ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 1, 2012
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Общая теория управления

Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Лагерра

К.А. Рыбаков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
кафедра «Математическая кибернетика»,
rkoffice@mail.ru

В работе получены соотношения для расчета спектральных характеристик операторов умножения, дифференцирования и интегрирования относительно обобщенных функций Лагерра. Приведены различные примеры их применения.

Ключевые слова: базис; полиномы Лагерра; обобщенные функции Лагерра; спектральный метод; спектральная характеристика

Введение

Одной из форм математического описания систем управления является спектральная [5, 6, 9, 15, 17]. В ее основе лежит представление сигналов совокупностью коэффициентов разложения их в ряды по полной ортонормированной системе функций (базисной системе), а ее базовыми понятиями являются спектральные характеристики функций (нестационарные спектральные характеристики) и спектральные характеристики линейных операторов (нестационарные передаточные функции). Использование спектральной формы математического описания позволяет формализовать процесс решения задач анализа, синтеза и идентификации при различных областях изменения времени и координат вектора состояния системы управления.

Для таких задач, как, например, синтез оптимальных стохастических систем управления при неполной информации о векторе состояния [8], в некоторых случаях требуется выбирать базисную систему, функции которой интегрируемы на множестве действительных чисел, но при этом в виде сходящегося в среднеквадратическом (с весом) ряда по таким функциям могут быть представлены многочлены. При отсутствии ограничений на координаты вектора состояния в работе [11] было предложено использовать систему функций, определенных на основе полиномов Эрмита. При условии неотрицательности координат вектора состояния может быть использована система функций, которая определяется на основе полиномов Лагерра – система обобщенных функций Лагерра. Они заданы таким образом, что являются интегрируемыми на множестве $[0,+\infty)$ и ортогональными с весовой функцией, аналогичной по структуре весовой функции полиномов Лагерра.

Структура статьи аналогична [11], а именно приведены рекуррентные соотношения для обобщенных функций Лагерра, их производных и первообразных, найдены соотношения для расчета спектральных характеристик операторов умножения, дифференцирования и интегрирования (двумерных нестационарных передаточных функций элементарных звеньев систем управления: усилительного, дифференцирующего и интегрирующего).

Изучены частные случаи и приведены примеры применения спектральной формы математического описания с использованием рассмотренной базисной системы в задачах представления функций, их производных, первообразных и в задаче анализа выходных процессов линейных детерминированных систем управления.

Обобщенные функции Лагерра

Рассмотрим полиномы Лагерра [2, 13, 18], которые определяются соотношениями

$$L_j^\alpha(x) = (-1)^j x^{-\alpha} e^x \frac{d^j}{dx^j}(x^{\alpha+j}e^{-x}) \tag{1}$$

или

$$L_j^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j+k} C_j^k (\alpha+j)^{[j-k]} x^k\,, \tag{2}$$

где $\alpha > -1$ – заданное число, $C_j^k = \dfrac{j!}{k!(j-k)!}$, $(\alpha+j)^{[j-k]}$ – факториальный многочлен ($t^{[k]} = t(t-1)\cdots(t-k+1)$, $t^{[0]} = 1$). Они являются ортогональными с весом $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ на множестве неотрицательных чисел, т.е.

$$\left(L_i^\alpha(x), L_j^\alpha(x)\right)_{L_2([0,+\infty);\rho(x))} = \begin{cases} j!\Gamma(\alpha+j+1), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

где $(\,\cdot,\cdot\,)_{L_2([0,+\infty);\rho(x))}$ – скалярное произведение в пространстве $L_2\left([0,+\infty);\rho(x)\right)$ [3]:

$$\left(f(x), h(x)\right)_{L_2([0,+\infty);\rho(x))} = \int_0^{+\infty} \rho(x) f(x) h(x) dx, \quad f(x), h(x) \in L_2\left([0,+\infty);\rho(x)\right),$$

а $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция: $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

Функции Лагерра задаются следующим образом: $\Psi_j^\alpha(x) = \rho^{\frac{1}{2}}(x) L_j^\alpha(x),\ j = 0,1,2,\ldots$ Они ортогональны на множестве неотрицательных чисел с единичным весом, поскольку

$$\left(\Psi_i^\alpha(x), \Psi_j^\alpha(x)\right)_{L_2([0,+\infty))} = \left(L_i^\alpha(x), L_j^\alpha(x)\right)_{L_2([0,+\infty);\rho(x))} = \begin{cases} j!\Gamma(\alpha+j+1), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

где $(\,\cdot,\cdot\,)_{L_2([0,+\infty))}$ – скалярное произведение в пространстве $L_2\left([0,+\infty)\right)$:

$$\left(f(x), h(x)\right)_{L_2([0,+\infty))} = \int_0^{+\infty} f(x) h(x) dx, \quad f(x), h(x) \in L_2\left([0,+\infty)\right).$$

Для представления функций рядами удобнее использовать ортонормированные системы [3, 9], поэтому обозначим через $l_j^\alpha(x)$ нормированные полиномы Лагерра, а через $\psi_j^\alpha(x)$ – нормированные функции Лагерра [13]:

$$l_j^\alpha(x)=\frac{L_j^\alpha(x)}{\sqrt{h_j}},\quad \psi_j^\alpha(x)=\frac{\Psi_j^\alpha(x)}{\sqrt{h_j}},\quad h_j=j!\Gamma(\alpha+j+1),\quad j=0,1,2,\ldots$$

Далее рассмотрим функции

$$F_j^{\alpha,\beta}(x)=\rho^{\frac{1-\beta}{2}}(x)L_j^\alpha(x),\quad j=0,1,2,\ldots, \tag{3}$$

где числовой параметр β может принимать любые значения из отрезка $[0,1]$.

Очевидно, что при $\beta=1$ функции $F_j^{\alpha,\beta}(x)$ совпадают с полиномами Лагерра $L_j^\alpha(x)$, а при $\beta=0$ – с функциями Лагерра $\Psi_j^\alpha(x)$. Функции $F_j^{\alpha,\beta}(x)$ будем называть *обобщенными функциями Лагерра*. Они ортогональны на множестве неотрицательных чисел с весом $\rho^\beta(x)$, при этом

$$\left(F_i^{\alpha,\beta}(x),F_j^{\alpha,\beta}(x)\right)_{L_2\left([0,+\infty);\rho^\beta(x)\right)}=\left(L_i^\alpha(x),L_j^\alpha(x)\right)_{L_2([0,+\infty);\rho(x))}=\begin{cases} j!\Gamma(\alpha+j+1), & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases} \tag{4}$$

Здесь $(\,\cdot,\cdot\,)_{L_2\left([0,+\infty);\rho^\beta(x)\right)}$ – скалярное произведение в пространстве $L_2\left([0,+\infty);\rho^\beta(x)\right)$:

$$\left(f(x),h(x)\right)_{L_2\left([0,+\infty);\rho^\beta(x)\right)}=\int_0^{+\infty}\rho^\beta(x)f(x)h(x)dx,\quad f(x),h(x)\in L_2\left([0,+\infty);\rho^\beta(x)\right).$$

Функции $f_j^{\alpha,\beta}(x)=\dfrac{F_j^{\alpha,\beta}(x)}{\sqrt{h_j}}$, $j=0,1,2,\ldots,$ будем называть *нормированными обобщенными функциями Лагерра* (при $\beta=1$ они совпадают с нормированными полиномами Лагерра $l_j^\alpha(x)$, а при $\beta=0$ – с нормированными функциями Лагерра $\psi_j^\alpha(x)$). Доказательство полноты системы функций $\{f_j^{\alpha,\beta}(x)\}_{j=0}^\infty$ при $\beta\in(0,1)$ аналогично доказательству полноты систем функций Лагерра и Эрмита в [3].

Для упрощения обозначений в случае полиномов $L_j^\alpha(x)$ и $l_j^\alpha(x)$, а также функций $\Psi_j^\alpha(x)$, $F_j^{\alpha,\beta}(x)$, $\psi_j^\alpha(x)$ и $f_j^{\alpha,\beta}(x)$ не будем указывать параметры α и β.

Известно [2, 18], что для полиномов Лагерра $L_j(x)$ справедлива рекуррентная формула

$$L_{j+1}(x)=(x-\alpha-2j-1)L_j(x)-j(\alpha+j)L_{j-1}(x),\quad L_0(x)=1,\quad j=0,1,2,\ldots,$$

но обобщенные функции Лагерра $F_j(x)$ (и функции Лагерра $\Psi_j(x)$, которые являются их частным случаем) от полиномов $L_j(x)$ отличаются множителем, не зависящим от номера функции, следовательно, аналогичная рекуррентная формула справедлива и для функций $F_j(x)$:

$$F_{j+1}(x)=(x-\alpha-2j-1)F_j(x)-j(\alpha+j)F_{j-1}(x),\quad F_0(x)=\rho^{\frac{1-\beta}{2}}(x),\quad j=0,1,2,\ldots \tag{5}$$

Для приведенных рекуррентных формул следует дополнительно определить функции $L_{-1}(x)=0$ и $F_{-1}(x)=0$. Эти соотношения удобны для получения явных формул, если j невелико. Так, например, первые четыре обобщенные функции Лагерра имеют вид

$$F_0(x)=(x^{\alpha}e^{-x})^{\frac{1-\beta}{2}},$$

$$F_1(x)=(x^{\alpha}e^{-x})^{\frac{1-\beta}{2}}(x-\alpha-1),$$

$$F_2(x)=(x^{\alpha}e^{-x})^{\frac{1-\beta}{2}}\left(x^2-(2\alpha+4)x+\alpha^2+3\alpha+2\right),$$

$$F_3(x)=(x^{\alpha}e^{-x})^{\frac{1-\beta}{2}}\left(x^3-(3\alpha+9)x^2+(3\alpha^2+15\alpha+18)x-\alpha^3-6\alpha^2-11\alpha-6\right).$$

Графики нормированных обобщенных функций Лагерра при $\alpha=0$ и различных значениях β изображены на рис. 1–4.

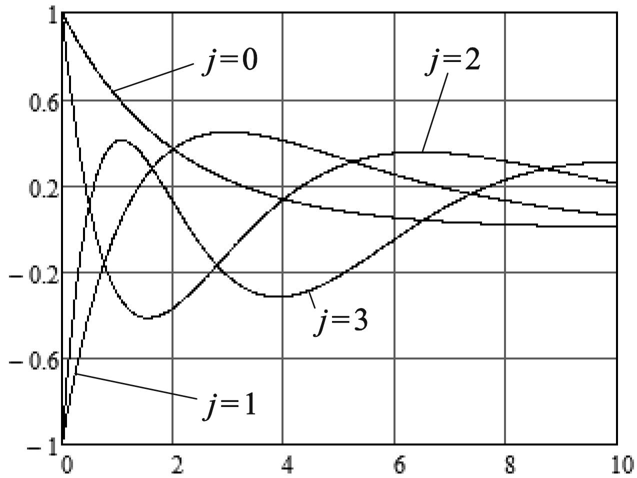

Рис. 1. Графики обобщенных функций Лагерра при $\beta=0$ (функций Лагерра)

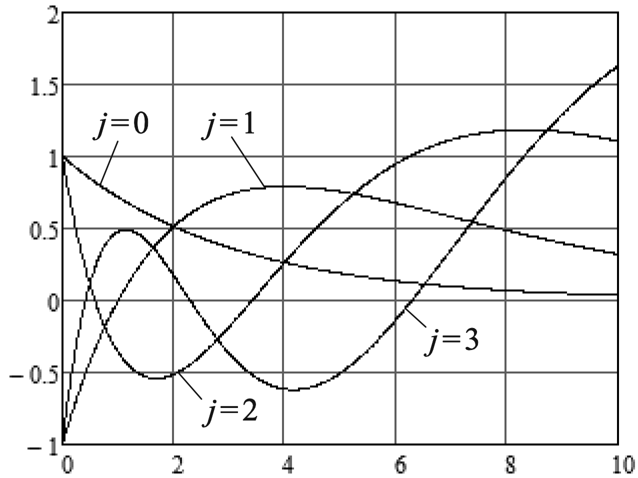

Рис. 2. Графики обобщенных функций Лагерра при $\beta=\frac{1}{3}$

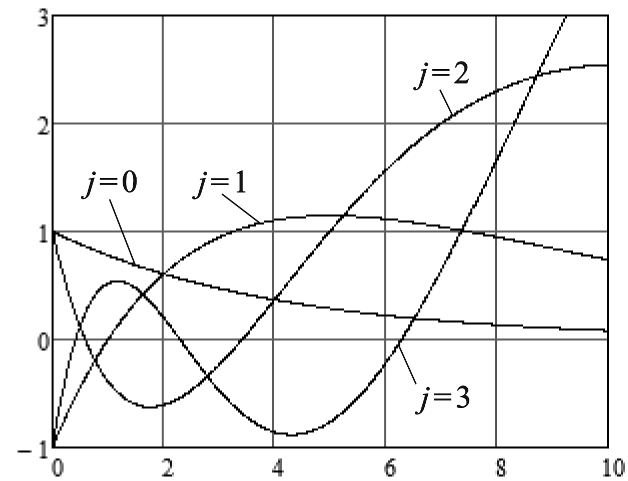

Рис. 3. Графики обобщенных функций Лагерра при $\beta=\frac{1}{2}$

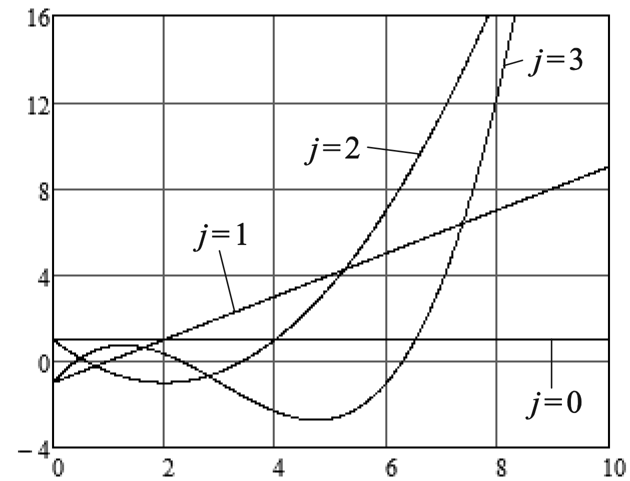

Рис. 4. Графики обобщенных функций Лагерра при $\beta=1$ (полиномов Лагерра)

Прежде, чем вывести соотношения для расчета спектральных характеристик операторов дифференцирования и интегрирования, необходимо получить соотношения, связывающие обобщенные функции Лагерра и их производные, а также первообразные.

Из определения обобщенных функций Лагерра следует, что

$$F_j(x)=(x^{\alpha}e^{-x})^{\frac{1-\beta}{2}}L_j(x)=x^{\alpha\frac{1-\beta}{2}}e^{-\frac{1-\beta}{2}x}L_j(x)=x^{\mu}e^{-\delta x}L_j(x),$$

где $\mu=\alpha\dfrac{1-\beta}{2}=\alpha\delta$, $\delta=\dfrac{1-\beta}{2}$, поэтому

$$F_j(x)=x^{\mu}e^{-\delta x}(-1)^j x^{-\alpha}e^{x}\frac{d^j}{dx^j}(x^{\alpha+j}e^{-x})=(-1)^j x^{\mu-\alpha}e^{(1-\delta)x}\frac{d^j}{dx^j}(x^{\alpha+j}e^{-x})=(-1)^j x^{-\eta}e^{\lambda x}\frac{d^j}{dx^j}(x^{\alpha+j}e^{-x}),$$

где $\eta=\alpha-\mu=\alpha\frac{1+\beta}{2}=\alpha\lambda$, $\lambda=1-\delta=\frac{1+\beta}{2}$ (новые параметры μ, δ, η, λ введены для удобства записи формул), или, учитывая (2),

$$F_j(x)=x^{\mu}e^{-\delta x}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}C_j^k(\alpha+j)^{[j-k]}x^k. \tag{6}$$

Таким образом,

$$F_{j+1}(x)=(-1)^{j+1}x^{-\eta}e^{\lambda x}\frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}(x^{\alpha+j+1}e^{-x})=(-1)^{j+1}x^{-\eta}e^{\lambda x}\frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}(x x^{\alpha+j}e^{-x}).$$

Применяя формулу Лейбница [2], получаем

$$F_{j+1}(x)=(-1)^{j+1}x^{-\eta}e^{\lambda x}\left(x\frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}(x^{\alpha+j}e^{-x})+(j+1)\frac{d^j}{dx^j}(x^{\alpha+j}e^{-x})\right)=-(j+1)(-1)^j x^{-\eta}e^{\lambda x}\frac{d^j}{dx^j}(x^{\alpha+j}e^{-x})-$$

$$-(-1)^j x^{-\eta}e^{\lambda x}x\frac{d}{dx}\frac{d^j}{dx^j}(x^{\alpha+j}e^{-x})=-(j+1)F_j(x)-(-1)^j x^{-\eta}e^{\lambda x}x\left((-1)^j x^{\eta}e^{-\lambda x}F_j(x)\right)'=-(j+1)F_j(x)-$$

$$-x^{-\eta}e^{\lambda x}x\left(\eta x^{\eta-1}e^{-\lambda x}F_j(x)-\lambda x^{\eta}e^{-\lambda x}F_j(x)+x^{\eta}e^{-\lambda x}F_j'(x)\right)=(\lambda x-\eta-j-1)F_j(x)-xF_j'(x).$$

Затем, умножая на λ левую и правую части (5) и вычитая полученный результат из последнего равенства, имеем

$$(1-\lambda)F_{j+1}(x)=(-\eta-j-1+\lambda\alpha+2\lambda j+\lambda)F_j(x)+\lambda j(\alpha+j)F_{j-1}(x)-xF_j'(x),$$

или

$$\delta F_{j+1}(x)=(\beta j-\delta)F_j(x)+\lambda j(\alpha+j)F_{j-1}(x)-xF_j'(x). \tag{7}$$

Дифференцируя левую и правую части (5), находим

$$F_{j+1}'(x)=F_j(x)+xF_j'(x)-(\alpha+2j+1)F_j'(x)-j(\alpha+j)F_{j-1}'(x),$$

а затем подставляем $xF_j'(x)$ из (7):

$$F_{j+1}'(x)=-\delta F_{j+1}(x)+(\beta j+\lambda)F_j(x)+\lambda j(\alpha+j)F_{j-1}(x)-(\alpha+2j+1)F_j'(x)-j(\alpha+j)F_{j-1}'(x). \tag{8}$$

Далее получим рекуррентные соотношения для первообразных обобщенных функций Лагерра. Проинтегрируем левую и правую части (7):

$$\delta\int_0^x F_{j+1}(\xi)d\xi=(\beta j-\delta)\int_0^x F_j(\xi)d\xi+\lambda j(\alpha+j)\int_0^x F_{j-1}(\xi)d\xi-\int_0^x \xi F_j'(\xi)d\xi.$$

Используя правило интегрирования по частям для последнего слагаемого в правой части, получаем

$$\begin{aligned}\int_0^x F_{j+1}(\xi)d\xi&=\frac{1}{\delta}\left((\beta j-\delta+1)\int_0^x F_j(\xi)d\xi+\lambda j(\alpha+j)\int_0^x F_{j-1}(\xi)d\xi-xF_j(x)\right)=\\&=\frac{1}{\delta}\left((\beta j+\lambda)\int_0^x F_j(\xi)d\xi+\lambda j(\alpha+j)\int_0^x F_{j-1}(\xi)d\xi-xF_j(x)\right).\end{aligned} \tag{9}$$

В случае $\delta=0$ (т.е. при $\beta=1$, $F_j(x)=L_j(x)$ – полиномы Лагерра)

$$\int_0^x F_j(\xi)d\xi=\frac{1}{j+1}\left(xF_j(x)-j(\alpha+j)\int_0^x F_{j-1}(\xi)d\xi\right). \tag{10}$$

При многократном интегрировании удобнее воспользоваться соотношением (8), в частности

$$F_{j+1}(x)-F_{j+1}(0)=-\delta\int_0^x F_{j+1}(\xi)d\xi+(\beta j+\lambda)\int_0^x F_j(\xi)d\xi+\lambda j(\alpha+j)\int_0^x F_{j-1}(\xi)d\xi-$$
$$-(\alpha+2j+1)\big(F_j(x)-F_j(0)\big)-j(\alpha+j)\big(F_{j-1}(x)-F_{j-1}(0)\big).$$

Поскольку $F_{j+1}(0)=-(\alpha+2j+1)F_j(0)-j(\alpha+j)F_{j-1}(0)$ (см. (5)),

$$F_{j+1}(x)=-\delta\int_0^x F_{j+1}(\xi)d\xi+(\beta j+\lambda)\int_0^x F_j(\xi)d\xi+\lambda j(\alpha+j)\int_0^x F_{j-1}(\xi)d\xi-$$
$$-(\alpha+2j+1)F_j(x)-j(\alpha+j)F_{j-1}(x),$$

или (такой же результат получается при подстановке $xF_j(x)$ из (5) в (9))

$$\int_0^x F_{j+1}(\xi)d\xi=\frac{1}{\delta}\left((\beta j+\lambda)\int_0^x F_j(\xi)d\xi+\lambda j(\alpha+j)\int_0^x F_{j-1}(\xi)d\xi\right)-$$
$$-\frac{1}{\delta}\big(F_{j+1}(x)+(\alpha+2j+1)F_j(x)+j(\alpha+j)F_{j-1}(x)\big). \qquad (11)$$

Если $\delta=0$ ($\beta=1$, полиномы Лагерра), то

$$\int_0^x F_j(\xi)d\xi=\frac{1}{j+1}\left(F_{j+1}(x)+(\alpha+2j+1)F_j(x)+j(\alpha+j)F_{j-1}(x)-j(\alpha+j)\int_0^x F_{j-1}(\xi)d\xi\right). \qquad (12)$$

Далее рассмотрим задачу представления функции $y(x)\in L_2\big([0,+\infty);\rho^\beta(x)\big)$ в виде ряда по нормированным обобщенным функциям Лагерра [3, 9]:

$$y(x)=\sum_{j=0}^{\infty}y_j f_j(x),\quad x\in[0,+\infty), \qquad (13)$$

где числа

$$y_j=\big(f_j(x),y(x)\big)_{L_2([0,+\infty);\rho^\beta(x))}=\int_0^{+\infty}\rho^\beta(x)f_j(x)y(x)dx,\quad j=0,1,2,..., \qquad (14)$$

называются *коэффициентами разложения* функции $y(x)$ относительно системы функций $\{f_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$.

Упорядоченная совокупность коэффициентов разложения y_j образует спектральную характеристику [6, 9, 15–17] функции $y(x)$: $[\,y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad ...\,]^{\mathrm{T}}$ ($^{\mathrm{T}}$ означает транспонирование).

Пример 1. Рассмотрим задачу приближенного представления плотности вероятности для распределения Рэлея $y(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\zeta^2}e^{-\frac{x^2}{2\zeta^2}}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ с параметром $\zeta=1$ в виде частичной суммы ряда по нормированным обобщенным функциям Лагерра.

Найдем численно коэффициенты разложения, используя формулу (14), ограничившись конечным числом первых N членов ряда (13). В этом случае функция

$$y_N(x)=\sum_{j=0}^{N-1}y_j f_j(x) \qquad (15)$$

является наилучшим приближением $y(x)$ в пространстве $L_2\left([0,+\infty);\rho^{\beta}(x)\right)$ [18]:

$$y(x) \approx y_N(x), \quad \left\|y(x)-y_N(x)\right\|_{L_2\left([0,+\infty);\rho^{\beta}(x)\right)} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Коэффициенты разложения зависят от числовых параметров α и β. Сравним погрешности аппроксимации функции $y(x)$ функцией $y_N(x)$ при различных N и β, положив $\alpha = 0$. Погрешность аппроксимации будем вычислять, используя три критерия:

$$J_1(y, y_N) = \left\|y(x)-y_N(x)\right\|_{L_2\left([0,+\infty);\rho^{\beta}(x)\right)} = \left\{\int\limits_0^{+\infty} \rho^{\beta}(x)\left(y(x)-y_N(x)\right)^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$J_2(y, y_N) = \left\|y(x)-y_N(x)\right\|_{L_2([0,+\infty))} = \left\{\int\limits_0^{+\infty} \left(y(x)-y_N(x)\right)^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{16}$$

$$J_3(y, y_N) = \left\|y(x)-y_N(x)\right\|_{C([0,+\infty))} = \sup_{0 \le x < +\infty} \left|y(x)-y_N(x)\right|.$$

Результаты расчетов приведены на рис. 5–8 и в таблице 1.

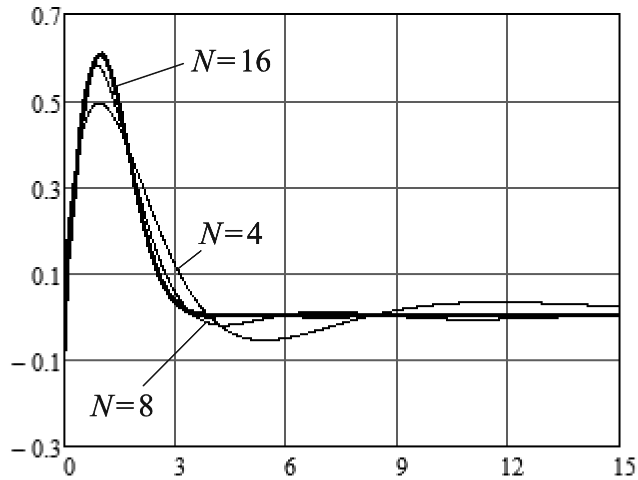

Рис. 5. Графики функций $y(x)$ и $y_N(x)$ при $\beta = 0$ и различных значениях N

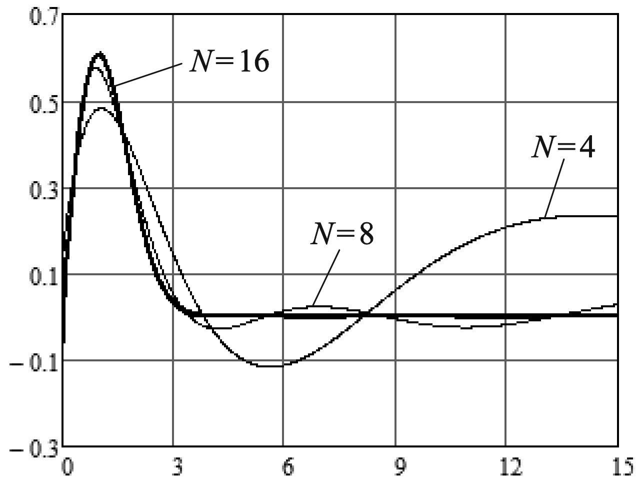

Рис. 6. Графики функций $y(x)$ и $y_N(x)$ при $\beta = \frac{1}{3}$ и различных значениях N

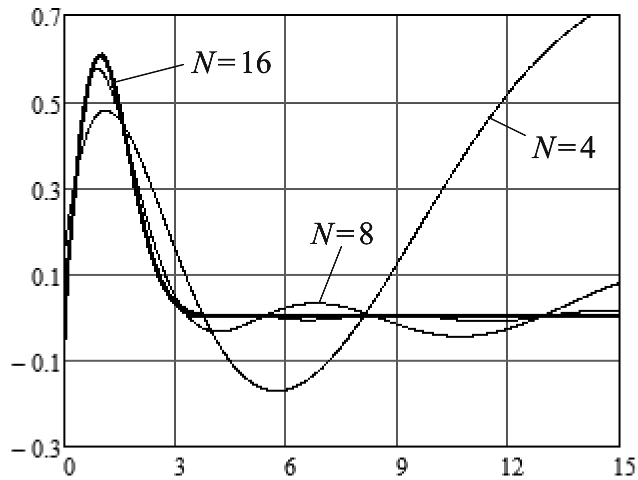

Рис. 7. Графики функций $y(x)$ и $y_N(x)$ при $\beta = \frac{1}{2}$ и различных значениях N

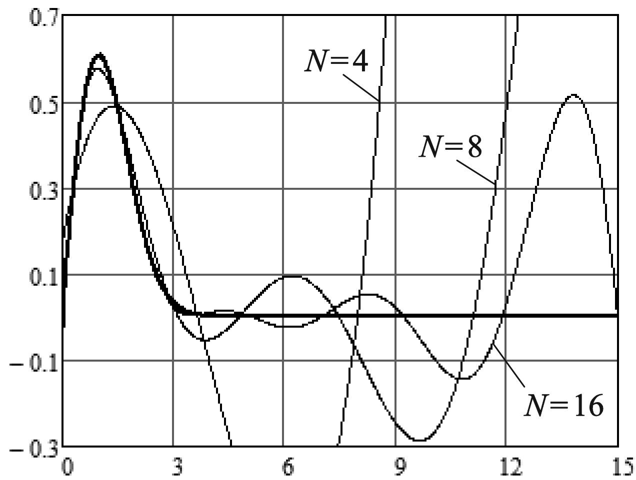

Рис. 8. Графики функций $y(x)$ и $y_N(x)$ при $\beta = 1$ и различных значениях N

На представленных рисунках толстой линией показан график функции $y(x)$, а тонкой – графики функций $y_N(x)$ при различных N, в следующих примерах принята такая же система обозначений: толстая линия для аппроксимируемой функции, тонкие – для ее приближений. В таблице 1 и в последующих таблицах, если это не оговорено особо, данные (погрешности, вычисленные по различным критериям) представлены в форме $J_1 / J_2 / J_3$.

Критерии J_2 и J_3 характеризуют среднеквадратическое и равномерное приближение функции $y(x)$ функциями $y_N(x)$ без учета веса; погрешность, рассчитанная по этим критериям, приведена для сравнения. Если при решении задачи аппроксимации функции ориентироваться на подобные критерии, то имеет смысл (особенно с ростом β) рассчитывать погрешности по формулам, аналогичным для J_2 и J_3 в (16), но только для конечных подмножеств $[0,+\infty)$.

Таблица 1

Погрешности аппроксимации функции $y(x)$ при различных β и N

	$\beta=0$	$\beta=\frac{1}{3}$	$\beta=\frac{1}{2}$	$\beta=1$
$N=4$	0.183243/ 0.183243/ 0.114075	0.164519/ 0.732944/ 0.233488	0.156149/ 2.663500/ 0.765335	0.133897/ –/ –
$N=8$	0.070569/ 0.070569/ 0.129654	0.051684/ 0.556821/ 0.157466	0.044064/ 2.738899/ 0.793647	0.028029/ –/ –
$N=16$	0.012135/ 0.012135/ 0.027530	0.008276/ 3.364286/ 0.943857	0.007124/ 8110.535929/ 1593.571427	0.004335/ –/ –

Пример 2. Рассмотрим задачу представления функции $z(x)=x^n$ (n – заданное целое неотрицательное число) в виде ряда по нормированным обобщенным функциям Лагерра.

Найдем коэффициенты разложения (в отличие от предыдущего примера получим для них аналитические выражения). Согласно (14)

$$z_j^n=\int_0^{+\infty}\rho^\beta(x)f_j(x)z(x)dx=\frac{1}{\sqrt{h_j}}\int_0^{+\infty}\rho^\beta(x)F_j(x)x^n dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{j!\Gamma(\alpha+j+1)}}\int_0^{+\infty}x^{\alpha\beta}e^{-\beta x}x^\mu e^{-\delta x}\left(\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}C_j^k(\alpha+j)^{[j-k]}x^k\right)x^n dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{j!\Gamma(\alpha+j+1)}}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}C_j^k(\alpha+j)^{[j-k]}\int_0^{+\infty}x^{\alpha\beta+\mu+n+k}e^{-\lambda x}dx.$$

Учитывая равенства $\alpha\beta+\mu=\alpha\lambda=\eta$, а также

$$\int_0^{+\infty}x^{\xi-1}e^{-\omega x}dx=\frac{1}{\omega^\xi}\int_0^{+\infty}u^{\xi-1}e^{-u}du=\frac{\Gamma(\xi)}{\omega^\xi}\quad(\omega,\xi>0),\tag{17}$$

получаем

$$z_j^n=\frac{1}{\sqrt{j!\Gamma(\alpha+j+1)}}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}C_j^k(\alpha+j)^{[j-k]}\frac{\Gamma(\eta+n+k+1)}{\lambda^{\eta+n+k+1}}.\tag{18}$$

При $\alpha=\eta=0$ эта формула упрощается, а именно

$$z_j^n=\frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}C_j^k j^{[j-k]}\frac{(n+k)!}{\lambda^{n+k+1}}=\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}C_j^k\frac{(n+k)!}{k!\lambda^{n+k+1}}=\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}C_j^k\frac{(n+k)^{[n]}}{\lambda^{n+k+1}}.$$

Если, как и в примере 1, ограничиться первыми N членами ряда (13), то функция $z_N(x)=\sum_{j=0}^{N-1} z_j^n f_j(x)$ будет приближенно представлять $z(x)$ в пространстве $L_2\left([0,+\infty);\rho^\beta(x)\right)$, однако отметим, что при $\beta=0$ $z_N(x)$ не будет сходиться в среднеквадратическом к $z(x)$, так как $z(x)\notin L_2\left([0,+\infty)\right)$.

Воспользуемся другим способом для расчета z_j^n:

$$z_j^n=\frac{\tilde z_j^n}{\sqrt{h_j}},\quad \tilde z_j^n=\int_0^{+\infty}\rho^\beta(x)F_j(x)z(x)dx=\int_0^{+\infty}\rho^\beta(x)F_j(x)x^n dx. \tag{19}$$

Так как $F_j(x)x^{n+1}=\left(F_{j+1}(x)+(\alpha+2j+1)F_j(x)+j(\alpha+j)F_{j-1}(x)\right)x^n$ (см. (5)),

$$\tilde z_j^{n+1}=\tilde z_{j+1}^n+(\alpha+2j+1)\tilde z_j^n+j(\alpha+j)\tilde z_{j-1}^n, \tag{20}$$

а начальные условия $(n=0)$ можно получить из (18):

$$\tilde z_j^0=\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}C_j^k(\alpha+j)^{[j-k]}\frac{\Gamma(\eta+k+1)}{\lambda^{\eta+k+1}}. \tag{21}$$

При $\alpha=\eta=0$ последнее выражение преобразуется к виду $\tilde z_j^0=j!\sum_{k=0}^{j}\frac{(-1)^{j+k}C_j^k}{\lambda^{k+1}}$, а при дополнительном условии $\lambda=1$ ($\beta=1$, полиномы Лагерра) $\tilde z_j^0=(-1)^j j!\sum_{k=0}^{j}(-1)^k C_j^k=\begin{cases}1, & j=0,\\ 0, & j>0;\end{cases}$ при $\lambda=\frac{1}{2}$ ($\beta=0$, функции Лагерра) $\tilde z_j^0=2j!\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}2^j C_j^k=2j!$; в остальных случаях – $\tilde z_j^0=\frac{j!}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)^j$.

Элементы z_j^n образуют спектральные характеристики $Z=\begin{bmatrix} z_0^n & z_1^n & z_2^n & \dots\end{bmatrix}^{\mathrm T}$ функций $z(x)=x^n$, в то же время они являются элементами спектральных характеристик линейных функционалов $\mathrm{J}^{\,n}$, ставящих в соответствие функции $y(x)$ интеграл от произведения этой функции на x^n по множеству неотрицательных чисел:

$$\mathrm{J}^{\,n}y(x)=\int_0^{+\infty}x^n y(x)dx.$$

Согласно свойствам спектральных характеристик линейных функционалов [9, 12], определенных относительно базисной системы функций, которые ортогональны с тождественно равной единице весовой функцией (в данном случае параметр β должен быть равен нулю), справедливо соотношение $\mathrm{J}^{\,n}y(x)=\sum_{j=0}^{\infty}z_j^n y_j$, где y_j – коэффициенты разложения функции $y(x)$. Воспользуемся этим соотношением, чтобы проверить условие нормировки для плотности вероятности распределения Рэлея (см. пример 1) и чтобы вычислить соответствующее математическое ожидание ($n=0$ и $n=1$). Будем использовать усеченные спектральные характеристики, т.е. $\mathrm{J}^{\,n}y(x)\approx\sum_{j=0}^{N-1}z_j^n y_j$. Результаты расчетов приведены в таблице 2.

Если весовая функция тождественно не равна единице $(\beta>0)$, то выражение для вычисления $\mathrm{J}^{\,n}y(x)$ более сложное [9]. В подобном случае требуется найти спектральную характеристику оператора умножения на функцию $\rho^{\beta}(x)$ или $\rho^{-\beta}(x)$. Соотношения для расчета таких спектральных характеристик приведены ниже.

Таблица 2

	$n=0$	$n=1$
$N=4$	1.187811	4.336639
$N=8$	0.970396	0.321910
$N=16$	1.004176	1.518009
$N=24$	1.000447	1.297062
$N=32$	0.999453	1.181923
Точное значение	1.000000	$\sqrt{\pi/2}\approx 1.253314$

Спектральные характеристики линейных операторов

На основе определения и рекуррентных формул для обобщенных функций Лагерра получим соотношения для расчета спектральных характеристик линейных операторов: умножения, дифференцирования и интегрирования. Эти соотношения необходимы для применения спектральной формы математического описания в различных задачах анализа, синтеза, идентификации и др. при использовании нормированных обобщенных функций Лагерра в качестве базисной системы. Аналогичные соотношения можно получить и для расчета спектральных характеристик других линейных операторов.

Спектральные характеристики операторов умножения

Рассмотрим оператор умножения на функцию $a(x)$, т.е. линейный оператор, ставящий в соответствие функции $f(x)$ произведение $a(x)f(x)$. Напомним [9, 17], что *спектральной характеристикой оператора умножения* на функцию $a(x)$ (*двумерной нестационарной передаточной функцией усилительного звена*) называется бесконечная двумерная матрица A, элементы которой вычисляются следующим образом:

$$A_{ij}=\int_0^{+\infty}\rho^{\beta}(x)a(x)f_i(x)f_j(x)dx=\frac{\tilde{A}_{ij}}{\sqrt{h_ih_j}},\quad i,j=0,1,2,...,$$

где

$$\tilde{A}_{ij}=\int_0^{+\infty}\rho^{\beta}(x)a(x)F_i(x)F_j(x)dx. \tag{22}$$

Для получения рекуррентных формул, требующихся при вычислении элементов $\tilde{A}_{ij+1}$, преобразуем произведение $F_i(x)F_{j+1}(x)$, используя соотношение (5):

$$\begin{aligned}F_i(x)F_{j+1}(x)&=F_i(x)\big((x-\alpha-2j-1)F_j(x)-j(\alpha+j)F_{j-1}(x)\big)=xF_i(x)F_j(x)-(\alpha+2j+1)F_i(x)F_j(x)-\\&-j(\alpha+j)F_i(x)F_{j-1}(x)=\big(F_{i+1}(x)+(\alpha+2i+1)F_i(x)+i(\alpha+i)F_{i-1}(x)\big)F_j(x)-(\alpha+2j+1)F_i(x)F_j(x)-\\&-j(\alpha+j)F_i(x)F_{j-1}(x)=F_{i+1}(x)F_j(x)+2(i-j)F_i(x)F_j(x)+i(\alpha+i)F_{i-1}(x)F_j(x)-j(\alpha+j)F_i(x)F_{j-1}(x),\end{aligned}$$

следовательно,

$$\tilde{A}_{ij+1}=\tilde{A}_{i+1j}+2(i-j)\tilde{A}_{ij}+i(\alpha+i)\tilde{A}_{i-1j}-j(\alpha+j)\tilde{A}_{ij-1}. \tag{23}$$

Это выражение не зависит от величины β и поэтому совпадает с рекуррентной формулой для элементов спектральных характеристик оператора умножения в случае полиномов Лагерра $(\beta=1)$ и функций Лагерра $(\beta=0)$, полученной в [13].

Наряду с найденным соотношением можно использовать свойство симметричности спектральной характеристики оператора умножения: $A_{ij}=A_{ji}$ $(\tilde{A}_{ij}=\tilde{A}_{ji})$.

Элементы $\tilde{A}_{i0}$ и $\tilde{A}_{0j}$ – начальные условия для (23) – вычисляются по определению:

$$\tilde{A}_{i0}=\int_0^{+\infty}\rho^{\beta}(x)a(x)F_i(x)F_0(x)dx,\quad \tilde{A}_{0j}=\int_0^{+\infty}\rho^{\beta}(x)a(x)F_0(x)F_j(x)dx=\tilde{A}_{j0}.$$

Например, если $a(x)=F_0(x)$, то $\tilde{A}_{0j}=\int_0^{+\infty}\rho^{\beta}(x)F_0^2(x)F_j(x)dx.$ Подставим в эту формулу выражения для $F_0(x)$ и $F_j(x)$, используя (6):

$$\tilde{A}_{0j}=\int_0^{+\infty}x^{\alpha\beta}e^{-\beta x}x^{2\mu}e^{-2\delta x}x^{\mu}e^{-\delta x}\left(\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}C_j^k(\alpha+j)^{[j-k]}x^k\right)dx=$$

$$=\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}C_j^k(\alpha+j)^{[j-k]}\int_0^{+\infty}x^{\alpha\beta+2\mu+\mu+k}e^{(-\beta-2\delta-\delta)x}dx=\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}C_j^k(\alpha+j)^{[j-k]}\int_0^{+\infty}x^{\alpha+\mu+k}e^{-(1+\delta)x}dx.$$

Принимая во внимание (17), получаем выражение

$$\tilde{A}_{0j}=\tilde{A}_{j0}=\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}C_j^k(\alpha+j)^{[j-k]}\frac{\Gamma(\alpha+\mu+k+1)}{(1+\delta)^{\alpha+\mu+k+1}}. \tag{24}$$

Например, при $\alpha=\mu=0$ имеем

$$\tilde{A}_{0j}=\tilde{A}_{j0}=j!\sum_{k=0}^{j}\frac{(-1)^{j+k}C_j^k}{(1+\delta)^{k+1}}=\frac{j!}{1+\delta}\left(-\frac{\delta}{1+\delta}\right)^j,$$

а при условии $\delta=\mu=0$ ($\beta=1$, полиномы Лагерра)

$$\tilde{A}_{0j}=\tilde{A}_{j0}=\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}C_j^k(\alpha+j)^{[j-k]}\Gamma(\alpha+k+1)=(-1)^j(\alpha+j)^{[j]}\Gamma(\alpha+1)\sum_{k=0}^{j}(-1)^kC_j^k=\begin{cases}\Gamma(\alpha+1), & j=0,\\ 0, & j>0.\end{cases}$$

Рассмотрим важный для приложений случай, когда $a(x)=x^n$ (n – заданное целое неотрицательное число). Умножая левую и правую части соотношения (5) на $x^nF_i(x)$, имеем

$$x^nF_i(x)F_{j+1}(x)=x^{n+1}F_i(x)F_j(x)-(\alpha+2j+1)x^nF_i(x)F_j(x)-j(\alpha+j)x^nF_i(x)F_{j-1}(x),$$

или

$$x^{n+1}F_i(x)F_j(x)=x^nF_i(x)F_{j+1}(x)+(\alpha+2j+1)x^nF_i(x)F_j(x)+j(\alpha+j)x^nF_i(x)F_{j-1}(x),$$

следовательно, элементы A_{ij}^n спектральной характеристики оператора умножения на функцию x^n связаны соотношением $A_{ij}^n=\dfrac{\hat{A}_{ij}^n}{\sqrt{h_ih_j}}$, в котором

$$\hat{A}_{ij}^{n+1}=\hat{A}_{ij+1}^n+(\alpha+2j+1)\hat{A}_{ij}^n+j(\alpha+j)\hat{A}_{ij-1}^n. \tag{25}$$

Для $n=0$ $\hat{A}_{ij}^n=\Delta_{ij}$, где

$$\Delta_{ij}=\begin{cases}h_j, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}\quad\text{или}\quad \Delta_{ij}=\begin{cases}j!\Gamma(\alpha+j+1), & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases} \tag{26}$$

что является следствием ортогональности обобщенных функций Лагерра (см. (4)). При $\alpha=0$

$$\Delta_{ij}=\begin{cases}(j!)^2 & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

Так как матрица с элементами Δ_{ij} (*ненормированная спектральная характеристика оператора умножения* на функцию $x^0=1$) представляет собой диагональную матрицу, с учетом (25) получаем, что матрицы с элементами $\hat{A}^n_{ij}$ (ненормированные спектральные характеристики операторов умножения на функции x^n) при $n>0$ являются ленточными матрицами (при $n=1$ – трехдиагональной, при $n=2$ – пятидиагональной и т.д.). Подобная структура является характерной для спектральных характеристик операторов умножения на функции x^n, определенных относительно базисных систем на основе ортогональных полиномов [11, 15, 17].

Таким образом, принимая во внимание свойство $\hat{A}^n_{ij}=\hat{A}^n_{ji}$, находим

$$\hat{A}^n_{ij}=\begin{cases}\Delta_{ij}, & n=0,\\ 0, & |i-j|>n,\\ \hat{A}^{n-1}_{ij+1}+(\alpha+2j+1)\hat{A}^{n-1}_{ij}+j(\alpha+j)\hat{A}^{n-1}_{ij-1}, & i\le j,\\ \hat{A}^n_{ji}, & i>j.\end{cases}\quad \left.\begin{matrix}\\ \\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\}|i-j|\le n\end{matrix}\right\} n>0 \tag{27}$$

Для примера приведем спектральную характеристику оператора умножения на функцию $a(x)=x$ при $\alpha=0,\ \beta\in[0,1]$:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & \cdots\\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots\\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots\\ 0 & 0 & 3 & 7 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}.$$

Соотношения для элементов *спектральной характеристики множительного звена* (*трехмерной нестационарной передаточной функции множительного звена*), необходимость в которой возникает при анализе и синтезе нелинейных систем управления, аналогичны полученным в [13]. По определению

$$V_{ijk}=\int_0^{+\infty}\rho^\beta(x)f_i(x)f_j(x)f_k(x)dx,\quad i,j,k=0,1,2,...,$$

или

$$V_{ijk}=\frac{\tilde{V}_{ijk}}{\sqrt{h_ih_jh_k}},\quad \tilde{V}_{ijk}=\int_0^{+\infty}\rho^\beta(x)F_i(x)F_j(x)F_k(x)dx,\quad i,j,k=0,1,2,...,$$

т.е. $\tilde{V}_{ijk}$ – это элемент ненормированной спектральной характеристики оператора умножения на функцию $a(x)=F_i(x)$, поэтому с учетом (23) имеем

$$\tilde{V}_{ijk+1}=\tilde{V}_{ij+1k}+2(j-k)\tilde{V}_{ijk}+j(\alpha+j)\tilde{V}_{ij-1k}-k(\alpha+k)\tilde{V}_{ijk-1}.$$

При $\beta=1$ V_{0jk}, V_{i0k}, V_{ij0} – это элементы единичной матрицы, умноженной на $\dfrac{1}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)}}$ ($\tilde{V}_{0jk}$, $\tilde{V}_{i0k}$, $\tilde{V}_{ij0}$ – элементы (26) диагональной матрицы Δ), а при $\beta\neq 1$ – они вычисляются как элементы спектральной характеристики оператора умножения на функцию $a(x) = F_0(x)$, для этого используется рекуррентная формула (23) с начальными условиями (24). Кроме того, при вычислении этой характеристики нужно использовать свойство симметричности:

$$V_{ijk} = V_{ikj} = V_{jik} = V_{jki} = V_{kij} = V_{kji} \quad (\tilde{V}_{ijk} = \tilde{V}_{ikj} = \tilde{V}_{jik} = \tilde{V}_{jki} = \tilde{V}_{kij} = \tilde{V}_{kji}).$$

Пример 3. Рассмотрим задачу приближенного представления функции $w(x) = x\,y(x)$ в виде частичной суммы ряда по нормированным обобщенным функциям Лагерра, где $y(x)$ – плотность вероятности для распределения Рэлея (см. пример 1).

Коэффициенты разложения функции $y(x)$ относительно системы нормированных обобщенных функций Лагерра были получены в ходе решения примера 1. Эти коэффициенты образуют спектральную характеристику Y функции $y(x)$, которая представляет собой бесконечную (или конечную в случае представления функции конечным отрезком ряда) матрицу-столбец:

$$Y = [\, y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad \ldots \,]^{\mathrm{T}}. \tag{28}$$

Используя свойства спектральных характеристик операторов умножения [9, 17], можно вычислить спектральную характеристику W функции $w(x)$ как произведение спектральной характеристики A оператора умножения на функцию $a(x) = x$ и спектральной характеристики Y функции $y(x)$:

$$W = A \cdot Y = [\, w_0 \quad w_1 \quad w_2 \quad \ldots \,]^{\mathrm{T}},$$

и, таким образом, приближенно получить коэффициенты разложения w_j функции $w(x)$ относительно системы нормированных обобщенных функций Лагерра:

$$w(x) \approx w_N(x) = \sum_{j=0}^{N-1} w_j f_j(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} A_{ji} y_i \right) f_j(x).$$

Здесь важно подчеркнуть, что спектральные характеристики F, A и W определены относительно одной и той же системы функций $\{f_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ (имеющих фиксированные параметры α и β). Эти спектральные характеристики при приближенном решении задачи имеют одинаковый порядок усечения N, т.е. A – квадратная матрица размеров $N \times N$, Y и W – матрицы-столбцы размеров $N \times 1$. Для получения точного решения спектральные характеристики не усекаются, в этом случае Y, A и W – бесконечные матрицы [4, 6, 9].

Как и в примере 1, положим $\alpha = 0$ и найдем функцию $w_N(x)$ при различных N и β. Погрешности аппроксимации функции $w(x)$ функцией $w_N(x)$ будем вычислять по критериям (16). Результаты расчетов приведены на рис. 9–12 и в таблице 3.

Заметим, что значение функционала $\mathrm{J}\ {}^n y(x)$ при $n > 0$ и $\beta = 0$ (см. пример 2) можно выразить через элементы w_j спектральной характеристики W:

$$\mathrm{J}\ {}^n y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} z_j^{n-1} w_j \ \text{ или } \ \mathrm{J}\ {}^n y(x) \approx \sum_{j=0}^{N-1} z_j^{n-1} w_j .$$

Например, при $n = 1$ и различных N имеем: 2.619924 $(N = 4)$, 0.591879 $(N = 8)$, 1.440247 $(N = 16)$, 1.253637 $(N = 24)$, 1.222645 $(N = 32)$. Эти результаты точнее, чем приведенные в табл. 2.

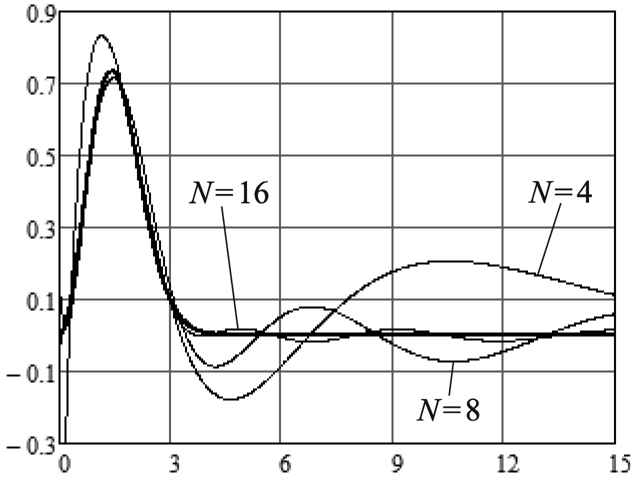

Рис. 9. Графики функций $w(x)$ *и* $w_N(x)$ *при* $\beta = 0$ *и различных значениях* N

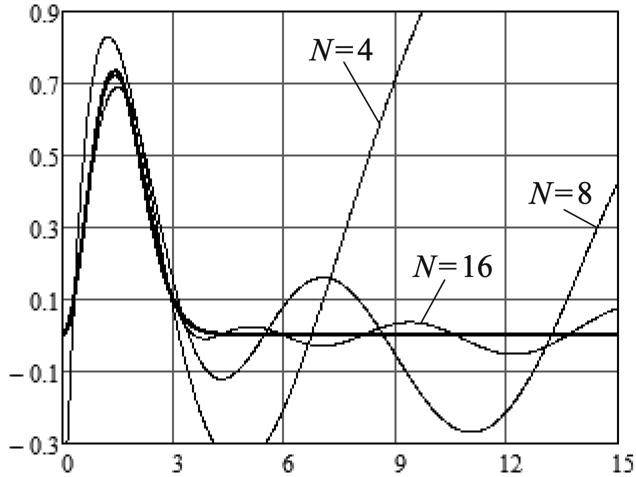

Рис. 10. Графики функций $w(x)$ *и* $w_N(x)$ *при* $\beta = \frac{1}{3}$ *и различных значениях* N

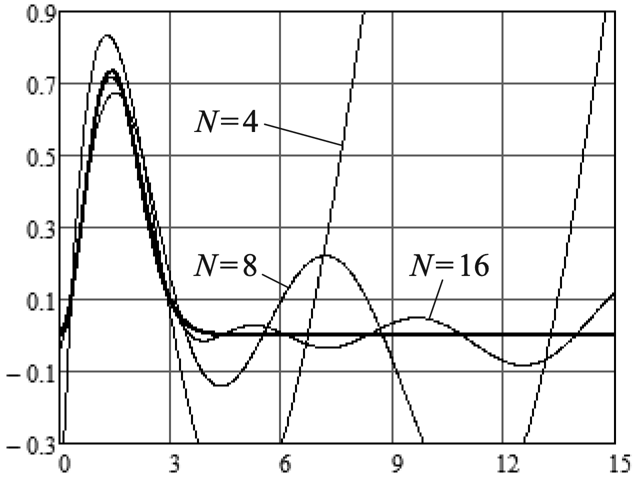

Рис. 11. Графики функций $w(x)$ *и* $w_N(x)$ *при* $\beta = \frac{1}{2}$ *и различных значениях* N

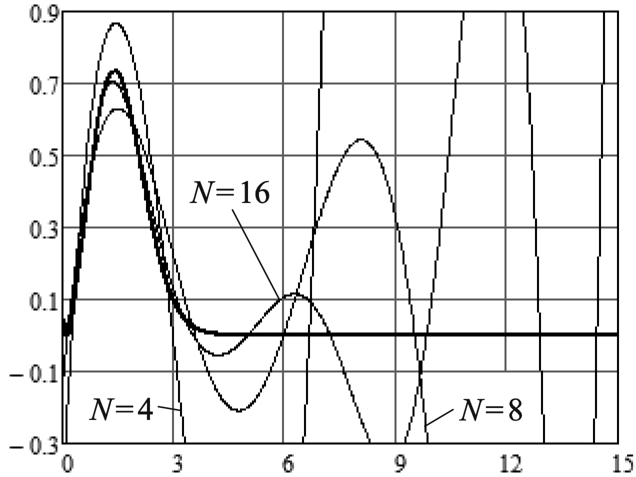

Рис. 12. Графики функций $w(x)$ *и* $w_N(x)$ *при* $\beta = 1$ *и различных значениях* N

Таблица 3

Погрешности аппроксимации функции $w(x)$ при различных β и N

	$\beta = 0$	$\beta = \frac{1}{3}$	$\beta = \frac{1}{2}$	$\beta = 1$
$N = 4$	0.638857/ 0.638857/ 0.858358	0.559199/ 3.853083/ 1.277039	0.522185/ 13.813711/ 3.964826	0.422375/ –/ –
$N = 8$	0.311555/ 0.311555/ 0.134985	0.194463/ 16.227003/ 4.486995	0.149676/ 228.003353/ 53.671640	0.080111/ –/ –
$N = 16$	0.088622/ 0.088622/ 0.038881	0.039897/ 644.829930/ 149.709593	0.023519/ 138761.354077/ 27136.038269	0.036964/ –/ –

Спектральные характеристики операторов дифференцирования

Согласно определению [9, 17] *спектральной характеристикой* P *оператора дифференцирования*, ставящего в соответствие функции $f(x)$ ее производную $f'(x)$, называется бесконечная двумерная матрица, элементы которой задаются в виде

$$\mathrm{P}_{ij} = \int_0^{+\infty} \rho^{\beta}(x) f_i(x) f_j'(x) dx = \frac{\tilde{\mathrm{P}}_{ij}}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\tilde{\mathrm{P}}_{ij} = \int_0^{+\infty} \rho^{\beta}(x) F_i(x) F_j'(x) dx. \tag{29}$$

Матрица P также называется *двумерной нестационарной передаточной функцией дифференцирующего звена*.

Используя соотношение (8), находим

$$F_i(x)F_{j+1}'(x) = -\delta F_i(x)F_{j+1}(x) + (\beta j + \lambda)F_i(x)F_j(x) + \lambda j(\alpha + j)F_i(x)F_{j-1}(x) -$$
$$-(\alpha + 2j + 1)F_i(x)F_j'(x) - j(\alpha + j)F_i(x)F_{j-1}'(x),$$

следовательно,

$$\tilde{\mathrm{P}}_{ij+1} = -\delta\Delta_{ij+1} + (\beta j + \lambda)\Delta_{ij} + \lambda j(\alpha + j)\Delta_{ij-1} - (\alpha + 2j + 1)\tilde{\mathrm{P}}_{ij} - j(\alpha + j)\tilde{\mathrm{P}}_{ij-1}. \tag{30}$$

Применяя такую же методику, получим соотношения для *спектральной характеристики* P^n *оператора дифференцирования порядка* n:

$$\mathrm{P}_{ij}^n = \frac{\tilde{\mathrm{P}}_{ij}^n}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\tilde{\mathrm{P}}_{ij}^n = \int_0^{+\infty} \rho^{\beta}(x) F_i(x) F_j^{(n)}(x) dx. \tag{31}$$

Для этого продифференцируем левую и правую части соотношения (8) $(n-1)$ раз, тогда

$$F_{j+1}^{(n)}(x) = -\delta F_{j+1}^{(n-1)}(x) + (\beta j + \lambda)F_j^{(n-1)}(x) + \lambda j(\alpha + j)F_{j-1}^{(n-1)}(x) - (\alpha + 2j + 1)F_j^{(n)}(x) - j(\alpha + j)F_{j-1}^{(n)}(x).$$

Отсюда

$$\tilde{\mathrm{P}}_{ij+1}^n = -\delta\tilde{\mathrm{P}}_{ij+1}^{n-1} + (\beta j + \lambda)\tilde{\mathrm{P}}_{ij}^{n-1} + \lambda j(\alpha + j)\tilde{\mathrm{P}}_{ij-1}^{n-1} - (\alpha + 2j + 1)\tilde{\mathrm{P}}_{ij}^n - j(\alpha + j)\tilde{\mathrm{P}}_{ij-1}^n. \tag{32}$$

При $\beta = 1$ (в случае полиномов Лагерра) можно применить другую рекуррентную формулу [18]: $L_j'(x) = j\left(L_{j-1}(x) - L_{j-1}'(x)\right)$, из которой следует, что $\tilde{\mathrm{P}}_{ij} = j(\Delta_{ij-1} - \tilde{\mathrm{P}}_{ij-1})$. В частности, $\tilde{\mathrm{P}}_{i0} = 0$ (так как $L_0'(x) \equiv 0$). Таким образом,

$$\tilde{\mathrm{P}}_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j+1} j!\Gamma(\alpha + i + 1), & i < j, \\ 0, & i \geq j. \end{cases}$$

Для ненормированной спектральной характеристики $\tilde{\mathrm{P}}^n$ оператора дифференцирования порядка n имеем $\tilde{\mathrm{P}}_{ij}^n = j(\tilde{\mathrm{P}}_{ij-1}^{n-1} - \tilde{\mathrm{P}}_{ij-1}^n)$, так как $L_j^{(n)}(x) = j\left(L_{j-1}^{(n-1)}(x) - L_{j-1}^{(n)}(x)\right)$. Наряду с этим $\tilde{\mathrm{P}}_{ij}^n = 0$ при $i > j - n$.

Другой частный случай: $\alpha = 0$, $\beta < 1$, т.е. $F_0(x) = e^{-\delta x}$. Тогда функции $F_0'(x) = -\delta e^{-\delta x}$ и $F_0^{(n)}(x) = (-\delta)^n e^{-\delta x}$ отличаются от $F_0(x)$ числовым коэффициентом, поэтому ортогональны с $F_i(x)$, $i > 0$. Таким образом, легко найти начальные условия для рекуррентных соотношений (30) и (32): $\tilde{\mathrm{P}}_{i0} = \begin{cases} -\delta, & i = 0, \\ 0, & i > 0, \end{cases}$ $\quad \tilde{\mathrm{P}}_{i0}^n = \begin{cases} (-\delta)^n, & i = 0, \\ 0, & i > 0. \end{cases}$

Перейдем к общему случаю $\alpha \neq 0$, $\beta < 1$ для расчета начальных условий. При этих параметрах $F_0(x) = x^{\mu} e^{-\delta x}$, $F_0'(x) = \mu x^{\mu-1} e^{-\delta x} - \delta x^{\mu} e^{-\delta x}$ и в выражении $\rho^{\beta}(x) F_i(x) F_0'(x)$ минимальная степень переменной x будет равна $\alpha\beta + 2\mu - 1 = \alpha - 1$, следовательно, при нецелом μ условием сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \rho^{\beta}(x) F_i(x) F_0'(x) dx$ является условие $\alpha > 0$. Аналогично, при n-кратном дифференцировании условие сходимости $\alpha > n-1$. При целых μ (для $\beta = 0$ это условие заменяется на условие четности α [13]) минимальная степень переменной x определяется иначе, она равна $\alpha\beta + \mu + \max\{\mu - n, 0\}$, поэтому условие сходимости формально записывается в виде $\max\{\alpha - n, \eta\} > -1$, однако если $\alpha > 0$, то $\eta > 0 > -1$, поэтому это условие выполнено.

Далее рассмотрим произведение $F_{i+1}(x) F_0'(x)$, необходимое для вычисления $\tilde{\mathrm{P}}_{i+10}$:

$$F_{i+1}(x) F_0'(x) = \left(x F_i(x) - (\alpha + 2i + 1) F_i(x) - i(\alpha + i) F_{i-1}(x) \right) F_0'(x) =$$
$$= x F_i(x) F_0'(x) - (\alpha + 2i + 1) F_i(x) F_0'(x) - i(\alpha + i) F_{i-1}(x) F_0'(x),$$

т.е.

$$\tilde{\mathrm{P}}_{i+10} = \int\limits_0^{+\infty} \rho^{\beta}(x) x F_i(x) F_0'(x) dx - (\alpha + 2i + 1) \tilde{\mathrm{P}}_{i0} - i(\alpha + i) \tilde{\mathrm{P}}_{i-10}.$$

Обозначим первое слагаемое в правой части последнего выражения через M_i^1. Преобразуем произведение $x F_0'(x)$: $x F_0'(x) = x(\mu x^{\mu-1} e^{-\delta x} - \delta x^{\mu} e^{-\delta x}) = \mu F_0(x) - \delta x F_0(x)$, или с учетом (5)

$$x F_0'(x) = \mu F_0(x) - \delta F_1(x) - \delta(\alpha + 1) F_0(x) = -\delta \left(F_0(x) + F_1(x) \right), \tag{33}$$

поэтому

$$M_i^1 = \int\limits_0^{+\infty} \rho^{\beta}(x) F_i(x) \left(-\delta \left(F_0(x) + F_1(x) \right) \right) dx =$$
$$= -\delta \left(\int\limits_0^{+\infty} \rho^{\beta}(x) F_i(x) F_0(x) dx + \int\limits_0^{+\infty} \rho^{\beta}(x) F_i(x) F_1(x) dx \right) = -\delta(\Delta_{i0} + \Delta_{i1}) \quad (M_i^1 = 0 \text{ при } i > 1). \tag{34}$$

Аналогично,

$$\tilde{\mathrm{P}}_{i+10}^n = \int\limits_0^{+\infty} \rho^{\beta}(x) x F_i(x) F_0^{(n)}(x) dx - (\alpha + 2i + 1) \tilde{\mathrm{P}}_{i0}^n - i(\alpha + i) \tilde{\mathrm{P}}_{i-10}^n = M_i^n - (\alpha + 2i + 1) \tilde{\mathrm{P}}_{i0}^n - i(\alpha + i) \tilde{\mathrm{P}}_{i-10}^n.$$

Продифференцируем $(n-1)$ раз левую и правую части (33):

$$(n-1) F_0^{(n-1)}(x) + x F_0^{(n)}(x) = -\delta \left(F_0^{(n-1)}(x) + F_1^{(n-1)}(x) \right), \quad \text{или} \quad x F_0^{(n)}(x) = -\delta F_1^{(n-1)}(x) + (\lambda - n) F_0^{(n-1)}(x),$$

тогда

$$M_i^n = \int\limits_0^{+\infty} \rho^{\beta}(x) F_i(x) \left(-\delta F_1^{(n-1)}(x) + (\lambda - n) F_0^{(n-1)}(x) \right) dx = -\delta \int\limits_0^{+\infty} \rho^{\beta}(x) F_i(x) F_1^{(n-1)}(x) dx +$$
$$+ (\lambda - n) \int\limits_0^{+\infty} \rho^{\beta}(x) F_i(x) F_0^{(n-1)}(x) dx = -\delta \tilde{\mathrm{P}}_{i1}^{n-1} + (\lambda - n) \tilde{\mathrm{P}}_{i0}^{n-1}.$$

Последнее выражение при $n = 1$ совпадает с (34), если положить $\tilde{\mathrm{P}}_{ij}^0 = \Delta_{ij}$.

Осталось найти значение $\tilde{\mathrm{P}}_{00}^n$. Для этого воспользуемся определением (31) и формулой Лейбница:

$$\tilde{\mathrm{P}}_{00}^{n}=\int\limits_{0}^{+\infty}\rho^{\beta}(x)F_0(x)F_0^{(n)}(x)dx=\int\limits_{0}^{+\infty}x^{\alpha\beta}e^{-\beta x}x^{\mu}e^{-\delta x}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^{\mu})^{(k)}(e^{-\delta x})^{(n-k)}dx=$$
$$=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-(\beta+2\delta)x}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\mu^{[k]}x^{\alpha\beta+2\mu-k}(-\delta)^{n-k}dx=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\mu^{[k]}(-\delta)^{n-k}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-x}x^{\alpha-k}dx=\qquad(35)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\mu^{[k]}(-\delta)^{n-k}\Gamma(\alpha-k+1).$$

Например, при $n=1$: $\tilde{\mathrm{P}}_{00}=-\delta\Gamma(\alpha+1)+\mu\Gamma(\alpha)=(-\alpha\delta+\mu)\Gamma(\alpha)=0.$

Заметим также, что при целых $\mu<n$ часть слагаемых в (35) равны нулю, так как $\mu^{[k]}=0$, начиная с $k=\mu+1$, поэтому можно переписать (35):

$$\tilde{\mathrm{P}}_{00}^{n}=\sum_{k=0}^{\mu}C_n^k\mu^{[k]}(-\delta)^{n-k}\Gamma(\alpha-k+1).$$

Начальные условия можно получить и другим способом, а именно с помощью определения (31) и формулы (6), однако это представляется более трудоемким при больших n. Рассмотрим ненормированную спектральную характеристику оператора дифференцирования первого порядка $(n=1)$:

$$\tilde{\mathrm{P}}_{i0}=\int\limits_{0}^{+\infty}\rho^{\beta}(x)F_i(x)F_0'(x)dx=\int\limits_{0}^{+\infty}x^{\alpha\beta}e^{-\beta x}x^{\mu}e^{-\delta x}\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+k}C_i^k(\alpha+i)^{[i-k]}x^k(\mu x^{\mu-1}e^{-\delta x}-\delta x^{\mu}e^{-\delta x})dx=$$
$$=\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+k}C_i^k(\alpha+i)^{[i-k]}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-(\beta+2\delta)x}x^k(\mu x^{\alpha\beta+2\mu-1}-\delta x^{\alpha\beta+2\mu})dx=\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+k}C_i^k(\alpha+i)^{[i-k]}\times$$
$$\times\left(\mu\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-x}x^{\alpha+k-1}dx-\delta\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-x}x^{\alpha+k}dx\right)=\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+k}C_i^k(\alpha+i)^{[i-k]}\left(\mu\Gamma(\alpha+k)-\delta\Gamma(\alpha+k+1)\right).$$

Учитывая свойство гамма-функции

$$\Gamma(\alpha+k+1)=(\alpha+k)\Gamma(\alpha+k),$$

а также равенство $\mu-\alpha\delta=0$, получаем

$$\tilde{\mathrm{P}}_{i0}=\delta\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+k+1}C_i^k(\alpha+i)^{[i-k]}k\,\Gamma(\alpha+k)=(-1)^{i+1}\delta(\alpha+i)^{[i]}\Gamma(\alpha+1)\sum_{k=0}^{i}(-1)^kC_i^k\frac{k}{\alpha+k}=(-1)^i i!\,\delta\Gamma(\alpha+1).$$

Таким образом,

$$\tilde{\mathrm{P}}_{ij}^{n}=\begin{cases}\Delta_{ij},\quad n=0,\\ \left.\begin{array}{l} j(\tilde{\mathrm{P}}_{ij-1}^{n-1}-\tilde{\mathrm{P}}_{ij-1}^{n}),\quad \beta=1,\\ \left.\begin{array}{l}(-\delta)^n,\quad i=j=0,\\ 0,\quad i=0,\quad j>0,\end{array}\right\}\ \alpha=0\\ \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_n^k\mu^{[k]}(-\delta)^{n-k}\Gamma(\alpha-k+1),\quad i=j=0,\\ -\delta\tilde{\mathrm{P}}_{i-11}^{n-1}+(\lambda-n)\tilde{\mathrm{P}}_{i-10}^{n-1}-(\alpha+2i-1)\tilde{\mathrm{P}}_{i-10}^{n}-\\ \qquad-(i-1)(\alpha+i-1)\tilde{\mathrm{P}}_{i-20}^{n},\quad i>0,\quad j=0,\end{array}\right\}\ \alpha>0\\ -\delta\tilde{\mathrm{P}}_{ij}^{n-1}+(\beta(j-1)+\lambda)\tilde{\mathrm{P}}_{ij-1}^{n-1}+\lambda(j-1)(\alpha+j-1)\tilde{\mathrm{P}}_{ij-2}^{n-1}-\\ \qquad-(\alpha+2j-1)\tilde{\mathrm{P}}_{ij-1}^{n}-(j-1)(\alpha+j-1)\tilde{\mathrm{P}}_{ij-2}^{n},\quad j>0.\end{array}\right\}\ \beta<1\end{array}\right\}\ n>0\end{cases}$$

Кроме приведенных выше соотношений при вычислении можно использовать общие свойства спектральных характеристик операторов дифференцирования, определенных относительно базисных систем на $[0,+\infty)$ [9], а также свойства, характерные для спектральных характеристик операторов дифференцирования, определенных относительно обобщенных функции Лагерра. Так, например, матрица P является верхней треугольной при $\alpha=0$ или $\beta=1$. При $\alpha>0$ диагональные элементы P равны нулю, а в случае $\alpha>0$ и $\beta=0$ матрица P – кососимметрическая. Подобные свойства важны, если использовать соотношения

$$\mathrm{P}^2=\mathrm{P}\cdot\mathrm{P}., \quad \ldots, \quad \mathrm{P}^n=\underbrace{\mathrm{P}\cdot\mathrm{P}\cdots\mathrm{P}}_{n}$$

при усечении спектральных характеристик (которое применяется, например, для приближенного решения задачи представления функций и их производных).

В качестве примера приведем спектральные характеристики операторов дифференцирования первого и второго порядков при $\alpha=0$ и $\beta=\frac{1}{3}$:

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathrm{P}^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Рассмотрим задачу приближенного представления производной $w(x)=y'(x)$ плотности распределения Рэлея (см. пример 1) в виде частичной суммы ряда по нормированным обобщенным функциям Лагерра.

Воспользуемся результатами примера 1, в котором приведена формула расчета коэффициентов разложения y_j относительно системы нормированных обобщенных функций Лагерра. Эти коэффициенты образуют спектральную характеристику Y функции $y(x)$, представляющую собой бесконечную (или конечную в случае представления функции конечным отрезком ряда) матрицу-столбец (28).

Используя свойства спектральных характеристик оператора дифференцирования [9, 17], получаем

$$W=\mathrm{P}\cdot Y=\begin{bmatrix} w_0 & w_1 & w_2 & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

где W – спектральная характеристика функции $w(x)=y'(x)$, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения этой функции относительно системы $\{f_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$. Следовательно,

$$w(x)\approx w_N(x)=\sum_{j=0}^{N-1} w_j f_j(x)=\sum_{j=0}^{N-1}\left(\sum_{i=0}^{N-1}\mathrm{P}_{ji}y_i\right)f_j(x).$$

Как и в примере 3, спектральные характеристики Y, P и W определены относительно одной и той же системы функций $\{f_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$. Эти спектральные характеристики при приближенном решении задачи имеют одинаковый порядок усечения N: P – квадратная матрица размеров $N\times N$, Y и W – матрицы-столбцы размеров $N\times 1$. Для получения точного решения спектральные характеристики не усекаются, тогда Y, P и W – бесконечные матрицы.

Положим $\alpha = 0$ и найдем функцию $w_N(x)$ при различных N и β. Погрешности аппроксимации функции $w(x)$ функцией $w_N(x)$ будем вычислять по критериям (16). Результаты расчетов приведены на рис. 13–16 и в таблице 4.

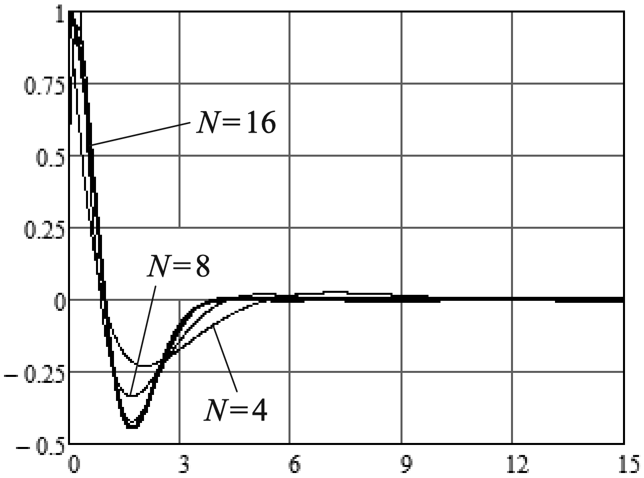

Рис. 13. Графики функций $w(x)$ и $w_N(x)$ при $\beta = 0$ и различных значениях N

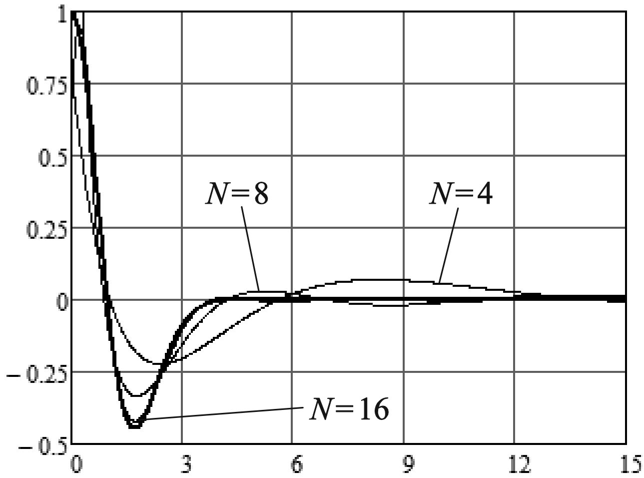

Рис. 14. Графики функций $w(x)$ и $w_N(x)$ при $\beta = \frac{1}{3}$ и различных значениях N

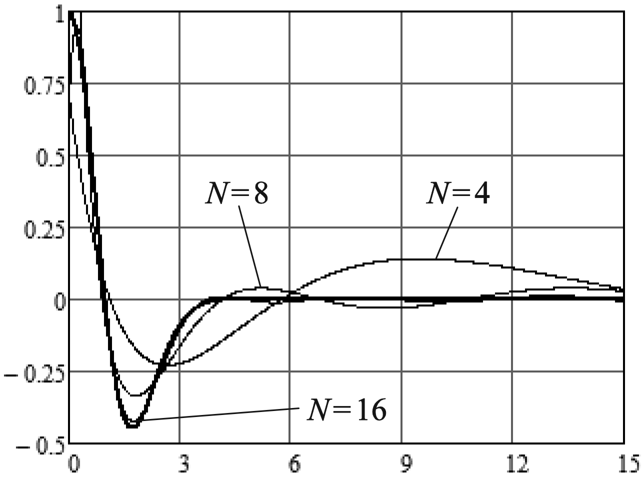

Рис. 15. Графики функций $w(x)$ и $w_N(x)$ при $\beta = \frac{1}{2}$ и различных значениях N

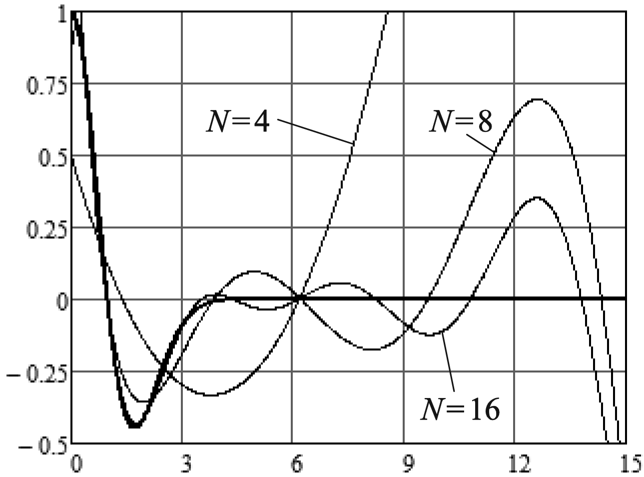

Рис. 16. Графики функций $w(x)$ и $w_N(x)$ при $\beta = 1$ и различных значениях N

Таблица 4

Погрешности аппроксимации функции $w(x)$ при различных β и N

	$\beta = 0$	$\beta = \frac{1}{3}$	$\beta = \frac{1}{2}$	$\beta = 1$
$N = 4$	0.329105/ 0.329105/ 0.560960	0.337466/ 0.432674/ 0.387938	0.346071/ 0.578936/ 0.422462	0.369171/ –/ –
$N = 8$	0.398043/ 0.398043/ 1.646493	0.327366/ 0.354423/ 1.481419	0.292336/ 0.470097/ 1.392527	0.193753/ –/ –
$N = 16$	0.116694/ 0.116694/ 0.477768	0.086949/ 0.411541/ 0.367585	0.072249/ 409.848143/ 85.813070	0.033236/ –/ –

Спектральные характеристики операторов интегрирования

Перейдем к оператору интегрирования, ставящему в соответствие функции $f(x)$ ее первообразную $\int\limits_0^x f(\xi)d\xi$. *Спектральной характеристикой оператора интегрирования* (*двумерной нестационарной передаточной функцией интегрирующего звена*) называется бесконечная двумерная матрица P^{-1}, элементы которой вычисляются следующим образом [9, 17]:

$$P_{ij}^{-1} = \int\limits_0^{+\infty} \rho^{\beta}(x) f_i(x) \left(\int\limits_0^x f_j(\xi)d\xi \right) dx = \frac{\tilde{P}_{ij}^{-1}}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\tilde{P}_{ij}^{-1} = \int\limits_0^{+\infty} \rho^{\beta}(x) F_i(x) \left(\int\limits_0^x F_j(\xi)d\xi \right) dx. \qquad (36)$$

С учетом (36) и соотношений (9) и (22) при $a(x) = x$ (см. также (27)) можно записать рекуррентную формулу

$$\tilde{P}_{ij+1}^{-1} = \frac{1}{\delta}\left((\beta j + \lambda)\tilde{P}_{ij}^{-1} + \lambda j(\alpha + j)\tilde{P}_{ij-1}^{-1} - \hat{A}_{ij}^{1} \right), \qquad (37)$$

или при $\delta = 0$ ($\beta = 1$, полиномы Лагерра), принимая во внимание (10), имеем

$$\tilde{P}_{ij}^{-1} = \frac{1}{j+1}\left(\hat{A}_{ij}^{1} - j(\alpha + j)\tilde{P}_{ij-1}^{-1} \right). \qquad (38)$$

Рассмотрим общий случай n-кратного интегрирования. Соотношения для расчета элементов *спектральной характеристики* P^{-n} *оператора интегрирования порядка* n имеют вид

$$P_{ij}^{-n} = \frac{\tilde{P}_{ij}^{-n}}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\tilde{P}_{ij}^{-n} = \int\limits_0^{+\infty} \rho^{\beta}(x) F_i(x) \left(\int\limits_0^x \int\limits_0^{\xi_1} \ldots \int\limits_0^{\xi_{n-1}} F_j(\xi_n) d\xi_n \ldots d\xi_2 d\xi_1 \right) dx. \qquad (39)$$

Здесь целесообразно воспользоваться соотношением (11), тогда

$$\tilde{P}_{ij+1}^{-n} = \frac{1}{\delta}\left((\beta j + \lambda)\tilde{P}_{ij}^{-n} + \lambda j(\alpha + j)\tilde{P}_{ij-1}^{-n} - \tilde{P}_{ij+1}^{-n+1} - (\alpha + 2j + 1)\tilde{P}_{ij}^{-n+1} - j(\alpha + j)\tilde{P}_{ij-1}^{-n+1} \right),$$

или при $\delta = 0$ ($\beta = 1$, полиномы Лагерра) – соотношением (12) (см. также [13]):

$$\tilde{P}_{ij}^{-n} = \frac{1}{j+1}\left(\tilde{P}_{ij+1}^{-n+1} + (\alpha + 2j + 1)\tilde{P}_{ij}^{-n+1} + j(\alpha + j)\tilde{P}_{ij-1}^{-n+1} - j(\alpha + j)\tilde{P}_{ij-1}^{-n} \right).$$

Заметим, что последние два выражения при $n = 1$ принимают соответственно вид

$$\tilde{P}_{ij+1}^{-1} = \frac{1}{\delta}\left((\beta j + \lambda)\tilde{P}_{ij}^{-1} + \lambda j(\alpha + j)\tilde{P}_{ij-1}^{-1} - \Delta_{ij+1} - (\alpha + 2j + 1)\Delta_{ij} - j(\alpha + j)\Delta_{ij-1} \right)$$

и

$$\tilde{P}_{ij}^{-1} = \frac{1}{j+1}\left(\Delta_{ij+1} + (\alpha + 2j + 1)\Delta_{ij} + j(\alpha + j)\Delta_{ij-1} - j(\alpha + j)\tilde{P}_{ij-1}^{-1} \right).$$

Они совпадают с (37) и (38), так как $\hat{A}_{ij}^{1} = \Delta_{ij+1} + (\alpha + 2j + 1)\Delta_{ij} + j(\alpha + j)\Delta_{ij-1}$ (см. (27)).

Таким образом,

$$\tilde{P}_{ij}^{-n}=\begin{cases}\Delta_{ij}, \quad n=0,\\ \frac{1}{\delta}\Big((\beta(j-1)+\lambda)\tilde{P}_{ij-1}^{-n}+\lambda(j-1)(\alpha+j-1)\tilde{P}_{ij-2}^{-n}-\tilde{P}_{ij}^{-n+1}-\\ \qquad -(\alpha+2j-1)\tilde{P}_{ij-1}^{-n+1}-(j-1)(\alpha+j-1)\tilde{P}_{ij-2}^{-n+1}\Big), \quad j>0, \quad \beta<1,\\ \frac{1}{j+1}\Big(\tilde{P}_{ij+1}^{-n+1}+(\alpha+2j+1)\tilde{P}_{ij}^{-n+1}+j(\alpha+j)\tilde{P}_{ij-1}^{-n+1}-j(\alpha+j)\tilde{P}_{ij-1}^{-n}\Big), \quad \beta=1.\end{cases} \quad n>0$$

Начальные условия $\tilde{P}_{i0}^{-1}$ и $\tilde{P}_{i0}^{-n}$ вычисляются по определениям (36) и (39) соответственно. В качестве примера рассмотрим ненормированную спектральную характеристику оператора интегрирования первого порядка $(n=1)$:

$$\tilde{P}_{i0}^{-1}=\int_0^{+\infty}\rho^{\beta}(x)F_i(x)\left(\int_0^x F_0(\xi)d\xi\right)dx=\int_0^{+\infty}x^{\alpha\beta}e^{-\beta x}x^{\mu}e^{-\delta x}\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+k}C_i^k(\alpha+i)^{[i-k]}x^k\left(\int_0^x\xi^{\mu}e^{-\delta\xi}d\xi\right)dx.$$

Преобразуем интеграл $\int_0^x \xi^{\mu}e^{-\delta\xi}d\xi$ с помощью замены переменных: $t=\delta\xi$, тогда

$$\int_0^x\xi^{\mu}e^{-\delta\xi}d\xi=\frac{1}{\delta^{\mu+1}}\int_0^{\delta x}t^{\mu}e^{-t}dt=\frac{1}{\delta^{\mu+1}}\gamma(\mu+1,\delta x),$$

где $\gamma(\alpha,x)$ – неполная гамма-функция: $\gamma(\alpha,x)=\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t}dt$, т.е.

$$\tilde{P}_{i0}^{-1}=\frac{1}{\delta^{\mu+1}}\int_0^{+\infty}x^{\alpha\beta+\mu}e^{-(\beta+\delta)x}\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+k}C_i^k(\alpha+i)^{[i-k]}x^k\gamma(\mu+1,\delta x)dx=\frac{1}{\delta^{\mu+1}}\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+k}C_i^k(\alpha+i)^{[i-k]}\times$$

$$\times\int_0^{+\infty}x^{\eta+k}e^{-\lambda x}\gamma(\mu+1,\delta x)dx=\frac{1}{\mu+1}\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+k}C_i^k(\alpha+i)^{[i-k]}\Gamma(\alpha+k+2)\,{}_2F_1(1,\alpha+k+2,\mu+2,\delta)=$$

$$=\frac{(\alpha+i)^{[i]}\Gamma(\alpha+1)}{\mu+1}\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+k}C_i^k(\alpha+k+1)\,{}_2F_1(1,\alpha+k+2,\mu+2,\delta),$$

где ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,z)$ – гипергеометрическая функция [1, 10]. Эти формулы используются при $\delta\neq 0$ (т.е. при $\beta<1$), в противном случае вычислять начальные условия нет необходимости.

При $\beta<1$ в ряде частных случаев начальные условия можно найти проще (в том числе и при $n>1$), а именно если $\alpha=0$, то $F_0(x)=e^{-\delta x}$ и $\int_0^x F_0(\xi)d\xi=\int_0^x e^{-\delta\xi}d\xi=\frac{1}{\delta}-\frac{e^{-\delta x}}{\delta}$, поэтому

$$\tilde{P}_{i0}^{-1}=\int_0^{+\infty}\rho^{\beta}(x)F_i(x)\left(\frac{1}{\delta}-\frac{e^{-\delta x}}{\delta}\right)dx=\frac{1}{\delta}\int_0^{+\infty}\rho^{\beta}(x)F_i(x)dx-\frac{1}{\delta}\int_0^{+\infty}\rho^{\beta}(x)F_i(x)F_0(x)dx.$$

Первое слагаемое в правой части последнего соотношения вычисляется с использованием формулы (21) при $\alpha=\eta=0$:

$$\int_0^{+\infty}\rho^{\beta}(x)F_i(x)dx=i!\sum_{k=0}^{i}\frac{(-1)^{i+k}C_i^k}{\lambda^{k+1}}=\frac{i!}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)^i,$$

следовательно,

$$\tilde{P}_{i0}^{-1}=\int_0^{+\infty}\rho^{\beta}(x)F_i(x)\left(\frac{1}{\delta}-\frac{e^{-\delta x}}{\delta}\right)dx=\frac{1}{\delta}\left(\frac{i!}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)^i-\Delta_{i0}\right).$$

При $n>1$ имеем

$$\int_0^x\int_0^{\xi_1}\ldots\int_0^{\xi_{n-1}} F_0(\xi_n)d\xi_n\ldots d\xi_2 d\xi_1=\int_0^x\int_0^{\xi_1}\ldots\int_0^{\xi_{n-1}} e^{-\delta\xi_n}d\xi_n\ldots d\xi_2 d\xi_1=\frac{(-1)^n e^{-\delta x}}{\delta^n}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}x^k}{\delta^{n-k}k!},$$

а далее, принимая во внимание результаты примера 2 (см. (19)–(21)), получаем

$$\tilde{P}_{i0}^{-n}=\frac{(-1)^n}{\delta^n}\Delta_{i0}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{\delta^{n-k}k!}\tilde{z}_i^k.$$

Если $\alpha\neq 0$, но μ является целым, то целесообразно воспользоваться следующим соотношением [1]: $\int_0^x \xi^\mu e^{-\delta\xi}d\xi=\frac{\mu!}{\delta^{\mu+1}}-\frac{e^{-\delta x}}{\delta}\sum_{l=0}^{\mu}\frac{\mu^{[l]}}{\delta^l}x^{\mu-l}$. Тогда, например, при $n=1$ получаем

$$\tilde{P}_{i0}^{-1}=\int_0^{+\infty}\rho^\beta(x)F_i(x)\left(\int_0^x F_0(\xi)d\xi\right)dx=$$

$$=\int_0^{+\infty}x^{\alpha\beta}e^{-\beta x}x^\mu e^{-\delta x}\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+k}C_i^k(\alpha+i)^{[i-k]}x^k\left(\frac{\mu!}{\delta^{\mu+1}}-\frac{e^{-\delta x}}{\delta}\sum_{l=0}^{\mu}\frac{\mu^{[l]}}{\delta^l}x^{\mu-l}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+k}C_i^k(\alpha+i)^{[i-k]}\left(\frac{\mu!}{\delta^\mu}\int_0^{+\infty}x^{\alpha\beta+\mu+k}e^{-(\beta+\delta)x}dx-\sum_{l=0}^{\mu}\frac{\mu^{[l]}}{\delta^l}\int_0^{+\infty}x^{\alpha+k-l}e^{-x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+k}C_i^k(\alpha+i)^{[i-k]}\left(\frac{\mu!}{\delta^\mu}\frac{\Gamma(\eta+k+1)}{\lambda^{\eta+k+1}}-\sum_{l=0}^{\mu}\frac{\mu^{[l]}}{\delta^l}\Gamma(\alpha+k-l+1)\right).$$

Помимо приведенных соотношений можно дополнительно использовать свойства спектральных характеристик операторов интегрирования, определенных относительно нормированных обобщенных функций Лагерра. Так, матрица P^{-1} является нижней треугольной при $\alpha=0$. Например, при $\beta=\frac{1}{3}$ получаем

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \frac{9}{4} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \cdots\\ \frac{9}{8} & \frac{9}{4} & \frac{3}{2} & 0 & \cdots\\ \frac{9}{16} & \frac{9}{8} & \frac{9}{4} & \frac{3}{2} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}.$$

При $\alpha=0$ и $\beta=1$ P^{-1} представляет собой бидиагональную матрицу [13]:

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix};$$

при $\alpha\neq 0$ и $\beta=1$ ненулевыми элементами матрицы P^{-1} являются P_{ij}^{-1} при $i=j$, $i=j+1$ и $i=0$.

Пример 5. Рассмотрим задачу приближенного представления функции распределения Рэлея $\Phi(x)=\int_0^x y(\xi)d\xi$, где $y(\xi)$ – соответствующая плотность вероятности (см. пример 1), в виде частичной суммы ряда по нормированным обобщенным функциям Лагерра.

Для решения этой задачи будем использовать свойства спектрального преобразования операторов интегрирования [9, 17] и результаты, полученные в примере 1.

Поскольку рассматривается задача приближенного представления функции, то Y – матрица-столбец с конечным числом элементов (напомним, что для точного представления необходимо вычислять всю совокупность коэффициентов разложения y_j, тогда Y будет представлять собой матрицу-столбец (28) с бесконечным числом элементов).

Спектральная характеристика функции $\Phi(x)$ определяется выражением

$$\Phi = P^{-1} \cdot Y = [\ \varphi_0 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots\ ]^{\mathrm{T}},$$

где φ_j – коэффициенты разложения этой функции относительно системы нормированных обобщенных функций Лагерра, т.е.

$$\Phi(x) \approx \Phi_N(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j f_j(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} P_{ji}^{-1} y_i \right) f_j(x).$$

Здесь, как и в двух предыдущих примерах, предполагается, что спектральные характеристики Φ, P^{-1} и Y определены относительно одной и той же системы функций $\{f_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ и имеют одинаковые порядки усечения.

Положим $\alpha = 0$ и найдем функцию $\Phi_N(x)$ при различных N и β. Погрешность аппроксимации функции $\Phi(x)$ функцией $\Phi_N(x)$ будем вычислять только по критерию J_1 (см. (16)), так как функция распределения не является элементом пространства $L_2\big([0,+\infty)\big)$ и, следовательно, вычислять значения критерия J_2 не имеет смысла. Кроме того, нетрудно показать, что $|\Phi(x) - \Phi_N(x)| \to 1$ при $x \to +\infty$ и $\beta < 1$, $|\Phi(x) - \Phi_N(x)|$ неограниченно возрастает при $x \to +\infty$ и $\beta = 1$, поэтому значения критерия J_3 также не вычисляются. Результаты расчетов приведены на рис. 17–20 и в таблице 5.

Применение обобщенных функций Лагерра для анализа линейных детерминированных систем управления

Напомним постановку задачи анализа выходных процессов линейных детерминированных систем [5]. Пусть модель системы управления описывается дифференциальным уравнением

$$a_n(x)u^{(n)}(x) + \ldots + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) = g(x), \tag{40}$$

в котором $g(x)$ – входной сигнал, $u(x)$ – выходной сигнал, $a_n(x)$, …, $a_1(x)$, $a_0(x)$ – заданные функции, x – независимая переменная (время).

Задача анализа состоит в нахождении выходного сигнала $u(x)$ по уравнению системы, заданным входному сигналу $g(x)$ и начальным условиям

$$u(0) = \widehat{u}_0, \quad u'(0) = \widehat{u}'_0, \quad \dots, \quad u^{(n-1)}(0) = \widehat{u}_0^{(n-1)}.$$

При нулевых начальных условиях $(\widehat{u}_0 = \widehat{u}'_0 = \dots = \widehat{u}_0^{(n-1)} = 0)$ спектральная характеристика U выходного сигнала $u(x)$ определяется выражением [5, 15–17]

$$U = W \cdot G = [\ u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \dots\ ]^{\mathrm{T}}, \tag{41}$$

в котором G – спектральная характеристика входного сигнала $g(x)$, а W – *двумерная нестационарная передаточная функция*:

$$W = P^{-n}(A_n + \ldots + A_1 P^{-n+1} + A_0 P^{-n})^{-1},$$

где P^{-1}, ..., P^{-n+1}, P^{-n} – спектральные характеристики операторов интегрирования, а A_n, ..., A_1, A_0 – спектральные характеристики операторов умножения на функции $a_n(x)$, ..., $a_1(x)$, $a_0(x)$ соответственно (все перечисленные спектральные характеристики определены относительно одной и той же базисной системы).

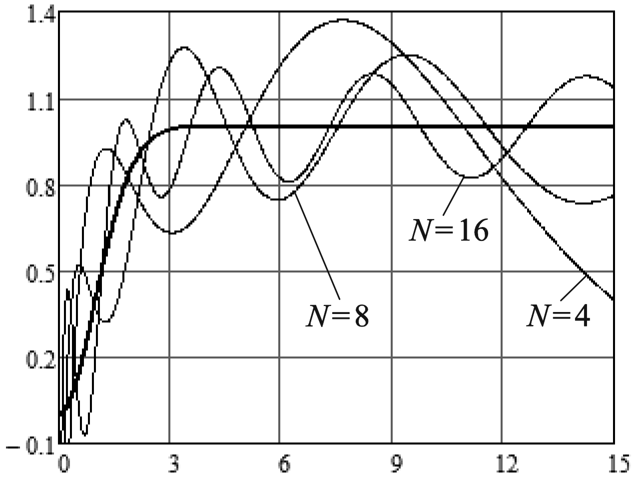

Рис. 17. Графики функций $\Phi(x)$ *и* $\Phi_N(x)$ *при* $\beta = 0$ *и различных значениях* N

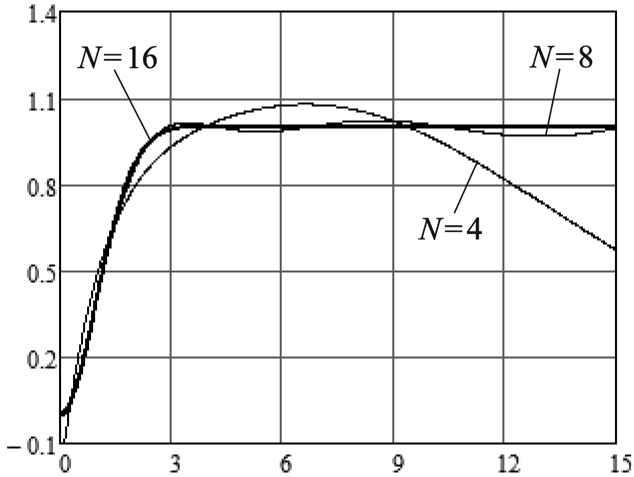

Рис. 18. Графики функций $\Phi(x)$ *и* $\Phi_N(x)$ *при* $\beta = \frac{1}{3}$ *и различных значениях* N

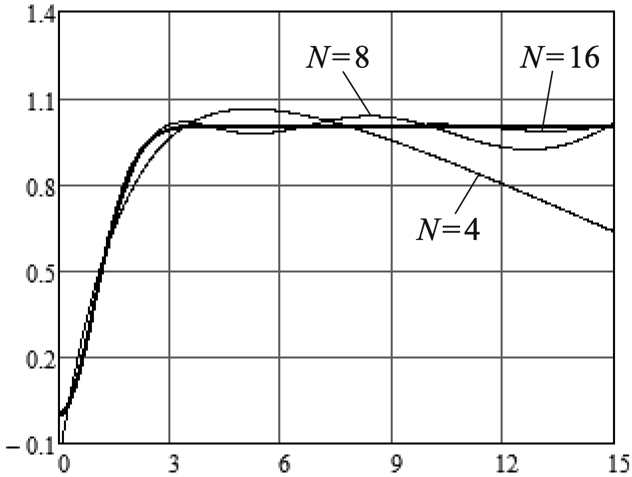

Рис. 19. Графики функций $\Phi(x)$ *и* $\Phi_N(x)$ *при* $\beta = \frac{1}{2}$ *и различных значениях* N

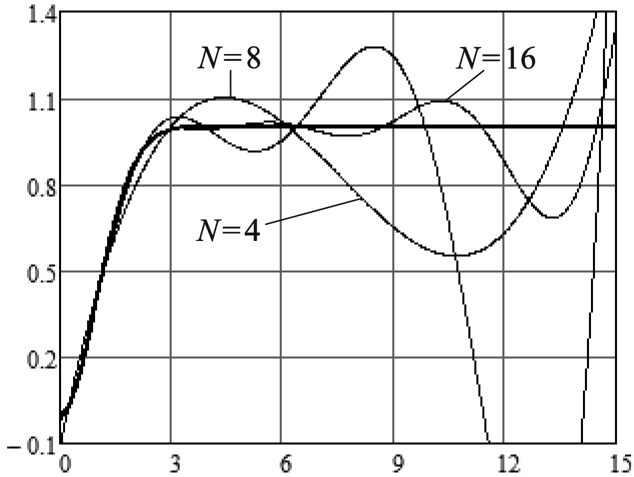

Рис. 20. Графики функций $\Phi(x)$ *и* $\Phi_N(x)$ *при* $\beta = 1$ *и различных значениях* N

Таблица 5

Погрешности аппроксимации функции $\Phi(x)$ при различных β и N

	$\beta = 0$	$\beta = \frac{1}{3}$	$\beta = \frac{1}{2}$	$\beta = 1$
$N = 4$	–	0.164650	0.090693	0.054763
$N = 8$	–	0.026696	0.020517	0.020737
$N = 16$	–	0.003029	0.003038	0.002892

В общем случае при ненулевых начальных условиях и правой части уравнения (40) вида $b_m(x)g^{(m)}(x)+\ldots+b_1(x)g'(x)+b_0(x)g(x)$, где $b_m(x)$, ..., $b_1(x)$, $b_0(x)$ – заданные функции, алгоритм решения задачи анализа незначительно модифицируется [5, 15, 16]. Возможна и другая форма записи для характеристики W, выражающая ее через спектральные характеристики операторов дифференцирования P^1, P^2, …, P^m.

Выходной сигнал определяется коэффициентами разложения u_j (при усечении спектральных характеристик выходной сигнал определяется приближенно).

Пример 6. Рассмотрим задачу анализа линейной стационарной детерминированной системы, которая описывается дифференциальным уравнением второго порядка (колебательным звеном [5])

$$T^2u''(x)+2\xi Tu'(x)+u(x)=g(x) \tag{42}$$

при нулевых начальных условиях и входном сигнале $g(x)=1$ (здесь $T>0$ и $|\xi|<1$ – числовые параметры).

Запишем выражение для спектральной характеристики входного сигнала:

$$G=\begin{bmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

где $g_j=z_j^0$ (см. пример 2).

Двумерная нестационарная передаточная функция линейной системы (42) имеет вид

$$W=P^{-2}(A_2+A_1P^{-1}+A_0P^{-2})^{-1},$$

где P^{-1} и P^{-2} – спектральные характеристики операторов интегрирования, а A_2, A_1 и A_0 – спектральные характеристики операторов умножения на функции $a_2(x)=T^2$, $a_1(x)=2\xi T$ и $a_0(x)=1$ соответственно. Согласно свойствам спектральных характеристик операторов умножения $A_2=T^2E$, $A_1=2\xi TE$ и $A_0=E$, где E – бесконечная единичная матрица [6, 9].

Спектральная характеристика U выходного сигнала $u(x)$ определяется формулой (41), а приближенное решение задачи анализа – соотношением

$$u(x)\approx u_N(x)=\sum_{j=0}^{N-1}u_j f_j(x)=\sum_{j=0}^{N-1}\left(\sum_{i=0}^{N-1}W_{ji}g_i\right)f_j(x).$$

Пусть, как и в предыдущих примерах, $\alpha=0$. Зададим параметры системы управления: $T=\frac{3}{4}$, $\xi=\frac{1}{4}$, и найдем функцию $u_N(x)$ при различных значениях N и β. Для вычисления погрешности аппроксимации точного решения

$$u(x)=1-e^{-\frac{\xi}{T}x}\cos\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}x-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\frac{\xi}{T}x}\sin\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}x$$

функцией $u_N(x)$ снова воспользуемся критерием J_1 для $\beta>0$ (см. (16) и пример 5). Результаты расчетов приведены на рис. 21–24 и в таблице 6.

Заключение

Основным итогом являются полученные алгоритмы расчета спектральных характеристик операторов умножения, дифференцирования и интегрирования (двумерных нестационарных передаточных функций элементарных звеньев систем управления: усилительного, дифференцирующего и интегрирующего) в базисе обобщенных функций Лагерра, необходимые при решении задач анализа и синтеза линейных и нелинейных систем управления в спектральной форме математического описания. Разработанные алгоритмы расчета спектральных характеристик апробированы на примерах представления функций, их производных и первообразных, примере анализа линейной детерминированной системы управления второго порядка.

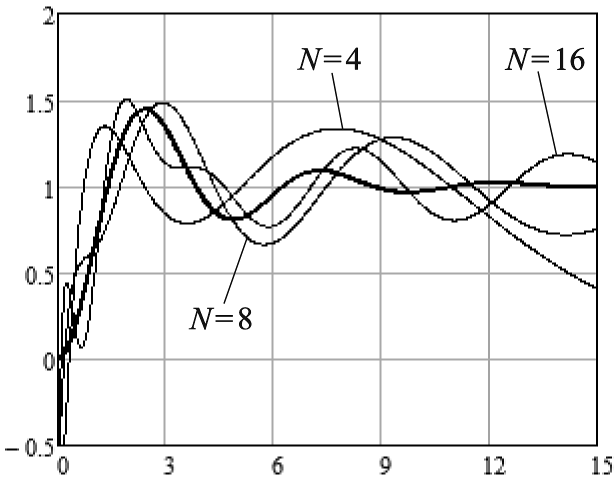

Рис. 21. Графики функций $u(x)$ и $u_N(x)$ при $\beta=0$ и различных значениях N

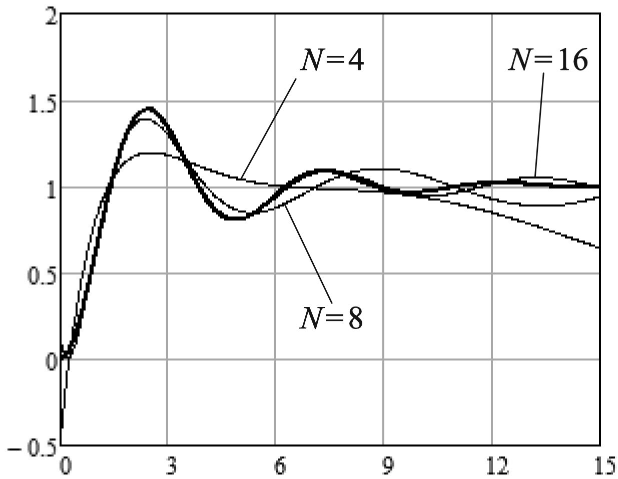

Рис. 22. Графики функций $u(x)$ и $u_N(x)$ при $\beta=\frac{1}{3}$ и различных значениях N

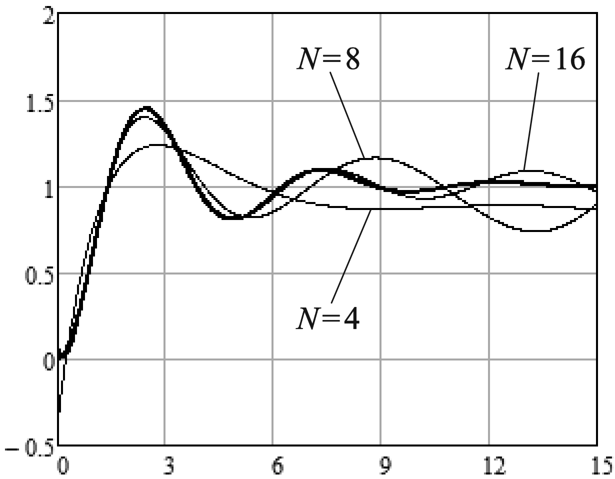

Рис. 23. Графики функций $u(x)$ и $u_N(x)$ при $\beta=\frac{1}{2}$ и различных значениях N

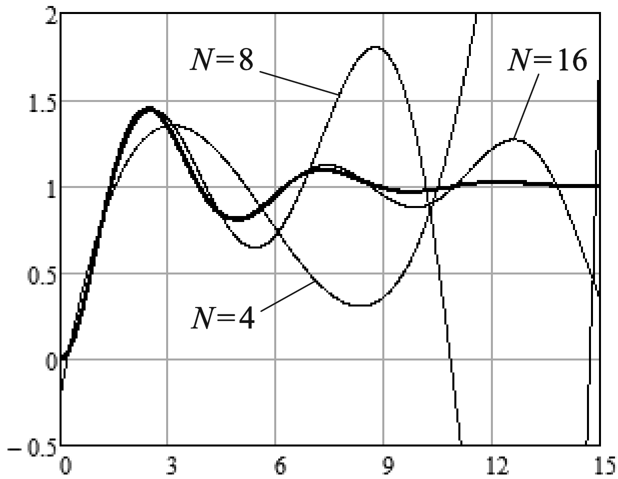

Рис. 24. Графики функций $u(x)$ и $u_N(x)$ при $\beta=1$ и различных значениях N

Таблица 6

Погрешности аппроксимации функции $u(x)$ при различных β и N

	$\beta=0$	$\beta=\frac{1}{3}$	$\beta=\frac{1}{2}$	$\beta=1$
$N=4$	–	0.311172	0.224303	0.117286
$N=8$	–	0.092800	0.062648	0.035703
$N=16$	–	0.014978	0.009770	0.002687

Полученные результаты могут послужить основой для расчета спектральных характеристик относительно ортонормированных функций, построенных на базе обобщенных функций Лагерра: $F_j^{\alpha,\beta,m,D}(x)=F_j^{\alpha,\beta}\left(\frac{x-m}{D}\right)$, $j=0,1,2,\ldots$, с дополнительными параметрами m и $D>0$.

Они ортогональны на множестве $[m,+\infty)$ с весовой функцией $\rho^{\beta}\left(\frac{x-m}{D}\right)$. Введение дополнительных параметров позволяет, во-первых, решать задачу представления функций на множествах вида $[m,+\infty)$, во-вторых, в ряде случаев ограничиваться меньшим числом первых членов в разложении функции при незначительном изменении погрешности аппроксимации (при соответствующем подборе параметра D). При $D<0$ указанные функции ортогональны на множестве $(-\infty,m]$.

Список литературы

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
2. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. – М.: ГИИЛ, 1948. – 260 с.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
4. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – М.: Физматгиз, 1960. – 471 с.
5. Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2003. – 583 с.
6. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. – 160 с.
7. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Анализ нелинейных стохастических систем управления в классе обобщенных характеристических функций // Автоматика и телемеханика. – 2011, № 2. – С. 183–194.
8. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Синтез оптимальных нелинейных стохастических систем управления спектральным методом // Информатика и ее применения. – 2011, т. 5, вып. 2. – С. 69–81.
9. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2006. – 392 с.
10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 632 с.; Т. 2. Специальные функции. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 664 с.
11. Романов В.А., Рыбаков К.А. Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2010, № 39. – http://www.mai.ru.
12. Рыбаков К.А. Спектральные характеристики линейных функционалов и их приложения к анализу и синтезу стохастических систем управления // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2005, № 18. – http://www.mai.ru.
13. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2004, № 16. – http://www.mai.ru.
14. Рыбаков К.А., Хакимов З.Р. О применении спектральной формы математического описания к идентификации систем управления космическими аппаратами // Вестник Московского авиационного института. – 2010, т. 17, № 3. – С. 226–229.

15. Рыбин В.В. Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. – М.: Изд-во МАИ, 2011. – 220 с.
16. Семенов В.В., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом. – М.: МАИ, 1984. – 84 с.
17. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974. – 336 с.
18. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 416 с.