования, определенная относительно базисной системы функций, ортонормированных на отрезке $[0,1]$ и полученных из $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ с помощью масштабирования (линейной замены переменной t и нормировки): $C = P^{-1}$ при $\theta = h = 1$. Порядок суммирования можно схематично представить следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \searrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \vdots \\ \rightarrow & \cdot & \downarrow & \downarrow & \vdots \\ \rightarrow & \rightarrow & \cdot & \downarrow & \vdots \\ \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \cdot & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & . \end{bmatrix}.$$

В зависимости от структуры матрицы P^{-1} может быть выбран иной способ суммирования, например, с выделением слагаемых, соответствующих первой строке и первому столбцу, суммированием по ее побочным диагоналям:

$$\begin{bmatrix} \searrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \vdots \\ \downarrow & \cdot & \downarrow & \downarrow & \vdots \\ \downarrow & \rightarrow & \cdot & \downarrow & \vdots \\ \downarrow & \rightarrow & \rightarrow & \cdot & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & . \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \searrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \vdots \\ \swarrow & \cdot & \nearrow & \nearrow & \vdots \\ \swarrow & \swarrow & \cdot & \nearrow & \vdots \\ \swarrow & \swarrow & \swarrow & \cdot & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & . \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \searrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \vdots \\ \downarrow & \cdot & \nearrow & \nearrow & \vdots \\ \downarrow & \swarrow & \cdot & \nearrow & \vdots \\ \downarrow & \swarrow & \swarrow & \cdot & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & . \end{bmatrix}$$

и т.п.

1. Для полиномов Лежандра (14) матрица P^{-1} имеет наиболее простую структуру по сравнению с другими базисными системами, рассмотренными

в этой статье, а именно она является трехдиагональной, причем на главной диагонали только один ненулевой элемент $P^{-1}_{00} = h/2$. В результате

$$
\begin{aligned}
I^{(i_1 i_2)}_{00_h} &= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta^{(i_1)}_0\zeta^{(i_2)}_0 + \sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{j_1-1} C_{j_1 j_2}(\zeta^{(i_1)}_{j_2}\zeta^{(i_2)}_{j_1} - \zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2})\Biggr) = \\
&= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta^{(i_1)}_0\zeta^{(i_2)}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_{m,m-1}(\zeta^{(i_1)}_{m-1}\zeta^{(i_2)}_{m} - \zeta^{(i_1)}_{m}\zeta^{(i_2)}_{m-1})\Biggr) = \\
&= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta^{(i_1)}_0\zeta^{(i_2)}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{4m^2-1}}\,(\zeta^{(i_1)}_{m-1}\zeta^{(i_2)}_{m} - \zeta^{(i_1)}_{m}\zeta^{(i_2)}_{m-1})\Biggr) = \\
&= \frac{h}{2}\Biggl(\zeta^{(i_1)}_0\zeta^{(i_2)}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4m^2-1}}\,(\zeta^{(i_1)}_{m-1}\zeta^{(i_2)}_{m} - \zeta^{(i_1)}_{m}\zeta^{(i_2)}_{m-1})\Biggr).
\end{aligned}
$$

2. Для косинусоид (15) структура матрицы P^{-1} сложнее. Учитывая то, что при четной сумме индексов i и j ее элементы кроме $P^{-1}_{00} = h/2$ нулевые, имеем

$$
\begin{aligned}
I^{(i_1 i_2)}_{00_h} &= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta^{(i_1)}_0\zeta^{(i_2)}_0 + \sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{j_1-1} C_{j_1 j_2}(\zeta^{(i_1)}_{j_2}\zeta^{(i_2)}_{j_1} - \zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2})\Biggr) = \\
&= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta^{(i_1)}_0\zeta^{(i_2)}_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\Biggl[C_{m0}(\zeta^{(i_1)}_{0}\zeta^{(i_2)}_{m} - \zeta^{(i_1)}_{m}\zeta^{(i_2)}_{0}) + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{m-1} C_{m,m-k}(\zeta^{(i_1)}_{m-k}\zeta^{(i_2)}_{m} - \zeta^{(i_1)}_{m}\zeta^{(i_2)}_{m-k})\Biggr]\Biggr) = \\
&= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta^{(i_1)}_0\zeta^{(i_2)}_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\Biggl[\Biggl(-\frac{\sqrt{2}(1-(-1)^m)}{m^2\pi^2}\Biggr)(\zeta^{(i_1)}_{0}\zeta^{(i_2)}_{m} - \zeta^{(i_1)}_{m}\zeta^{(i_2)}_{0}) + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{m-1}\Biggl(-\frac{2(1-(-1)^k)}{k(2m-k)\pi^2}\Biggr)(\zeta^{(i_1)}_{m-k}\zeta^{(i_2)}_{m} - \zeta^{(i_1)}_{m}\zeta^{(i_2)}_{m-k})\Biggr]\Biggr) = \\
&= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta^{(i_1)}_0\zeta^{(i_2)}_0 - \frac{1}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\Biggl[\frac{\sqrt{2}(1-(-1)^m)}{m^2}\,(\zeta^{(i_1)}_{0}\zeta^{(i_2)}_{m} - \zeta^{(i_1)}_{m}\zeta^{(i_2)}_{0}) + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{2(1-(-1)^k)}{k(2m-k)}\,(\zeta^{(i_1)}_{m-k}\zeta^{(i_2)}_{m} - \zeta^{(i_1)}_{m}\zeta^{(i_2)}_{m-k})\Biggr]\Biggr) = \\
&= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta^{(i_1)}_0\zeta^{(i_2)}_0 - \frac{1}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{2^{1-\delta_{km}/2}(1-(-1)^k)}{k(2m-k)}\,(\zeta^{(i_1)}_{m-k}\zeta^{(i_2)}_{m} - \zeta^{(i_1)}_{m}\zeta^{(i_2)}_{m-k})\Biggr) =
\end{aligned}
$$

$$
= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} +
$$

$$
+\frac{2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor}\frac{2^{1-\delta_{2j-1,m}/2}}{(2j-1)(2m-2j+1)}\left(\zeta_m^{(i_1)}\zeta_{m-2j+1}^{(i_2)}-\zeta_{m-2j+1}^{(i_1)}\zeta_m^{(i_2)}\right)\Biggr),
$$

где $\lfloor\cdot\rfloor$ означает целую часть числа.

Суммируя по побочным диагоналям и учитывая только ненулевые элементы матрицы P^{-1}, находим разложение для стохастических интегралов $I_{00_h}^{(i_1i_2)}$ в другой форме:

$$
I_{00_h}^{(i_1i_2)} = h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}C_{j_1j_2}(\zeta_{j_2}^{(i_1)}\zeta_{j_1}^{(i_2)}-\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)})\Biggr) =
$$

$$
= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{m=1}^{\infty}\Biggl[C_{m0}(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_m^{(i_2)}-\zeta_m^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}) +
$$

$$
+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}C_{m-k+1,k}(\zeta_k^{(i_1)}\zeta_{m-k+1}^{(i_2)}-\zeta_{m-k+1}^{(i_1)}\zeta_k^{(i_2)})\Biggr]\Biggr) =
$$

$$
= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{j=1}^{\infty}\Biggl[C_{2j-1,0}(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2j-1}^{(i_2)}-\zeta_{2j-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}) +
$$

$$
+\sum_{k=1}^{j}C_{2j-k+1,k}(\zeta_k^{(i_1)}\zeta_{2j-k+1}^{(i_2)}-\zeta_{2j-k+1}^{(i_1)}\zeta_k^{(i_2)})\Biggr]\Biggr) =
$$

$$
= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{j=1}^{\infty}\Biggl[\left(-\frac{2\sqrt{2}}{(2j-1)^2\pi^2}\right)(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2j-1}^{(i_2)}-\zeta_{2j-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}) +
$$

$$
+\sum_{k=1}^{j}\left(-\frac{4}{(2k-2j-1)(2j+1)}\right)(\zeta_k^{(i_1)}\zeta_{2j-k+1}^{(i_2)}-\zeta_{2j-k+1}^{(i_1)}\zeta_k^{(i_2)})\Biggr]\Biggr) =
$$

$$
= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\Biggl[\frac{\sqrt{2}}{(2j-1)^2}(\zeta_{2j-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2j-1}^{(i_2)}) +
$$

$$
+\sum_{k=1}^{j}\frac{2}{(2k-2j-1)(2j+1)}\left(\zeta_{2j-k+1}^{(i_1)}\zeta_k^{(i_2)}-\zeta_k^{(i_1)}\zeta_{2j-k+1}^{(i_2)}\right)\Biggr]\Biggr).
$$

3. Для функций Уолша (16) в «верхнем треугольнике» матрицы P^{-1} можно выделить блоки — диагональные матрицы вида $(1/2^{m+2})E_{2^m}$, где E_{2^m} — единичная матрица порядка 2^m, $m=0,1,2,\ldots$ Учитывая такую структуру

матрицы P^{-1}, имеем

$$
\begin{aligned}
I_{00_h}^{(i_1 i_2)} &= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{j_1-1} C_{j_1 j_2}(\zeta_{j_2}^{(i_1)}\zeta_{j_1}^{(i_2)} - \zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)})\Biggr) = \\
&= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^m-1} C_{2^m+k,k}(\zeta_{k}^{(i_1)}\zeta_{2^m+k}^{(i_2)} - \zeta_{2^m+k}^{(i_1)}\zeta_{k}^{(i_2)})\Biggr) = \\
&= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{m+2}}\right)\sum_{k=0}^{2^m-1} (\zeta_{k}^{(i_1)}\zeta_{2^m+k}^{(i_2)} - \zeta_{2^m+k}^{(i_1)}\zeta_{k}^{(i_2)})\Biggr) = \\
&= \frac{h}{2}\Biggl(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{2^m-1} (\zeta_{2^m+k}^{(i_1)}\zeta_{k}^{(i_2)} - \zeta_{k}^{(i_1)}\zeta_{2^m+k}^{(i_2)})\Biggr).
\end{aligned}
$$

4. Для функций Хаара (17), как и для функций Уолша, в матрице P^{-1} можно выделить блоки — квадратные (но не диагональные) матрицы порядка 2^m, $m = 0, 1, 2, \ldots$ Принимая это во внимание, а также отделяя элементы первой строки и первого столбца, получаем

$$
\begin{aligned}
I_{00_h}^{(i_1 i_2)} &= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{j_1-1} C_{j_1 j_2}(\zeta_{j_2}^{(i_1)}\zeta_{j_1}^{(i_2)} - \zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)})\Biggr) = \\
&= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^s-1} C_{2^s+k,0}(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2^s+k}^{(i_2)} - \zeta_{2^s+k}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}) + \\
&\quad + \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^s-1}\sum_{l=0}^{2^{m-1}-1}\bigl(C_{2^m(2^s+k)+l,2^s+k}(\zeta_{2^s+k}^{(i_1)}\zeta_{2^m(2^s+k)+l}^{(i_2)} - \zeta_{2^m(2^s+k)+l}^{(i_1)}\zeta_{2^s+k}^{(i_2)}) + \\
&\quad + C_{2^m(2^s+k)+2^{m-1}+l,2^s+k}(\zeta_{2^s+k}^{(i_1)}\zeta_{2^m(2^s+k)+2^{m-1}+l}^{(i_2)} - \zeta_{2^m(2^s+k)+2^{m-1}+l}^{(i_1)}\zeta_{2^s+k}^{(i_2)})\bigr)\Biggr) = \\
&= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^s-1}\left(-\frac{\sqrt{2^s}}{2^{2(s+1)}}\right)(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2^s+k}^{(i_2)} - \zeta_{2^s+k}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}) + \\
&\quad + \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^s-1}\sum_{l=0}^{2^{m-1}-1}\Biggl[\left(-\frac{\sqrt{2^{2s+m}}}{2^{2(m+s+1)}}\right)(\zeta_{2^s+k}^{(i_1)}\zeta_{2^m(2^s+k)+l}^{(i_2)} - \zeta_{2^m(2^s+k)+l}^{(i_1)}\zeta_{2^s+k}^{(i_2)}) + \\
&\quad + \frac{\sqrt{2^{2s+m}}}{2^{2(m+s+1)}}(\zeta_{2^s+k}^{(i_1)}\zeta_{2^m(2^s+k)+2^{m-1}+l}^{(i_2)} - \zeta_{2^m(2^s+k)+2^{m-1}+l}^{(i_1)}\zeta_{2^s+k}^{(i_2)})\Biggr]\Biggr) = \\
&= h\Biggl(\frac{1}{2}\,\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2^s}}{2^{2(s+1)}}\sum_{k=0}^{2^s-1}(\zeta_{2^s+k}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2^s+k}^{(i_2)}) +
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2^{(2s+m)}}}{2^{2(s+m+1)}}\sum_{k=0}^{2^s-1}\sum_{l=0}^{2^{m-1}-1}\left(\left(\zeta_{2^m(2^s+k)+l}^{(i_1)}-\zeta_{2^m(2^s+k)+2^{m-1}+l}^{(i_1)}\right)\zeta_{2^s+k}^{(i_2)}-\right.$$

$$\left.-\zeta_{2^s+k}^{(i_1)}\left(\zeta_{2^m(2^s+k)+l}^{(i_2)}-\zeta_{2^m(2^s+k)+2^{m-1}+l}^{(i_2)}\right)\right)\Bigg).$$

5. Для тригонометрических функций (18) ненулевые элементы матрицы P^{-1} присутствуют только в первой строке и первом столбце, а также среди элементов наддиагонали и поддиагонали. Следовательно,

$$I_{00_h}^{(i_1 i_2)}=h\left(\frac{1}{2}\,\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}C_{j_1 j_2}(\zeta_{j_2}^{(i_1)}\zeta_{j_1}^{(i_2)}-\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)})\right)=$$

$$=h\left(\frac{1}{2}\,\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\sum_{m=1}^{\infty}C_{m0}(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_m^{(i_2)}-\zeta_m^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)})+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=2}^{\infty}C_{l,l-1}(\zeta_{l-1}^{(i_1)}\zeta_l^{(i_2)}-\zeta_l^{(i_1)}\zeta_{l-1}^{(i_2)})\right)=$$

$$=h\left(\frac{1}{2}\,\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2k\pi}\right)(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2k-1}^{(i_2)}-\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)})+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2k\pi}\right)(\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2k}^{(i_2)}-\zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2k-1}^{(i_2)})\right)=$$

$$=\frac{h}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\sqrt{2}(\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2k-1}^{(i_2)})+\zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2k-1}^{(i_2)}-\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2k}^{(i_2)}\right]\right).$$

Подведем итог этого раздела.

1. Для полиномов Лежандра (14)

$$I_{00_h}^{(i_1 i_2)}=\frac{h}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4m^2-1}}\left(\zeta_{m-1}^{(i_1)}\zeta_m^{(i_2)}-\zeta_m^{(i_1)}\zeta_{m-1}^{(i_2)}\right)\right). \qquad (32)$$

2. Для косинусоид (15)

$$I_{00_h}^{(i_1 i_2)}=h\left(\frac{1}{2}\,\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor}\frac{2^{1-\delta_{2j-1,m}/2}}{(2j-1)(2m-2j+1)}\left(\zeta_m^{(i_1)}\zeta_{m-2j+1}^{(i_2)}-\zeta_{m-2j+1}^{(i_1)}\zeta_m^{(i_2)}\right)\right). \qquad (33)$$

3. Для функций Уолша (16)

$$I_{00_h}^{(i_1 i_2)} = \frac{h}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{2^m-1}\left(\zeta_{2^m+k}^{(i_1)}\zeta_k^{(i_2)} - \zeta_k^{(i_1)}\zeta_{2^m+k}^{(i_2)}\right)\right). \qquad (34)$$

4. Для функций Хаара (17)

$$I_{00_h}^{(i_1 i_2)} = h\Bigg(\frac{1}{2}\,\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2^s}}{2^{2(s+1)}}\sum_{k=0}^{2^s-1}\left(\zeta_{2^s+k}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2^s+k}^{(i_2)}\right) +$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2^{(2s+m)}}}{2^{2(s+m+1)}}\sum_{k=0}^{2^s-1}\sum_{l=0}^{2^{m-1}-1}\Big(\big(\zeta_{2^m(2^s+k)+l}^{(i_1)} - \zeta_{2^m(2^s+k)+2^{m-1}+l}^{(i_1)}\big)\,\zeta_{2^s+k}^{(i_2)} -$$

$$-\,\zeta_{2^s+k}^{(i_1)}\big(\zeta_{2^m(2^s+k)+l}^{(i_2)} - \zeta_{2^m(2^s+k)+2^{m-1}+l}^{(i_2)}\big)\Big)\Bigg). \qquad (35)$$

5. Для тригонометрических функций (18)

$$I_{00_h}^{(i_1 i_2)} = \frac{h}{2}\Bigg(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\sqrt{2}\left(\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2k-1}^{(i_2)}\right) + \zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2k-1}^{(i_2)} - \zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2k}^{(i_2)}\right]\Bigg). \quad (36)$$

Полученные разложения повторных стохастических интегралов (32) и (36) совпадают с разложениями из [6, 16], разложения (33) и (35) близки к приведенным в [19] (отличаются формой записи), разложения (34) и (35) проще, нежели в [6, 16].

Напомним, что для спектральных характеристик P^{-1} оператора интегрирования выполняется свойство подобия (20), в котором матрицы $\underset{pq}{\Delta}$ и $\underset{qp}{\Delta}$, связанные соотношением $\underset{pq}{\Delta} = \underset{qp}{\Delta}^{\mathrm{T}}$, являются ортогональными (здесь уместно напомнить [20, 21, 23, 25], что для любой базисной системы ковариационная функция стандартного гауссовского белого шума в спектральной форме математического описания представляется бесконечной единичной матрицей E и изменение базисной системы приводит к соотношению $\underset{pq}{\Delta}\,\underset{qp}{\Delta} = E$, т.е. $\underset{pq}{\Delta}^{\mathrm{T}} = \underset{pq}{\Delta}^{-1}$). Тогда, например, разложение повторных стохастических интегралов $I_{00_h}^{(i_1 i_2)}$ при $i_1 \neq i_2$ можно представить в форме

$$I_{00_h}^{(i_1 i_2)} = \mathcal{V}_{i_2}^{\mathrm{T}}\underset{p}{P}^{-1}\mathcal{V}_{i_1} = \mathcal{V}_{i_2}^{\mathrm{T}}\underset{pq}{\Delta}\,\underset{q}{P}^{-1}\,\underset{qp}{\Delta}\,\mathcal{V}_{i_1} = [\underset{qp}{\Delta}\,\mathcal{V}_{i_2}]^{\mathrm{T}}\underset{q}{P}^{-1}\,\underset{qp}{\Delta}\,\mathcal{V}_{i_1} = \tilde{\mathcal{V}}_{i_2}^{\mathrm{T}}\underset{q}{P}^{-1}\tilde{\mathcal{V}}_{i_1},$$

где $\tilde{\mathcal{V}}_{i_1}$ и $\tilde{\mathcal{V}}_{i_2}$ — результат линейного преобразования $\mathcal{V}_{i_1}$ и $\mathcal{V}_{i_2}$ соответственно, определяемого матрицей $\underset{qp}{\Delta}$.

Фактически, результат ортогонального преобразования спектральных характеристик стандартных гауссовских белых шумов $\tilde{\mathcal{V}}_{i_1}$ и $\tilde{\mathcal{V}}_{i_2}$ — это бесконечные матрицы-столбцы, элементы которых, как и элементы матриц-столбцов $\mathcal{V}_{i_1}$ и $\mathcal{V}_{i_2}$, являются независимыми случайными величинами, имеющими стандартное нормальное распределение. В этом смысле все полученные выше разложения повторных стохастических интегралов эквивалентны. Однако при практической реализации методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений, использующих процедуры моделирования повторных стохастических интегралов и требующих перехода к конечным суммам случайных величин $\zeta_i^{(j)}$, $i = 0, 1, \ldots, L-1$ и $j = 1, 2, \ldots, s$, где L — порядок усечения, каждое разложение будет обладать своими уникальными свойствами кроме, может быть, разложений (34) и (35) при выборе функции Уолша и функций Хаара соответственно. Последнее обстоятельство связано с блочно-диагональной структурой матрицы $\underset{\Omega X}{\Delta}$. Стоит отметить, что порядок усечения L для разложений (34) и (35) следует выбирать как $L = 2^r$, где $r = 1, 2, 3, \ldots$, что связано с особенностями нумерации функции Уолша и Хаара, а также их свойствами. Порядок усечения L для (36) целесообразно выбирать нечетным.

Таким образом, при усечении до порядка L верхний предел суммирования в соотношениях (32) и (33) следует заменить на L, в (34) — на $r-1$ и в (35) — на $r-1$, $r-2$ и $r-s-1$ для трех бесконечных сумм в соответствии с их порядком в этом соотношении при $L = 2^r$, а в (36) — на $(L-1)/2$ при нечетном L.

Вопросы моделирования повторных стохастических интегралов с контролем среднеквадратической погрешности аппроксимации при выборе полиномов Лежандра и тригонометрических функций детально исследованы в [6,16], для функций Хаара такие результаты содержатся в [19].

Представление площади Леви в спектральной форме математического описания для различных базисных систем

Применяя спектральную форму математического описания для представления повторных стохастических интегралов в формуле (26), получаем

$$A_h^{(i_1 i_2)} = \frac{1}{2}\left(I_{00_h}^{(i_1 i_2)} - I_{00_h}^{(i_2 i_1)}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{V}_{i_2}^{\mathrm{T}} P^{-1} \mathcal{V}_{i_1} - \mathcal{V}_{i_1}^{\mathrm{T}} P^{-1} \mathcal{V}_{i_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathcal{V}_{i_2}^{\text{т}} P^{-1} \mathcal{V}_{i_1} - \mathcal{V}_{i_2}^{\text{т}} [P^{-1}]^{\text{т}} \mathcal{V}_{i_1}\right) = \frac{1}{2}\big(\mathcal{V}_{i_2}^{\text{т}} (P^{-1} - [P^{-1}]^{\text{т}}\big) \mathcal{V}_{i_1}\big).$$

Далее воспользуемся разложением (11) матрицы P^{-1} на симметрическую и кососимметрическую составляющие, согласно которому

$$P^{-1} - [P^{-1}]^{\text{т}} = \frac{1}{2}\Lambda + \bar{P}^{-1} - \frac{1}{2}\Lambda - [\bar{P}^{-1}]^{\text{т}} = \bar{P}^{-1} + \bar{P}^{-1} = 2\bar{P}^{-1},$$

следовательно,

$$A_h^{(i_1 i_2)} = \mathcal{V}_{i_2}^{\text{т}} \bar{P}^{-1} \mathcal{V}_{i_1}. \tag{37}$$

Напомним, что $\bar{P}^{-1}$ — кососимметрическая матрица, которая отличается от матрицы P^{-1} только тем, что $\bar{P}_{00}^{-1} = 0$ (на базисную систему $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ ортонормированных на отрезке $[0,h]$ функций накладывается условие $e(t) = \sqrt{h}\, q(0,t)$, где $e(t) = 1$; оно выполнено для всех базисных систем, рассмотренных в этой статье). Поэтому

$$A_h^{(i_1 i_2)} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \bar{P}_{j_1 j_2}^{-1} \zeta_{j_1}^{(i_2)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} = h \sum_{j_1=1}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} (C_{j_1 j_2} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_1}^{(i_2)} + C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)}) =$$
$$= h \sum_{j_1=1}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} C_{j_1 j_2} (\zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_1}^{(i_2)} - \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)}),$$

где элементы матрицы C определяются выражением (19).

Таким образом, можно записать соотношения для площади Леви при различном выборе базисных систем, основываясь на результатах предыдущего раздела, а именно на формулах (32)–(36).

1. Для полиномов Лежандра (14)

$$A_h^{(i_1 i_2)} = \frac{h}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4m^2-1}} (\zeta_{m-1}^{(i_1)} \zeta_m^{(i_2)} - \zeta_m^{(i_1)} \zeta_{m-1}^{(i_2)}). \tag{38}$$

2. Для косинусоид (15)

$$A_h^{(i_1 i_2)} = \frac{2h}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \frac{2^{1-\delta_{2j-1,m}/2}}{(2j-1)(2m-2j+1)} (\zeta_m^{(i_1)} \zeta_{m-2j+1}^{(i_2)} - \zeta_{m-2j+1}^{(i_1)} \zeta_m^{(i_2)}). \tag{39}$$

3. Для функций Уолша (16)

$$A_h^{(i_1 i_2)} = \frac{h}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{2^m-1} (\zeta_{2^m+k}^{(i_1)} \zeta_k^{(i_2)} - \zeta_k^{(i_1)} \zeta_{2^m+k}^{(i_2)}). \tag{40}$$

4. Для функций Хаара (17)

$$
\begin{aligned}
A_h^{(i_1 i_2)} = h\Biggl(&\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2^s}}{2^{2(s+1)}} \sum_{k=0}^{2^s-1} \bigl(\zeta_{2^s+k}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2^s+k}^{(i_2)}\bigr) + \\
&+ \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2^{(2s+m)}}}{2^{2(s+m+1)}} \sum_{k=0}^{2^s-1}\sum_{l=0}^{2^{m-1}-1} \Bigl(\bigl(\zeta_{2^m(2^s+k)+l}^{(i_1)} - \zeta_{2^m(2^s+k)+2^{m-1}+l}^{(i_1)}\bigr)\zeta_{2^s+k}^{(i_2)} - \\
&\quad - \zeta_{2^s+k}^{(i_1)}\bigl(\zeta_{2^m(2^s+k)+l}^{(i_2)} - \zeta_{2^m(2^s+k)+2^{m-1}+l}^{(i_2)}\bigr)\Bigr)\Biggr).
\end{aligned}
\tag{41}
$$

5. Для тригонометрических функций (18)

$$
A_h^{(i_1 i_2)} = \frac{h}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\Bigl[\sqrt{2}\bigl(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2k-1}^{(i_2)} - \zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\bigr) + \zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2k-1}^{(i_2)} - \zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2k}^{(i_2)}\Bigr]. \tag{42}
$$

Заключение

В статье изложены некоторые аспекты применения спектральной формы математического описания систем управления для представления повторных стохастических интегралов второй кратности и площади Леви с помощью спектральных характеристик оператора интегрирования (двумерных нестационарных передаточных функций интегрирующего звена), т.е. бесконечных матриц, образованных коэффициентами разложения первообразных для базисных функций по этой же базисный системе, и базовых операций матричной алгебры. Такое представление не зависит от выбора базисной системы. Подробно рассмотрены следующие базисные системы: полиномы Лежандра, косинусоиды, функции Уолша и Хаара, а также тригонометрический базис Фурье. Наиболее конструктивные результаты получены для полиномов Лежандра и тригонометрического базиса Фурье, что обусловлено структурой соответствующих матриц, которая в свою очередь связана со свойствами базисных функций (разложением первообразных в виде конечных сумм). Стоит отметить, что эффективность использования полиномов Лежандра по сравнению с тригонометрическими функциями, как показано в [6,40], значительно возрастает при построении более точных методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений (с порядком сходимости более 1.0).

Спектральную форму математического описания можно применить и для представления повторных стохастических интегралов кратности выше второй, однако для этого нужно использовать спектральную характеристику множительного звена — пространственную (трехмерную) матрицу, которая позволяет преобразовать спектральную характеристику функции (бесконечную матрицу-столбец) в спектральную характеристику оператора умножения на эту функцию (бесконечную матрицу), или по терминологии [20, 21] в двумерную нестационарную передаточную функцию усилительного звена. Кроме того, должны использоваться спектральные характеристики подынтегральных функций, задающих повторный стохастический интеграл, либо спектральные характеристики операторов умножения на эти функции.

В дальнейшем предполагается применение полученных результатов при численном моделировании стохастических систем управления [7, 14, 41, 42].

Список литературы

[1] *Gardiner C.W.* Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences. — Springer-Verlag, 1997.

[2] *Artemiev S.S.*, *Averina T.A.* Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. — VSP, 1997.

[3] *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. — М.: ФАЗИС, 1998.

[4] *Øksendal B.* Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. — Springer-Verlag, 2000.

[5] *Артемьев С.С.*, *Марченко М.А.*, *Корнеев В.Д.*, *Якунин М.А.*, *Иванов А.А.*, *Смирнов Д.Д.* Анализ стохастических колебаний методом Монте-Карло на суперкомпьютерах. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016.

[6] *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С программами в среде MATLAB // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2018. № 4.

[7] *Рыбаков К.А.* Решение нелинейных задач оценивания при обработке навигационных данных с использованием непрерывного фильтра частиц // Гироскопия и навигация. — 2018. Т. 26. № 4 (103). — С. 82–95.

[8] *Мильштейн Г.Н.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. — Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1988.

[9] *Kloeden P.E.*, *Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Springer-Verlag, 1995.

[10] *Schurz H.* Numerical analysis of stochastic differential equations without tears // Handbook of Stochastic Analysis and Applications (ed. by Lakshmikantham V., Kannan D.). — Marcel Dekker, 2002. — P. 237–359.

[11] *Milstein G.N.*, *Tretyakov M.V.* Stochastic Numerics for Mathematical Physics. — Springer-Verlag, 2004.

[12] *Graham C.*, *Talay D.* Stochastic Simulation and Monte Carlo Methods. — Springer-Verlag, 2013.

[13] *Аверина Т.А.* Статистическое моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019.

[14] *Аверина Т.А.*, *Рыбаков К.А.* Модификация численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений с первым интегралом // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2019. Т. 22. № 3. — С. 243–259.

[15] *Кузнецов Д.Ф.* Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 1997. № 1. — С. 18–77.

[16] *Кузнецов Д.Ф.* Повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича: разложения Фурье – Лежандра и тригонометрические разложения, аппроксимации, формулы // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2017. № 1.

[17] *Мильштейн Г.Н.* Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения. — 1974. Т. 19. № 3. — С. 583–588.

[18] *Kuznetsov D.F.* New simple method for obtainment an expansion of double stochastic Ito integrals, which is based on the expansion of Brownian motion using Legendre polynomials and trigonometric functions. arXiv:1807.00409v3 [math.PR], 2019.

[19] *Пригарин С.М.*, *Белов С.М.* Об одном применении разложений винеровского процесса в ряды // Препринт 1107. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 1998.

[20] *Солодовников В.В.*, *Семенов В.В.* Спектральная теория нестационарных систем управления. — М.: Наука, 1974.

[21] *Солодовников В.В.*, *Семенов В.В.*, *Пешель М.*, *Недо Д.* Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. — М.: Машиностроение, 1979.

[22] Таблицы и математическое обеспечение спектрального метода теории автоматического управления / Под ред. В.В. Семенова. — М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1973.

[23] *Семенов В.В., Рыбин В.В.* Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом. — М.: МАИ, 1984.

[24] *Лапин С.В., Егупов Н.Д.* Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.

[25] *Рыбин В.В.* Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. — М.: Изд-во МАИ, 2011.

[26] *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.* Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. — М.: Вузовская книга, 2015.

[27] *Рыбаков К.А., Рыбин В.В.* Алгоритмическое и программное обеспечение расчета систем автоматического управления в спектральной форме математического описания / В кн. Современная наука: теоретические, практические и инновационные аспекты развития. Т. 2. Ростов-на-Дону: Изд-во Международного исследовательского центра «Научное сотрудничество», 2018. — С. 171–199.

[28] *Рыбин В.В.* Описание и анализ линейных нестационарных непрерывных систем управления в спектральной области в неортогональных базисах. Орторекурсивный подход // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2018. № 4. — С. 18–40.

[29] *Рыбаков К.А., Рыбин В.В.* Спектральные характеристики операторов дифференцирования и интегрирования относительно ортогональных финитных функций. I. Симметричные сплайны // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики (АПВПМ-2019). Международная конференция в рамках Марчуковских научных чтений – 2019, Новосибирск, 1–5 июля 2019 г.: Материалы конф. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2019.

[30] *Рыбаков К.А., Рыбин В.В.* Спектральные характеристики операторов дифференцирования и интегрирования относительно ортогональных финитных функций. II. Несимметричные сплайны // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики (АПВПМ-2019). Международная конференция в рамках Марчуковских научных чтений – 2019, Новосибирск, 1–5 июля 2019 г.: Материалы конф. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2019.

[31] *Балакришнан А.В.* Прикладной функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.

[32] *Сотскова И.Л.* Применение аппарата обобщенной характеристической функции к анализу стохастических систем управления ЛА // Задачи стохастического управления: Тем. сб. науч. тр. — М.: МАИ, 1986. — С. 71–78.

[33] *Ито К.*, *Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. — М.: Мир, 1968.

[34] *Zhang Z.*, *Karniadakis G.E.* Numerical Methods for Stochastic Partial Differential Equations with White Noise. — Springer, 2017.

[35] *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.

[36] *Липцер Р.Ш.*, *Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). — М.: Наука, 1974.

[37] *Clark J.M.C.*, *Cameron R.J.* The maximum rate of convergence of discrete approximations for stochastic differential equations // Stochastic Differential Systems. Filtering and Control (ed. by Grigelionis B.). — Springer-Verlag, 1980. — P. 162–171.

[38] *Леви П.* Стохастические процессы и броуновское движение. — М.: Наука, 1972.

[39] *Malham S.J.A.*, *Wiese A.* An introduction to SDE simulation. arXiv: 1004.0646 [math.NA], 2010.

[40] *Кузнецов Д.Ф.* Сравнительный анализ эффективности применения полиномов Лежандра и тригонометрических функций к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. Т. 59. № 8. — С. 1299–1313.

[41] *Averina T.A.*, *Karachanskaya E.V.*, *Rybakov K.A.* Statistical modeling of random processes with invariants // Proceedings of the 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). Novosibirsk Akademgorodok, Russia, September 18–22, 2017. — IEEE, 2017. — P. 34–37.

[42] *Averina T.A.*, *Rybakov K.A.* Systems with regime switching on manifolds // Proceedings of the 2018 14th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (STAB). Moscow, Russia, 30 May – 1 June, 2018. — IEEE, 2018. — P. 1–3.