

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 2, 2016

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Численные методы

## Спектральные аналоги множества допустимых управлений для финитных базисных систем\*

К. А. Рыбаков

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)

[rkoffice@mail.ru](mailto:rkoffice@mail.ru)

**Аннотация.** Рассматривается задача построения спектральных аналогов множества допустимых скалярных управлений с геометрическими ограничениями для динамической системы, т.е. нахождение множества коэффициентов разложения управлений по функциям базисных систем. Полученные ранее результаты для ортонормированных базисных систем обобщаются на биортонормированные базисы. В качестве примеров взяты финитные базисные системы, порожденные сплайнами Шёнберга и Леонтьева, а также локальными полиномиальными сплайнами и произвольными финитными функциями, выбранными таким образом, чтобы спектральный аналог множества допустимых управлений был наиболее простым, а именно кубом. Для апробации решена задача оптимизации двумерной динамической системы с геометрическим ограничением на управление.

**Ключевые слова:** биортонормированный базис, геометрические ограничения, оптимальное управление, спектральный метод, финитные функции.

**Abstract.** The spectral analogs of admissible scalar controls with geometric constraints for dynamical systems are described. The spectral analog is a set of Fourier coefficients for admissible controls. The existing results for orthonormal functions are generalized for biorthonormal functions. Schoenberg and Leontiev splines are used to build these sets. Also, local polynomial splines and arbitrary finite functions are used to build a cube as the spectral analog of admissible scalar controls. An optimal control problem for the two-dimensional dynamical system with constrained controls is solved.

**Key words:** biorthonormal basis, geometric constraints, optimal control, spectral method, finite functions.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-07-00419-а).

## Введение

Статья продолжает исследования, начатые в [17], по нахождению спектральных аналогов множества допустимых управлений. Эта задача состоит в точном или приближенном построении выпуклого, замкнутого и ограниченного подмножества в пространстве  $\mathbb{R}^L$ , которому принадлежат векторы, образованные коэффициентами разложения квадратично интегрируемой функции  $u(t): T \rightarrow [-v, v]$ ,  $T = [t_0, t_1]$ , по первым  $L$  функциям ортонормированного базиса пространства  $L_2(T)$ , т.е. учитываются геометрические ограничения  $|u(t)| \leq v$ , часто встречающиеся в задачах управления динамическими системами.

В [17] предложены различные варианты алгоритма приближенного построения спектрального аналога множества допустимых управлений в виде выпуклой замкнутой многогранной области в  $\mathbb{R}^L$ . В качестве примеров построены такие области в  $\mathbb{R}^3$  для полиномов Лежандра и тригонометрических функций. Для функций Уолша показано, что спектральный аналог множества допустимых управлений представляет собой  $L$ -мерный октаэдр для произвольного  $L$ . Предложен алгоритм проверки допустимости управления, сводящийся к вычислению октаэдрической нормы вектора коэффициентов разложения функции  $u(t)$  по функциям Уолша. Эти результаты позволили решить модельную задачу оптимального управления для двумерной динамической системы со скалярным управлением и геометрическим ограничением при  $L = 1024$  спектральным методом, т.е. с применением спектральной формы математического описания [20].

Далее рассмотрим систему кусочно-постоянных финитных функций  $\{\Pi(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ :

$$\Pi(i, t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \pi(i, t), \quad i = 0, 1, \dots, L-1, \quad h = \frac{t_1 - t_0}{L}, \quad t \in T,$$

где

$$\pi(i, t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_0 + ih, t_0 + (i+1)h), \\ 0, & t \notin [t_0 + ih, t_0 + (i+1)h), \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, L-1;$$

функцию  $\pi(L-1, t)$  целесообразно доопределить в точке  $t_1$  по непрерывности.

Эти функции ортогональны, поскольку имеют попарно непересекающиеся носители:  $\text{supp } \Pi_i(t) \cap \text{supp } \Pi_j(t) = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , и нормированы в пространстве  $L_2(T)$ :

$$(\Pi(i, t), \Pi(j, t))_{L_2(T)} = \int_{t_0}^{t_1} \Pi(i, t) \Pi(j, t) dt = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \dots, L-1.$$

В [2, 5] функции  $\{\pi(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  названы блочно-импульсными. Они использовались для решения задач оптимального управления проекционно-сеточным спектральным методом. Из-за того, что носители этих функций не пересекаются, при их применении упрощается проверка допустимости управлений в спектральной области, а именно коэффициенты разложения функции  $u(t)$  можно проверять независимо друг от друга. Если этот результат сформулировать в терминах работы [17], то множество допустимых управлений в спектральной форме математического описания —  $L$ -мерный куб, а алгоритм проверки допустимости управления сводится к вычислению кубической нормы вектора коэффициентов разложения функции  $u(t)$  по блочно-импульсным функциям.

Система блочно-импульсных функций  $\{\Pi(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  конечна и не является базисом пространства  $L_2(T)$ , тем не менее подобные системы функций могут эффективно применяться в различных приближенных методах. Ортонормированность этой системы позволяет использовать ее в спектральных методах анализа, синтеза и идентификации динамических

систем [2, 5, 10–13, 16, 18, 19]. Объединение таких систем функций при различных  $h$  может быть перестроено в базисные системы функций Уолша или функций Хаара.

Цель данной работы состоит в том, чтобы предложить финитные базисные системы, отличные от блочно-импульсных функций, для которых спектральный аналог множества допустимых управлений также является кубом в  $\mathbb{R}^L$ . Для этого рассмотрены сплайны, которые ранее успешно применялись при расчетах проекционно-сеточным спектральным методом [19]. Это  $B$ -сплайны Шёнберга, сплайны Леонтьева, кубические сплайны Эрмита [4, 6, 7]. В работе показано, что системами, обладающими требуемым свойством, являются, например, кусочно-линейные финитные функции, порожденные сплайнами Шёнберга первой степени [19], они также были рассмотрены в [5] в приложении к задачам оптимального управления. При использовании сплайнов Шёнберга степени выше первой искомые спектральные аналоги кубом не являются, их можно находить приближенно. Для финитных функций, порожденных сплайнами Леонтьева первой и второй степени, спектральный аналог множества допустимых управлений предлагается аппроксимировать кубом в  $\mathbb{R}^L$ , однако в этом случае при решении задач оптимального управления получается результат, уступающий по точности перечисленным выше системам функций. Предложено использовать локальные полиномиальные сплайны и произвольные финитные функции, чтобы получить куб в  $\mathbb{R}^L$  в качестве спектрального аналога множества допустимых управлений.

Далее введем необходимые обозначения и переформулируем постановку задачи из [17] для использования биортонормированных базисов.

### Основные обозначения и постановка задачи

Пусть  $u(t): T \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $T = [t_0, t_1]$ , — некоторая скалярная функция, а система функций  $\{q^p(i, t), q^b(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$  образует биортонормированный базис пространства  $L_2(T; \nu(t))$ ,  $\nu(t)$  — весовая функция:

$$(q^p(i, t), q^b(j, t))_{L_2(T; \nu(t))} = \int_{t_0}^{t_1} \nu(t) q^p(i, t) q^b(j, t) dt = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где функции  $\{q^p(i, t), q^b(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$  кусочно-непрерывны на  $T$ . Система функций  $\{q^p(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$  называется базисом разложения, а  $\{q^b(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$  — базисом восстановления [19]. Весовая функция  $\nu(t)$  полагается тождественно равной единице, если специально не оговорено иное.

Таким образом, если  $u(t) \in L_2(T; \nu(t))$ , то

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i q^b(i, t), \quad t \in T, \quad (2)$$

где  $u_i$  — коэффициенты разложения функции  $u(t)$ :

$$u_i = (q^p(i, t), u(t))_{L_2(T; \nu(t))} = \int_{t_0}^{t_1} \nu(t) q^p(i, t) u(t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Спектральной характеристикой  $\mathbf{U}$  функции  $u(t)$ , определенной относительно базиса разложения  $\{q^p(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ , называется упорядоченная совокупность коэффициентов  $u_i$ , представленных в виде бесконечной матрицы-столбца (транспонированной матрицы-строки) [18, 19]:  $\mathbf{U} = [u_0 \ u_1 \ u_2 \ \dots]^T$ . Преобразование, ставящее в соответствие функции ее спектральную характеристику, называют спектральным преобразованием и обозначают  $\mathbb{S}$ , тогда  $\mathbf{U} = \mathbb{S}[u(t)]$ ,  $u(t) = \mathbb{S}^{-1}[\mathbf{U}]$ ,  $\mathbb{S}^{-1}$  — обратное спектральное преобразование.

Наряду с точным представлением функции  $u(t)$  в виде ряда (2) можно рассматривать задачу приближенного представления в виде частичной суммы:

$$u(t) \approx u_L(t) = \sum_{i=0}^{L-1} u_i q^{\text{B}}(i, t), \quad (3)$$

где  $L$  — порядок усечения спектральных характеристик [11, 13, 18–20], тогда спектральная характеристика представляется матрицей-столбцом:  $\mathbf{U} = [u_0 \ u_1 \ \dots \ u_{L-1}]^{\text{T}} \in \mathbb{R}^L$ .

Пространство  $L_2(T; \nu(t))$  линейно, конечномерное подпространство  $L_2(T; \nu(t))_L$ , образованное первыми  $L$  базисными функциями базиса восстановления  $q^{\text{B}}(0, t), q^{\text{B}}(1, t), \dots, q^{\text{B}}(L-1, t)$ , линейно по построению:

$$L_2(T; \nu(t))_L = \text{Lin}\{q^{\text{B}}(0, t), q^{\text{B}}(1, t), \dots, q^{\text{B}}(L-1, t)\},$$

поэтому множество всех спектральных характеристик функций из  $L_2(T; \nu(t))_L$  совпадает с  $\mathbb{R}^L$ . Для функций из  $L_2(T; \nu(t))$  множество всех спектральных характеристик — пространство квадратично суммируемых последовательностей  $l_2$ .

Предположим, что для функции  $u(t)$  задано дополнительное условие вида  $|u(t)| \leq v$ , часто используемое в задачах оптимального управления с ограничениями, т.е.  $u(t)$  — допустимое управление некоторой динамической системой,  $v$  — заданное положительное число,  $t$  — время. Задача построения множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания состоит в построении множества спектральных характеристик  $\mathbf{U}_L \subset \mathbb{R}^L$ , соответствующего функциям из  $L_2(T; \nu(t))_L \cap \{u(t) : |u(t)| \leq v\}$  при спектральном преобразовании  $\mathbb{S}$  с заданным порядком усечения  $L$ .

Для финитных базисных систем  $\{q^{\text{P}}(i, t), q^{\text{B}}(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  в условии (1) индексы  $i, j$  ограничены:  $i, j = 0, 1, \dots, L-1$ . Вместо формулы (2) может быть использовано только представление функции  $u(t)$  в виде линейной комбинации функций базиса восстановления (3), при этом равенство  $u(t) = u_L(t)$  возможно только при  $u(t) \in L_2(T; \nu(t))_L$ . Базисы разложения и восстановления обозначим  $\{q^{\text{P}}(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  и  $\{q^{\text{B}}(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ .

Если обозначить через  $\mathbf{\Lambda}^{\text{P}} = (\Lambda_{ij}^{\text{P}})$  и  $\mathbf{\Lambda}^{\text{B}} = (\Lambda_{ij}^{\text{B}})$  соответствующие матрицы Грама для финитных базисов разложения и восстановления:

$$\Lambda_{ij}^{\text{P}} = (q^{\text{P}}(i, t), q^{\text{P}}(j, t))_{L_2(T; \nu(t))}, \quad \Lambda_{ij}^{\text{B}} = (q^{\text{B}}(i, t), q^{\text{B}}(j, t))_{L_2(T; \nu(t))}, \quad (4)$$

$$i, j = 0, 1, \dots, L-1,$$

то  $\mathbf{\Lambda}^{\text{P}} = (\mathbf{\Lambda}^{\text{B}})^{-1}$ , а функции  $\{q^{\text{P}}(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  и  $\{q^{\text{B}}(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  связаны соотношениями

$$q^{\text{B}}(i, t) = \sum_{j=0}^{L-1} \Lambda_{ij}^{\text{B}} q^{\text{P}}(j, t), \quad q^{\text{P}}(i, t) = \sum_{j=0}^{L-1} \Lambda_{ij}^{\text{P}} q^{\text{B}}(j, t), \quad i = 0, 1, \dots, L-1. \quad (5)$$

Таким образом, по заданному финитному базису разложения можно построить двойственный базис — базис восстановления, а для заданного финитного базиса восстановления двойственным базисом является базис разложения.

Ортонормированные базисные системы  $\{q(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$  или  $\{q(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  можно рассматривать как частный случай биортонормированных базисных систем  $\{q^{\text{P}}(i, t), q^{\text{B}}(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$  или  $\{q^{\text{P}}(i, t), q^{\text{B}}(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , если  $q(i, t) = q^{\text{P}}(i, t) = q^{\text{B}}(i, t)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  или  $i = 0, 1, \dots, L-1$ . Для финитных базисов  $\mathbf{\Lambda}^{\text{P}} = \mathbf{\Lambda}^{\text{B}} = \mathbf{E}$ , где  $\mathbf{E}$  — единичная матрица порядка  $L$ .

Применение финитных биортонормированных базисных систем обладает тем преимуществом, что можно выбрать конечное множество линейно независимых функций, обладающих требуемыми свойствами, в качестве базиса разложения или базиса восстановления и построить двойственный базис согласно (4), (5). При этом требуемые свойства сохраняются в отличие от другого подхода, предполагающего ортогонализацию линейно независимых функций, например, с помощью метода Грама – Шмидта с последующей нормировкой. Этим же целям отчасти служит и использование весовой функции  $\nu(t)$ .

Наряду с биортонормированным базисом  $\{q^p(i, t), q^b(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$  можно рассмотреть следующие:  $\{\nu(t)q^p(i, t), q^b(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ ,  $\{q^p(i, t), \nu(t)q^b(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ ,  $\{\sqrt{\nu(t)}q^p(i, t), \sqrt{\nu(t)}q^b(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$ . Перечисленные системы функций являются биортонормированными с весовой функцией, тождественно равной единице. Кроме того, весовую функцию можно «делить» в разных пропорциях, как это предложено в [15]. Также можно менять местами базисные системы разложения и восстановления, рассматривая биортонормированную систему функций  $\{q^b(i, t), q^p(i, t)\}_{i=0}^{\infty}$  (аналогично для финитных базисных систем).

### Свойства множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания

При использовании ортонормированных базисных систем свойства множества  $\mathbb{U}_L$  были рассмотрены в [17]. Для биортонормированных базисов они остаются неизменными. Перечислим их.

1. *Выпуклость.* Если  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \in \mathbb{U}_L$ , то  $a_1\mathbf{U}_1 + a_2\mathbf{U}_2 \in \mathbb{U}_L$  для любых  $a_1, a_2 \geq 0$ , удовлетворяющих условию  $a_1 + a_2 = 1$ .
2. *Симметричность.* Если  $\mathbf{U} \in \mathbb{U}_L$ , то  $-\mathbf{U} \in \mathbb{U}_L$ .
3. *Замкнутость.* Множество  $\mathbb{U}_L$  замкнуто.

Таким образом, множество  $\mathbb{U}_L$  — выпуклое, замкнутое и ограниченное подмножество пространства  $\mathbb{R}^L$ , симметричное относительно нуля  $\mathbf{O} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ , соответствующего управлению  $u(t) \equiv 0$ . Граница множества  $\mathbb{U}_L$  является образом управлений, достигающих заданного ограничения  $v$ .

Если рассмотреть биортонормированную базисную систему  $\{q^p(i, t), q^b(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , которую образуют функции, удовлетворяющие условию

$$\max q^b(i, t) = v = 1, \quad i = 0, 1, \dots, L - 1, \quad (6)$$

а этого всегда можно добиться выбором весовой функции или двойственного базиса — базиса разложения (здесь и далее при аналогичной записи подразумевается, что максимум берется по  $t \in T$ ), то при дополнительном условии

$$\max \left| \sum_{i=1}^{L-1} \alpha_i q^b(i, t) \right| = 1, \quad \alpha_i \in \{0, \pm 1\}, \quad \sum_{i=1}^{L-1} |\alpha_i| \neq 0, \quad (7)$$

множеством допустимых управлений в спектральной форме математического описания является  $L$ -мерный куб:

$${}^1\mathbb{U}_L^{\square} = \{\mathbf{U}: \|\mathbf{U}\|_{\square} \leq 1\}, \quad (8)$$

где  $\|\mathbf{U}\|_{\square} = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{L-1}|\}$  — кубическая норма вектора в  $\mathbb{R}^L$ .

При дополнительном условии

$$\max \left| \sum_{i=1}^{L-1} \alpha_i q^b(i, t) \right| = 1, \quad \alpha_i \in [-1, 1], \quad \sum_{i=1}^{L-1} |\alpha_i| = 1, \quad (9)$$

получаем минимально возможное множество —  $L$ -мерный октаэдр, или кокуб, двойственный кубу:

$${}^1\mathbb{U}_L^\diamond = \{\mathbf{U}: \|\mathbf{U}\|_\diamond \leq 1\}, \quad (10)$$

где  $\|\mathbf{U}\|_\diamond = |u_0| + |u_1| + \dots + |u_{L-1}|$  — октаэдрическая норма вектора в  $\mathbb{R}^L$ .

Следовательно, для любого биортонормированного базиса, функции которого удовлетворяют условию (6), соответствующее множество  ${}^1\mathbb{U}_L$  обладает свойством  ${}^1\mathbb{U}_L^\diamond \subseteq {}^1\mathbb{U}_L$ .

Если не требовать выполнения условия (6), то множество  $\mathbb{U}_L$  допустимых управлений в спектральной форме математического описания может быть получено из  ${}^1\mathbb{U}_L$  преобразованием подобия с коэффициентом  $1/\max q^p(i, t)$  по  $i$ -й оси,  $i = 0, 1, \dots, L - 1$ .

Кроме того, если  $\mathbb{V}_L$  — множество допустимых управлений в спектральной форме математического описания при условии, что  $T = [0, 1]$  и  $v = 1$ , т.е.  $\mathbb{V}_L$  — образ множества  $L_2([0, 1]; \rho(t))_L \cap \{v(t): |v(t)| \leq 1\}$  при спектральном преобразовании  $\mathbb{S}$ ,  $\rho(t)$  — весовая функция и  $\{p^p(i, t), p^b(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  — соответствующий биортонормированный базис, связанные с  $\nu(t)$  и  $\{q^p(i, t), q^b(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  соотношениями

$$\nu(t) = \rho\left(\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\right), \quad q^{p,b}(i, t) = \frac{1}{\sqrt{t_1 - t_0}} p^{p,b}\left(i, \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\right), \quad (11)$$

то образ  $\mathbb{U}_L$  множества  $L_2([t_0, t_1]; \nu(t))_L \cap \{u(t): |u(t)| \leq v\}$  связан с  $\mathbb{U}_L$  преобразованием подобия с коэффициентом  $v\sqrt{t_1 - t_0}$ . Для биортонормированных базисов это доказывается аналогично случаю ортонормированных базисов, рассмотренному в [17].

Множество допустимых управлений  $\mathbb{V}_L$  в спектральной форме математического описания не изменяется при «растяжении» или «сжатии» отрезка  $T$  и величине  $v$ , задающей ограничения, для которых  $v\sqrt{t_1 - t_0} = 1$ . Множество  $\mathbb{U}_L$  является образом целого класса  $L_2([t_0, t_1]; \nu(t))_L \cap \{u(t): |u(t)| \leq v\}$ , определяемого равенством  $v\sqrt{t_1 - t_0} = \text{const}$ .

### Методика приближенного построения множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания

Рассмотрим кратко один из алгоритмов, предложенных в [17], и адаптируем его для биортонормированных базисных систем. По результатам вычислительных экспериментов его использование представляется наиболее эффективным. Для приближенного построения множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания выберем конечное множество управлений, достигающих ограничения  $v$ , и найдем их спектральные характеристики. Их выпуклая комбинация образует замкнутую многогранную область, граница которой — выпуклый многогранник.

Выпуклый многогранник может быть задан множеством вершин и плоскостями граней [1]. Найдем для одного класса управлений соответствующее ему множество вершин.

Выберем функции  $a_i(t) = \alpha_i q^b(i, t)$ , где числа  $\alpha_i$  определяются из условия  $\max |a_i(t)| = v$ ,  $i = 0, 1, \dots, L - 1$ . Тогда спектральные характеристики  $\mathbf{A}_i = \mathbb{S}[a_i(t)] = \alpha_i \mathbf{E}_i$ , где  $\mathbf{E}_i$  — орты координатных осей, или столбцы единичной матрицы  $\mathbf{E}$  порядка  $L$ . Это является следствием ортогональности функций  $\{q^p(l, t)\}_{l=0,1,\dots,L-1; l \neq i}$  и  $a_i(t)$ .

Далее введем множество мультииндексов

$$J = J(m, r) = \left\{ (j_0, j_1, \dots, j_{L-1}) : j_i \in \mathbb{Z} \cap [-m, m], \sum_{i=0}^{L-1} |j_i| = r \right\}$$

и функции

$$a_j(t) = \gamma_j \sum_{i=0}^{L-1} j_i a_i(t), \quad j \in J(m, r),$$

где числа  $\gamma_j$  определяются из условия  $\max |a_j(t)| = v$ ,  $m$  и  $r$  — натуральные числа,  $m \leq r \leq Lm$ .

Теперь найдем спектральные характеристики функций  $a_j(t)$ ,  $j \in J$ :

$$\mathbf{A}_j = \mathbb{S}[a_j(t)] = \gamma_j [j_0 \alpha_0 \quad j_1 \alpha_1 \quad \dots \quad j_{L-1} \alpha_{L-1}]^T = \gamma_j \sum_{i=0}^{L-1} j_i \alpha_i \mathbf{E}_i,$$

которые образуют множество вершин многогранной области, аппроксимирующей множество  $\mathbb{U}_L$ :

$$\mathbb{U}_L^{(m,r)} = \text{Conv}\{\mathbf{A}_j, j \in J\}, \quad \mathbb{U}_L^{(m,r)} \subseteq \mathbb{U}_L. \quad (12)$$

Выпуклую многогранную область  $\mathbb{U}_L^{(m,r)}$  можно построить как пересечение полупространств, заданных граничными плоскостями (гиперплоскостями). Построение плоскостей граней по известному множеству вершин многогранника может осуществляться различными методами, один из которых приведен в [17]. Для упрощения вычислений можно ограничиться рассмотрением варианта  $\mathbb{U}_L^{(m)} = \mathbb{U}_L^{(m,m)}$ .

Таким образом, предлагается перейти от задания выпуклого многогранника множеством вершин к заданию его плоскостями граней  $P^l$ , где  $l$  принимает значения из конечного множества. Каждая из этих плоскостей определяется внешней нормалью  $\mathbf{N}^l$  и числом  $d^l$ , т.е. уравнением  $(\mathbf{N}^l, \mathbf{X}) - d^l = 0$ . Тогда проверка принадлежности вектора  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^L$ , который соответствует некоторому управлению  $u(t) = \mathbb{S}^{-1}[\mathbf{U}]$ , сводится к проверке условия  $(\mathbf{N}^l, \mathbf{U}) - d^l \leq 0$  для каждого  $l$ .

Как было отмечено выше, достаточно найти множество  $\mathbb{V}_L$  допустимых управлений в спектральной форме математического описания при условии, что  $T = [0, 1]$  и  $v = 1$ . Если точно описать множество  $\mathbb{V}_L$  затруднительно, то можно ограничиться его приближением  $\mathbb{V}_L^{(m,r)}$  или  $\mathbb{V}_L^{(m)} = \mathbb{V}_L^{(m,m)}$ .

Предложенная методика построения выпуклой многогранной области наряду с другими вариантами из [17] позволяет утверждать, что множество спектральных характеристик допустимых управлений аппроксимируется сколь угодно точно, поскольку добавлять новые вершины многогранника можно таким образом, чтобы не ухудшать приближение. Добавляя новые вершины достаточно равномерно, всегда можно улучшить аппроксимацию множеств  $\mathbb{V}_L$  или  $\mathbb{U}_L$ .

### Примеры множеств допустимых управлений в спектральной форме математического описания для ортонормированных базисных систем

Приведем примеры нахождения множеств  $\mathbb{V}_L$  допустимых управлений в спектральной форме математического описания (при  $T = [0, 1]$  и  $v = 1$ ) для полиномов Лежандра и тригонометрических функций (косинусоид) — наиболее часто используемых базисных систем [5, 10, 11, 13, 18, 20]. На рис. 1 и 2 показаны проекции граничных точек множеств допустимых управлений при усечении  $L = 4$  на координатные плоскости  $\mathbb{R}^2$  при использовании многогранной области  $\mathbb{V}_L^{(6)}$ ,  $J = J(6, 6)$ , — всего 608 граничных точек (146 точек для  $L = 3$  и 24 точки для  $L = 2$ ), причем указанное число граничных точек не зависит

от выбора базисной системы. Принят следующий порядок проекций для каждой базисной системы:

$$(0, 1), \quad (0, 2), \quad (1, 2), \\ (0, 3), \quad (1, 3), \quad (2, 3),$$

где  $(i_1, i_2)$  означает выбор координат спектральных характеристик с номерами  $i_1$  и  $i_2$  соответственно по оси абсцисс и оси ординат для построения проекции. Первая строка  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 2)$  соответствует усечению  $L = 3$ , а первая проекция  $(0, 1)$  в первой строке — усечению  $L = 2$ . Знаком  $\blacklozenge$  — обозначены граничные точки, принадлежащие соответствующей координатной плоскости  $\mathbb{R}^2$ , а знаком  $\diamond$  — проекции остальных граничных точек. Отметим, что в [17] были получены проекции граничных точек множеств допустимых управлений при усечении  $L = 3$  на координатные плоскости при использовании многогранной области  $\mathbb{V}_L^{(8)}$ ,  $J = J(8, 8)$ .

В результате для полиномов Лежандра построен выпуклый многогранник, имеющий 400 граней, для тригонометрических функций выпуклый многогранник имеет 522 грани. Чтобы минимизировать влияние погрешностей (ошибок округления) при вычислениях, плоскости граней с нормальными, кубическая норма разности между которыми не превосходит  $\varepsilon = 10^{-8}$ , отождествляются. При другом  $\varepsilon$  число граней может незначительно отличаться от приведенных значений.

Выше упоминалось, что в случае применения биортонормированных базисных систем с дополнительными условиями (6) и (7) множеством допустимых управлений в спектральной форме математического описания является  $L$ -мерный куб (8), а минимально возможным множеством при условиях (6) и (9) —  $L$ -мерный октаэдр (10). Первому варианту, например, отвечает система блочно-импульсных функций  $\{\pi(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  с весовой функцией  $\nu(t) \equiv 1/h$  ( $2L$  граней; такой же результат для биортонормированного базиса  $\{(1/h)\pi(i, t), \pi(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  с весовой функцией  $\nu(t) \equiv 1$ ), а второму варианту соответствует система функций Уолша ( $2^L$  граней; такой же результат для неполной системы функций Радемахера, определяющих функции Уолша).

Результаты применения методики приближенного построения множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания для этих систем функций приведены на рис. 3, проекции граничных точек множеств допустимых управлений при усечении  $L = 4$  на любые координатные плоскости  $\mathbb{R}^2$  одинаковы. Точное решение для блочно-импульсных функций может быть получено при  $J = J(L, L)$ , а для функций Уолша — при  $J = J(1, 1)$  для любого  $L$ .

Таким образом, для блочно-импульсных функций  $\{\pi(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ :

$$u(t) \in L_2([0, 1]; 1/h)_L \cap \{u(t) : |u(t)| \leq 1\} \iff \mathbf{U} = \mathbb{S}[u(t)] \in \mathbb{V}_L = \{\mathbf{U} : \|\mathbf{U}\|_{\square} \leq 1\},$$

а для функций Уолша:

$$u(t) \in L_2([0, 1])_L \cap \{u(t) : |u(t)| \leq 1\} \iff \mathbf{U} = \mathbb{S}[u(t)] \in \mathbb{V}_L = \{\mathbf{U} : \|\mathbf{U}\|_{\diamond} \leq 1\}.$$

Если взять в качестве ортонормированной базисной системы блочно-импульсные функции  $\{\Pi(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , не удовлетворяющие условию (6), то множеством допустимых управлений в спектральной форме математического описания будет  $L$ -мерный куб меньших размеров:

$$u(t) \in L_2([0, 1])_L \cap \{u(t) : |u(t)| \leq 1\} \iff \\ \mathbf{U} = \mathbb{S}[u(t)] \in \mathbb{V}_L = \{\mathbf{U} : \|\mathbf{U}\|_{\square} \leq \sqrt{h}\}, \quad h = \frac{1}{L},$$



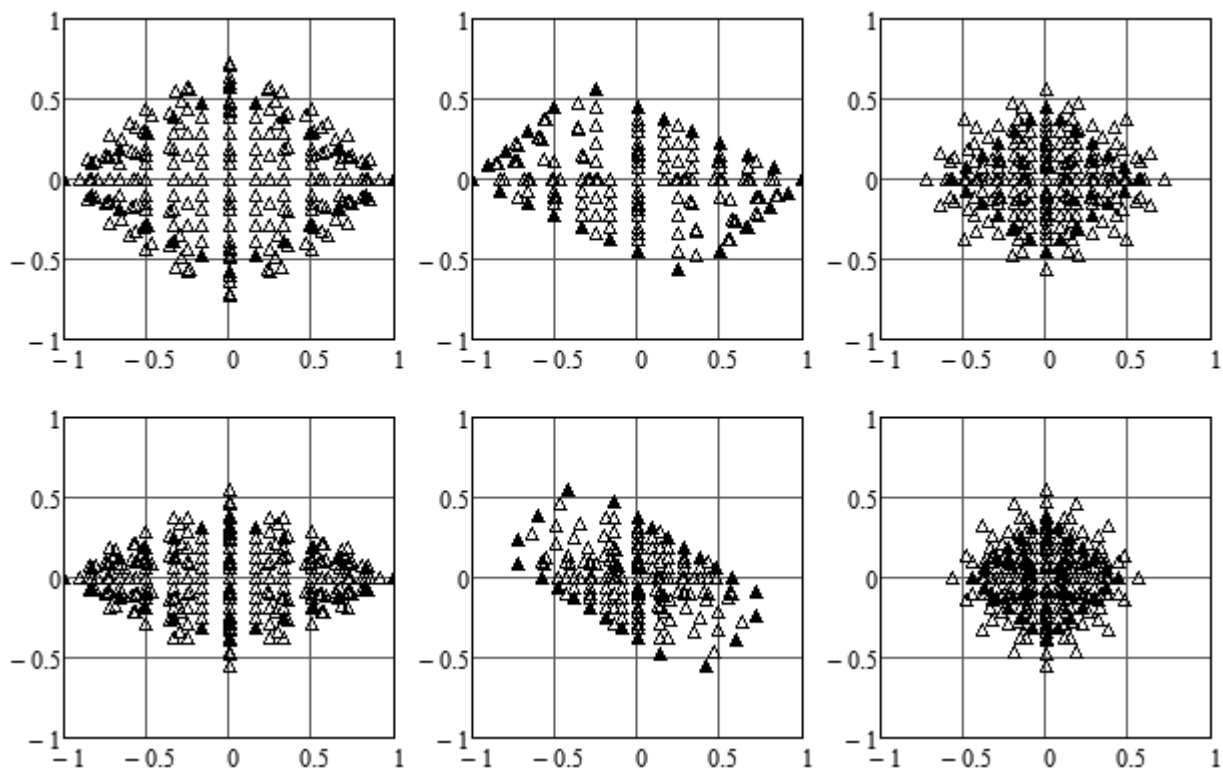


Рис. 1. Проекция множества допустимых управлений на координатные плоскости для полиномов Лежандра.

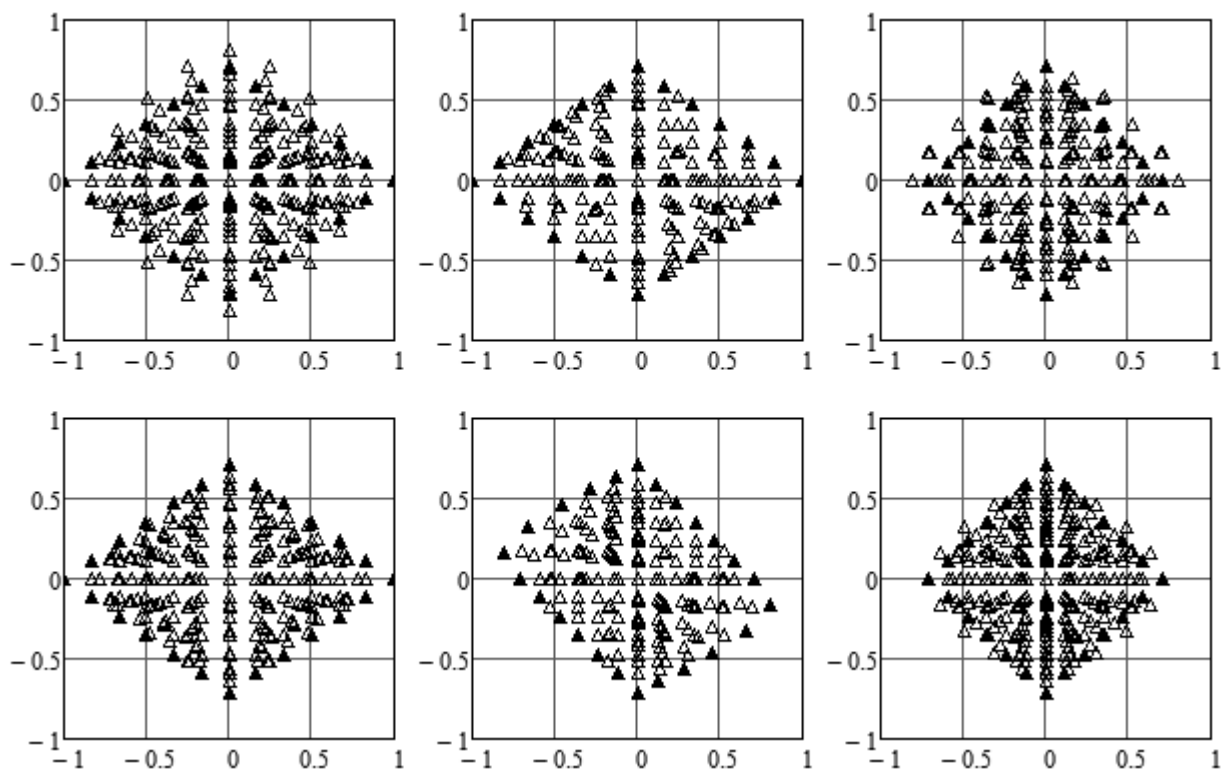


Рис. 2. Проекция множества допустимых управлений на координатные плоскости для тригонометрических функций.

соответствующий результат применения методики приближенного построения множества допустимых управлений показан на рис. 4, проекции граничных точек множества допустимых управлений при усечении  $L = 4$  на любые координатные плоскости  $\mathbb{R}^2$  одинаковы.

Примером, который не рассматривался в [17], но заслуживает внимания, может служить система функций Хаара. Результат применения методики приближенного построения множества допустимых управлений для этой системы показан на рис. 5. Множество допустимых управлений в спектральной форме математического описания для системы функций Хаара — выпуклая многогранная область. Если рассматривать проекции этой области в  $\mathbb{R}^{l < L}$ , то для функций Хаара с попарно непересекающимися носителями получим  $l$ -мерный куб (проекция (2, 3) на рис. 5), а функциям Хаара, для которых максимумы любых выпуклых комбинаций функций  $a_i(t)$  совпадают, соответствует  $l$ -мерный октаэдр с возможным преобразованием подобия по координатным осям (проекция (0, 1) на рис. 5).

### Финитные функции, порожденные сплайнами Шёнберга

Пусть  $B_0^*(t)$  — кусочно-постоянная функция, определяемая выражением

$$B_0^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ 0, & t \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \end{cases}$$

а

$$B_p^*(t) = B_{p-1}^*(t) * B_0^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{p-1}^*(\tau) B_0^*(t - \tau) d\tau, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

Функции  $B_p^*(t)$  —  $B$ -сплайны степени  $p$  с конечными носителями минимальной длины, или сплайны Шёнберга [4, 7, 19]. В частности,

$$B_1^*(t) = \begin{cases} t + 1, & t \in [-1, 0], \\ 1 - t, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]; \end{cases} \quad B_2^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + t)^2, & t \in [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}], \\ \frac{3}{4} - t^2, & t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{2}(\frac{3}{2} - t)^2, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}], \\ 0, & t \notin [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]. \end{cases}$$

Графики функций  $B_0^*(t)$ ,  $B_1^*(t)$  и  $B_2^*(t)$  показаны на рис. 6.

Запишем определение финитных функций, порожденных сплайнами Шёнберга степени  $p$ , на отрезке  $T = [0, 1]$ :

$$B_p(i, t) = \frac{1}{\sqrt{h}} B_p^*\left(\frac{t}{h} - i\right), \quad h = \frac{1}{L-1}, \quad t \in T, \quad i = 0, 1, \dots, L-1.$$

Ортогональной является только система функций  $\{B_0(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , для систем функций  $\{B_p(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  при  $p \geq 1$  матрицы Грама являются ленточными (при  $p = 1$  — трехдиагональной, при  $p = 2$  — пятидиагональной).

Систему функций  $\{B_0(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  далее рассматривать не будем, так как она хотя формально и отличается от системы блочно-импульсных функций, определенных выше, но имеет такие же аппроксимационные свойства (незначительные отличия в шаге  $h$  и, следовательно, в сетке на отрезке  $T$ ). Для других систем функций требуется построить двойственный базис. Причем целесообразно взять  $\{B_p(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  в качестве базиса восстановления, а не базиса разложения, как это сделано в [19].

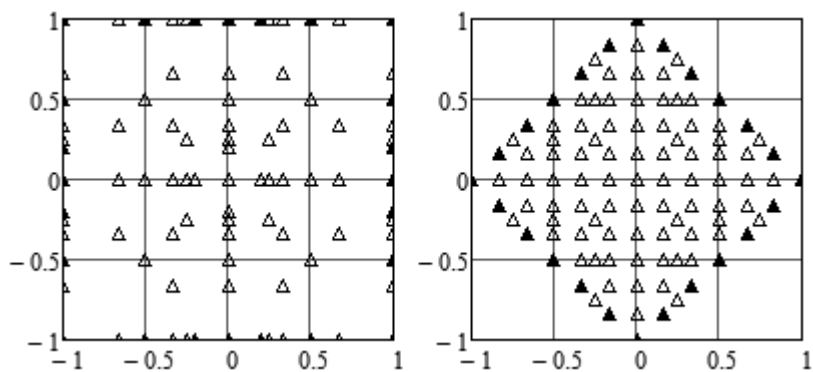


Рис. 3. Проекция множества допустимых управлений на координатные плоскости для блочно-импульсных функций с весом  $\nu(t) \equiv 1/h$  (слева) и для функций Уолша (справа).

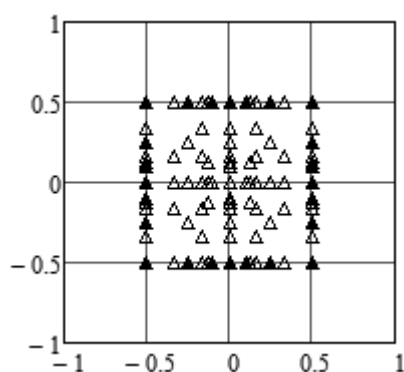


Рис. 4. Проекция множества допустимых управлений на координатные плоскости для блочно-импульсных функций  $\{\Pi(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ .

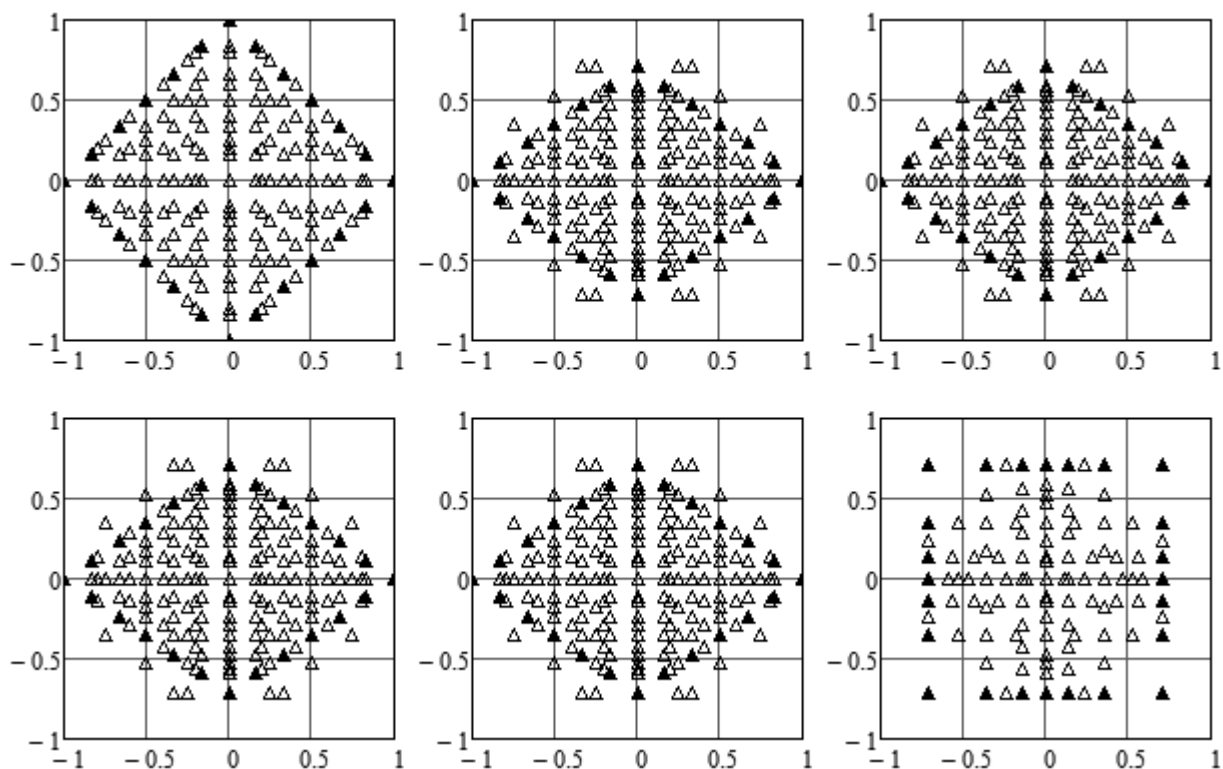


Рис. 5. Проекция множества допустимых управлений на координатные плоскости для функций Хаара.

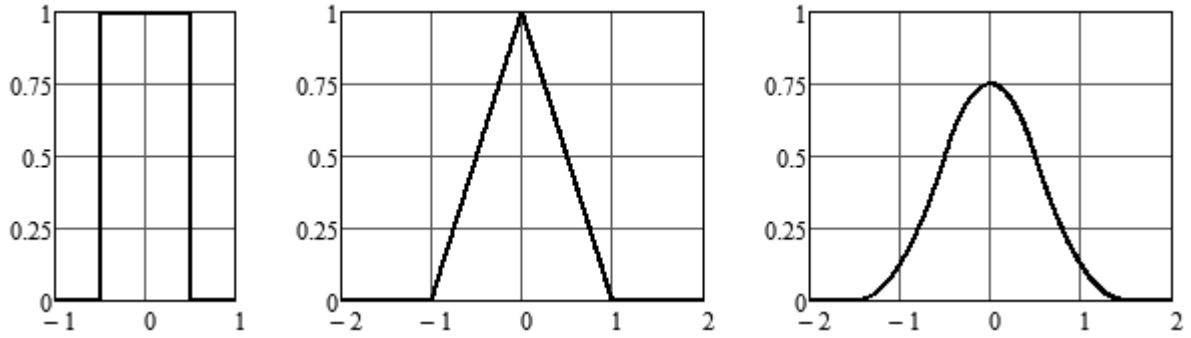


Рис. 6. Графики функций  $B_0^*(t)$  (слева),  $B_1^*(t)$  (в центре) и  $B_2^*(t)$  (справа).

Кусочно-линейные функции Шёнберга  $\{B_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  с номерами, которые отличаются на единицу, имеют пересекающиеся носители, пересечение носителей любых трех функций системы пусто. Важным свойством этих функций является то, что максимумы суммы или разности любого набора функций  $B_1(i, t)$  совпадают, т.е. выполнен аналог условия (7):

$$\max \left| \sum_{i=1}^{L-1} \alpha_i B_1(i, t) \right| = \frac{1}{\sqrt{h}}, \quad \alpha_i \in \{0, \pm 1\}, \quad \sum_{i=1}^{L-1} |\alpha_i| \neq 0. \quad (13)$$

В частности, для  $L = 2$  получаем

$$B_1(0, t) = \begin{cases} t + 1, & t \in [-1, 0], \\ 1 - t, & t \in [0, 1]; \end{cases} \quad B_1(1, t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1], \\ 2 - t, & t \in [1, 2]; \end{cases}$$

$$B_1(0, t) + B_1(1, t) = \begin{cases} t + 1, & t \in [-1, 0], \\ 1, & t \in [0, 1], \\ 2 - t, & t \in [1, 2]; \end{cases}$$

$$B_1(0, t) - B_1(1, t) = \begin{cases} t + 1, & t \in [-1, 0], \\ 1 - 2t, & t \in [0, 1], \\ t - 2, & t \in [1, 2], \end{cases}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \max |B_1(0, t)| &= \max |B_1(1, t)| = \\ &= \max |B_1(0, t) + B_1(1, t)| = \max |B_1(0, t) - B_1(1, t)| = 1, \\ & \quad t \in [-h, 1 + h], \end{aligned}$$

и соотношение (13) справедливо для любого  $L$ .

Это и означает, что множество допустимых управлений в спектральной форме математического описания для кусочно-линейных функций Шёнберга — куб в  $\mathbb{R}^L$ :

$$\begin{aligned} u(t) \in L_2([0, 1])_L \cap \{u(t) : |u(t)| \leq 1\} &\iff \\ \mathbf{U} = \mathbb{S}[u(t)] \in \mathbb{V}_L = \{\mathbf{U} : \|\mathbf{U}\|_{\square} \leq \sqrt{h}\}, & \quad h = \frac{1}{L-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Зная точное описание множества  $\mathbb{V}_L$ , можно применить методику приближенного построения множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания и убедиться, что она дает точное решение в этом случае, т.е. для биортонормированной системы функций  $\{\tilde{B}_1(i, t), B_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  (см. рис. 7). Для  $\{B_1(i, t), \tilde{B}_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  результаты приведены на рис. 8, порядок проекций и обозначения такие же, как и ранее. Здесь  $\{\tilde{B}_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  — соответствующий двойственный базис. Для биортонормированной системы функций  $\{B_1(i, t), \tilde{B}_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  построен выпуклый многогранник, имеющий 238 граней, что хорошо иллюстрирует утверждение о том, что система функций  $\{B_p(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  должна быть именно базисом восстановления, а не разложения.

Для систем функций  $\{B_p(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  при  $p \geq 2$  свойство, аналогичное (13), не выполняется, поэтому множество допустимых управлений в спектральной форме математического описания более сложное. Для любого  $p \geq 2$  его можно аппроксимировать выпуклой многогранной областью, применяя методику, изложенную выше. Результаты применения методики приближенного построения множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания при  $L = 4$  для биортонормированной системы функций  $\{B_2(i, t), \sqrt{2}B_2(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  приведены на рис. 9, а для  $\{\sqrt{2}B_2(i, t), \tilde{B}_2(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  — на рис. 10, порядок проекций и обозначения такие же, как и ранее. Здесь коэффициент  $\sqrt{2}$  взят для удобства (масштабы выпуклых многогранных областей становятся сопоставимы),  $\{\tilde{B}_2(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  — соответствующий двойственный базис. Выпуклый многогранник для первого случая имеет 320 граней, а для второго — 346 граней.

Несмотря на то, что множество допустимых управлений в спектральной форме математического описания для финитных функций, порожденных сплайнами Шёнберга степени  $p \geq 2$ , достаточно сложно, его приближенное нахождение можно упростить. Нужно учитывать, что проекция этого множества в  $\mathbb{R}^{l < L}$  для функций  $\{B_p(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  с попарно непересекающимися носителями —  $l$ -мерный куб (проекция (0, 3) на рис. 9). Кроме того, для набора функций с индексами  $(i_1, i_2, \dots, i_l)$  проекция будет совпадать с проекцией, соответствующей набору функций с индексами  $(i_1 + j, i_2 + j, \dots, i_l + j)$ , где  $j$  удовлетворяет условию  $\max\{i_1, i_2, \dots, i_l\} + j < L$ . Например, на рис. 9 набор одинаковых проекций: (0, 1), (1, 2), (2, 3), другой набор одинаковых проекций: (0, 2), (1, 3). Эти рассуждения справедливы только в том случае, если система функций  $\{B_p(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  — это базис восстановления.

### Финитные функции, порожденные сплайнами Леонтьева

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi_0^*(\alpha, \theta, t) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{\theta}, & t \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \theta\right), \\ \frac{1+2\alpha}{1-2\theta}, & t \in \left[-\frac{1}{2} + \theta, \frac{1}{2} - \theta\right], \\ -\frac{\alpha}{\theta}, & t \in \left(\frac{1}{2} - \theta, \frac{1}{2}\right], \\ 0, & t \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \end{cases}$$

где  $\alpha$  и  $\theta$  — параметры:  $\alpha > 0$ ,  $0 < \theta < \frac{1}{2}$ .

Симметричный сплайн степени  $p$  можно выразить через  $\Phi_0^*(\alpha, \theta, t)$  и  $B$ -сплайн нулевой степени [6]:

$$\Phi_p^*(\alpha, \theta, t) = \Phi_{p-1}^*(\alpha, \theta, t) * B_0^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{p-1}^*(\alpha, \theta, \tau) B_0^*(t - \tau) d\tau, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

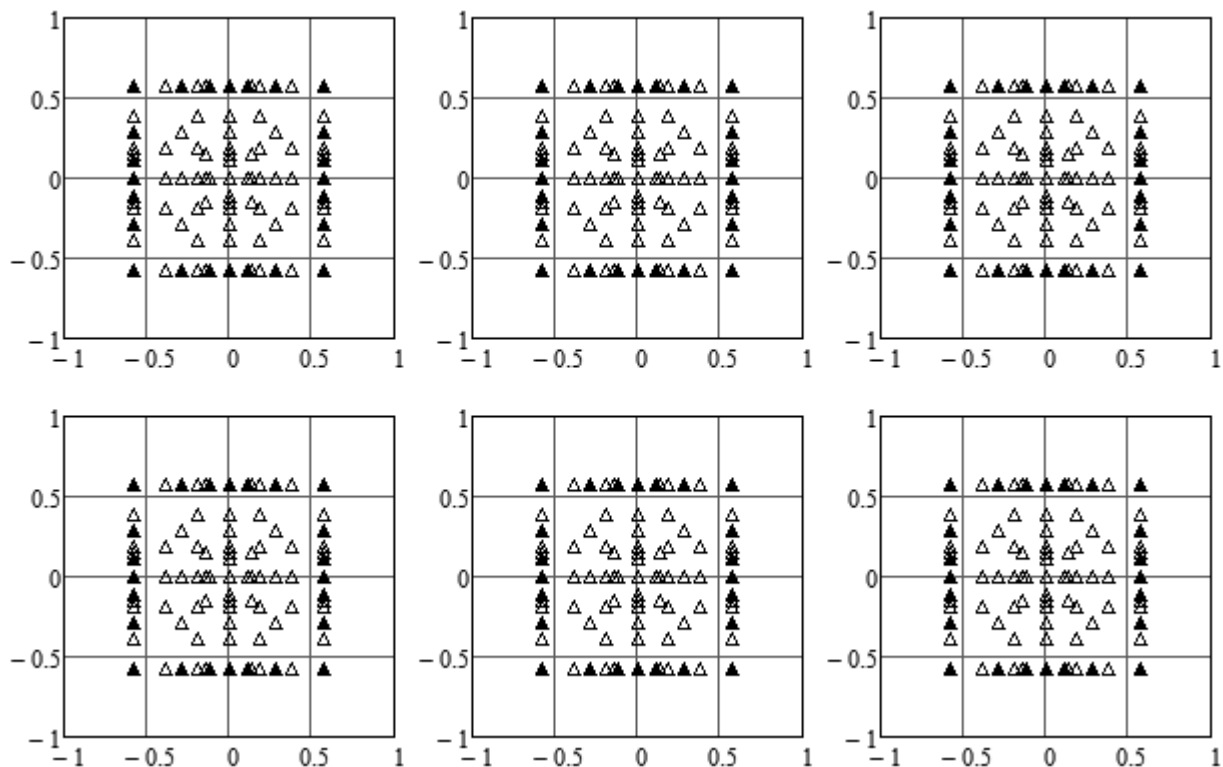


Рис. 7. Проекция множества допустимых управлений на координатные плоскости для финитных функций, порожденных  $B$ -сплайном первой степени.

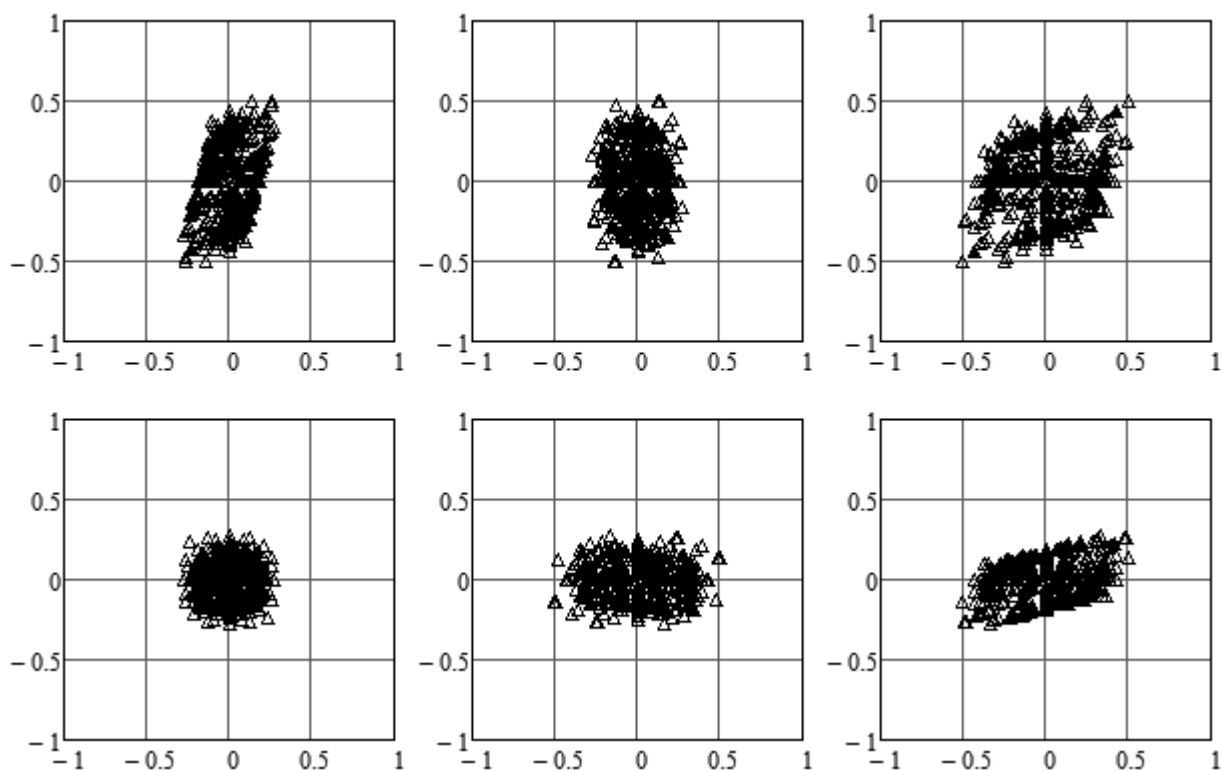


Рис. 8. Проекция множества допустимых управлений на координатные плоскости для финитных функций, порожденных  $B$ -сплайном первой степени (двойственный базис).

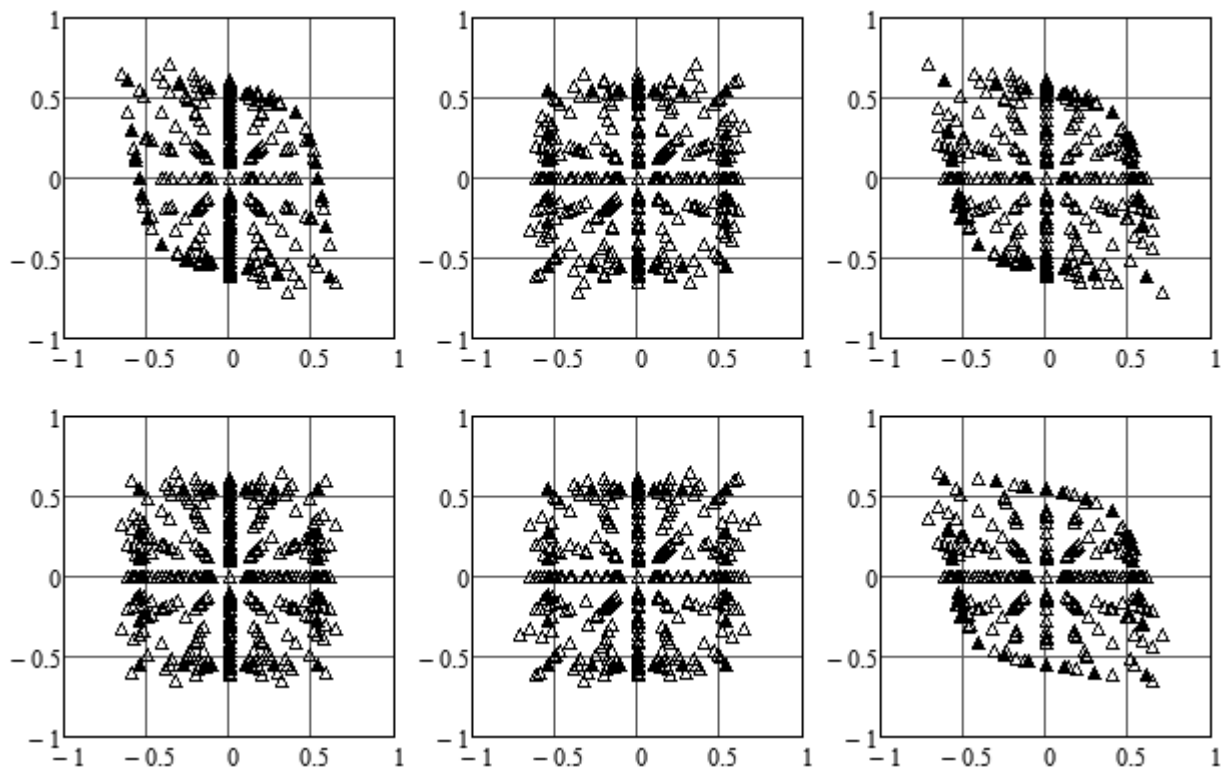


Рис. 9. Проекция множества допустимых управлений на координатные плоскости для финитных функций, порожденных  $B$ -сплайном второй степени.

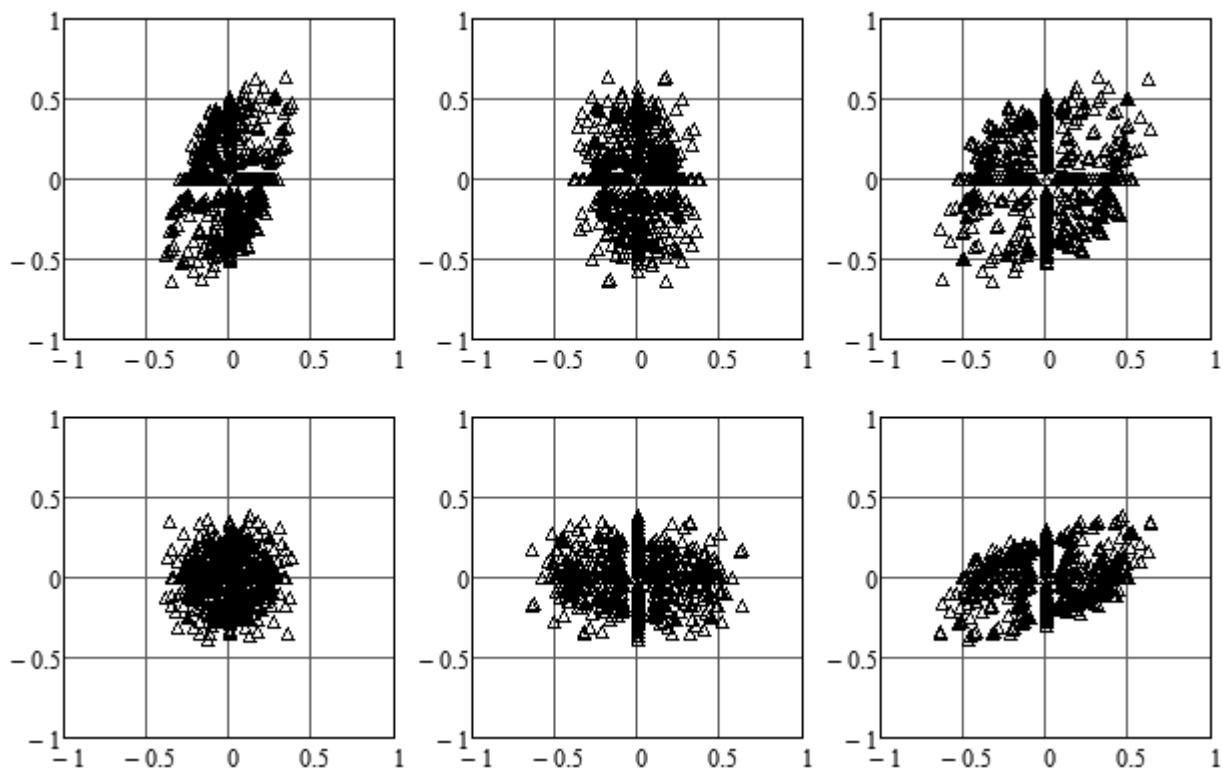


Рис. 10. Проекция множества допустимых управлений на координатные плоскости для финитных функций, порожденных  $B$ -сплайном второй степени (двойственный базис).

Тогда

$$\Phi_1^*(\alpha, \theta, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\theta}t + 1, & t \in [0, \theta], \\ -\frac{1+2\alpha}{1-2\theta}\left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}, & t \in [\theta, 1 - \theta], \\ \frac{\alpha}{\theta}(t - 1), & t \in [1 - \theta, 1], \\ 0, & t > 1; \end{cases}$$

$$\Phi_2^*(\alpha, \theta, t) = \begin{cases} -\frac{1+2\alpha}{1-2\theta}t^2 + \frac{2\alpha+2\theta+3}{4}, & t \in [0, \frac{1}{2} - \theta], \\ \frac{\alpha}{\theta}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - t + 1, & t \in [\frac{1}{2} - \theta, \frac{1}{2}], \\ -\frac{\alpha}{2\theta}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - t + 1, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \theta], \\ \frac{1+2\alpha}{2(1-2\theta)}(t - 1)^2 - \frac{1}{2}(t - 1) - \frac{2\alpha+2\theta-1}{8}, & t \in [\frac{1}{2} + \theta, \frac{3}{2} - \theta], \\ -\frac{\alpha}{2\theta}\left(t - \frac{3}{2}\right)^2, & t \in [\frac{3}{2} - \theta, \frac{3}{2}], \\ 0, & t > \frac{3}{2}, \end{cases}$$

при дополнительном условии четности, т.е.

$$\Phi_1^*(\alpha, \theta, -t) = \Phi_1^*(\alpha, \theta, t), \quad \Phi_2^*(\alpha, \theta, -t) = \Phi_2^*(\alpha, \theta, t).$$

Далее будем полагать [6], что при  $p = 1$

$$\theta = \theta_1 = \frac{1}{4}, \quad \alpha = \alpha_1 = \frac{\sqrt{41} - 5}{8},$$

а при  $p = 2$

$$\theta = \theta_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{12}\left(\sqrt{C} + \sqrt{\frac{684}{\sqrt{C}}} - C - 195\right), \quad \alpha = \alpha_2 = -\theta_2 + \frac{3}{4(1 - \theta_2)},$$

$$C = \kappa + \frac{1369}{\kappa} - 65, \quad \kappa = \sqrt[3]{62317 + 108\sqrt{112970}}.$$

Эти сплайны, графики которых приведены на рис. 11, задают финитные функции на отрезке  $T = [0, 1]$  согласно правилам

$$\Phi_1(i, t) = \sqrt{\frac{1}{h}} \Phi_1^*\left(\alpha_1, \theta_1, \frac{t}{h} - i\right), \quad \Phi_2(i, t) = \sqrt{\frac{1}{h}} \Phi_2^*\left(\alpha_2, \theta_2, \frac{t}{h} - i\right),$$

$$h = \frac{1}{L - 1}, \quad t \in T, \quad i = 0, 1, \dots, L - 1,$$

причем при выбранных параметрах  $\alpha$  и  $\theta$  ортогональность этой системы нарушается только для пар функций с номерами  $0, 1$  и  $L - 2, L - 1$  (это упрощает определение двойственного базиса). Если задать систему функций на множестве  $T' \supset T$ , которое представляет собой объединение всех носителей, или на  $T' = \mathbb{R}$ , то полученная система будет ортогональна. Для  $p > 2$  можно таким же образом определить систему финитных функций  $\{\Phi_p(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , однако это вряд ли целесообразно, поскольку подобрать параметры  $\alpha$  и  $\theta$ , чтобы система была ортогональна, невозможно, а их описание значительно сложнее, чем, например, у функций  $\{B_p(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ .



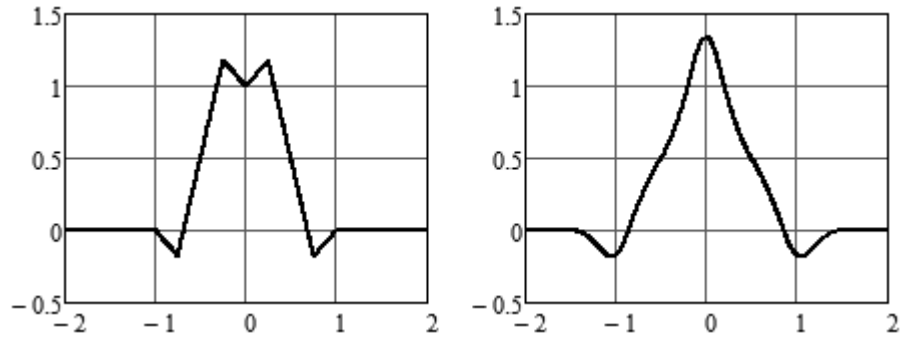


Рис. 11. Графики функций  $\Phi_1^*(\alpha_1, \theta_1, t)$  (слева) и  $\Phi_2^*(\alpha_2, \theta_2, t)$  (справа).

Условия типа (7) и (13) для этих функций не выполнены. Например, для  $p = 1$  и  $L = 2$  получаем

$$\begin{aligned} \max|\Phi_1(0, t)| &= \max|\Phi_1(1, t)| = 1 + \alpha, \\ \max|\Phi_1(0, t) + \Phi_1(1, t)| &= 1, \quad \max|\Phi_1(0, t) - \Phi_1(1, t)| = 1 + 2\alpha, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned} \tag{15}$$

На рис. 12 и 13 показаны результаты применения методики приближенного построения множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания при  $L = 4$  для биортонормированных систем функций  $\{\tilde{\Phi}_1(i, t), \Phi_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  и  $\{\tilde{\Phi}_2(i, t), \Phi_2(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , где  $\{\tilde{\Phi}_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  и  $\{\tilde{\Phi}_2(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  — соответствующие двойственные базисы. Порядок проекций и обозначения такие же, как и ранее. Выпуклый многогранник для базиса  $\{\tilde{\Phi}_1(i, t), \Phi_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  имеет 252 грани, а для базиса  $\{\tilde{\Phi}_2(i, t), \Phi_2(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  — 270 граней.

Биортонормированные системы функций  $\{\Phi_1(i, t), \tilde{\Phi}_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  и  $\{\Phi_2(i, t), \tilde{\Phi}_2(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  дают похожий результат, что связано с одинаковой структурой матриц Грама  $\mathbf{\Lambda}^p$  и  $\mathbf{\Lambda}^b$  (см. (4)): ненулевые элементы этих матриц находятся на главной диагонали, а также на пересечении строк и столбцов с номерами 0, 1 и  $L - 2, L - 1$ .

Далее рассмотрим функцию

$$\Psi_1^*(\alpha, \theta, t) = \begin{cases} 1 + t, & t \in [-1, -1 + \theta] \cup [-\theta, 0], \\ -\alpha + \frac{\theta + \alpha}{\theta - \frac{1}{2}}(t + \frac{1}{2}), & t \in [-1 + \theta, -\frac{1}{2}], \\ -\alpha + \frac{\theta - \alpha - 1}{\theta - \frac{1}{2}}(t + \frac{1}{2}), & t \in [-\frac{1}{2}, -\theta], \\ 1 - t, & t \in [0, \theta] \cup [1 - \theta, 1], \\ 1 + \alpha - \frac{\theta + \alpha}{\theta - \frac{1}{2}}(t - \frac{1}{2}), & t \in [\theta, \frac{1}{2}], \\ 1 + \alpha - \frac{\theta - \alpha - 1}{\theta - \frac{1}{2}}(t - \frac{1}{2}), & t \in [\frac{1}{2}, 1 - \theta], \\ 0, & t \notin [-1, 1], \end{cases}$$

где  $\alpha$  и  $\theta$  — параметры:  $\alpha > 0, 0 < \theta < \frac{1}{2}$ .

Несимметричный сплайн степени  $p$  можно выразить через  $\Psi_1^*(\alpha, \theta, t)$  и  $B$ -сплайн нулевой степени [6]:

$$\Psi_p^*(\alpha, \theta, t) = \Psi_{p-1}^*(\alpha, \theta, t) * B_0^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{p-1}^*(\alpha, \theta, \tau) B_0^*(t - \tau) d\tau, \quad p = 2, 3, 4, \dots$$

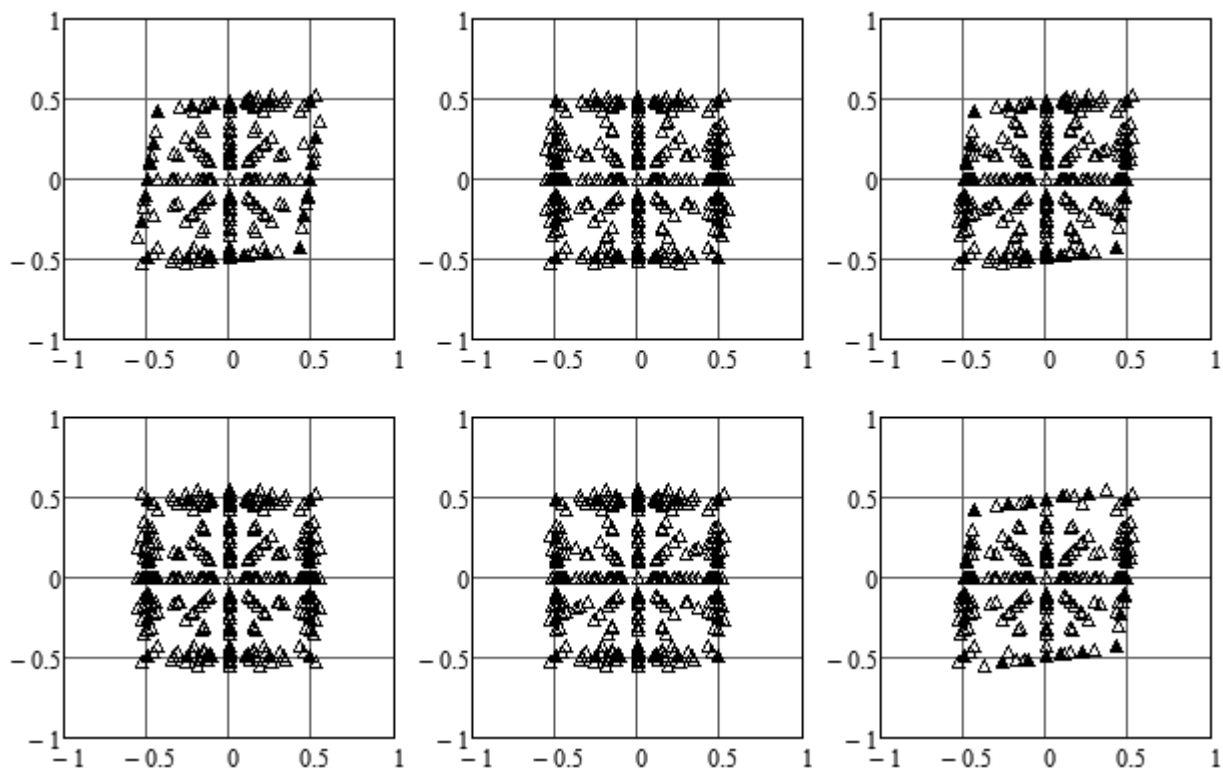


Рис. 12. Проекция множества допустимых управлений на координатные плоскости для финитных функций, порожденных симметричным сплайном Леонтьева первой степени.

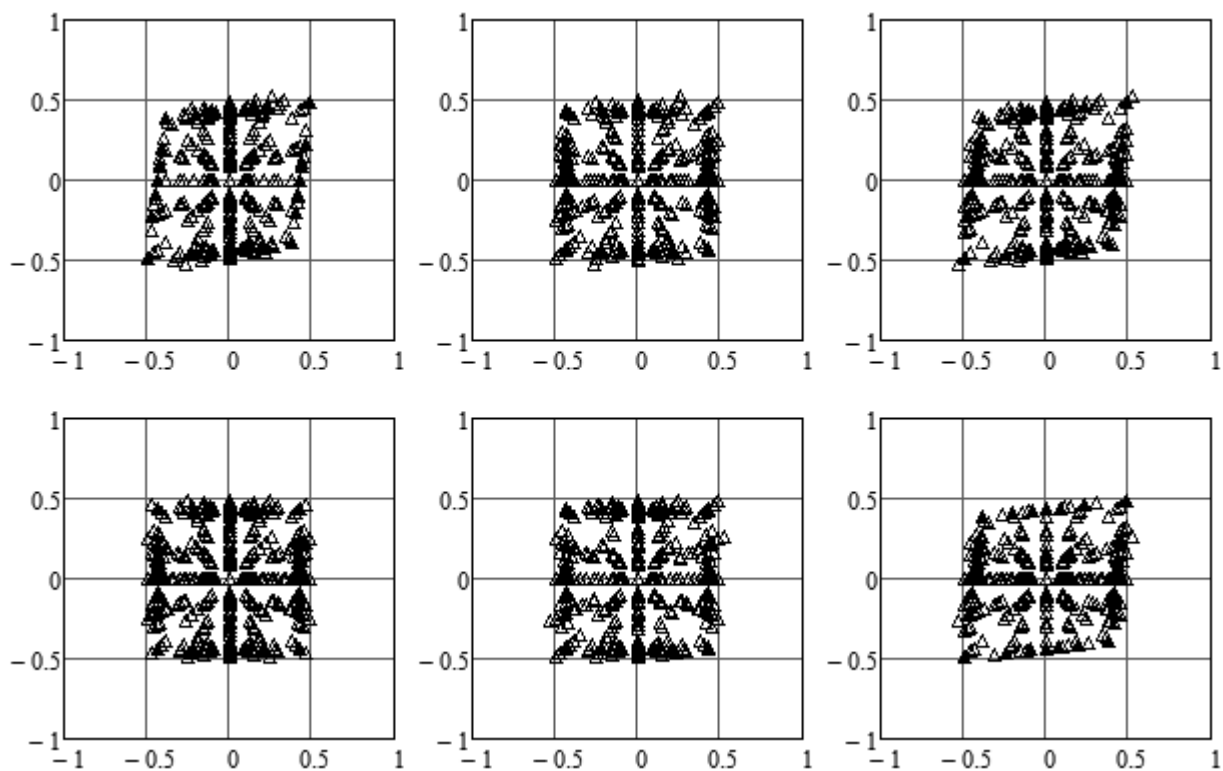


Рис. 13. Проекция множества допустимых управлений на координатные плоскости для финитных функций, порожденных симметричным сплайном Леонтьева второй степени.

Тогда

$$\Psi_2^*(\alpha, \theta, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(t + \frac{3}{2}\right)^2, & t \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} + \theta\right], \\ \frac{\theta + \alpha}{2\theta - 1} (t + 1)^2 - \alpha(t + 1) + \frac{2\alpha\theta + \theta - \alpha}{4}, & t \in \left[-\frac{3}{2} + \theta, -1\right], \\ \frac{\theta - \alpha - 1}{2\theta - 1} (t + 1)^2 - \alpha(t + 1) + \frac{2\alpha\theta + \theta - \alpha}{4}, & t \in \left[-1, -\frac{1}{2} - \theta\right], \\ \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t + \frac{1}{2}\right) + \frac{4\alpha\theta + 2\theta - 2\alpha + 1}{4}, & t \in \left[-\frac{1}{2} - \theta, -\frac{1}{2}\right], \\ -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t + \frac{1}{2}\right) + \frac{4\alpha\theta + 2\theta - 2\alpha + 1}{4}, & t \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \theta\right], \\ -\frac{\theta + \alpha}{\theta - \frac{1}{2}} t^2 + (1 + 2\alpha)t + \frac{3}{4}, & t \in \left[-\frac{1}{2} + \theta, 0\right], \\ -\frac{\theta - \alpha - 1}{\theta - \frac{1}{2}} t^2 + (1 + 2\alpha)t + \frac{3}{4}, & t \in \left[0, \frac{1}{2} - \theta\right], \\ -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{4\alpha\theta + 2\theta - 2\alpha - 3}{4}, & t \in \left[\frac{1}{2} - \theta, \frac{1}{2}\right], \\ \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{4\alpha\theta + 2\theta - 2\alpha - 3}{4}, & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \theta\right], \\ \frac{\theta + \alpha}{2\theta - 1} (t - 1)^2 - (1 + \alpha)(t - 1) - \frac{2\alpha\theta + \theta - \alpha - 1}{4}, & t \in \left[\frac{1}{2} + \theta, 1\right], \\ \frac{\theta - \alpha - 1}{2\theta - 1} (t - 1)^2 - (1 + \alpha)(t - 1) - \frac{2\alpha\theta + \theta - \alpha - 1}{4}, & t \in \left[1, \frac{3}{2} - \theta\right], \\ \frac{1}{2} \left(t - \frac{3}{2}\right)^2, & t \in \left[\frac{3}{2} - \theta, \frac{3}{2}\right], \\ 0, & t \notin \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]. \end{cases}$$

Далее будем полагать [6], что при  $p = 1$

$$\theta = \theta_1 = \frac{1}{4}, \quad \alpha = \alpha_1 = \frac{1}{2},$$

а при  $p = 2$

$$\theta = \theta_2 = \frac{4}{15}, \quad \alpha = \alpha_2 = 3.$$

Эти сплайны, графики которых приведены на рис. 14, задают финитные функции на отрезке  $T = [0, 1]$ :

$$\Psi_1(i, t) = \sqrt{\frac{1}{h}} \Psi_1^* \left( \alpha_1, \theta_1, \frac{t}{h} - i \right), \quad \Psi_2(i, t) = \sqrt{\frac{1}{h}} \Psi_2^* \left( \alpha_2, \theta_2, \frac{t}{h} - i \right),$$

$$h = \frac{1}{L - 1}, \quad t \in T, \quad i = 0, 1, \dots, L - 1.$$

Как и для функций  $\{\Phi_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  и  $\{\Phi_2(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , при выбранных параметрах  $\alpha$  и  $\theta$  ортогональность этой системы нарушается только для пар функций с номерами 0, 1 и  $L - 2, L - 1$ . Если для  $p > 2$  таким же образом определить систему финитных функций  $\{\Psi_p(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , то подобрать параметры  $\alpha$  и  $\theta$ , чтобы система была ортогональна, не удастся.

Условия типа (7) и (13) для этих функций также не выполнены. В случае  $p = 1$  и  $L = 2$  для них получаются соотношения, аналогичные (15):

$$\begin{aligned} \max |\Psi_1(0, t)| &= 1 + \alpha, & \max |\Psi_1(1, t)| &= 1, \\ \max |\Psi_1(0, t) + \Psi_1(1, t)| &= 1, & \max |\Psi_1(0, t) - \Psi_1(1, t)| &= 1 + 2\alpha, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned} \tag{16}$$

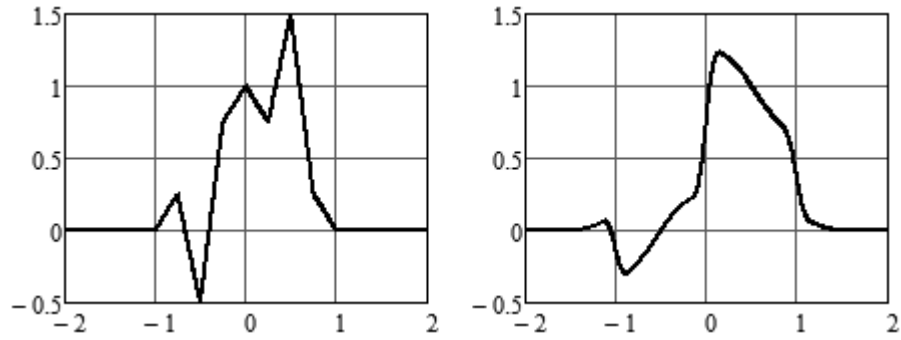


Рис. 14. Графики функций  $\Psi_1^*(\alpha_1, \theta_1, t)$  (слева) и  $\Psi_2^*(\alpha_2, \theta_2, t)$  (справа).

На рис. 16 и 17 показаны результаты применения методики приближенного построения множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания при  $L = 4$  для биортонормированных систем функций  $\{\tilde{\Psi}_1(i, t), \Psi_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  и  $\{\tilde{\Psi}_2(i, t), \Psi_2(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , где  $\{\tilde{\Psi}_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  и  $\{\tilde{\Psi}_2(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  — соответствующие двойственные базисы. Порядок проекций остается таким же. Выпуклый многогранник для базиса  $\{\tilde{\Psi}_1(i, t), \Psi_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  имеет 138 граней, а для базиса  $\{\tilde{\Psi}_2(i, t), \Psi_2(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  — 330 граней.

Предлагается аппроксимировать спектральные аналоги множества допустимых управлений для произвольного  $L$  кубом (14), как и для кусочно-линейных функций Шёнберга. Такое приближение вполне естественно для симметричных сплайнов Леонтьева (см. рис. 12 и 13), однако этот выбор совсем неочевиден для несимметричных сплайнов Леонтьева (см. рис. 16 и 17) и требует пояснений. В частности, построенные спектральные аналоги отличаются от куба (14) за счет значений функций  $\Phi_p^*(\alpha_p, \theta_p, t)$  и  $\Psi_p^*(\alpha_p, \theta_p, t)$ ,  $p = 1, 2$ , превышающих единицу. Если рассмотреть суммы произвольного числа (от 1 до  $L$ ) функций системы  $\{\Phi_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  или  $\{\Psi_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  с идущими подряд номерами, то мера множества, на котором эти суммы превышают величину  $\sqrt{1/h}$ , остается неизменной, при этом она пропорциональна величине  $h$  (см. рис. 15). Функции систем  $\{\Phi_2(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  и  $\{\Psi_2(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  обладают похожим свойством, а именно с ростом  $L$  и, следовательно, с уменьшением  $h$  мера множества, на котором суммы функций выбранной системы с идущими подряд номерами превышают величину  $\sqrt{1/h}$ , уменьшается. В некотором смысле предлагается пренебречь значениями, превышающими  $\sqrt{1/h}$ , при построении спектральных аналогов множества допустимых управлений. Эта рекомендация не имеет строгого обоснования, а базируется только на решенных примерах нахождения оптимального управления, один из которых приведен ниже.

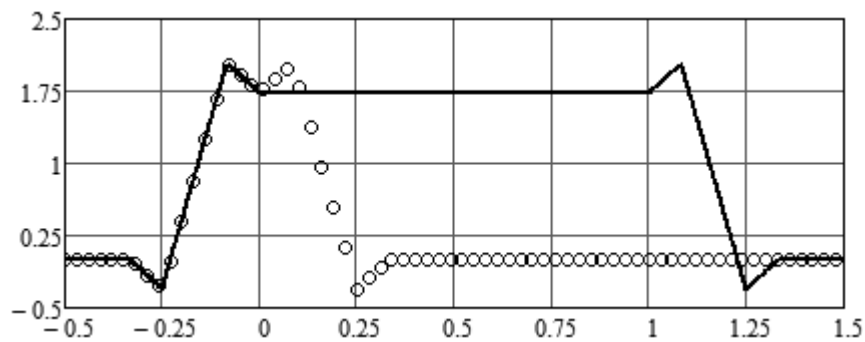


Рис. 15. График функции  $\Phi_1(0, t)$  (точки) и график суммы функций  $\{\Phi_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  при  $L = 4$  (сплошная линия).

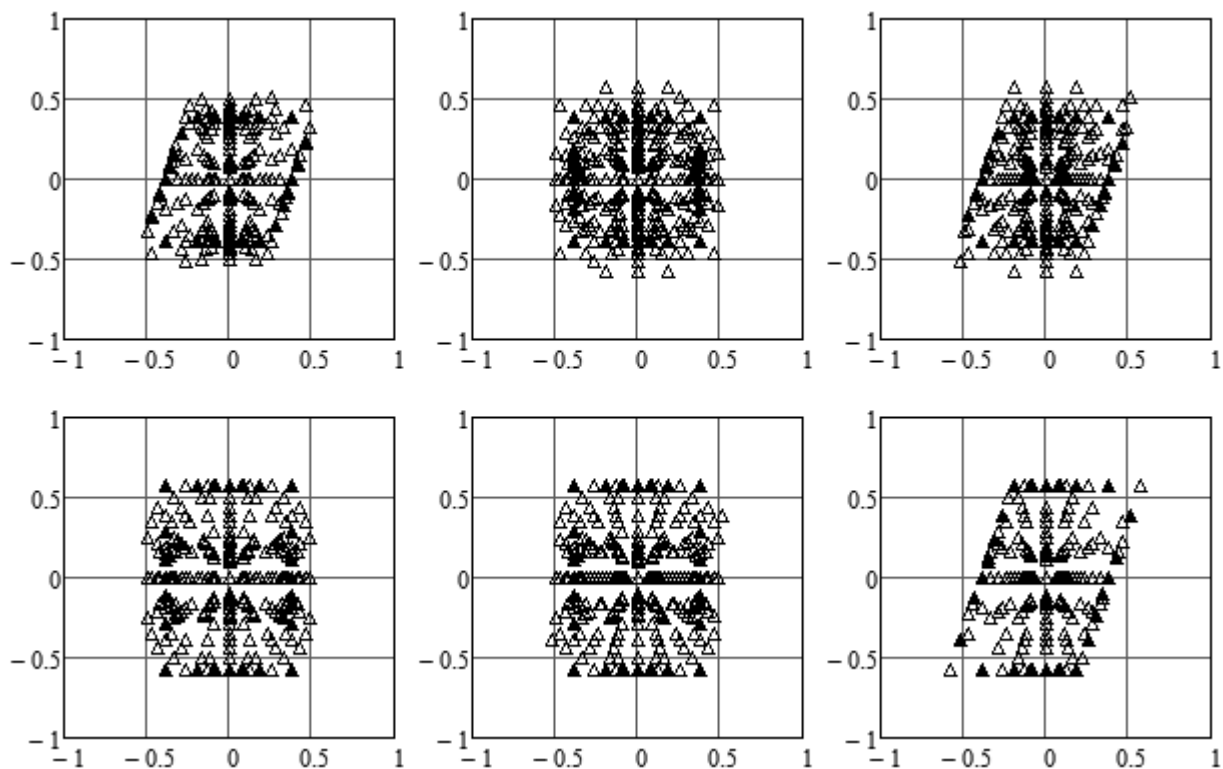


Рис. 16. Проекция множества допустимых управлений на координатные плоскости для финитных функций, порожденных несимметричным сплайном Леонтьева первой степени.

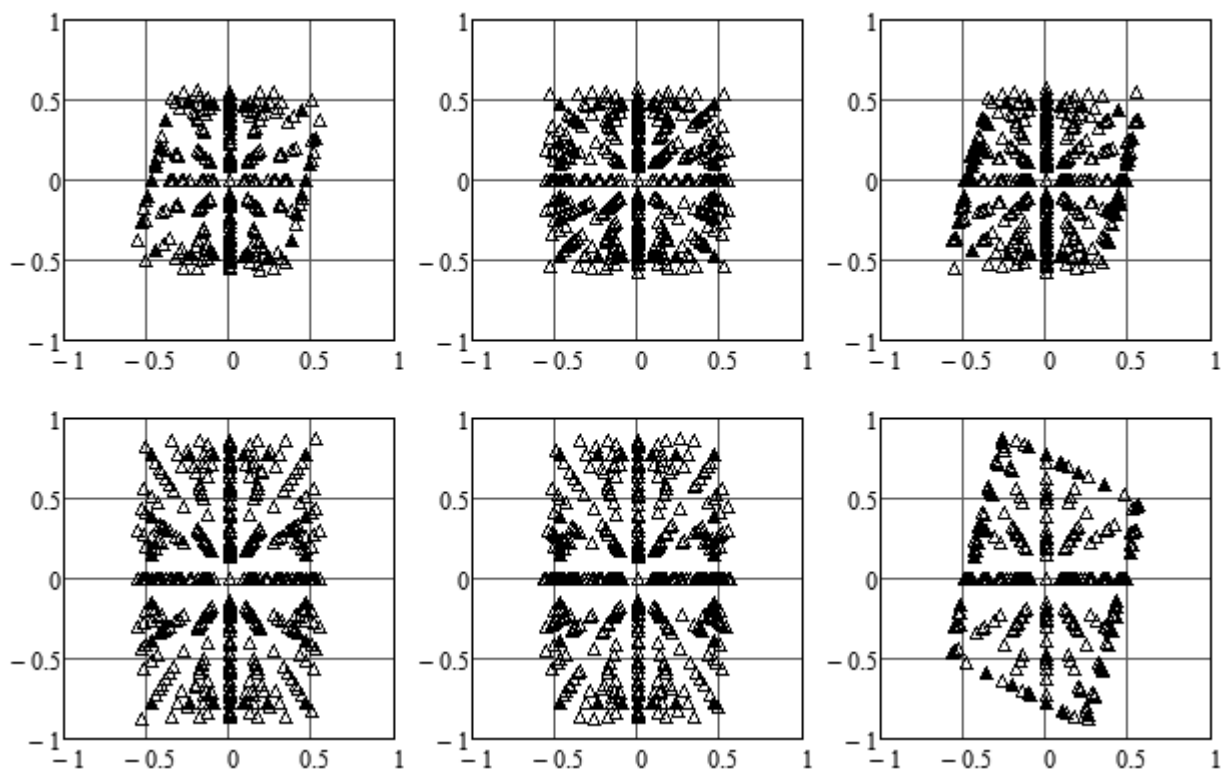


Рис. 17. Проекция множества допустимых управлений на координатные плоскости для финитных функций, порожденных несимметричным сплайном Леонтьева второй степени.

**Финитные функции, порожденные локальными полиномиальными сплайнами**

Выше были определены финитные функции, порожденные сплайнами Шёнберга и Леонтьева. Они обладают рядом достоинств, успешно применялись при решении различных задач проекционно-сеточным спектральным методом, но в контексте рассматриваемой задачи построения спектральных аналогов множества допустимых управлений их выбор не дает преимуществ за исключением кусочно-постоянных и кусочно-линейных функций Шёнберга.

Применение методики приближенного построения множества допустимых управлений хотя и возможно для любой ортонормированной или биортонормированной базисной системы, но требует значительных вычислительных ресурсов для больших значений  $L$ . Например, в случае использования многогранной области  $\mathbb{V}_L^{(3)}$ ,  $J = J(3, 3)$ , при порядке усечения  $L = 4$  для полиномов Лежандра построен выпуклый многогранник, имеющий 166 граней, при  $L = 6$  — 3374 грани и при  $L = 8$  — 130394 грани; для тригонометрических функций выпуклый многогранник имеет соответственно 162, 4484 и 101020 граней. Поэтому далее определим финитные функции таким образом, чтобы выполнялось ключевое свойство, аналогичное (7). Это гарантирует, что множество допустимых управлений будет  $L$ -мерным кубом.

Рассмотрим локальные симметричные полиномиальные сплайны степени  $p \geq 1$  (графики функций  $S_2^*(t)$ ,  $S_3^*(t)$  и  $S_4^*(t)$  изображены на рис. 18):

$$S_p^*(t) = \begin{cases} 2^{p-1}(1+t)^p, & t \in [-1, -\frac{1}{2}], \\ 1 - 2^{p-1}|t|^p, & t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ 2^{p-1}(1-t)^p, & t \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1], \end{cases} \quad (17)$$

и финитные функции, порожденные этими сплайнами, на отрезке  $T = [0, 1]$ :

$$S_p(i, t) = \frac{1}{\sqrt{h}} S_p^*\left(\frac{t}{h} - i\right), \quad h = \frac{1}{L-1}, \quad t \in T, \quad i = 0, 1, \dots, L-1.$$

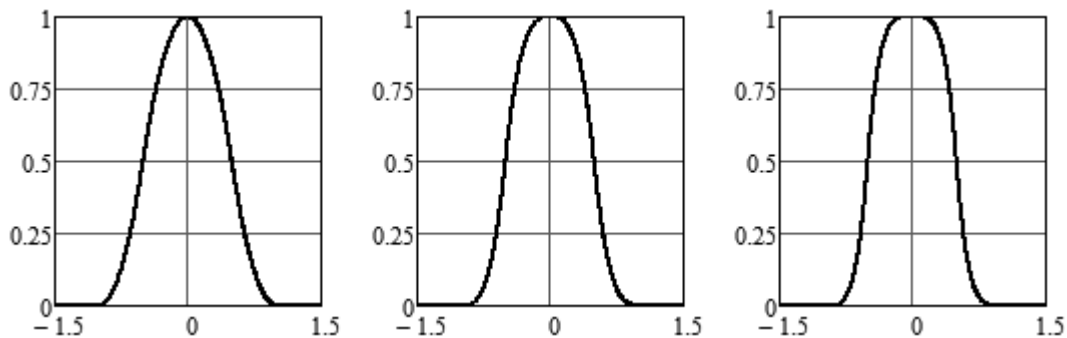


Рис. 18. Графики функций  $S_2^*(t)$  (слева),  $S_3^*(t)$  (в центре) и  $S_4^*(t)$  (справа).

Для систем функций  $\{S_p(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  справедливо свойство, аналогичное (7). Это проверяется таким же образом, как и для кусочно-линейных функций Шёнберга  $\{B_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , следовательно, верно условие (14), т.е. множество допустимых управлений в спектральной

форме математического описания является кубом в  $\mathbb{R}^L$  для биортонормированных базисных систем  $\{\tilde{S}_p(i, t), S_p(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , где  $\{\tilde{S}_p(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  — соответствующий двойственный базис. При  $p = 1$  система функций  $\{S_p(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  совпадает с  $\{B_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , а при  $p \rightarrow +\infty$  приближается к  $\{B_0(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ . Отметим, что можно адаптировать  $B$ -сплайны к условию (7), масштабируя носитель, например, для  $p = 2$  можно рассмотреть функцию  $\frac{4}{3}B_2^*(\frac{3}{2}t) \neq S_2^*(t)$ . Однако определение (17) представляется более простым.

Результаты применения методики приближенного построения множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания при  $L = 4$  для биортонормированных систем функций  $\{\tilde{S}_p(i, t), S_p(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  здесь не приводятся. Они идентичны результатам, показанным на рис. 7. Системы функций  $\{S_p(i, t), \tilde{S}_p(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  рассматривать вряд ли целесообразно.

Такой же результат справедлив и для финитных функций, порожденных кубическим сплайном Эрмита

$$X_3^*(t) = \begin{cases} 1 - 3t^2 - 2t^3, & t \in [-1, 0], \\ 1 - 3t^2 + 2t^3, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1], \end{cases}$$

но, например, для другого кубического сплайна Эрмита

$$H_3^*(t) = \begin{cases} (1 - t^2)t, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1], \end{cases}$$

такой результат не имеет места.

### Применение произвольных финитных функций

Финитные функции, которые можно применять для аппроксимации, необязательно определять с помощью полиномов. В частности, можно применять функции  $S_p^*(t)$  при дробной степени  $p > 0$ . Кроме того, можно предложить общую схему построения порождающих финитных функций. Для этого рассмотрим четную функцию  $f(t): [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, 1]$  с условиями  $f(0) = 0, f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ . Тогда в качестве порождающей функции можно взять

$$F^*(t) = \begin{cases} 1 - f(t), & t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ f(1 - t), & t \in [\frac{1}{2}, 1], \\ f(1 + t), & t \in [-1, -\frac{1}{2}], \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Система финитных функций на отрезке  $T = [0, 1]$  записываются следующим образом:

$$F(i, t) = \frac{1}{\sqrt{h}} F^*\left(\frac{t}{h} - i\right), \quad h = \frac{1}{L - 1}, \quad t \in T, \quad i = 0, 1, \dots, L - 1. \quad (18)$$

Для биортонормированного базиса  $\{\tilde{F}(i, t), F(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , где  $\{\tilde{F}(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  — двойственный базис, множество допустимых управлений будет  $L$ -мерным кубом (14), поскольку справедливо условие типа (7). К этому можно добавить, что такие функции с номерами, которые отличаются на единицу, имеют пересекающиеся носители, пересечение носителей любых трех функций системы  $\{F(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  пусто, т.е. соответствующая матрица Грама

является трехдиагональной, а это упрощает расчеты спектральных характеристик некоторых линейных операторов относительно такой базисной системы.

Например, при  $f(t) = g(t) = 1 - e^{-t^2 \ln 16}$  получаем систему функций  $\{G(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ :

$$G(i, t) = \frac{1}{\sqrt{h}} G^* \left( \frac{t}{h} - i \right), \quad h = \frac{1}{L-1}, \quad t \in T, \quad i = 0, 1, \dots, L-1,$$

где

$$G^*(t) = \begin{cases} e^{-t^2 \ln 16}, & t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ 1 - e^{-(1-t)^2 \ln 16}, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ 1 - e^{-(1+t)^2 \ln 16}, & t \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right], \\ 0, & t \notin [-1, 1], \end{cases}$$

и биортонормированный базис  $\{\tilde{G}(i, t), G(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , где  $\{\tilde{G}(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  — двойственный базис.

Другой пример:  $f(t) = c(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\pi t)$ . Тогда

$$C(i, t) = \frac{1}{\sqrt{h}} C^* \left( \frac{t}{h} - i \right), \quad h = \frac{1}{L-1}, \quad t \in T, \quad i = 0, 1, \dots, L-1,$$

где

$$C^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi t), & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Соответствующий биортонормированный базис —  $\{\tilde{C}(i, t), C(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , где  $\{\tilde{C}(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  — двойственный базис. Эти примеры определяют биортонормированные базисы, функции которых дважды дифференцируемы. Графики функций  $G^*(t)$  и  $C^*(t)$  показаны на рис. 19.

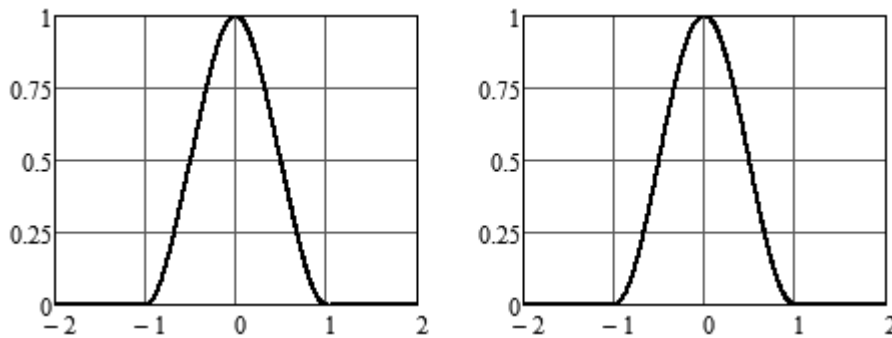


Рис. 19. Графики функций  $G^*(t)$  (слева) и  $C^*(t)$  (справа).

Можно рассмотреть функции  $f(t): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , определяя порождающую функцию

$$F^*(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, 1), \\ 1 - f(1+t), & t \in [-1, 0), \\ 0, & t \notin [-1, 1), \end{cases}$$

финитные функции (18) и соответствующий биортонормированный базис. Выбор  $f(t)$  определяет свойства биортонормированного базиса.



### Пример задачи оптимального управления

В качестве примера нахождения оптимального управления рассмотрим ту же задачу, что и в [17]. Пусть модель объекта управления задается уравнениями

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad (19)$$

при ограничении  $|u(t)| \leq 1$  и нулевых начальных условиях  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ . Функционал качества управления:

$$I = x_2(2\pi) \rightarrow \min_{x_1(\cdot), x_2(\cdot); u(\cdot): |u(t)| \leq 1}.$$

Требуется найти оптимальное программное управление  $u^*(t)$  и соответствующие ему оптимальные траектории  $x_1^*(t)$  и  $x_2^*(t)$ .

Аналитическое решение этой задачи имеет следующий вид [10]:

$$u^*(t) = -\text{sign}(\cos t);$$

$$x_1^*(t) = \begin{cases} \cos t - 1, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ \cos t - 2 \sin t + 1, & \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2}, \\ \cos t - 4 \sin t - 1, & \frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi; \end{cases} \quad x_2^*(t) = \begin{cases} -\sin t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ -\sin t - 2 \cos t, & \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2}, \\ -\sin t - 4 \cos t, & \frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

В [17] приведены соотношения для нахождения оптимального управления в спектральной форме математического описания при выборе в качестве ортонормированного базиса системы функций Уолша. В общем случае для биортонормированного базиса получаем

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2, \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_2 = -\mathbf{X}_1 + \mathbf{U}, \quad (20)$$

$$\hat{I} = \mathbf{q}^b(2\pi) \cdot \mathbf{X}_2 \rightarrow \min_{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; \mathbf{U} \in \mathbb{U}_L}, \quad (21)$$

где  $\mathbf{X}_1 = \mathbb{S}[x_1(t)]$ ,  $\mathbf{X}_2 = \mathbb{S}[x_2(t)]$  — спектральные характеристики координат вектора состояния,  $\mathbf{U} = \mathbb{S}[u(t)]$  — спектральная характеристика управления,  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{X}_2$ ,  $\mathbf{U}$  — матрицы-столбцы размеров  $L \times 1$ ;  $\mathbf{P}$  — спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального условия [18, 19] — квадратная матрица размеров  $L \times L$ ;  $\mathbf{q}^b(2\pi)$  — спектральная характеристика линейного функционала [14], ставящего в соответствие функции ее значение в точке  $2\pi$ , — матрица-строка размеров  $1 \times L$  значений первых  $L$  функций базиса восстановления при  $t = 2\pi$ . Таким образом, задача оптимального управления сводится к конечномерной задаче минимизации (20) и (21).

При выборе функций Уолша, заданных на отрезке  $[0, 2\pi]$ ,  $\mathbb{U}_L = \{\mathbf{U}: \|\mathbf{U}\|_\diamond \leq \sqrt{2\pi}\}$ . Задача минимизации (20) и (21) была решена в [17] при  $L = 16$  мультистартовым адаптивным методом случайного поиска при нулевом начальном приближении для управления ( $\mathbf{U} = \mathbf{O}$  — нулевой вектор), ограничение на управление учитывалось с помощью добавления к целевой функции  $\hat{I}$  штрафного слагаемого. Наилучший результат (из 15) был достигнут при 518 итерациях, минимальной величине шага  $\varepsilon = 10^{-9}$  и стандартных параметрах метода (см. [13]). Далее с найденным приближением к оптимальному управлению спектральные характеристики  $\mathbf{X}_1$  и  $\mathbf{X}_2$  координат вектора состояния были найдены с усечениями 32, 64, 128, 256, 512 и 1024 из уравнений (20). И только в последнем случае при  $L = 1024$  был получен приемлемый по точности результат с максимумом отклонения приближенного решения от точного для первой координаты вектора состояния  $x_1(t)$ : 0.049358, для второй координаты  $x_2(t)$ : 0.039524. Хорошая точность нахождения оптимального управления даже при  $L = 16$  обусловлена скорее всего тем, что  $u^*(t)$  отличается от функции Уолша с

номером  $i = 3$  числовым коэффициентом, т.е. достаточно даже  $L = 4$  (при использовании нумерации Пэли [3]).

Применение других методов оптимизации, а также решение конечномерной задачи минимизации (20) и (21) при  $L = 32, 64, \dots, 1024$  встретило ряд трудностей, связанных, по-видимому, со сложным рельефом поверхности уровня целевой функции в  $\mathbb{R}^L$ . Результаты расчетов приведены в табл. 1, где представлено минимальное значение функционала качества (его точное значение  $-4$ ), и на рис. 20 и 21. Здесь и далее принята следующая цветовая кодировка графиков для различных значений  $L$ : 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, точное решение показано точками.

Решим задачу с помощью системы блочно-импульсных функций  $\{\Pi(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ . Для этого перепишем спектральные аналоги уравнений (19), задающих модель объекта управления, следующим образом:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{X}_2, \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{P}^{-1} \cdot (-\mathbf{X}_1 + \mathbf{U}), \quad (22)$$

где  $\mathbf{P}^{-1}$  — спектральная характеристика оператора интегрирования [18, 19] — квадратная матрица размеров  $L \times L$ , обратная по отношению к  $\mathbf{P}$ .

Для наиболее часто применяемых базисных систем, например, для полиномов Лежандра, тригонометрических функций, функций Уолша и Хаара, матрицы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{P}^{-1}$  известны [20]. Система блочно-импульсных функций  $\{\Pi(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  предполагает расчет элементов матриц  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{P}^{-1}$  по формулам

$$\mathbf{P} = (P_{ij}), \quad P_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j, \\ \frac{2}{h}, & i = j, \\ (-1)^{i+j} \frac{4}{h}, & i > j; \end{cases} \quad \mathbf{P}^{-1} = (P_{ij}^{-1}), \quad P_{ij}^{-1} = \begin{cases} 0, & i < j, \\ \frac{h}{2}, & i = j, \\ h, & i > j. \end{cases}$$

При выборе других финитных функций, которые будут рассмотрены ниже, спектральная характеристика  $\mathbf{P}^{-1}$  рассчитывается численно, что обеспечивает устойчивость вычислительного алгоритма по сравнению с численным расчетом  $\mathbf{P}$ , поэтому уравнения (22) оказываются предпочтительнее.

С помощью системы блочно-импульсных функций, заданных на отрезке  $[0, 2\pi]$ , задача минимизации (22) и (21) была решена при  $L = 16, 32, \dots, 1024$  методом конфигураций при нулевом начальном приближении для управления, ограничение на управление также учитывалось с помощью добавления к целевой функции  $\hat{I}$  штрафного слагаемого. При этом  $\mathbf{U}_L = \{\mathbf{U}: \|\mathbf{U}\|_{\square} \leq \sqrt{h} = \sqrt{2\pi/L}\}$ . Для метода конфигураций выбрана минимальная величина шага  $\varepsilon = 10^{-9}$  и стандартные параметры метода (см. [13]). Число итераций 30, 20, 22, 12, 10, 10, 8 соответствует порядкам усечения 16, 32,  $\dots$ , 1024. Результаты расчетов приведены в табл. 1, где представлено минимальное значение функционала качества, и на рис. 22 и 23. График оптимального управления при  $L = 1024$  не отличается от приведенного на рис. 20, однако при меньших значениях порядка усечения  $L$  управление отличается от точного решения за счет смещенных влево моментов переключения (см. рис. 22). При  $L = 1024$  максимум отклонения приближенного решения от точного для первой координаты вектора состояния  $x_1(t)$ : 0.034203, для второй координаты  $x_2(t)$ : 0.036043. Полученные результаты точнее, а главное — конечномерная задача минимизации решается для всех выбранных значений  $L$ .

Далее приведем результаты решения задачи оптимального управления с помощью кусочно-линейных функций Шёнберга  $\{B_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ . Выше они были определены на отрезке  $[0, 1]$ , но нетрудно их задать и на отрезке  $[0, 2\pi]$  с помощью масштабирования (11),  $\mathbf{U}_L = \{\mathbf{U}: \|\mathbf{U}\|_{\square} \leq \sqrt{h} = \sqrt{2\pi/(L-1)}\}$ .

Таблица 1. Минимальное значение функционала качества при различных порядках усечения  $L$ ,  $\min I$ .

$L$	Функции Уолша	Блочно-импульсные функции
16	-2.227744	-3.613098
32	-2.943025	-3.848228
64	-3.425103	-3.936701
128	-3.700894	-3.971688
256	-3.847231	-3.986640
512	-3.917713	-3.993453
1024	-3.960476	-3.996690

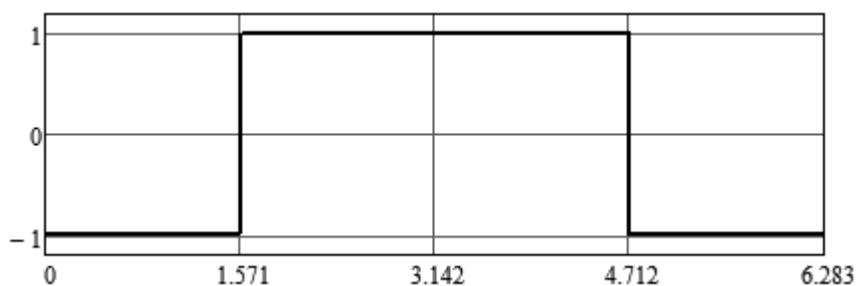


Рис. 20. График оптимального управления  $u^*(t)$ , найденного спектральным методом при применении функций Уолша.

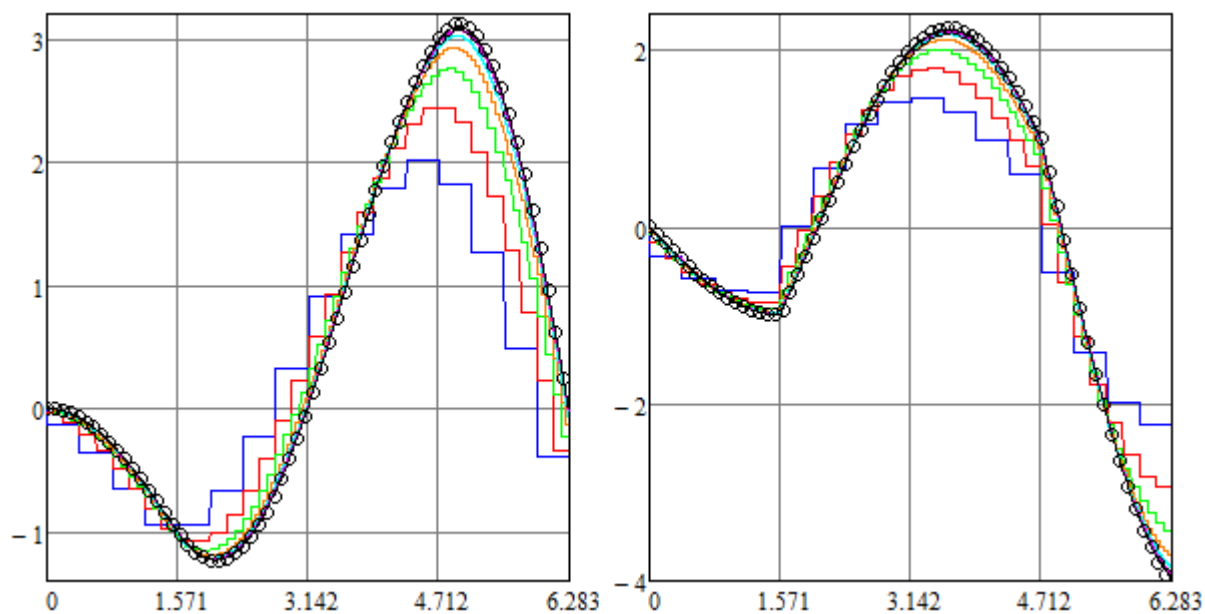


Рис. 21. Графики функций  $x_1^*(t)$  (слева) и  $x_2^*(t)$  (справа) при применении функций Уолша.

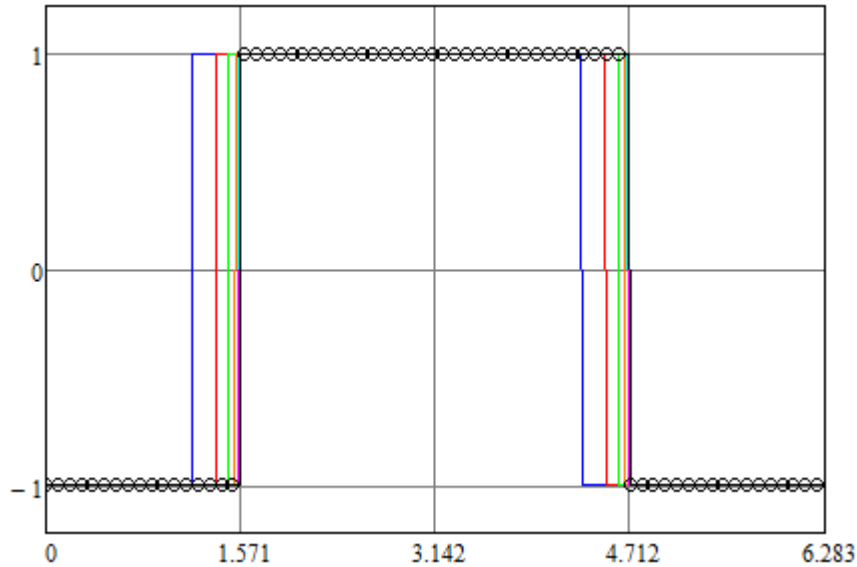


Рис. 22. Графики оптимального управления  $u^*(t)$ , найденного спектральным методом при применении блочно-импульсных функций.

Для этого и последующих базисов ограничимся порядком усечения  $L = 128$ , параметры метода конфигураций описаны выше. Графики оптимального управления и оптимальных траекторий показаны на рис. 24 и 25. Максимумы отклонения приближенного решения от точного для первой координаты вектора состояния  $x_1(t)$  и второй координаты  $x_2(t)$ , минимальное значение функционала качества можно найти в табл. 2. В этой же таблице приведены результаты расчетов для финитных функций, порожденных симметричным и несимметричным сплайнами Леонтьева первой степени  $\{\Phi_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  и  $\{\Psi_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , локальными полиномиальными сплайнами второй, третьей и четвертой степени  $\{S_2(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ ,  $\{S_3(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  и  $\{S_4(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , а также финитными функциями  $\{G(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  и  $\{C(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ . Расчеты проводились с теми же  $U_L$ , порядком усечения  $L$  и параметрами метода конфигураций (во всех случаях было сделано 12 итераций).

Применение биортонормированных базисов, порожденных финитными функциями за исключением сплайнов Леонтьева, дает сопоставимые по точности результаты. Поэтому выбор конкретного базиса может быть продиктован требуемой степенью гладкости приближенного решения. Графики оптимального управления и оптимальных траекторий не отличаются от соответствующих графиков, изображенных на рис. 24 и 25 (при выбранном масштабе).

Лучшее по точности решение задачи оптимального управления получено для кусочно-линейных функций Шёнберга, но здесь нужно отметить, что в этом случае численное интегрирование методом трапеций, которое применялось для расчета спектральной характеристики оператора интегрирования  $\mathbf{P}^{-1}$ , дает точный результат, если сетки на отрезке  $[0, 2\pi]$  для построения финитных функций и для численного интегрирования совпадают.

На рис. 26 и 27 показаны графики оптимального управления, найденного при применении симметричных и несимметричных сплайнов Леонтьева первой степени. В моменты переключения управления, где точное решение, т.е. функция  $u^*(t) = -\text{sign}(\cos t)$ , имеет разрывы первого рода, на графиках видны характерные для этого типа базисов достаточно существенные погрешности. Они сглаживаются для координат вектора состояния, однако и для них проявляется характерный рисунок при аппроксимации, заметный при другом масштабе и приводящий к увеличению погрешности (см. рис. 28 и 29). Если взять

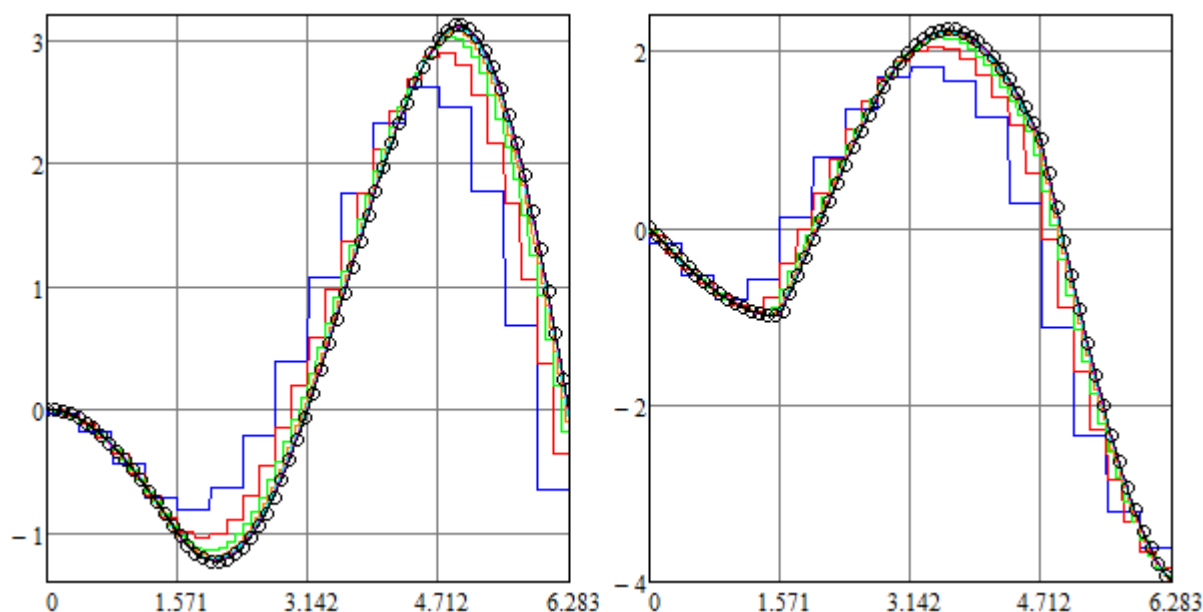


Рис. 23. Графики функций  $x_1^*(t)$  (слева) и  $x_2^*(t)$  (справа) при применении блочно-импульсных функций.

в качестве базиса функции, порожденные сплайнами Леонтьева второй степени, то к погрешностям в моменты переключения добавятся погрешности в граничных точках отрезка  $[0, 2\pi]$ . Это связано не столько с тем, что множество допустимых управлений в спектральной форме математического описания аппроксимируется кубом (14), сколько с определением самих сплайнов.

### Заключение

В статье представлена методика построения спектральных аналогов множества допустимых скалярных управлений с геометрическими ограничениями относительно биортонормированных базисов для прямой оптимизации динамических систем [8,9]. Рассмотрены базисы, порожденные финитными функциями, которые ранее применялись для расчетов проекционно-сеточным спектральным методом. При использовании в качестве порождающей функции  $B$ -сплайнов Шёнберга степени выше первой, симметричных и несимметричных сплайнов Леонтьева построенные спектральные аналоги достаточно сложны, что затрудняет проверку допустимости управлений в спектральной форме математического описания, вследствие этого предложено использовать локальные полиномиальные сплайны и произвольные финитные функции, чтобы получить спектральный аналог множества допустимых управлений максимально простым, а именно в виде  $L$ -мерного куба, где  $L$  — порядок усечения спектральных характеристик, т.е. количество функций базисной системы, используемых при аппроксимации управления.

Как и в случае ортонормированных базисных систем, эта методика без изменений может применяться для построения множества допустимых векторных управлений в спектральной форме математического описания при допустимой области значений, ограниченной параллелотопом, и с незначительными дополнениями при допустимой области значений векторных управлений, ограниченной эллипсоидом. Предложенную методику можно применять для учета ограничений не только на управление, но и на координаты вектора состояния динамической системы, если это необходимо.

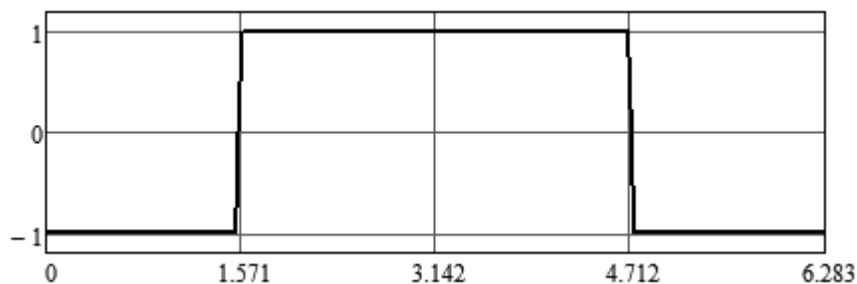


Рис. 24. График оптимального управления  $u^*(t)$ , найденного спектральным методом при применении кусочно-линейных функций Шёнберга.

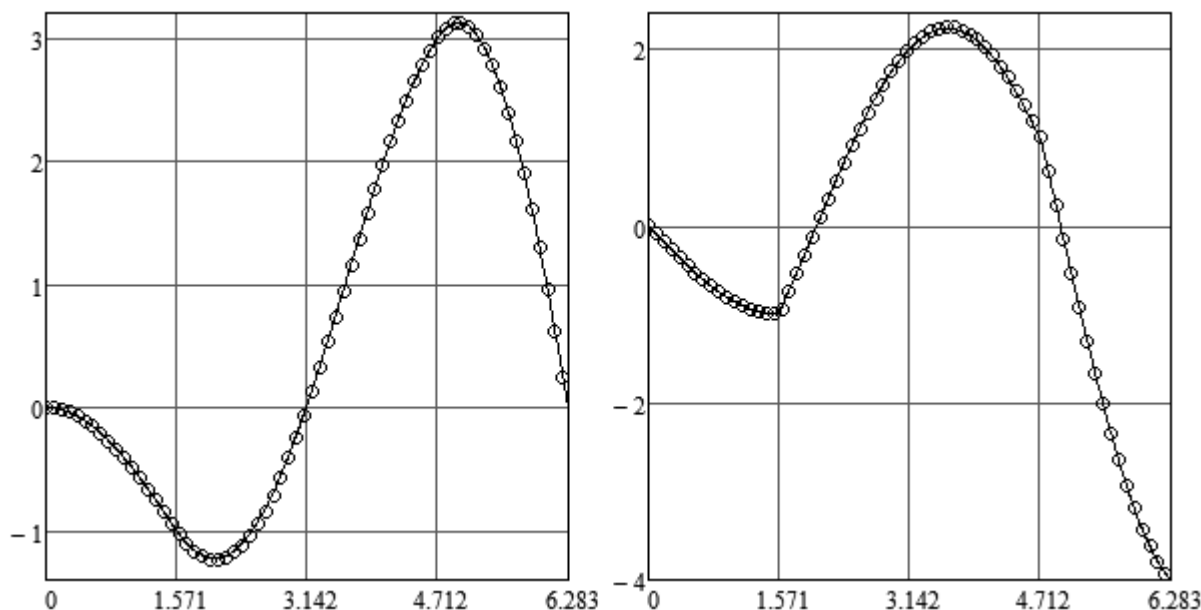


Рис. 25. Графики функций  $x_1^*(t)$  (слева) и  $x_2^*(t)$  (справа) при применении кусочно-линейных функций Шёнберга.

Таблица 2. Максимумы отклонения приближенного решения от точного для координат вектора состояния,  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$ ; минимальное значение функционала качества,  $\min I$ .

Базис	$\Delta x_1$	$\Delta x_2$	$\min I$
$\{\tilde{B}_1(i, t), B_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$	0.024746	0.031928	-3.999805
$\{\tilde{\Phi}_1(i, t), \Phi_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$	0.074607	0.087239	-3.986333
$\{\tilde{\Psi}_1(i, t), \Psi_1(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$	0.095378	0.103809	-3.989167
$\{\tilde{S}_2(i, t), S_2(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$	0.037157	0.039040	-3.995814
$\{\tilde{S}_3(i, t), S_3(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$	0.044349	0.044626	-3.993534
$\{\tilde{S}_4(i, t), S_4(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$	0.049043	0.049384	-3.992071
$\{\tilde{G}(i, t), G(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$	0.034226	0.037028	-3.996893
$\{\tilde{C}(i, t), C(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$	0.035301	0.037761	-3.996518

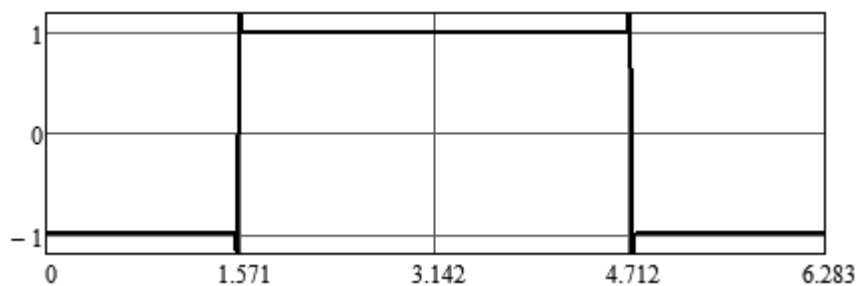


Рис. 26. График оптимального управления  $u^*(t)$ , найденного спектральным методом при применении симметричных сплайнов Леонтьева первой степени.

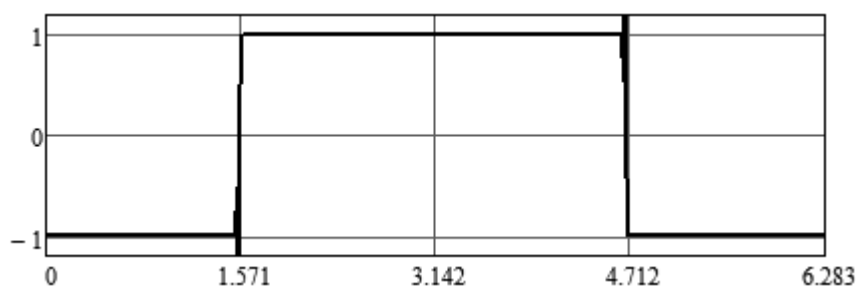


Рис. 27. График оптимального управления  $u^*(t)$ , найденного спектральным методом при применении несимметричных сплайнов Леонтьева первой степени.

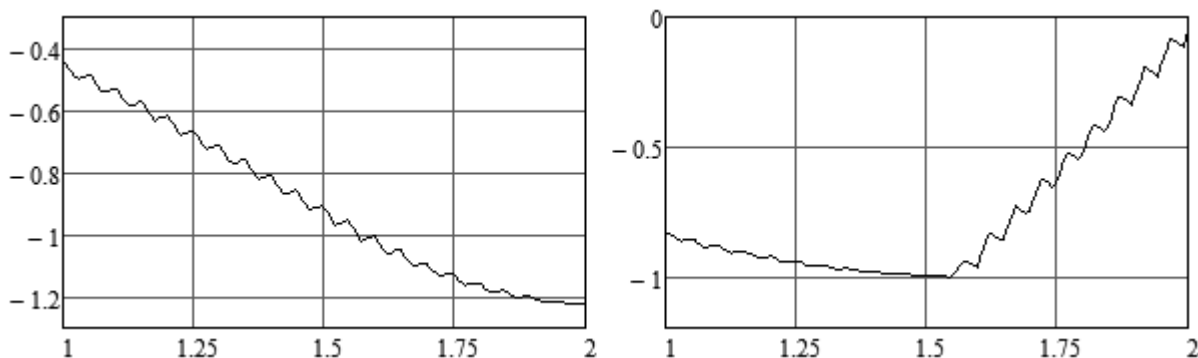


Рис. 28. Графики функций  $x_1^*(t)$  (слева) и  $x_2^*(t)$  (справа) при применении симметричных сплайнов Леонтьева первой степени.

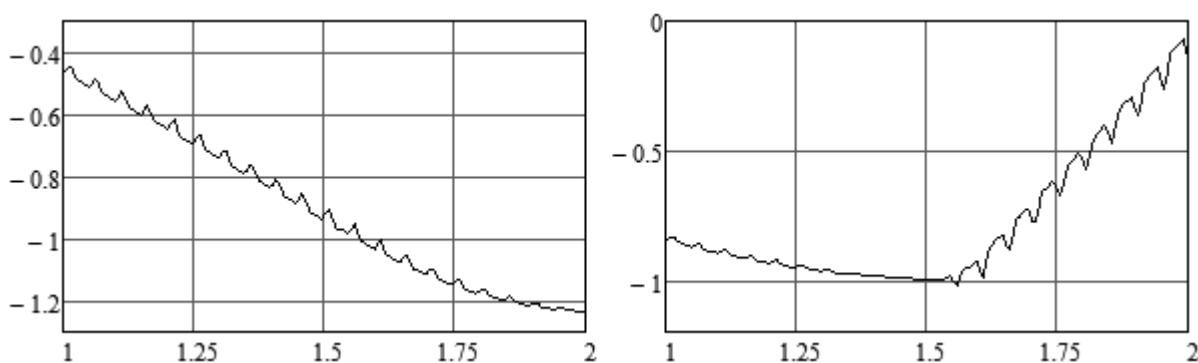


Рис. 29. Графики функций  $x_1^*(t)$  (слева) и  $x_2^*(t)$  (справа) при применении несимметричных сплайнов Леонтьева первой степени.

## Список литературы

- [1] Александров А.Д. Выпуклые многогранники. — М.: ГИТТЛ, 1950. — 428 с.
- [2] Васильев В.В., Симак Л.А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. — К.: НАН Украины, 2008. — 256 с.
- [3] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. — М.: Наука, 1987. — 344 с.
- [4] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980. — 352 с.
- [5] Лапин С.В., Егунов Н.Д. Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. — 496 с.
- [6] Леонтьев В.Л. Ортогональные финитные функции и численные методы. — Ульяновск: УлГУ, 2003. — 178 с.
- [7] Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981. — 416 с.
- [8] Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. — М.: Наука, 1971. — 424 с.
- [9] Пантелеев А.В. Применение эволюционных методов глобальной оптимизации в задачах оптимального управления детерминированными системами. — М.: Изд-во МАИ, 2013. — 160 с.
- [10] Пантелеев А.В., Бортакровский А.С. Теория управления в примерах и задачах. — М.: Инфра-М, 2016. — 584 с.
- [11] Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. — М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. — 160 с.
- [12] Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Синтез оптимальных нелинейных стохастических систем управления спектральным методом // Информатика и ее применения. — 2011. Т. 5. Вып. 2. — С. 69–81.
- [13] Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. — М.: Изд-во МАИ, 2012. — 160 с.
- [14] Рыбаков К.А. Спектральные характеристики линейных функционалов и их приложения к анализу и синтезу стохастических систем управления // Труды МАИ. — 2005. № 18.
- [15] Рыбаков К.А. Многопараметрические базисные системы для представления функций в неограниченных областях // Научный вестник МГТУ ГА. — 2013. № 195 (9). — С. 45–50.
- [16] Рыбаков К.А. Идентификация стохастических систем в спектральной форме математического описания // Идентификация систем и задачи управления (SICPRO'15). X Международная конференция, Москва, 26–29 января 2015 г.: Тр. конф. — М.: Институт проблем управления РАН, 2015. — С. 1306–1334.
- [17] Рыбаков К.А. Построение множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания // Вычислительные технологии. — 2015. Т. 20. № 3. — С. 58–74.
- [18] Рыбин В.В. Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. — М.: Изд-во МАИ, 2011. — 220 с.
- [19] Рыбин В.В. Моделирование нестационарных систем управления целого и дробного порядка проекционно-сеточным спектральным методом. — М.: Изд-во МАИ, 2013. — 160 с.
- [20] Солодовников В.В., Семенов В.В., Пешель М., Недо Д. Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. — М.: Машиностроение, 1979. — 664 с.