

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 1, 2017
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>
e-mail: jodiff@mail.ru

Общая теория управления

МЕТОД ГОМОТОПИИ В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО СМЕШАННОМУ КРИТЕРИЮ В УСЛОВИЯХ ДЕЙСТВИЯ ПОМЕХ¹

А.А. Рогоза

Московский государственный технический университет им. Н.Э.
Баумана, Калужский филиал. 248000, Россия, г. Калуга, ул.
Баженова, д. 2. e-mail: Aemaeth_eternity@mail.ru

Аннотация

В работе рассматриваются вопросы, связанные с решением задачи синтеза робастного управления по смешанному критерию в условиях действия помех, доставляющих минимум анизотропийной норме для линейной дискретной системы со структурированной неопределенностью. Задача погружается в более общую задачу, модель которой не содержит неопределенности, но имеет дополнительный вход, ограниченный по мощностной полунорме. Аналитически задача синтеза сведена к решению связанной системы нелинейных алгебраических уравнений: уравнения Ляпунова, четырех уравнений Риккати и нелинейного уравнения специального вида. Приводится метод гомотопии для решения указанной системы уравнений, его отличие от классического метода Давыденко. Обоснована сходимость метода. Получены все аналитические зависимости для реализации численной процедуры решения нелинейной системы алгебраических уравнений. Проведено математическое моделирование на примере самолета в режиме посадки в условиях сдвига ветра.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Калужской области (грант № 14-41-03071).

Ключевые слова: уравнение Ляпунова, уравнения Риккати, смешанный критерий оптимизации, метод гомотопии с Ньютоновскими итерациями, математическое моделирование.

Abstract

The work deals with the synthesis problem of the robust control for a mixed criterion in the conditions of action of hindrances minimizing anisotropic norm of a linear discrete system with structured uncertainty. The task may be considered as a part of a more general problem which does not contain any uncertainty, but has an additional input bounded on the capacity half-norm. Analytically the problem of the synthesis is reduced to the solving coupled system of nonlinear algebraic equations: Lyapunov equation, four Riccati equations and nonlinear equation of a special form. The homotopy method for the obtained system and the difference from the Davydenko classical method are discussed. The convergence of the method is justified. The analytical dependences for the implementation of the numerical procedures for the solution of nonlinear system of algebraic equations have been obtained. The mathematical modeling on the example of the aircraft in landing mode in conditions of wind shear has been performed.

Key words: Lyapunov equation, Riccati equation, mixed optimization criterion, homotopy method with Newtonian iteration, mathematical modeling.

1. Введение: синтез анизотропийного регулятора для линейных объектов при действии аддитивных помех, постановка задачи.²

Если входной сигнал является гауссовым белым шумом, а математическая модель системы полностью определена (имеется полная информация об объекте управления), то при синтезе регулятора минимизируют линейный квадратичный гауссовый критерий в виде минимума математического ожидания квадрата выходной координаты

$$J(W_{\omega z}) = \lim_{t \rightarrow \infty} M \left[\int_0^t z^T z dt \right],$$

где M – математическое ожидание.

Такой регулятор фактически минимизирует H_2 норму, что может быть записано в виде

$$\|W_{\omega z}\|_2 \rightarrow \min,$$

где $W_{\omega z}$ передаточная функция замкнутой системы от входа ω к выходу z .

Применение регуляторов, оптимальных по квадратичным критериям качества, показало их высокую чувствительность к параметрическим возмущениям объекта управления и внешних воздействий. Для уменьшения чувствительности синтезированной системы к параметрическим возмущениям

² В данном случае, под помехой понимается внешнее возмущение, действующее на объект/систему, спектральные характеристики которой не известны.

объекта управления и внешних воздействий вместо H_2 нормы используют H_∞ норму в следующем виде

$$\|W_{\omega z}\|_\infty \rightarrow \min.$$

Обычно H_∞ норма определяется путем нахождения максимального сингулярного значения $\sigma(\cdot)$ матрицы передаточной функции с помощью алгоритма Шура в следующем виде

$$\|W\|_\infty \equiv \sup \sigma(W(j\omega)), \omega \in [0, \infty).$$

Робастные регуляторы, синтезированные по критерию H_∞ , обладают малой чувствительностью к структурным и параметрическим возмущениям, однако их динамические характеристики часто оказываются неудовлетворительными в связи с излишней «осторожностью» робастных регуляторов, рассчитанных на работу системы в самых неблагоприятных условиях.

Применение регуляторов, синтезированных по смешанному критерию, включающему H_2 и H_∞ нормы, позволяет получать системы, обладающие достаточно высокими динамическими характеристиками при низкой чувствительности к изменению параметров и структуры объектов управления. Однако вопрос выбора параметра толерантности (робастности) γ , характеризующего соотношения между H_2 и H_∞ нормами, решается на интуитивном уровне. Чем ближе система к оптимальной по H_2 норме, тем она более чувствительна к изменению параметров и структуре моделей объекта управления и внешних воздействий. Чем ближе синтезированная система к оптимальной по H_∞ норме, тем меньшую точность она имеет, так как проявляет излишнюю «осторожность» и рассчитана на работу в наиболее неблагоприятных условиях.

Одним из корректных подходов к обоснованному выбору смешанного критерия, включающего H_2 и H_∞ нормы, является построение анизотропийных регуляторов. При стохастическом подходе к синтезу H_∞ управления в качестве критерия оптимальности системы используется стохастическая норма системы

$$\|W_{\omega z}\|_\alpha \rightarrow \min.$$

При этом фактически используется комбинация стохастической нормы системы и средней анизотропии α случайного сигнала, что и приводит к одному из вариантов стохастической нормы — анизотропийной норме.

Рассмотрим в общем случае решение задачи синтеза анизотропийных регуляторов для многомерной дискретной системы, на вход которой поступает дискретный многомерный гаусовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей. Тогда средняя анизотропия дискретной последовательности на выходе такой системы определяется следующим выражением

$$\bar{A}(W_\phi) \equiv -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \ln \det \left\{ \frac{m}{\|W_\phi\|_2^2} W_\phi(\omega) [W_\phi(\omega)]^* \right\} d\omega.$$

Величина средней анизотропии равна нулю, если дискретная последовательность представляет собой гаусовский белый шум с единичной ковариационной матрицей.

Представим исходную дискретную систему в форме пространства состояний

$$W_\phi = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

тогда средняя анизотропия дискретной последовательности на выходе системы может быть определена следующим образом

$$\bar{A}(W_\phi) \equiv -\frac{1}{2\pi} \ln \det \left[\frac{mT}{\text{tr}(\mathbf{CPC} + \mathbf{DD}^T)} \right],$$

где m число входов, а матрица T связана с решением P уравнения Риккати

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{A}^T + \mathbf{L}\mathbf{T}\mathbf{L}^T - \mathbf{B}^T\mathbf{B}, \\ \mathbf{T} \equiv \mathbf{C}^T\mathbf{R}\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{D}^T, \\ \mathbf{L} \equiv (\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{C}^T + \mathbf{B}\mathbf{D}^T)\mathbf{T}^{-1}, \end{cases}$$

а грамиан управляемости P системы является решением уравнения Ляпунова

$$P = \mathbf{A}P\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T.$$

Для дискретной динамической системы с передаточной функцией W , на вход которой поступает дискретная последовательность, сформированная из гаусовской последовательности с мощностью дискретного фильтра с передаточной функцией W_ϕ , вводится анизотропийная норма системы в следующем виде

$$\|W\|_\alpha \equiv \sup \left\{ \frac{\|WW_\phi\|_2}{\|W_\phi\|_2}, W_\phi \in W_\alpha \right\}.$$

Анизотропийная норма системы характеризует не анизотропию дискретных последовательностей на входе и выходе системы, а чувствительность системы в среднем к случайным входным последовательностям со средним уровнем анизотропии α . При этом, при нулевой анизотропии $\alpha = 0$ входной дискретной последовательности анизотропийная норма системы равна H_2 норме системы, а при бесконечной анизотропии $\alpha \rightarrow \infty$ входной дискретной последовательности анизотропийная норма системы равна H_∞ норме системы, так что имеет место следующее соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|W\|_2 = \|W\|_0 \leq \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|W\|_\alpha = \|W\|_\infty.$$

Таким образом, если анизотропия входной дискретной системы находится в диапазоне $0 \leq \alpha < \infty$, то значение анизотропийной нормы системы $\|W\|_\alpha$ ограничено значениями H_2 и H_∞ нормами системы:

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|W\|_2 \leq \|W\|_\alpha \leq \|W\|_\infty.$$

Данное положение является важным при синтезе анизотропийных регуляторов.

В данной работе рассматривается синтез робастного управления по смешанному критерию для линейных динамических систем при структурированной неопределенности. Задача синтеза анизотропийного робастного регулятора сводится к стохастической задаче H_∞ – оптимизации для объекта без неопределенности, но с одним дополнительным входом, т.е. подход заключается в «замене» объекта с неопределенностью новым – полностью определенным объектом, но содержащим один дополнительный вход с внешними возмущениями, с последующими погружением исходной задачи в более общую задачу H_∞ – субоптимизации. Другими словами, здесь параметрическая неопределенность заменяется на внешнее возмущение, после чего решается классическая задача H_∞ – субоптимизации. Эта задача является смешанной задачей H_α/H_∞ – оптимизации, где для каждого возмущения выбирается свой критерий качества: минимизация анизотропийной нормы системы от внешнего возмущения с ограниченным уровнем средней анизотропии к управляемому выходу (H_α критерий) и минимизация H_∞ – нормы при дополнительном возмущении. Классическая задача H_2/H_∞ – оптимизации является частным случаем H_α/H_∞ – оптимизации, если внешнее возмущение имеет стохастические характеристики соответствующие «белому шуму».

Пусть дискретная линейная динамическая система описывается уравнениями

$$\begin{cases} x_{k+1} = \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}_0q_k + \mathbf{B}_1\omega_k + \mathbf{B}_2u_k \\ z_k = \mathbf{C}_1x_k + \mathbf{D}_{12}u_k, \\ p_k = \mathbf{C}_2x_k + \mathbf{D}_{22}u_k, \\ y_k = \mathbf{C}_3x_k + \mathbf{D}_{33}\omega_k, \\ q_k = \Delta p_k, \end{cases} \quad (1)$$

где $x_k \in R^n$ – состояние системы, $z_k \in R^{r_1}$ – управляемый выход, $p_k \in R^{m_0}$ – выход неопределенности, $y_k \in R^{r_2}$ – наблюдаемый выход, $q_k \in R^{m_0}$ – вход неопределенности, $u_k \in R^{m_2}$ – управление, $\omega_k \in R^{m_1}$ – возмущение. Матрицы системы (1) известны, кроме неопределенности Δ , будем полагать, что

$$\Delta = \left\{ \Delta = \text{blockdiag}(\Delta_1, \Delta_2) : \Delta_i \in R^{l_i \times l_i}, \|\Delta_i\|_\infty \leq 1 \right\}. \quad (2)$$

Задача анизотропийной робастной оптимизации для линейной дискретной модели (1) со структурной неопределенностью формулируется в следующем виде:

Задача 1: Для системы (1) и уровня средней анизотропии $\alpha \geq 0$ определить стабилизирующий регулятор $K \in \mathbf{K}$, минимизирующий максимальное значение α – анизотропийной нормы системы $F_l(F_u(P, \Delta), K)$ по всем допустимым значениям неопределенности $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ (2), т.е. доставляет минимум функционалу

$$J_0(K) = \sup_{\Delta \in \mathbf{\Delta}} \|F_l(F_u(P, \Delta), K)\|. \quad (3)$$

Особенность задачи 1 состоит в том, что входящие неопределенности по своей сути различны. В частности, внешнее возмущение представляет собой последовательность случайных векторов в частотной области, а неопределенность описывается в пространстве состояний в виде решетчатой функции. Последнее затрудняет задачу оптимизации, поэтому решать задачу 1 будем путем погружения исходной задачи в более общую задачу, модель управления которой не содержит в себе неопределенность, но в которой присутствует один дополнительный сигнал, выражающий эту неопределенность. Такой подход позволит свести задачу оптимизации к более общей задаче анизотропийной оптимизации для полностью определенной системы [11].

Введем следующие предположения:

1. Справедливо следующее

$$\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1 = 0, \quad \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12} = I. \quad (4)$$

Данное предположение не ограничивает общности, так как при его выполнении, к системе необходимо применить преобразование из [26].

2. Номинальная система при $\Delta \equiv 0$ наблюдаема и управляема. Данное предположение является стандартным в теории робастного управления линейными динамическими системами.
3. $r_1 < m_1$. Данное условие гарантирует, что для любого регулятора $K \in \mathbf{K}$, система $F_l(F_u(P, \Delta), K)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|F_l(\cdot)\|_2 < \|F_l(\cdot)\|_\infty.$$

4. Матрицы \mathbf{D}_{33} и \mathbf{D}_{12} полного строчного и столбцового ранга, т.е.

$$\text{rank} \mathbf{D}_{33} = r_2 \leq m_1; \quad \text{rank} \mathbf{D}_{12} = m_2 \leq r_1.$$

Последнее гарантирует невырожденность уравнений Риккати для оптимального оценителя и оптимального H_2 – регулятора, рассмотренных в следующих параграфах.

2. Анизотропия случайного вектора, основные определения.

Анизотропия $\mathbf{A}(W)$ m – мерного случайного вектора W с функцией плотности распределения вероятностей f определяется в виде [6]:

$$\mathbf{A}(W) = \min_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f \| p_{m, \lambda}), \quad (5)$$

где

$$\mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda}) = \mathbf{E}_f \left[\ln \left(\frac{f}{p_{m,\lambda}} \right) \right] - \quad (6)$$

расстояние Кульбака – Лейблера между f и гауссовской функцией плотности распределения вероятностей

$$p_{m,\lambda}(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp\left(-\frac{x^T x}{2\lambda}\right),$$

в формулах введены следующие обозначения: $\mathbf{E}_f[\cdot]$ – оператор математического ожидания с плотностью вероятностей f . Из формул следует, что анизотропия $\mathbf{A}(W)$ представляет собой меру различия вектора W от гауссовского вектора с плотностью распределения вероятностей $p_{m,\lambda}(x)$, зависящей от параметра λ . В случае если вектор W является гауссовским с нулевым средним, то плотность его распределения имеет вид

$$f(x) = \left((2\pi)^m \det(S) \right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T S^{-1} x\right),$$

где $\det(S)$ – определитель матрицы S , $S \succ 0$ – ковариационная матрица вектора W . Тогда выражение (6) примет вид

$$\mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda}) = -h(W) + \frac{m}{2} \ln(2\pi\lambda) + \frac{trS}{2\lambda}, \quad (7)$$

где trS – след матрицы S , $h(W)$ – дифференциальная энтропия W :

$$h(W) = -\mathbf{E}_f[\ln f] = \int_{R^m} f(x) \ln f(x) dv_m,$$

где dv_m – бесконечно малое приращение m -мерного объема. Минимум (7) определяется из следующего уравнения:

$$\frac{d}{d\lambda} \left\{ \mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda}) \right\} = 0,$$

последнее эквивалентно уравнению

$$\frac{m}{2\lambda} - \frac{\mathbf{E}[|W|^2]}{2\lambda} = 0,$$

Решением этого уравнения является точка $\lambda_* = \frac{\mathbf{E}[|W|^2]}{2\lambda}$, поскольку значение

$\lambda > 0$ должно быть конечным. В соответствии с этим, анизотропия вектора W может быть вычислена в виде:

$$\mathbf{A}(W) = -h(W) + \frac{m}{2} \ln(2\pi\lambda_*) + \frac{\mathbf{E}[|W|^2]}{2\lambda_*} = -h(W) + \frac{m}{2} \ln\left(\frac{2\pi e}{m} \mathbf{E}[|W|^2]\right)$$

или, как указано в работе [1], последнее выражение может быть преобразовано к виду:

$$\mathbf{A}(W) = -\frac{1}{2} \ln \frac{\det(S)}{\left(\frac{1}{m} \operatorname{tr} S\right)^m}.$$

Итак, справедлива следующая лемма.

Лемма 1 [8, 9]. Анизотропия $\mathbf{A}(W)$ имеет следующие свойства:

1. Анизотропия инвариантна относительно преобразования вращения и масштабирования вектора W , т.е.

$$\mathbf{A}(kUW) = \mathbf{A}(W), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad U \in \mathbb{R}^{n \times n} - \text{унитарная матрица.}$$

2. Анизотропия случайного вектора $W \in L_2^m$ с известной матрицей вторых моментов $\mathbf{E}[WW^T] = \Sigma$ удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{A}(W) \geq -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m\Sigma}{\operatorname{tr}\Sigma} \right),$$

причем равенство достигается только для случая гаусовского случайного вектора W с нулевым средним и ковариационной матрицей $\operatorname{cov}(W) = \Sigma$, т.е. когда вектора W принадлежит множеству $G^m(\Sigma)$ гаусовских векторов с нулевым средним и ковариационной матрицей Σ .

3. Для любого случайного вектора $W \in L_2^m$ анизотропия $\mathbf{A}(W)$ всегда неотрицательна и равна нулю только тогда, когда W имеет гаусовское распределение с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей $\operatorname{cov}(W) = \lambda I_m$, $\lambda > 0$.

С доказательством леммы можно ознакомиться в [8, 9].

2.1. Вычисление средней анизотропии последовательности в пространстве состояний

Использовать в качестве вычисления анизотропии для дискретных динамических систем выражение (5) не представляется возможным, поскольку внешнее возмущающее воздействие, действующее на систему, является последовательностью случайных векторов, последнее приводит к тому, что постоянно увеличивается число элементов последовательности, что приводит к стремлению анизотропии к бесконечности. Поэтому применяют удельную среднюю по времени анизотропию, называемую средней анизотропией последовательности.

Введем в рассмотрение стационарную эргодическую последовательность $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, состоящую из гаусовских векторов $\omega_k \in L_2^m$. Введем следующее обозначение для $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$$W_{st} \square [\omega_s \quad \omega_{s+1} \quad \dots \quad \omega_t]^T \in L_2^{m \times (t-s+1)}.$$

Тогда анизотропию $\mathbf{A}(W_{0:N-1})$ можно вычислить, применяя следующую лемму:

Лемма 2 [12]. Анизотропия $\mathbf{A}(W_{0:N-1})$ представима в виде

$$\mathbf{A}(W_{0:N-1}) = \mathbf{A}(U_{0:N-1}) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}(\omega_k) + \sum_{k=1}^{N-1} I(\omega_0, W_{-k:-1}),$$

где $I(\omega_0, W_{-k:-1})$ – взаимная информация случайных векторов ω_0 и $W_{-k:-1}$

$$I(\xi, \eta) = \mathbf{D}(f_{\xi\eta} \| f_{\xi} f_{\eta}),$$

а вектор $U_{0:N-1} \in L_2^{mN}$ имеет нормальное распределение $U_{0:N-1} \square G^{mN}(\Sigma)$ с блочно – диагональной ковариационной матрицей

$$\Sigma = \text{blockdiag}_{k=0, N-1} \left(\frac{1}{m} \mathbf{E} [|\omega_k|^2] I_m \right),$$

где $|\omega_k|^2$ – евклидова норма вектора ω_k .

Доказательство леммы можно найти в [12]. Средняя анизотропия $\bar{\mathbf{A}}(W)$ стационарной эргодической последовательности $W = \{\omega_k\}$ определяется из выражения

$$\bar{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N}, \quad W_{0:N-1} = [\omega_0 \ \dots \ \omega_{N-1}]^T. \quad (8)$$

Пусть $V = \{v_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – последовательность m – мерных гаусовских векторов с нулевым средним $\mathbf{E}[v_k] = 0$ и единичной ковариационной матрицей I_m . Предположим, что случайная последовательность W получена из V с помощью формирующего фильтра [12]

$$\omega_j = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k v_{j-k}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

то передаточная функция этого фильтра G определяется в виде:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k z^{-k}, \quad g_k \in R^{m \times m}$$

и принадлежит пространству Харди $H_2^{m \times m}$ комплекснозначных матричных функций, аналитичных внутри открытого единичного круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. В работе [9] показано, что средняя анизотропия последовательности (9) может быть определена из выражения:

$$\bar{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \frac{mS(\omega)}{\|G\|_2^2} d\omega, \quad (10)$$

где $S(\omega) = \hat{G}^*(\omega) \hat{G}(\omega)$, $-\pi \leq \omega < \pi$ – спектральная плотность W , $\hat{G}(\omega) = \lim_{r \rightarrow 1-0} G(re^{i\omega})$ – значение передаточной функции $G(z)$ на границе единичного круга, $\hat{G}^*(\omega)$ – комплексно-сопряженная транспонированная матрица. Функционал (10) неотрицателен и принимает конечное значение, если

формирующий фильтр $G(z)$ имеет полный ранг, $\text{rank } \widehat{G}(\omega) = m$, $\omega \in [-\pi, \pi)$, в противном случае

$$\det \frac{mS(\omega)}{\|G\|_2^2} = \left(\frac{m}{\|G\|_2^2} \right)^m \det \widehat{G}^*(\omega) \det \widehat{G}(\omega) = 0$$

в силу того, что $\det \widehat{G}(\omega) = 0$.

Рассмотрим вычисление средней анизотропии через функцию спектральной плотности $S(\omega)$, применяя формулу типа Колмогорова – Сегё, выражающую среднюю анизотропию через вторые стохастические моменты.

Пусть $W = GV$ – случайная последовательность, сформированная фильтром G из гауссовской последовательности V . Введем последовательность прогнозов $\{\bar{\omega}_{k|k-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ элементов последовательности $\{\omega_k\}$ и их ошибок $\{\bar{\omega}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$\bar{\omega}_{k|k-1} = \mathbf{E} \left[\omega_k | \{\omega_j\}_{j < k} \right], \quad \bar{\omega}_k = \omega_k - \bar{\omega}_{k|k-1}.$$

Условное математическое ожидание $\bar{\omega}_k$ при известных $\{\omega_j\}_{j < k}$ определяется из выражения:

$$\mathbf{E} \left[\omega_k | \{\omega_j\}_{j < k} \right] = \mathbf{E} \left[\omega_k | \{\omega_j\}_{j < k} \right] - \bar{\omega}_{k|k-1} = 0,$$

откуда, $\{\omega_k\}$ – последовательность гауссовских случайных векторов с нулевым средним и некоторой ковариационной матрицей. Тогда справедливо

$$\bar{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m \mathbf{E} \left[\bar{\omega}_0 \bar{\omega}_0^T \right]}{\mathbf{E} \left[|\bar{\omega}_0|^2 \right]} \right), \quad (11)$$

Последнее выражение является формулой Колмогорова – Сегё. Среднюю анизотропию $\bar{\mathbf{A}}(W)$ случайной последовательности можно разделить на сумму пространственной и временной составляющей [64]:

$$\bar{\mathbf{A}}(W) = \bar{\mathbf{A}}_s(W) + \bar{\mathbf{A}}_t(W),$$

где

$$\bar{\mathbf{A}}_s(W) = -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m \mathbf{E} \left[\bar{\omega}_0 \bar{\omega}_0^T \right]}{\mathbf{E} \left[|\bar{\omega}_0|^2 \right]} \right),$$

$$\bar{\mathbf{A}}_t(W) = \frac{1}{2} \ln \det \left(\mathbf{E} \left[\bar{\omega}_0 \bar{\omega}_0^T \right] \mathbf{E}^{-1} \left[|\bar{\omega}_0|^2 \right] \right).$$

Пространственная составляющая $\bar{\mathbf{A}}_s(W)$ объясняется независимостью функционала $\bar{\mathbf{A}}_s(W)$ от предыстории $\{\omega_k\}_{k < 0}$, а временная $\bar{\mathbf{A}}_t(W)$ – зависит от предыстории. Слагаемое $\bar{\mathbf{A}}_s(W)$ средней анизотропии совпадает с количеством

информации о векторе ω_0 , содержащейся в части предыстории $\{\omega_k\}_{k<0}$, т.е. измеряет «предсказуемость» последовательности. Функционал $\bar{A}_t(W)$ является инвариантным относительно взаимно-однозначного преобразования координат в R^m , причем $\bar{A}_t(W) = \bar{A}_t(MW)$ для любой невырожденной матрицы $M \in R^{m \times m}$.

Пространственная составляющая $\bar{A}_s(W)$, совпадающая со значением анизотропии $A(\omega_0)$ вектора ω_0 , не обладает инвариантностью к однозначному преобразованию координат и характеризует неравномерность распределения случайного вектора по компонентам в сечении случайной стационарной последовательности W . Для скалярных сигналов величина $\bar{A}_s(W) = 0$ и имеет значение только при $m \geq 2$. [12]

2.2. Вычисление средней анизотропии в пространстве состояний.

Введем в рассмотрение окрашенную последовательность $\{\omega_k\}$, генерируемую динамическим фильтром согласно (9). Представление такого фильтра в пространстве состояний в простейшем случае имеет вид

$$\begin{cases} x_{k+1} = \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}v_k, \\ \omega_k = \mathbf{C}x_k + \mathbf{D}v_k, \quad x_0 = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где x_k – вектор состояния, внешнее возмущение $\{v_k\}$ – гаусовский «белый шум». Обозначим Σ ковариационную матрицу вектора $\{\omega_k |_{k \rightarrow \infty}\}$, т.е. $\Sigma = \text{cov}(\omega_k |_{k \rightarrow \infty})$. Эта матрица связана с решением уравнения Ляпунова [64], при $P \succ 0$

$$P = \mathbf{A}P\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T \quad (13)$$

следующим образом

$$\Sigma = \mathbf{C}P\mathbf{C}^T + \mathbf{D}\mathbf{D}^T.$$

Введем матрицу ковариации Ψ вектора прогноза ошибок $\omega_k |_{k \rightarrow \infty} > 0$,

$\bar{\omega}_k = \omega_k - \mathbf{E} \left[\bar{\omega}_k | \{\omega_j\}_{j < k} \right]$ при $k \rightarrow \infty$. Введем матрицу Ξ вида:

$$\Xi = \Psi - \Sigma.$$

В [1] показано, что выражение для средней анизотропии (8) при реализации формирующего фильтра в пространстве состояний (12) может представлено в виде

$$\bar{A}(W) = -\frac{1}{2} \ln \frac{\det(\Sigma + \Xi)}{\left(\frac{1}{m} \text{tr} \Sigma \right)^m}, \quad (14)$$

где $\Xi = \mathbf{C}R\mathbf{C}^T$, а R – решение уравнения Риккати

$$\begin{aligned} R &= \mathbf{A}R\mathbf{A}^T + \Lambda(\Sigma + \Xi)^{-1} \Lambda^T, \\ \Lambda &= \mathbf{B}\mathbf{D}^T + \mathbf{A}(P + R)\mathbf{C}^T. \end{aligned} \quad (15)$$

По выражениям (13) и (15) можно вычислять среднюю анизотропию случайной последовательности W , сгенерированной с помощью формирующего фильтра (12) в терминах вторых моментов W . Подробности смотри в [12].

В случае если случайный вектор W нецентрирован, формула (14) требует уточнения. Пусть гауссовский случайный вектор W с ненулевым средним μ имеет ковариационную матрицу S . Его функция плотности распределения может быть записана в виде

$$f(x) = \left((2\pi)^m |\det(S)| \right)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^T S^{-1} (x - \mu) \right\}.$$

Относительная энтропия (6), для плотности распределения f примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda}) &= -h(W) + \frac{m}{2} \ln(2\pi\lambda) + \\ &+ \frac{1}{2\lambda} \int_{R^n} \left((2\pi)^m |\det(S)| \right)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^T S^{-1} (x - \mu) \right\} x^T x dv, \end{aligned}$$

где второе слагаемое равно

$$\frac{\text{tr}S + |\mu|_2^2}{2\lambda}.$$

Откуда следует, что анизотропия нецентрированного случайного вектора может быть вычислена следующим образом:

$$\mathbf{A}(W) = -\frac{1}{2} \ln \frac{\det(S)}{\left(\frac{1}{m} (\text{tr}S + |\mu|_2^2) \right)^m}, \quad (16)$$

где учитывается величина математического ожидания μ случайного вектора W .

Для синтеза гауссовской случайной последовательности $\{\omega_k\}$ с нулевым средним, можно использовать линейный формирующий фильтр, аналогичный (12):

$$\begin{cases} x_{k+1} = \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}v_k, \\ \omega'_k = \mathbf{C}x_k + \mathbf{D}v_k + \mu, \quad x_0 = 0, \end{cases} \quad (17)$$

где x_k вектор состояния фильтра, внешнее возмущение $\{v_k\}$ – гауссовский «белый шум». Средняя анизотропия для вектора $W' = \{\omega'_k\}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}(W') &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{A}(W'_{0:N-1})}{N}, \\ \bar{\mathbf{A}}(W') &= -\frac{1}{2} \ln \frac{\lim_{N \rightarrow \infty} \det(\Sigma'_{0:N-1})^{1/N}}{\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{mN} (\text{tr}\Sigma'_{0:N-1} + |\mu'_{0:N-1}|_2^2)^{1/N} \right)^m}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\mu'_{0:N-1} = [\mu \quad \dots \quad \mu]$, а матрица $\Sigma'_{0:N-1}$ – ковариационная матрица расширенного вектора $W'_{0:N-1}$

$$\Sigma'_{0:N-1} = \text{cov}(W'_{0:N-1}),$$

которая тождественна ковариационной матрице расширенного вектора $W_{0:N-1}$, т.е. $\Sigma'_{0:N-1} = \Sigma_{0:N-1}$. В [12] показано, что

$$\Sigma_{0:N-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}\mathbf{D}^T & \dots & \mathbf{D}(\mathbf{C}\mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B})^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & \mathbf{D}\mathbf{D}^T + \sum_{k=0}^{N-2} \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{B}(\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{B})^T \end{bmatrix},$$

откуда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{tr} \Sigma_{0:N-1} = \text{tr} \Sigma,$$

где $\Sigma = \text{cov}(\omega_k) \Big|_{k \rightarrow \infty}$. Сравнивая выражения (8) и (18), следует, что свойство эргодичности последовательности W влечет существование следующего предела:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \det(\Sigma_{0:N-1})^{1/N} = \det(\Sigma + \Xi)$$

при условии, что $\mu = 0$. Последнее свойство так же справедливо и для последовательности W' , поскольку $\Sigma'_{0:N-1} = \Sigma_{0:N-1}$. В силу того, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} |\mu'_{0:N-1}|_2^2 = |\mu|_2^2,$$

верно следующее выражение для вычисления средней анизотропии последовательности W' :

$$\bar{\mathbf{A}}(W') = -\frac{1}{2} \ln \frac{\det(\Sigma + \Xi)}{\left(\frac{1}{m} (\text{tr} \Sigma + |\mu|_2^2) \right)^m}. \quad (19)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [12]. *Выражение для средней анизотропии (19) случайной последовательности W , полученной с помощью формирующего фильтра*

$$G: \begin{cases} x_{k+1} = \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}v_k, \\ \omega'_k = \mathbf{C}x_k + \mathbf{D}v_k + \mu, \end{cases}$$

может быть представлено в виде

$$\bar{\mathbf{A}}_{\mu}(W) = \bar{\mathbf{A}}_0(W) + \frac{m}{2} \ln \frac{\|G\|_2^2 + |\mu|_2^2}{\|G\|_2^2},$$

где $\|G\|_2$ обозначает H_2 -норму матрицы передаточной функции

$$G(z) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(zI_m - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}.$$

2.3. Анизотропийная норма системы

Пусть дискретный объект управления (ОУ) описывается в пространстве состояний уравнениями

$$OY: \begin{cases} x_{k+1} = \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}\omega_k, \\ z_k = \mathbf{C}x_k + \mathbf{D}\omega_k, \end{cases} \quad (20)$$

где $x_k \in R^n$ – вектор состояния системы, $\omega_k \in R^m$ – внешнее возмущение, $z_k \in R^p$ – выход. Действительные матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} и \mathbf{D} полностью определены и имеют соответствующие размерности. Последовательность $\{\omega_k\} = W$ считается стационарной гаусовской со средним уровнем анизотропии $\bar{\mathbf{A}}(W) = \alpha \geq 0$ и ненулевым средним $\mathbf{E}[W] = \mathbf{W}$, $|\mathbf{W}| < \infty$.

В работе [12] показано, что для объекта (OY) (20) средне-квадратичный коэффициент усиления от входа W к выходу Z определяется в виде:

$$Q(OY, W) = \frac{\|z\|_p}{\|\omega\|_p} = \sqrt{\frac{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}|z_k|^2}{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}|\omega_k|^2}} \quad (21)$$

где

$$\|z\|_p = \sqrt{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}|z_k|^2}$$

мощностная полунорма последовательности $\{z_k\}$.

Пусть элементы последовательности $\{\omega_k\}$ формируются в виде

$$\omega_k = \mathbf{C}_g x_k + \mathbf{D}_g (v_k + \mu), \quad (22)$$

x_k – состояние (20), а μ – некоторый вектор, тогда динамика формирующего фильтра в пространстве состояний описывается уравнениями

$$G: \begin{cases} x_{k+1} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}_g) x_k + \mathbf{B}\mathbf{D}_g (v_k + \mu), \\ \omega_k = \mathbf{C}_g x_k + \mathbf{D}_g (v_k + \mu). \end{cases} \quad (23)$$

При этом, мощностные полунормы выходов систем (20) и (23) имеют вид:

$$\begin{aligned} \|\omega\|_p^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\text{tr cov}(\omega_k) + |\mathbf{E}\omega_k|^2 \right) = \|G\|_2^2 + |\mathbf{W}|^2, \\ \|z\|_p^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\text{tr cov}(z_k) + |\mathbf{E}z_k|^2 \right) = \|OYG\|_2^2 + |\mathbf{M}\mathbf{W}|^2, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{M} = (\mathbf{D} + \mathbf{C}(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}) \mathbf{W}.$$

Средне-квадратичный коэффициент усиления (21) для системы с возмущением, имеющим ненулевое среднее, определяется из выражения

$$Q(OY, W) = Q(OY, G) = \sqrt{\frac{\|OYG\|_2^2 + |\mathbf{M}|^2}{\|G\|_2^2 + |\mathbf{M}|^2}}. \quad (24)$$

Поскольку последовательность с заданным уровнем средней анизотропии формируется посредством линейной динамической системы – фильтром, то выражение $\bar{\mathbf{A}}(G) \leq \alpha$ означает, что средняя анизотропия последовательности W , полученная с помощью фильтра G не превосходит наперед заданного положительного значения α :

$$\bar{\mathbf{A}}(G) \leq \alpha,$$

т.е. тождественны обозначения $\bar{\mathbf{A}}(G) \square \bar{\mathbf{A}}(W)$.

Анизотропийная норма системы ОУ (20) определяется как верхняя грань средне-квадратичного коэффициента усиления (24) при ограниченном уровне средней анизотропии входа [1]

$$\|OY\|_{\alpha} = \sup_{G: \bar{\mathbf{A}}(G) \leq \alpha} Q(OY, G). \quad (25)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3 [12]. Для двух последовательно соединенных фильтров $F \in H^{p \times m}$ и $G \in H^{m \times m}$ выполнено следующее неравенство

$$\|FG\|_{\alpha} \leq \|F\|_b \|G\|_{\alpha}, \quad (26)$$

причем

$$b = \bar{\mathbf{A}}(G) + \alpha + \frac{m}{2} \ln \left(\frac{m \|G\|_{\alpha}^2}{\|G\|_2^2 + |\mathbf{M}|^2} \right),$$

где \mathbf{M} – математическое ожидание сигнала на входе G .

Доказательствл леммы 3 представлено в [12].

В параграфах 3.1 – 3.3 приведены основные понятия теории анизотропийного управления: анизотропия случайного вектора, средняя анизотропия последовательности, анизотропийная норма линейной дискретной стационарной системы.

Отмечено, что анизотропия случайного вектора представляет собой меру отличия этого вектора от эталонного из множества гаусовских случайных векторов с нулевым средним и ненулевым средним и скалярной ковариационной матрицей.

3. Синтез робастного управления по смешанному критерию при структурированной неопределенности объекта управления.

3.1. Погружение в задачу стохастической H_{∞} – оптимизации.

Введем вспомогательную систему, аналогичную модели (1)

$$\begin{cases} x_{k+1} = \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}_1\omega_k + \mathbf{B}_2u_k + \mathbf{B}_3\eta_k, \\ \tilde{z}_k = \left[\mathbf{C}_1x_k + \mathbf{D}_{12}u_k; \gamma_1\mathbf{C}_{12}x_k; \gamma_2\mathbf{C}_{22}x_k; \gamma_1\mathbf{D}_{1,22}u_k; \gamma_2\mathbf{D}_{2,22}u_k \right]^T, \\ y_k = \mathbf{C}_3x_k + \mathbf{D}_{33}\omega_k, \end{cases} \quad (27)$$

где $\gamma_i, i = \overline{1,2}$ – положительные параметры, матрица неопределенности имеет диагональный вид $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2)$, $\Delta_i \in R^{s_i \times s_i}$, причем $s_1 + s_2 = m_0$,

$\mathbf{B}_3 = [\mathbf{B}_{01}^T \ \mathbf{B}_{02}^T \ \mathbf{B}_{01}^T \ \mathbf{B}_{02}^T]^T$, с учетом того что $\mathbf{B}_0 = [\mathbf{B}_{01} \ \mathbf{B}_{02}]$, $\mathbf{B}_{0i}^T \in R^{n \times s_i}$, вход системы будет иметь размерность R^{2m_0} , остальные матрицы аналогичны (1), а матрицы $\mathbf{C}_2 = [\mathbf{C}_{12}^T \ \mathbf{C}_{22}^T]^T$, $\mathbf{C}_{i2} \in R^{s_i \times n}$, $\mathbf{D}_{22} = [\mathbf{D}_{1,22}^T \ \mathbf{D}_{2,22}^T]^T$, $\mathbf{D}_{i,22} \in R^{s_i \times m_2}$. Информация о входном воздействии η_k , основана на том, что она принадлежит множеству сигналов с ограниченной мощностной полуноормой, $\|\eta_k\|_p < \infty$.

Сформулируем задачу стохастической H_∞ – оптимизации, для модели (27):

Задача 2. Для системы (27) и уровня средней анизотропии входного сигнала $\alpha \geq 0$ определить допустимый регулятор $K \in \mathbf{K}$, минимизирующий максимальное значение α – анизотропийной нормы передаточной функции $F_l(\tilde{P}, K)$ для любых входных воздействий, т.е. доставляет минимум функционалу

$$J(K, \gamma) = \sup_{\eta_k \in l_p^{2m_0}} \sup_{W \in \mathbf{W}_\alpha} \left(\|\tilde{Z}\|_p^2 - \|G\eta\|_p^2 \right), \quad (28)$$

где $G = \text{diag}(\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_1 \ \gamma_2)$.

Выясним связь между задачей 2 и смешанной задачей оптимизации.

Регулятор, получающийся в результате смешанной задачи H_α/H_∞ – оптимизации, является менее консервативным чем в задаче H_∞ – оптимизации. Последнее связано с тем, что смешанный критерий представляет собой комбинацию двух критериев: в виде минимизации анизотропийной нормы замкнутой системы стабилизирующим регулятором для возмущения с ограниченной средней анизотропией и в виде H_∞ – нормы для возмущения, суммируемого с квадратом. Кроме того получающееся решение будет менее чувствительно к изменению параметров объекта управления, чем классическая задача с квадратичным критерием качества.

В работе [11] приведено то положение, которое объясняет, почему решение задачи 2 эквивалентно задаче смешанной оптимизации. Приведем соответствующую теорему:

Теорема 2 [11]. Решение задачи 2 является решением смешанной задачи оптимизации: для фиксированных параметров γ_1 и γ_2 определить допустимый регулятор $K \in \mathbf{K}$, такой что

$$\|T_{\tilde{z}\omega}\|_\alpha \rightarrow \min_K, \quad (29)$$

$$\|T_{\tilde{z}\eta_i}\|_\infty \leq \gamma_i, \quad i = \overline{1,4}. \quad (30)$$

С доказательством теоремы можно ознакомиться в [62].

Приведем теорему на основе аналогичного результата из работы [62], показывающую, что функционал качества $J(K, \gamma)$ задачи 2 огарничивает функционал качества $J_0(K)$ задачи 1.

Теорема 3 [5]. Для любых входных воздействий $W \in \mathbf{W}_\alpha$ и $\eta_k \in l_p^{2m_0}$ выполняется неравенство

$$J_0(K) \leq J(K, \gamma). \quad (31)$$

Доказательство теоремы отражено в [33].

Теоремы 2 и 3 показывают, что задачу с критерием качества (3) можно свести к задаче 2. Критерий качества (28) – мажорирующий критерий для (3), причем разность $(J(K, \gamma) - J(K)) \rightarrow \min$, если существует γ_0 , удовлетворяющее условию теоремы 2.

На вход системы (27) с критерием качества (28) поступают два сигнала: ω_k имеет заданный уровень средней анизотропии, а η_k принадлежит множеству ограниченных по $\|\cdot\|_p$ – норме сигналов. Её решением будет тройка (K^*, G_0^*, G_1^*) , которая является седловой точкой функционала (28), причем справедливо

$$L(K^*, G_0, G_1) \leq L(K^*, G_0^*, G_1^*) \leq L(K, G_0^*, G_1^*), \quad (32)$$

где K^* – оптимальный регулятор, G_0^* – наихудший формирующий фильтр для входа ω_k , G_1^* – наихудший формирующий фильтр для входа η_k . Или строгое математическое описание множеств в (32) имеет вид:

$$K^*(G_0, G_1) = \arg \min_{K \in \mathbf{K}} L \subseteq \mathbf{K}, \quad (33)$$

$$G_0^*(K, G_1) = \arg \min_{G \in G_\alpha, \|G_0\|_2=1} L \subseteq G_\alpha, \quad (34)$$

$$G_1^*(K, G_0) = \arg \min_{G_1 \in RH_\infty^{2m_0 \times m_1}} L \subseteq RH_\infty^{2m_0 \times m_1}. \quad (35)$$

Множество (33) является решением смешанной задачи H_α/H_∞ – оптимизации, при условии, что вход W замкнутой системы генерируется известным формирующим фильтром $G_0 \in G_\alpha$, т.е. $W = G_0 * V$. Вход η генерируется с помощью известного формирующего фильтра $G_1 \in RH_\infty^{2m_0 \times m_1}$, $\eta = G_1 * W$. Множество (34) образовано формирующим фильтром генерирующим «наихудший» входной сигнал с ограниченным уровнем средней анизотропии при фиксированном регуляторе $K \in \mathbf{K}$ и фильтре $G_1 \in RH_\infty^{2m_0 \times m_1}$. Множество (35) представляет собой множество фильтров $G_1 \in RH_\infty^{2m_0 \times m_1}$, генерирующих входные последовательности при фиксированном регуляторе $K \in \mathbf{K}$ и фильтре $G_0 \in G_\alpha$.

3.2. «Наихудший» вход с ограниченной энергией для системы, замкнутой регулятором.

Проведем синтез наихудшего входного воздействия η с ограниченной энергией. Входная последовательность η полностью определяется формирующим фильтром G_1 , поэтому проведем синтез фильтра в пространстве состояний,

доставляющий максимум функционалу (28), при фиксированном регуляторе K и фильтре G_0 . Пусть фиксированный регулятор описывается следующими уравнениями в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \xi_{k+1} = \widehat{\mathbf{A}}\xi_k + \widehat{\mathbf{B}}u_k, \\ u_k = \widehat{\mathbf{C}}\xi_k, \end{cases} \quad (36)$$

где $\widehat{\mathbf{A}}, \widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{C}}$ – неизвестные матрицы. Наихудший вход η определяется в виде:

$$\tilde{\eta}_k = L\xi_k + \Sigma^{1/2}\omega_k = L_1x_k + L_2\xi_k + \Sigma^{1/2}\omega_k, \quad (37)$$

где матрицы $L, \Sigma^{1/2}$ подлежат определению. Запишем реализацию замкнутой системы $F_l(\tilde{M}, K)$ в пространстве состояний:

$$F_l(\tilde{M}, K) = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2\widehat{\mathbf{C}} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_3 \\ \widehat{\mathbf{B}}\mathbf{C}_3 & \widehat{\mathbf{A}} & \widehat{\mathbf{B}}\mathbf{D}_{33} & 0 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12}\widehat{\mathbf{C}} & 0 & 0 \\ \gamma_1\mathbf{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2\mathbf{C}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1\mathbf{D}_{1,22}\widehat{\mathbf{C}} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2\mathbf{D}_{2,22}\widehat{\mathbf{C}} & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{c|cc} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{F}} \\ \hline \tilde{\mathbf{C}} & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (38)$$

Введем следующее обозначение: через Q обозначим матрицу представляющей собой объединение вектора состояния замкнутой системы $F_l(\tilde{M}, K)$ x_k и регулятора ξ_k , т.е. $\zeta_k \equiv \begin{pmatrix} x_k^T & \xi_k^T \end{pmatrix}^T$, тогда матрица Q имеет вид:

$$Q \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^T\mathbf{C}_1 + \gamma_1^2\mathbf{C}_{12}^T\mathbf{C}_{12} + \gamma_2^2\mathbf{C}_{22}^T\mathbf{C}_{22} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{C}}^T(\mathbf{D}_{12}^T\mathbf{D}_{12} + \gamma_1^2\mathbf{D}_{1,22}^T\mathbf{D}_{1,22} + \gamma_2^2\mathbf{D}_{2,22}^T\mathbf{D}_{2,22})\widehat{\mathbf{C}} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Рассмотрим дискретное алгебраическое уравнение Риккати относительно матрицы $\tilde{Y} \in R^{2n \times 2n}$

$$\begin{cases} \tilde{Y} = \tilde{\mathbf{A}}^T\tilde{Y}\tilde{\mathbf{A}} + L^T\Sigma^{-1}L + Q, \\ L \equiv [L_1 \quad L_2] = \Sigma\tilde{F}^T\tilde{Y}\tilde{\mathbf{A}}, \\ \Sigma \equiv (\Gamma^2 - \tilde{F}^T\tilde{Y}\tilde{F})^{-1}, \end{cases} \quad (40)$$

Решение \tilde{Y} уравнения (40) называется стабилизирующим, если матрица \tilde{Y} симметрическая, матрица Σ положительно определена и матрица $\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{F}L$ асимптотически устойчива. При любых фиксированных $\gamma_i > \|T_{\tilde{z}\eta_i}\|_\infty$, $i = \overline{1,4}$ уравнение (40) имеет единственное решение.

Теорема 4 [5]. Пусть $\gamma_i > \|T_{\tilde{z}\eta_i}\|_\infty$, $i = \overline{1,4}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{\eta \in l_p^{2m_0}} \left(\|\tilde{Z}\|_p^2 - \|\Gamma\eta\|_p^2 \right) = \\ = \text{tr} \left\{ \left(\tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{\Sigma}}\tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{B}} \right) R_{\omega\omega}(0) + 2 \left(\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{\Sigma}}\tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{B}} \right) R_{\omega\zeta}(0) \right\}, \end{aligned} \quad (41)$$

где $\tilde{\mathbf{Y}}$, L и Σ удовлетворяют уравнению (40), а наилучший вход формируется на основе (37).

С доказательством можно ознакомиться в [5].

Наихудший вход $\tilde{\eta}$ может быть построен из входного сигнала W посредством формирующего фильтра $G_1 \in RH_\infty^{2m_0 \times m_1}$, внутренне состояние которого аналогично состоянию ζ_k системы $F_l(\tilde{M}, K)$. Реализация фильтра имеет вид

$$\tilde{G}_1 = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{F}}L & \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{F}}\Sigma^{1/2} \\ \hline L & \Sigma^{1/2} \end{array} \right). \quad (42)$$

3.3. «Наихудший» вход с ограниченным спектром для системы, замкнутой регулятором при «наихудшем» дополнительном входе с ограниченной энергией.

Рассмотрим систему (27) на вход которой подается последовательность (37). Вход – выходное соотношение имеет вид $Z = F_\omega W$, где F_ω определяется в виде:

$$F_\omega \sim F_l(\tilde{M}, K) \begin{bmatrix} I \\ \tilde{G}_1 \end{bmatrix} \equiv \left(\begin{array}{c|c} A_\omega & B_\omega \\ \hline C_\omega & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{A} + \mathbf{B}_3 L_1 & \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{C}} + \mathbf{B}_3 L_2 & \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 \Sigma^{1/2} \\ \hline \hat{\mathbf{B}} \mathbf{C}_3 & \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{B}} \mathbf{D}_{33} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \hat{\mathbf{C}} & 0 \\ \gamma_1 \mathbf{C}_{12} & 0 & 0 \\ \gamma_2 \mathbf{C}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \mathbf{D}_{1,22} \hat{\mathbf{C}} & 0 \\ 0 & \gamma_2 \mathbf{D}_{2,22} \hat{\mathbf{C}} & 0 \end{array} \right), \quad (43)$$

где матрицы $L \equiv [L_1 \quad L_2]$ и $\Sigma^{1/2}$ определяются из (40).

В данном случае необходимо подать на вход системы наилучшую последовательность $\tilde{W} \in \mathbf{W}_\alpha$, доставляющую максимум функционалу $\|F_\omega\|_2^2$. Наихудшая последовательность генерируется фильтром, поэтому необходимо провести синтез этого фильтра \tilde{G}_0 из (34), вытекающей из задачи оптимизации вида:

$$\sup_{G_0 \in \mathbf{G}_\alpha} \|F_\omega G_0\|_2^2 = \sup_{G_0 \in \mathbf{G}_\alpha} \left\| F_l(\tilde{M}, K) \begin{bmatrix} I_{m_1} \\ \tilde{G}_1 \end{bmatrix} G_0 \right\|_2^2. \quad (44)$$

Задача (44) решается, опираясь на основные положения теории анизотропного анализа. Частотное описание наилучшего фильтра \tilde{G}_0 можно получить на основе известной теоремы:

Теорема 5 [7]. Пусть система $F_\omega \in RH^{(r_1+2m_0) \times m_1}$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|F_\omega\|_2 < \|F_\omega\|_\infty.$$

Если спектральная плотность фильтра $G_0 \in RH^{m_1 \times m_1}$ имеет вид

$$\tilde{G}_0(\omega)\tilde{G}_0^*(\omega) = \left(I_{m_1} - q\tilde{F}_\omega^*\tilde{F}_\omega\right)^{-1}, \quad -\pi \leq \omega < \pi \quad (45)$$

для $q = \bar{A}^{-1}(G_0)$, то G_0 принадлежит множеству наилучших формирующих фильтров (34).

Доказательство теоремы приведено в [7].

Для описания наилучшего формирующего фильтра \tilde{G}_0 в пространстве состояний, определим входной сигнал в виде

$$\tilde{\omega}_k = L_\omega \zeta_k + \Sigma_\omega^{1/2} \nu_k, \quad (46)$$

где $L_\omega \in R^{m_1 \times 2n}$ такая, что выполняется условие $A_\omega + B_\omega L_\omega$ – асимптотически устойчива, а $\Sigma_\omega \in R^{m_1 \times m_1}$ положительно определенная симметричная матрица. Соответствующий формирующий фильтр G_0 со входом $V \in W_0$ и выходом $W \in W_\alpha$ в пространстве состояний определяется в виде:

$$\tilde{G}_0 = \left(\begin{array}{c|c} A_\omega + B_\omega L_\omega & B_\omega \Sigma_\omega^{1/2} \\ \hline L_\omega & \Sigma_\omega^{1/2} \end{array} \right). \quad (47)$$

Рассмотрим дискретное алгебраическое уравнение Риккати относительно матрицы $R \in R^{2n \times 2n}$:

$$\begin{cases} R = A_\omega^T R A_\omega + q C_\omega^T C_\omega + L_\omega^T \Sigma_\omega^{-1} L_\omega, \\ L_\omega = \Sigma_\omega \left(B_\omega^T R A_\omega + q D_\omega^T C_\omega \right), \\ \Sigma_\omega = \left(I_{m_2} - B_\omega^T R B_\omega \right)^{-1}. \end{cases} \quad (48)$$

Решение R уравнения (48) называется стабилизирующим, если матрица R симметрическая, матрица Σ_ω положительно определена и матрица $A_\omega + B_\omega L_\omega$ – асимптотически устойчива. Для любого $q \in \left[0, \|F_\omega\|_\infty^{-2}\right)$ уравнение Риккати (48) имеет единственное стабилизирующее решение, положительно полуопределенное. Реализацию фильтра можно вычислить на основе теоремы:

Теорема 6 [7]. Пусть система (43) асимптотически устойчива, $q \in \left[0, \|F_\omega\|_\infty^{-2}\right)$ и матрицы L_ω и Σ_ω соответствуют стабилизирующему решению R уравнения Риккати (48). Тогда

1. Формирующий фильтр (47) удовлетворяет (45).
2. α – анизотропийная норма системы F_ω задается выражением

$$\|F_\omega\|_\alpha = \frac{1}{q} \left[1 - \frac{m_1}{\text{tr}(L_\omega P L_\omega^T + \Sigma_\omega)} \right],$$

где P – решение уравнения Ляпунова

$$P = (A_\omega + B_\omega L_\omega) P (A_\omega + B_\omega L_\omega)^T + B_\omega \Sigma_\omega B_\omega^T \quad (49)$$

и параметр $q \in [0, \|F_\omega\|_\infty^{-2})$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{1}{2} \ln \det \left[\frac{m \Sigma_\omega}{\text{tr}(L_\omega P L_\omega^T + \Sigma_\omega)} \right] = \alpha. \quad (50)$$

Из теоремы следует, что

$$J(K, \gamma) = \frac{1}{q} \left[1 - \frac{m_1}{\text{tr}(L_\omega P L_\omega^T + \Sigma_\omega)} \right]^{1/2}.$$

Учитывая, что элементы входной последовательности $\tilde{\omega}_k$ представимы в виде (46), последнее позволяет преобразовать выражение (41) для функционала $J(K, \gamma)$, явно выражая ковариации $R_{\omega\omega}(0)$ и $R_{\omega\zeta}(0)$:

$$\begin{aligned} R_{\omega\omega}(0) &= L_\omega P L_\omega^T + \Sigma_\omega, \\ R_{\omega\zeta}(0) &= L_\omega P, \end{aligned}$$

где P – решение уравнения Ляпунова (49). Справедлива следующая лемма:

Лемма 4 [5]. Для заданной системы (27) с входными сигналами μ_k и ω_k , формирующимися согласно (37) и (46), значение критерия качества (28) будет определяться в виде

$$\begin{aligned} J(K, \gamma) &= \\ &= \text{tr} \left\{ \left(\tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\Sigma}\tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{B}} \right) (L_\omega P L_\omega^T + \Sigma_\omega) + 2 \left(\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\Sigma}\tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{B}} \right) L_\omega P \right\}, \end{aligned} \quad (51)$$

где матрицы правой части вычисляются согласно (38), решениями уравнений Риккати (40) и (48).

Доказательство представлено в [5].

3.4. H_2 – регулятор в форме наблюдателя.

Введем в рассмотрение систему

$$\mathbf{F} = F_l(\tilde{M}, K) \begin{bmatrix} I_{m_1} \\ \tilde{G}_1 \end{bmatrix} \tilde{G}_0 = F_l(\tilde{M}, K) \begin{bmatrix} \tilde{G}_0 \\ \tilde{G}_1 \tilde{G}_0 \end{bmatrix}, \quad (52)$$

где фильтры построены в соответствии с процедурами, описанными в предыдущих параграфах, для некоторого фиксированного регулятора K . Замкнутая система (52) представлена реализацией в пространстве состояний

$$\mathbf{F} = \left(\begin{array}{cc|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{B} \\ * & * & * \\ * & * & * \\ \hline \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} & \tilde{D} \end{array} \right),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= \mathbf{A} + \mathbf{B}_3 L_1 + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 \Sigma^{1/2}) L_{\omega_1}, \\ \tilde{A}_{12} &= \mathbf{B}_2 \tilde{C} + \mathbf{B}_3 L_2 + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 \Sigma^{1/2}) L_{\omega_2}, \\ \tilde{B} &= (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 \Sigma^{1/2}) \Sigma_{\omega}^{1/2}, \\ \tilde{C}_{21} &= \mathbf{C}_3 + \mathbf{D}_{33} L_{\omega_1}, \\ \tilde{C}_{22} &= \mathbf{D}_{33} L_{\omega_2}, \\ \tilde{D} &= \mathbf{D}_{33} \Sigma_{\omega}^{1/2}, \end{aligned}$$

матрицы L, Σ, L_{ω} и Σ_{ω} определены в (40) и (48). В таком случае, задача 2 эквивалентна задаче оптимизации вида:

$$\inf_{K \in \mathbf{K}} J(K, \gamma) = \inf_{K \in \mathbf{K}} \|\mathbf{F}\|_2^2 = \inf_{K \in \mathbf{K}} \left\| F_l(\tilde{M}, K) \begin{bmatrix} I \\ \tilde{G}_1(K) \end{bmatrix} \tilde{G}_0(K) \right\|_2^2. \quad (53)$$

Задача (53) – задача оптимизации для H_2 – регулятора в условиях неполной информации о векторе состояния системы (52), на вход которой поступает сигнал типа «белого шума» с единичной ковариационной матрицей. Решение задачи (53) известно [2]. Данная задача, в соответствии с принципом разделения, разбивается на две подзадачи: строится оценивающий фильтр Калмана (оцениватель состояния) и проводится синтез статического регулятора, обеспечивающий минимум H_2 – нормы передаточной функции замкнутой системы. Полученный регулятор является оценивающим, т.е. его выход является оптимальной в среднеквадратичном оценке состояния замкнутой системы по выходу.

3.5. Оцениватель состояния.

Проведем синтез регулятора обеспечивающего получение оценки вектора состояния замкнутой системы. Рассмотрим уравнение Риккати

$$\begin{cases} S = \tilde{A}_{11} S \tilde{A}_{11}^T + \tilde{B} \tilde{B}^T - \Lambda \Theta \Lambda^T, \\ \Theta = \tilde{C}_{21} S \tilde{C}_{21}^T + \tilde{D} \tilde{D}^T, \\ \Lambda = (\tilde{A}_{11} S \tilde{C}_{21}^T + \tilde{B} \tilde{D}^T) \Theta^{-1}. \end{cases} \quad (54)$$

Решение $S = S^T \in R^{n \times n}$ уравнения (54) называется стабилизирующим, если матрица $S = S^T \in R^{n \times n}$ положительно определена и матрица $\tilde{A}_{11} - \Lambda \tilde{C}_{11}$

асимптотически устойчива. Уравнение Риккати (54) в силу предположения 4 имеет не более одного стабилизирующего решения. Справедлива теорема:

Теорема 7 [3, 10]. Пусть система (27) удовлетворяет предположениям 1, 2 и 4 и пусть матрицы реализации в пространстве состояний допустимого регулятора (36) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12} - \Lambda(\tilde{C}_{21} + \tilde{C}_{22}), \\ \hat{B} &= \Lambda,\end{aligned}\tag{55}$$

где матрица Λ выражается через стабилизирующее уравнение Риккати (54). Тогда регулятор (36) является оценивающим.

Подробности доказательства теоремы 7 могут быть найдены в [3, 10].

3.6. Оптимальный регулятор.

Опишем процедуру получения оптимального регулятора. Для этого рассмотрим разомкнутую систему вида:

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_3 L + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 \Sigma^{1/2}) L_{\omega} & (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 \Sigma^{1/2}) \Sigma_{\omega}^{1/2} & \mathbf{B}_2 \\ 0 & A_{\omega} + B_{\omega} L & B_{\omega} \Sigma^{1/2} & 0 \\ \hline \mathbf{C}_1 & 0 & 0 & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{D}_{33} L_{\omega} & \mathbf{D}_{33} \Sigma_{\omega}^{1/2} & 0 \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_3 L_1 + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 \Sigma^{1/2}) L_{\omega_1} & \mathbf{D}_{33} L_{\omega_1} & * & \mathbf{B}_2 \\ 0 & \mathbf{B}_3 L_1 + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 \Sigma^{1/2}) L_{\omega_1} + \mathbf{B}_3 L_1 & \mathbf{B}_3 L_2 + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 \Sigma^{1/2}) L_{\omega_2} & * & 0 \\ * & * & (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 \Sigma^{1/2}) L_{\omega_2} + \mathbf{B}_3 L_2 + \mathbf{B}_2 \tilde{C} & * & * \\ \hline \mathbf{C}_1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{D}_{33} L_{\omega_1} & \mathbf{D}_{33} L_{\omega_2} & \mathbf{D}_{33} \Sigma_{\omega}^{1/2} & 0 \end{array} \right),$$

где матрицы $L, \Sigma^{1/2}, L_{\omega}$ и $\Sigma_{\omega}^{1/2}$ определяются из соотношений (40) и (48).

Рассмотрим уравнение Риккати

$$\begin{cases} T = A_u^T T A_u + C_u^T C_u - N^T \Upsilon N, \\ \Upsilon = B_u^T T B_u + D_{12}^T D_{12}, \\ N = [N_1 \quad N_2] = -\Upsilon^{-1} (B_u^T T A_u + D_{12}^T C_u), \end{cases}\tag{56}$$

где $A_u \in R^{2n \times 2n}$, $B_u \in R^{2n \times m_2}$ и $C_u \in R^{p_1 \times 2n}$ определяются в виде

$$A_u = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_3 L_2 + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 \Sigma^{1/2}) L_{\omega} \\ 0 & \mathbf{A} + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3 \Sigma^{1/2}) L_{\omega_2} + \mathbf{B}_3 L + \mathbf{B}_2 \tilde{C} \end{pmatrix},\tag{57}$$

$$B_u = [\mathbf{B}_2 \quad 0], \quad C_u = [C_1 \quad 0].\tag{58}$$

Решение $T = T^T \in R^{2n \times 2n}$ уравнения (56) называется стабилизирующим, если матрица $T = T^T \in R^{2n \times 2n}$ положительно определена и матрица $A_u + B_u N$ асимптотически устойчива. В силу предположения 5 уравнение (56) имеет не более одного решения.

Теорема 8 [3]. Пусть система (1) удовлетворяет предположениям 1, 2 и 5 и пусть матрицы реализации в пространстве состояний оценивающего регулятора (36) вычисляются согласно соотношениям (55) и уравнению

$$\hat{C} = N_1 + N_2, \quad (59)$$

где матрица N_1 и N_2 выражается через стабилизирующее уравнение Риккати (56). Тогда регулятор (36) является решением задачи 2.

Подробности доказательства теоремы 8 могут быть найдены в [3].

Приведем алгоритм синтеза робастного регулятора по смешанному критерию, отражающий решение задачи 1:

1. Фиксируются величины $\gamma_1 \neq 0$ и $\gamma_2 \neq 0$.
2. Решается система из четырех уравнений Риккати (40), (48), (54) и (56), уравнения Ляпунова (49) и нелинейного уравнения специального вида (50). Данная система является нелинейной алгебраической системой уравнений, эффективное решение которой можно получить, применяя метод гомотопии. Решение этой системы есть реализация регулятора K в пространстве состояний, данный регулятор является решением задачи 2.

Для того, чтобы получить оптимальное решение

$$K_{\gamma_0} = \arg \min_{\gamma} J(K_{\gamma}, \gamma),$$

соответствующее наилучшему приближению к задаче 1, необходимо определить

$$\gamma_0 = \arg \min_K J(K_{\gamma}, \gamma).$$

Построение итерационной процедуры выбора параметра γ_i , при котором субоптимальное решение сходится к оптимальному, строится на теореме 2 из [5].

Минимальное значение функционала качества (28) определяется из выражения:

$$J(K_{\gamma_0}, \gamma_0) = \frac{1}{q} \left[1 - \frac{m_1}{\text{tr}(L_{\omega} P L_{\omega}^T + \Sigma_{\omega})} \right]^{1/2}, \quad (60)$$

где матрицы L_{ω} , P , Σ_{ω} и параметр q – решение описанной системы уравнений при $\gamma = \gamma_0$. Число (60) мажоранта для функционала качества (3).

В зависимости от значения параметра α , возможны следующие ситуации:

1. При $\alpha = 0$ («белый шум» на входе системы), построенный регулятор является решением задачи H_2/H_{∞} – оптимизации [2].
2. При $\alpha \rightarrow +\infty$ справедливо

$$\|T_{\bar{z}\omega}\|_{\alpha} \rightarrow \|T_{\bar{z}\omega}\|_{\infty}, \quad (61)$$

тогда регулятор, является аппроксимацией центрального регулятора в задаче H_∞ – оптимизации [1].

Последние положения необходимы при решении указанной нелинейной системы алгебраических уравнений методом гомотопии.

4. Метод продолжения по параметру численного решения систем нелинейных уравнений, основа которого гомотопия Ньютона

4.1. Введение: основные положения теории гомотопии, краткий обзор существующих методов.

Гомотопический метод (или метод продолжения, или деформационный метод) хронологически берет начало в 19-ом столетии и активно развивается в различных направлениях по настоящее время. Общая схема этого метода геометрически наглядна и проста: если имеется какое-либо уравнение (алгебраическое, дифференциальное, интегральное, интегро-дифференциальное операторное и т. д.) и нужно получить информацию о его решениях (доказать существование решений, локализовать решения, построить приближения к решениям и т. д.), то это уравнение включают в некоторое специальным образом построенное однопараметрическое семейство уравнений, гомотопирующее изучаемое уравнение к эталонному уравнению, решение которого известно, а затем это решение “протягивают по параметру” к отыскиваемому решению исходного уравнения. Идеи применения продолжения по параметру для исследования решений нелинейных уравнений впервые освещены в работах У. Леверье и А. Пуанкаре. Впервые для численного решения уравнений метод продолжения был применен М. Лаэйем (1934) для случая одного уравнения. Для движения вдоль кривой решений он использовал дискретное продолжение посредством метода Ньютона. Позже метод был развит и сформулирован в более эффективном дифференциальном виде Д.Ф. Давиденко [14], и применен к различному классу задач. Поясним эту схему на более формальном уровне.

Пусть имеется уравнение

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0. \tag{62}$$

Предположим, что удалось включить уравнение (62) в однопараметрическое семейство уравнений

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}; \lambda) = 0 \quad (0 \leq \lambda \leq 1). \tag{63}$$

таким образом, что уравнение (63) имеет решение $\mathbf{x}(\lambda)$, гладко зависящее от параметра λ . Пусть при $\lambda = 0$ уравнение

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}; 0) = 0$$

имеет решение \mathbf{x}_0 и

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}; 1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Дифференцируя по λ тождество

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(\lambda); \lambda) \equiv 0,$$

получаем

$$\mathbf{F}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(\lambda); \lambda) \frac{d\mathbf{x}(\lambda)}{d\lambda} + \mathbf{F}'_{\lambda}(\mathbf{x}(\lambda); \lambda) \equiv 0.$$

Таким образом, решение $\mathbf{x}(\lambda)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \mathbf{F}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}; \lambda) \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} + \mathbf{F}'_{\lambda}(\mathbf{x}; \lambda) = 0, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (64)$$

Если это решение продолжимо на промежуток $[0,1]$, то точка $\mathbf{x}(1)$ будет решением уравнения (62). Вторая схема исследования уравнения (63) носит дискретный характер. Опишем ее.

Разобьем промежуток $[0,1]$ точками $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{k-1} < \lambda_k = \lambda_n = 1$.

Пусть

$$\delta = \max_{0 \leq i \leq n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i).$$

Если δ достаточно мало, то естественно предположить, что точка \mathbf{x}_0 будет близка к решению $\mathbf{x}(\lambda_1)$ уравнения

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}; \lambda_1) = 0.$$

Беря ее в качестве начального приближения какой-либо итерационной процедуры (например, метода Ньютона), найдем с достаточной точностью приближение \mathbf{x}_1 к $\mathbf{x}(\lambda_1)$. Точку \mathbf{x}_1 , в свою очередь, будем рассматривать как начальное условие к приближенному построению решения $\mathbf{x}(\lambda_2)$ уравнения

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}; \lambda_2) = 0$$

и т. д. На последнем шаге найдем с нужной точностью решение $\mathbf{x}(1)$ уравнения (62). Изложенные схемы, конечно, нуждаются в обосновании. Так, например, для реализации этих схем желательны теоремы существования решений уравнения (63) при всех λ . Предположение о гладкой зависимости решения $\mathbf{x}(\lambda)$ от параметра λ весьма ограничительно: в конкретных задачах структура множества решений уравнения (63) может оказаться весьма сложной. Априори неясна процедура построения однопараметрического семейства уравнений (63), хотя во многих практических ситуациях параметр λ изначально естественным образом входит в изучаемое уравнение. Отметим здесь, что наиболее распространенный способ построения однопараметрического семейства уравнений (63) имеет вид

$$\lambda \mathbf{F}(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0,$$

где эталонное уравнение

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0$$

конструируется на основании априорной информации об изучаемом уравнении (62).

Рассмотрим систему нелинейных алгебраических уравнений в общем виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \quad (65)$$

где

$$\mathbf{x} \in R^n, \mathbf{F}: R^n \rightarrow R^n. \quad (66)$$

Введем следующее определение.

Определение 1.[13, 14] Функцией гомотопии называется любая гладкая функция $\mathfrak{N}(x, \alpha) = 0$, где оператор $\mathfrak{N}: R^{n+1} \rightarrow R^n$, такой, что выполнены следующие условия:

- $\mathfrak{N}(x, \alpha) = f(x)$ при $\alpha = 0$;
- $\mathfrak{N}(x, \alpha) = \mathbf{F}(x)$ при $\alpha = 1$.

Другими словами, функция гомотопии $\mathfrak{N}(\cdot)$ служит непрерывному деформированию функции $f(\cdot)$ в исходную функцию $F(\cdot)$. Функция $f(\cdot)$ строится таким образом, чтобы ее корни были известны (или известен интервал локализации корней, или достаточно просто находились). Тогда при движении от корня

$$\mathfrak{N}(x, \alpha) = 0, \alpha = 0 \quad (67)$$

вдоль параметрической кривой

$$\mathfrak{N}(x, \alpha) = 0 \quad (68)$$

при изменении вещественного параметра $\alpha \in [0, 1]$, приходим к корню x^* , который является решением исходной системы (62). Такой подход называется методом гомотопии или методом продолжения решения по параметру.

Наиболее часто используемыми и вместе с тем наиболее простыми, являются следующие гомотопии:

1). гомотопия Ньютона [13, 14]

$$\mathfrak{N}(x, \alpha) = F(x) - (1 - \alpha)F(x_0) = 0 \quad (69)$$

или

$$\mathfrak{N}(x, \alpha) = \alpha F(x) + (1 - \alpha)(F(x) - F(x_0)) = 0, \quad (70)$$

что тоже самое

$$\mathfrak{N}(x, \alpha) = F(x) - F(x_0) + \alpha F(x_0) = 0; \quad (71)$$

2). гомотопия неподвижной точки []

$$\mathfrak{N}(x, \alpha) = \alpha F(x) + (1 - \alpha)(x - x_0) = 0; \quad (72)$$

где, во всех случаях, $x \in R^n, \alpha \in [0, 1]$, а уравнение $\mathfrak{N}(x, 0) = 0$ имеет корень x_0 (начальное условие для метода гомотопии).

Пусть справедливо следующее предположение.

Предположение 1. Отображение $\mathfrak{N}: R^{n+1} \rightarrow R^n$ является гладким (гладкость данного отображения для указанных гомотопий зависит от гладкости отображения $F: R^n \rightarrow R^n$), а якобиан функции гомотопии $\mathfrak{N}(\cdot)$ в точке (x_0, α) имеет полный ранг

$$\text{rank} \left[\frac{\partial \mathfrak{N}(x_0, \alpha)}{\partial x} \Big|_{(x_0, \alpha)} \right] = n, \alpha = 0, \quad (73)$$

причем

$$\det \left[\frac{\partial \mathfrak{N}(\cdot)}{\partial x} \right] \neq 0, \quad (74)$$

что характерно для гомотопии Ньютона.

Из сделанного предположения следует, что минор якобиана (73), полученный удалением i -го столбца, где вещественный индекс $i \in [1, n+1]$, окажется невырожденным, тогда по теореме о неявной функции [13, 14] множество решений $\mathfrak{N}^{-1}(x_0, 0)$ может быть локально параметризовано i -ой координатой в качестве параметра. Откуда следует, что существует некая многомерная гладкая кривая $[x(\xi), \alpha(\xi)]$ на некотором открытом интервале, содержащая нуль. Это означает, что существует возможность двигаться вдоль кривой (x, α) по параметру ξ , а если, согласно предположению 1, якобиан является невырожденным и в следующей точке пространства \mathbf{R}^{n+1} при движении вдоль кривой, то процесс будет продолжаться (не исключено, что возможно продолжение и в другой точке).

Численное решение методом продолжения по параметру представляет собой отслеживание кривой $x = x(\alpha)$, $\mathfrak{N}(x, \alpha) = 0$ и вычисление $x(1)$. Для этого существуют несколько подходов, основными из которых являются:

- 1) решение системы дифференциальных уравнений с высокой точностью и итерационное уточнение [13, 14];
- 2) решение системы дифференциальных уравнений с обратной связью [13];
- 3) схема предиктор – корректор [13];
- 4) метод кусочно-линейных аппроксимаций, основанный на триангуляциях [14].

Подходы 1, 3, 4 схожи между собой, отличие заключается в том, что возврат на кривую в схеме предиктор-корректор осуществляется с помощью проектирования. Во 2-ом случае, в схеме содержится член в форме обратной связи, который в каждой точке по значению невязки уточняет, а далее корректирует решение системы.

4.2. Алгоритм решения задачи.

Рассмотрим численный метод решения системы (62) с использованием теории описанной выше.

Предположим, что x^* – решение системы (62). Для поиска x^* будем использовать гомотопию Ньютона (70). Абстрагируясь от условия разрешимости и существования решения систем (62) и (68), введем следующее допущение.

Предположение 2. Решение уравнения (68) – существует для $\forall \alpha \in [0, 1]$, где α – вещественная последовательность чисел, решение уравнения (68), зависящее от параметра α , имеет вид

$$x = x(\alpha), \tag{75}$$

такое, что функция $x(\alpha)$ является почти всюду гладкой на интервале $[0, 1]$ и удовлетворяет начальному условию $x(\alpha) = x_0$ при $\alpha = 0$, а вдоль решения (75) выполняется условия предположения 1.

Представим отрезок $[0, 1]$ в виде суммы k отрезков меньшей длины

$$d([0, 1]) = d \left[\sum_{i=1}^k q_i \right], \tag{76}$$

или

$$0 = \alpha_0 < q_1 < q_2 < \dots < q_{k-1} < q_k = \alpha_1 = 1, \tag{77}$$

где $d(\cdot)$ – означает длину отрезка, в этом случае вектор переменных состоит из k точек искомой траектории:

$$\mathbf{x} = \{x_0 = x(q_0), \dots, x_k = x(q_k)\}. \tag{78}$$

Т.о. исходную систему (62) с учетом (68), можно представить в следующем виде

$$\mathbf{F}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(x(q_0)) \\ \mathbf{F}(x(q_1)) \\ \vdots \\ \mathbf{F}(x(q_{k-1})) \\ \mathbf{F}(x(q_k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(x_0) \\ \mathbf{F}_1(x) - \mathbf{F}(x_0) + q_1 \mathbf{F}(x_0) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{k-1}(x) - \mathbf{F}(x_0) + q_{k-1} \mathbf{F}(x_0) \\ \mathbf{F}(x) \end{bmatrix}, \mathbf{F} : \mathbf{R}^{nk} \rightarrow \mathbf{R}^{nk}. \tag{79}$$

Перепишем выражение (79) в векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}(x_0) \\ \mathbf{F}_1(x) - \mathbf{F}(x_0) + q_1 \mathbf{F}(x_0) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{k-1}(x) - \mathbf{F}(x_0) + q_{k-1} \mathbf{F}(x_0) \\ \mathbf{F}(x) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(x_0) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\mathbf{F}(x_0) & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\mathbf{F}(x_0) & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -\mathbf{F}(x_0) & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathbf{F}_1(x) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{F}_{k-1}(x) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & q_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}(x_0) \\ \mathbf{F}(x_0) \\ \vdots \\ \mathbf{F}(x_0) \\ \mathbf{F}(x_0) \end{bmatrix}. \tag{80}$$

Из последнего выражения следует, что на каждом отрезке (шаге) необходимо решать локально (при каждом значении $q_i, i = \overline{1, k}$) исходную нелинейную систему

уравнений (62), а в качестве внешней процедуры, необходимо обеспечить вычисление самого параметра q_i (или продолжение по параметру q).

Рассмотрим решение системы уравнений (62) при каждом фиксированном значении $q_i, i = \overline{1, k}$. Будем рассматривать нелинейную задачу наименьших квадратов

$$\min_x J(\mathbf{x}, q_i), \quad (81)$$

где $J(\mathbf{x}, q_i)$ – функция невязки, формируемая в виде $J(\mathbf{x}, q_i) = 1/2 [\mathbf{E}^T \mathbf{E}]$, $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_n)$ – вектор искомых переменных, $\mathbf{E}^T = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_m)^T$ – вектор невязки и $e_j = e_j(\mathbf{x}, q_i)$ – нелинейные функции. Известно [13], что в многомерном пространстве R^n в окрестности точки \mathbf{x} приближенные приращения функции невязки и градиента можно записать в виде

$$\begin{cases} J(\mathbf{x}, q_i) - J(\mathbf{x} - s, q_i) \approx [\mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i)]^T s - \frac{1}{2} s^T \mathbf{G}(\mathbf{x}, q_i) s, \\ \mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i) - \mathbf{grad}(\mathbf{x} - s, q_i) \approx \mathbf{G}(\mathbf{x}, q_i) s, \end{cases} \quad (82)$$

где

$$\mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i) = \left(\frac{\partial J(\mathbf{x}, q_i)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial J(\mathbf{x}, q_i)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial J(\mathbf{x}, q_i)}{\partial x_n} \right) - \quad (83)$$

градиент от функции невязки (81);

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, q_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J(\mathbf{x}, q_i)}{\partial^2 x_1} & \dots & \frac{\partial^2 J(\mathbf{x}, q_i)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 J(\mathbf{x}, q_i)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 J(\mathbf{x}, q_i)}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix} - \quad (84)$$

матрица Гессе и $s = (s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n)$ – вектор отклонений (вектор запаса чувствительности). Поскольку s – запас чувствительности, а в окрестности точки минимума x^* ($J(x^*) = 0$), s характеризует приращение функции невязки по направлению до этой точки в j -м направлении главных осей пространства минимизируемых параметров [2], то, предполагая что точка $(\mathbf{x} - s)$ является точкой минимума функции невязки, справедливо следующее

$$\begin{cases} J(\mathbf{x} - s, q_i) = 0, \\ \mathbf{grad}(\mathbf{x} - s, q_i) = 0, \end{cases} \quad (85)$$

откуда, подставляя (85) в (82) следует

$$\begin{cases} J(\mathbf{x}, q_i) \approx [\mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i)]^T s - \frac{1}{2} s^T \mathbf{G}(\mathbf{x}, q_i) s, \\ \mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i) \approx \mathbf{G}(\mathbf{x}, q_i) s, \end{cases} \quad (86)$$

что тоже самое

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}, q_i) &\approx \{ \mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i) \approx \mathbf{G}(\mathbf{x}, q_i) s \} \approx (\mathbf{G}(\mathbf{x}, q_i) s)^T s - \frac{1}{2} s^T \mathbf{G}(\mathbf{x}, q_i) s = \\ &= s^T \mathbf{G}^T(\mathbf{x}, q_i) s - \frac{1}{2} s^T \mathbf{G}(\mathbf{x}, q_i) s = \{ \mathbf{G}^T(\mathbf{x}, q_i) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, q_i) \} = \frac{1}{2} s^T \mathbf{G}(\mathbf{x}, q_i) s, \end{aligned} \quad (87)$$

или

$$J(\mathbf{x}, q_i) \approx \frac{1}{2} [\mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i)]^T \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}, q_i) \mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i). \quad (88)$$

В (88) составляющую $\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}, q_i) \mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i)$ называют вектор отклонений Ньютона [13]. Каждое слагаемое (компоненты вектора отклонений Ньютона)

$$v_j = \mathbf{G}_j(\mathbf{x}, q_i) \frac{\partial}{\partial x_j}(\mathbf{x}, q_i), \quad j = \overline{1, n}, \quad (89)$$

где $\mathbf{G}_j(\mathbf{x}, q_i)$ – вектор, в (88) характеризует приращение функции невязки за счет j -ой компоненты. При приближении текущей точки \mathbf{x} к точке минимума $(\mathbf{x} - s)$, матрицу Гессе при определенных условиях³, можно аппроксимировать с помощью матрицы первых производных вида

$$\mathbf{M} = \frac{\partial}{\partial x_j} e_l(\mathbf{x}, q_i), \quad l = \overline{1, m} \quad (90)$$

следующим образом:

$$\mathbf{G} \approx \mathbf{M}^T \mathbf{M} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_r} e_l(\mathbf{x}, q_i) \frac{\partial}{\partial x_j} e_l(\mathbf{x}, q_i) \right\} \Bigg|_{l=1, \overline{m}}^{j, r=1, \overline{n}}. \quad (91)$$

Последнее вытекает из следующего:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{x}, q_i) &= \left\{ \frac{\partial^2 J(\mathbf{x}, q_i)}{\partial x_j \partial x_v} \right\} \Bigg|_{j, v=1, \overline{n}} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_r} e_l(\mathbf{x}, q_i) \frac{\partial}{\partial x_j} e_l(\mathbf{x}, q_i) \right\} \Bigg|_{l=1, \overline{m}}^{j, r=1, \overline{n}} + \\ &+ \left\{ e_l(\mathbf{x}, q_i) \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_j} e_l(\mathbf{x}, q_i) \right\} \Bigg|_{l=1, \overline{m}}^{j, r=1, \overline{n}}, \end{aligned} \quad (92)$$

и с учетом того, что $e_l(\mathbf{x}, q_i) \rightarrow 0$, при приближении точки \mathbf{x} к точке минимума $(\mathbf{x} - s)$, то

³ Фактически условие аппроксимации определяется используемым методом, поскольку в основе лежит квазиньютоновский метод, то условие вытекает из ограниченности вторых производных (см. матрицу Гессе).

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, q_i) = \left\{ \frac{\partial^2 J(\mathbf{x}, q_i)}{\partial x_j \partial x_v} \right\} \Big|_{j,v=\overline{1,n}} \approx \left\{ \frac{\partial}{\partial x_r} e_l(\mathbf{x}, q_i) \frac{\partial}{\partial x_j} e_l(\mathbf{x}, q_i) \right\} \Big|_{l=\overline{1,m}}^{j,r=\overline{1,n}}, \quad (93)$$

откуда следует (91). Градиент функции невязки выражается через матрицу \mathbf{M} следующим образом

$$\mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i) = \mathbf{M}^T \mathbf{E}. \quad (94)$$

Если $n = m$, то в этом случае

$$\sum_{j=1}^n \Lambda_j \mathbf{grad}_j(\mathbf{x}, q_i) = [\mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i)]^T \Lambda = (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{E})^T (\mathbf{M}^T \mathbf{E}) = \mathbf{E}^T \mathbf{E}, \quad (95)$$

где $\Lambda_j \mathbf{grad}_j(\mathbf{x}, q_i)$ – запас чувствительности j -й переменной; (95) – запас чувствительности функции невязки [2, 3], который в окрестности точки минимума характеризует приращение функции невязки за счет j -й переменной.

Проведем декомпозицию матрицы \mathbf{M} , с целью приведения к каноническому виду, воспользовавшись сингулярным разложением вида [13, 14]

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}^T \Psi \mathbf{U}, \quad (96)$$

где \mathbf{U} – ортогональная матрица, $\Psi = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ – диагональная матрица, элементы которой – сингулярные числа, такие что

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n > 0. \quad (97)$$

В данном случае n – фактическая размерность собственного пространства матрицы Ψ . В этой системе координат вектор $\mathbf{U}^T \Lambda \mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i)$ определяется из системы уравнений

$$\lambda_j s_{U_j} = \mathbf{grad}_{U_j}(\mathbf{x}, q_i), \quad (j = \overline{1, n}), \quad (98)$$

где \mathbf{grad}_{U_j} – компоненты градиента $\mathbf{grad}_U(\mathbf{x}, q_i) = \mathbf{U}^T \mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i)$;

$s_U = \mathbf{U}^T [\mathbf{M}^T \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i)$. Запас чувствительности в направлении j -й оси главной системы координат является неотрицательной величиной, в самом деле

$$s_{U_j} \mathbf{grad}_{U_j}(\mathbf{x}, q_i) = \frac{\mathbf{grad}_{U_j}^2(\mathbf{x}, q_i)}{\lambda_j} = (s_{U_j})^2 \lambda_j \geq 0 \quad (99)$$

и в окрестности точки минимума характеризует приращение функции невязки j -ом направлением.

Таким образом, исходную функцию невязки (81), с учетом выше написанного, можно представить в виде (если $n = m$)

$$\begin{aligned} 2J(\mathbf{x}, q_i) &= 2 \mathbf{grad}_U^T(\mathbf{x}, q_i) s_U = 2 (\mathbf{U}^T \mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i))^T \left(\mathbf{U}^T [\mathbf{M}^T \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i) \right) = \\ &= 2 (\mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i))^T [\mathbf{M}^T \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i). \end{aligned} \quad (100)$$

Или в виде (если $n < m$)

$$2J(\mathbf{x}, q_i) \geq \text{or} \leq 2(\mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i))^T [\mathbf{M}^T \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{grad}(\mathbf{x}, q_i). \quad (101)$$

В качестве критерия останова можно использовать какую-либо норму.

Далее, для решения исходной системы уравнений, необходимо обеспечить вычисление параметра q_i , фактически осуществить движение вдоль многомерной параметрической кривой.

Для этого, представим решение уравнения (71) в виде разложения в ряд вида

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 + \dots + \alpha^{k-1} x_{k-1} + \alpha^k x_k. \quad (102)$$

Разложим функцию $F(x)$ ⁴ в (71), в ряд Тейлора в окрестности точки $x = x_0$, тогда получим

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(x_0) + \mathbf{F}'(x_0)(\alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots) + \frac{1}{2!} \mathbf{F}''(x_0)(\alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots)^2 + \dots \quad (103)$$

Подставим (103) в (71), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x, \alpha) &= \mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x_0) + \alpha \mathbf{F}(x_0) = \\ &= \mathbf{F}(x_0) + \mathbf{F}'(x_0)(\alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots) + \frac{1}{2!} \mathbf{F}''(x_0)(\alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots)^2 + \dots \\ &\quad - \mathbf{F}(x_0) + \alpha \mathbf{F}(x_0) = \mathbf{F}(x_0) + \mathbf{F}'(x_0)(\alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots) + \\ &\quad + \frac{1}{2!} \mathbf{F}''(x_0)(\alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots)^2 + \dots + \alpha \mathbf{F}(x_0); \end{aligned} \quad (104)$$

и записывая подобные члены при соответствующих степенях α , получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \alpha^0 : \mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x_0) &= 0, \\ \alpha^1 : x_1 \mathbf{F}'(x) + \mathbf{F}(x_0) &= 0, \\ \alpha^2 : x_2 \mathbf{F}'(x) + \frac{1}{2!} \mathbf{F}''(x_0) x_1^2 &= 0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (105)$$

Из второго уравнения (105) выразим x_1

$$x_1 = -\frac{\mathbf{F}(x_0)}{\mathbf{F}'(x)}, \quad (106)$$

и проводя аппроксимацию первой производной функции гомотопии, получим

$$x_1 = x_0 - \frac{\alpha \mathbf{F}(x_0)}{\mathbf{F}'(x)}, \quad (107)$$

при $\alpha = 1$, в итерационном виде, получим хорошо известную формулу Ньютона

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\mathbf{F}(x_i)}{\mathbf{F}'(x_i)}, \quad (108)$$

⁴ Полагаем, что x в $F(x)$ зависит от $x = x(\alpha)$.

что соответствует рассматриваемой функции гомотопии.

Продифференцируем функцию гомотопии (71), по параметру α учитывая (75), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{N}(x(\alpha), \alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} [F(x(\alpha)) - F(x_0) + \alpha F(x_0)] = \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} F(x(\alpha)) + F(x_0) = \frac{\partial}{\partial x} F(x(\alpha)) \Big|_{x=x(\alpha)} \frac{d}{d\alpha} x(\alpha) + F(x_0), \end{aligned} \quad (109)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x(\alpha)) \Big|_{x=x(\alpha)} \frac{d}{d\alpha} x(\alpha) + F(x_0) = 0, \quad (110)$$

откуда

$$\frac{d}{d\alpha} x(\alpha) = - \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x(\alpha)) \Big|_{x=x(\alpha)} \right)^{-1} F(x_0), \quad x(\alpha) = x^* \Big|_{\alpha=0}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (111)$$

Проаппроксимировав производную в левой части последнего выражения, и записывая в итерационном виде для параметра α , получим

$$x_{k+1}(\alpha) = x_k(\alpha) + \Delta x(\alpha), \quad (112)$$

где

$$\Delta x(\alpha) = -\mu \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x(\alpha_k)) \Big|_{x=x(\alpha_k)} \right)^{-1} F(x_0) \quad (113)$$

μ – параметр, определяющий шаг при решении системы уравнений (112). Отличие (111) от метода Д.Ф. Давиденко состоит в том, что:

1. правая часть (111) не зависит от переменной α ;
2. для вычисления правой части требуется не обращение матрицы, а лишь решение системы линейных уравнений с матрицей F_α и столбцом правых частей $-F(x_0)$.

Из (112) и (113) видно, что при использовании для решения полученной задачи Коши одного шага метода Эйлера итерационный процесс превращается в классический метод Ньютона (что соответствует (108)). Данное положение будет использоваться далее, при решении системы уравнений вытекающей из задачи синтеза анизотропийного регулятора.

Таким образом, для решения системы (62) при каждом фиксированном значении q_i , в качестве локальной вычислительной процедуры, используется какой-либо метод решения нелинейных алгебраических уравнений, а в качестве внешней – какой-либо метод для вычисления значений q_i , обеспечивающий движение вдоль многомерной параметрической кривой (75). Метод продолжения по параметру позволяет успешно преодолевать непростую проблему локализации. Однако следует отметить, что эти методы (методы гомотопии) не всегда

оказываются эффективными и их практическое применение требует определенной осторожности.

Рассмотрим возможность применения данного метода к задаче синтеза анизотропийного регулятора. Как указывалось выше решение задачи анизотропийной H_α/H_∞ -оптимизации сводится к отысканию решения нелинейной системы уравнений.

Далее приводится получение данной системы уравнений и описание каждого уравнения входящего в нее.

Рассмотрим дискретное обобщенное алгебраическое уравнения Риккати вида:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X} \mathbf{A} - \mathbf{E}^T \mathbf{X} \mathbf{E} - (\mathbf{A}^T \mathbf{X} \mathbf{B} + \mathbf{S}) [\mathbf{B}^T \mathbf{X} \mathbf{B} + \mathbf{N}]^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{X} \mathbf{A} + \mathbf{S}^T) + \mathbf{Q} = 0. \quad (114)$$

Приведем уравнения (40), (48), (54) и (56) к виду (114). Рассмотрим следующее уравнение (40)

$$\begin{cases} \tilde{Y} = \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{Y} \tilde{\mathbf{A}} + L^T \Sigma^{-1} L + Q, \\ L \equiv [L_1 \quad L_2] = \Sigma \tilde{F}^T \tilde{Y} \tilde{\mathbf{A}}, \\ \Sigma \equiv (\Gamma^2 - \tilde{F}^T \tilde{Y} \tilde{F})^{-1}, \end{cases}$$

Подставим второе и третье уравнение системы (40) в 1-ое, и проведем соответствующие преобразования

$$\tilde{Y} = \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{Y} \tilde{\mathbf{A}} + \left((\Gamma^2 - \tilde{F}^T \tilde{Y} \tilde{F})^{-1} \tilde{F}^T \tilde{Y} \tilde{\mathbf{A}} \right)^T (\Gamma^2 - \tilde{F}^T \tilde{Y} \tilde{F}) \left((\Gamma^2 - \tilde{F}^T \tilde{Y} \tilde{F})^{-1} \tilde{F}^T \tilde{Y} \tilde{\mathbf{A}} \right) + Q \quad (115)$$

Аналогично для уравнений (48), (54) и (56), приведенная форма имеет вид

$$R = A_\omega^T R A_\omega + q C_\omega^T C_\omega + \left((I_{m_2} - B_\omega^T R B_\omega)^{-1} (B_\omega^T R A_\omega + q D_\omega^T C_\omega) \right)^T (I_{m_2} - B_\omega^T R B_\omega)^{-1} \times \quad (116)$$

$$\times (I_{m_2} - B_\omega^T R B_\omega)^{-1} (B_\omega^T R A_\omega + q D_\omega^T C_\omega),$$

$$S = \tilde{A}_{11} S \tilde{A}_{11}^T + \tilde{B} \tilde{B}^T - (\tilde{A}_{11} S \tilde{C}_{21}^T + \tilde{B} \tilde{D}^T) (\tilde{C}_{21} S \tilde{C}_{21}^T + \tilde{D} \tilde{D}^T)^{-1} (\tilde{C}_{21} S \tilde{C}_{21}^T + \tilde{D} \tilde{D}^T) \times \quad (117)$$

$$\times \left((\tilde{A}_{11} S \tilde{C}_{21}^T + \tilde{B} \tilde{D}^T) (\tilde{C}_{21} S \tilde{C}_{21}^T + \tilde{D} \tilde{D}^T)^{-1} \right)^T,$$

$$T = A_u^T T A_u + C_u^T C_u - \left(-(B_u^T T B_u + D_{12}^T D_{12})^{-1} (B_u^T T A_u + D_{12}^T C_u) \right)^T (B_u^T T B_u + D_{12}^T D_{12}) \times \quad (118)$$

$$\times \left(-(B_u^T T B_u + D_{12}^T D_{12})^{-1} (B_u^T T A_u + D_{12}^T C_u) \right),$$

Уравнения Ляпунова

$$P = (A_\omega + B_\omega L_\omega) P (A_\omega + B_\omega L_\omega)^T + B_\omega \Sigma_\omega B_\omega^T \quad (119)$$

и параметр α определяется из уравнения

$$-\frac{1}{2} \ln \det \left[\frac{m \Sigma_{\omega}}{\text{tr}(L_{\omega} P L_{\omega}^T + \Sigma_{\omega})} \right] = \alpha. \quad (120)$$

Параметр q – вычисляется в результате решения итерационно. Как видно, все уравнения в указанной системе (116-120) связаны, ее решение матрицы $N_1, N_2, \Lambda, \Sigma_{\omega}, L_{\omega}$, зная которые можно найти параметры регулятора.

Перепишем систему (116) – (120) в следующем виде:

$$\begin{cases} F_1(\tilde{Y}, \tilde{A}, L, \Sigma) = \tilde{Y}, \\ F_2(R, A_{\omega}, B_{\omega}, C_{\omega}, D_{\omega}) = R, \\ F_3(S, \tilde{A}_{11}, \tilde{B}, \tilde{C}_{21}, \tilde{D}) = S, \\ F_4(T, A_u, B_u, C_u) = T, \\ F_5(P, A_{\omega}, B_{\omega}, L_{\omega}, \Sigma_{\omega}) = P, \\ f(q, L_{\omega}, P, \Sigma_{\omega}) = \alpha, \end{cases} \quad (121)$$

в которую входят $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ – неизвестные параметры анизотропийного регулятора, определяемые выражением (55) и (59).

Запишем функцию невязки согласно (81)

$$J(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, q_i) = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, q_i) \mathbf{E}(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, q_i), \quad (122)$$

где вектор невязки $\mathbf{E}(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, q_i)$, имеет вид

$$\mathbf{E}(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, q_i) = \begin{pmatrix} F_1(\tilde{Y}, \tilde{A}, L, \Sigma) - \tilde{Y} \\ F_2(R, A_{\omega}, B_{\omega}, C_{\omega}, D_{\omega}) - R \\ F_3(S, \tilde{A}_{11}, \tilde{B}, \tilde{C}_{21}, \tilde{D}) - S \\ F_4(T, A_u, B_u, C_u) - T \\ F_5(P, A_{\omega}, B_{\omega}, L_{\omega}, \Sigma_{\omega}) - P \\ f(q, L_{\omega}, P, \Sigma_{\omega}) - \alpha \end{pmatrix}. \quad (123)$$

Тогда из (100) и (94) следует

$$J(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, q_i) = \mathbf{E}^T(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, q_i) \mathbf{M} [\mathbf{M}^T \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{E}(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, q_i). \quad (124)$$

В (124) для вычисления матрицы \mathbf{M} , необходимо воспользоваться разложением (96), которое требует вычисления $grad_{U_j}$ (см. (98)), фактически первой производной по искомым переменным.

Новые значения параметров на каждой итерации определяются по формуле

$$J_{p+1}(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, q_i) = J_p(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, q_i) - s_{\mu}, \quad (125)$$

где $s_{\mu} = (s_{\mu_1} \dots s_{\mu_n}) = [\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \gamma^{\tilde{n}} \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{grad}(\cdot)$; \mathbf{I} – единичная матрица; \tilde{n} – номер итерации. Параметр $\gamma^{\tilde{n}}$ может определяться различными способами, например как это показано [13, 14], влияя на скорость сходимости. Т.е. если $\gamma^{\tilde{n}}$ имеет большое значение, то направление минимизации близко к направлению минимизации метода наискорейшего спуска, при малых значениях – к направлению минимизации метода Гаусса – Ньютона.

В качестве критерия останова в (125), можно воспользоваться следующим условием:

$$J_p(\cdot) - J_{p+1}(\cdot) < \varepsilon J_p(\cdot), \quad (126)$$

где коэффициент $\varepsilon > 0$ определяет точность.

Для вычисления параметра q_i , рассмотрим последнее уравнение в системе (121)

$$f(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) = \tilde{\alpha} - \quad (127)$$

скалярное нелинейное уравнение, к которому достаточно просто применим метод Д.Ф. Давиденко. В самом деле, согласно (111), имеем

$$q_{k+1} = q_k + \mu \left[\frac{\partial}{\partial(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} f(q_k, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) \right]^{-1} (\alpha - f(q_k, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})). \quad (128)$$

Таким образом, рассматриваемый подход, предполагает двухступенчатую вычислительную процедуру решения нелинейной системы уравнений (121):

1. локальная процедура – решение первых 5-и уравнений системы (115) – (119) или (121), с заданной точностью. В качестве начальных условий $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ на первой итерации, используются матрицы реализации \mathbf{H}_2 – оптимального регулятора, далее значения начальных условий переопределяются. На каждой последующей итерации, используется предыдущее приближение, при каждом фиксированном значении параметра q_i .
2. глобальная процедура – решение уравнения (128), относительно q_i . В качестве начального приближения используется $q_0 = 0$, что соответствует нулевой средней анизотропии сигнала (\mathbf{H}_2 – регулятор).

4.3. Матричнозначные производные.

В данном параграфе приводятся аналитические выражения для производных $\frac{\partial}{\partial(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} f(q_k, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ вычисление градиента по матрицам анизотропийного регулятора и т.д. (см. выражения (125), (128)), на основе правил дифференцирования матричнозначных выражений, приведенных в работе [5].

Пусть

$$\bar{\Omega}_n = I_2 \otimes \Upsilon_{n,2} \otimes I_n,$$

где

$$\Upsilon_{p,q} = \left\{ \delta_{(j-1)p - \lfloor \frac{i-1}{q} \rfloor (pq-1)+1, k} \right\}.$$

Так же, пусть $l = s_1 + s_2 + s_3$ и $s = 1 + n_2 + np_2 + nm_2$.

Производные от матриц замкнутой системы по параметру q и матрицам регулятора $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ выражаются следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \hat{A}} = \bar{\Omega}_n \begin{bmatrix} 0_{n^2 \times n^2} \\ 0_{n^2 \times n^2} \\ 0_{n^2 \times n^2} \\ I_{n^2} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \bar{A}}{\partial \hat{B}} = \bar{\Omega}_n \begin{bmatrix} 0_{n^2 \times np} \\ C_2 \otimes I_n \\ 0_{n^2 \times np} \\ I_{n^2 \times np} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \bar{A}}{\partial \hat{C}} = \bar{\Omega}_n \begin{bmatrix} 0_{n^2 \times m_2 n} \\ 0_{n^2 \times m_2 n} \\ I_n \otimes B_2 \\ 0_{n^2 \times m_2 n} \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \bar{C}_1}{\partial \hat{C}} = (I_2 \otimes \Upsilon_{n,1} I_{p_1}) \begin{bmatrix} 0_{np_1 \times np_2} \\ I_n \otimes D_{12} \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} f(q_k, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) = \left[\frac{\partial}{\partial \hat{A}} f(q_k, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) \quad \frac{\partial}{\partial \hat{B}} f(q_k, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) \quad \frac{\partial}{\partial \hat{C}} f(q_k, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) \right],$$

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \begin{bmatrix} 0_{4n^2 \times 1} & \frac{\partial \bar{A}}{\partial \hat{A}} & \frac{\partial \bar{A}}{\partial \hat{B}} & \frac{\partial \bar{A}}{\partial \hat{C}} \end{bmatrix}, \quad (129)$$

$$\frac{\partial \bar{B}_1}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \begin{bmatrix} 0_{2nl \times 1} & \frac{\partial \bar{B}_1}{\partial(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} \end{bmatrix}, \quad (130)$$

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \begin{bmatrix} 0_{2np_1 \times 1} & 0_{2np_1 \times n^2} & 0_{2np_1 \times np_2} & \frac{\partial \bar{C}}{\partial \hat{C}} \end{bmatrix}, \quad (131)$$

и

$$\frac{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})}{\partial(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{A}}{\partial \hat{A}} & \frac{\partial \bar{A}}{\partial \hat{B}} & \frac{\partial \bar{A}}{\partial \hat{C}} \\ 0_{2nl \times n^2} & 0_{2nl \times np_2} & 0_{2nl \times nm_2} \\ 0_{2np_1 \times n^2} & 0_{2np_1 \times np_2} & \frac{\partial \bar{C}}{\partial \hat{C}} \\ 0_{p_1 l \times n^2} & 0_{p_1 l \times np_2} & 0_{p_1 l \times nm_2} \end{bmatrix}, \quad (132)$$

$$\frac{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \begin{bmatrix} 0_{(4n^2 + 2nl + 2np_1 + p_1 l) \times 1} & \frac{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})}{\partial(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} \end{bmatrix}. \quad (133)$$

Производные решения уравнения Риккати (40) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} &= (\bar{A}^T \otimes \bar{A}^T) \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} + \\ &+ \left(I_{2n} \otimes (\bar{Y}\bar{A})^T \right) + \left((\bar{Y}\bar{A})^T \otimes I_{2n} \right) \Upsilon_{2n, 2n} \frac{\partial \bar{A}}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} + \\ &+ \left(L^T \otimes L^T \right) \frac{\partial \Pi^{-1}}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} + \frac{\partial \Xi}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} + \\ &+ \left(\left(I_{2n} \otimes (\Pi^{-1}L) \right)^T + \left((\Pi^{-1}L)^T \otimes I_{2n} \right) \right) \Upsilon_{2n, l} \frac{\partial L}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})}. \end{aligned}$$

Откуда

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} = \begin{bmatrix} I_{4n^2} & 0_{4n^2 \times 2nl} & 0_{4n^2 \times 2np_1} & 0_{4n^2 \times p_1 l} \end{bmatrix}, \quad (134)$$

$$\frac{\partial \bar{B}_1}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} = \begin{bmatrix} 0_{2nl \times 4n^2} & I_{2nl} & 0_{2nl \times 2np_1} & 0_{2nl \times p_1 l} \end{bmatrix}. \quad (135)$$

Также

$$\frac{\partial(\bar{B}_1^T \tilde{Y}\bar{A})}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} = \begin{bmatrix} I_{2n} \otimes (\bar{B}_1^T \tilde{Y}) & \left((\tilde{Y}\bar{A})^T \otimes I_l \right) \Upsilon_{4n^2 \times 2nl} & 0_{2nl \times np_1} & 0_{2nl \times p_1 l} \end{bmatrix}, \quad (136)$$

$$\frac{\partial(\bar{B}_1^T \tilde{Y}\bar{B}_0)}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} = \begin{bmatrix} 0_{m_l \times 4n^2} & \left((\tilde{Y}\bar{B}_0)^T \otimes I_l \right) \Upsilon_{2n, l} & 0_{m_l \times 2np_1} & 0_{m_l \times m_l p_1} \end{bmatrix}. \quad (137)$$

Продифференцируем выражение $\Pi\Pi^{-1} = I_l$, имеем

$$(I_l \otimes \Pi) \frac{\partial \Pi^{-1}}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} + (\Pi^{-1} \otimes I_l) \frac{\partial \Pi}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} = 0_{l_2 \times \psi},$$

где $\psi = 4n^2 + 2nl + 2np_1 + p_1 l$. Из последнего следует, что

$$\frac{\partial \Pi}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} = -(\Pi^{-1} \otimes I_l)^{-1} (I_l \otimes \Pi) \frac{\partial \Pi^{-1}}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})}. \quad (138)$$

С учетом (135), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^{-1}}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} &= -(\bar{B}_1 \otimes \bar{B}_1)^T \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} - \\ &- \left(\left((\bar{B}_1^T \tilde{Y}) \otimes I_l \right) \Upsilon_{2n, l} + \left(I_l \otimes (\bar{B}_1^T \tilde{Y}) \right) \right) \frac{\partial \bar{B}_1}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})}. \end{aligned} \quad (138)$$

Производная от L определяется из выражения

$$\frac{\partial L}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} = \left((\bar{A}\tilde{Y}\bar{B}_1) \otimes I_l \right) \frac{\partial \Pi}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} + (I_{2n} \otimes \Pi) \frac{\partial(\bar{B}_1^T \tilde{Y}\bar{A})}{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} \quad (139)$$

и

$$\frac{\partial \Xi}{\partial (\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} = 0_{4n^2 \times \psi}. \quad (140)$$

Таким образом, выражение для производной $\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial (\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial (\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} = & \left\{ I_{4n^2} - (\bar{A}^T \otimes \bar{A}^T) + \Upsilon_{2n,2n} (L^T \otimes L^T) (\bar{B}_1^T \otimes \bar{B}_1^T) - \right. \\ & - \left. (I_{4n^2} + \Upsilon_{2n,2n}) \left(\bar{A}^T \otimes (\bar{B}_1 L)^T \right) \right\}^{-1} (I_{4n^2} + \Upsilon_{2n,2n}) \left\{ \left(I_{2n} \otimes (\tilde{Y} \bar{A})^T \right) + \right. \\ & + \left. \left(I_{2n} \otimes (L^T \bar{B}_1)^T \tilde{Y} \right) \right\} \frac{\partial \bar{A}}{\partial (\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} + \left\{ \left((\tilde{Y} \bar{A})^T \otimes L^T \right) \Upsilon_{2n,l} - \right. \\ & \left. - \left(L^T \otimes (L^T \bar{B}_1 \tilde{Y})^T \right) \right\} \frac{\partial \bar{B}_1}{\partial (\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})}. \end{aligned} \quad (141)$$

Подставим выражение (141) в (138)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^{-1}}{\partial (\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} = & -(\bar{B}_1 \otimes \bar{B}_1)^T \left\{ I_{4n^2} - (\bar{A}^T \otimes \bar{A}^T) + \Upsilon_{2n,2n} (L^T \otimes L^T) (\bar{B}_1^T \otimes \bar{B}_1^T) - \right. \\ & - \left. (I_{4n^2} + \Upsilon_{2n,2n}) \left(\bar{A}^T \otimes (\bar{B}_1 L)^T \right) \right\}^{-1} (I_{4n^2} + \Upsilon_{2n,2n}) \left\{ \left(I_{2n} \otimes (\tilde{Y} \bar{A})^T \right) + \right. \\ & + \left. \left(I_{2n} \otimes (L^T \bar{B}_1)^T \tilde{Y} \right) \right\} \frac{\partial \bar{A}}{\partial (\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} + \left\{ \left((\tilde{Y} \bar{A})^T \otimes L^T \right) \Upsilon_{2n,l} - \right. \\ & \left. - \left(L^T \otimes (L^T \bar{B}_1 \tilde{Y})^T \right) \right\} \frac{\partial \bar{B}_1}{\partial (\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} - \\ & - \left(\left((\bar{B}_1^T \tilde{Y}) \otimes I_l \right) \Upsilon_{2n,l} + \left(I_l \otimes (\bar{B}_1^T \tilde{Y}) \right) \right) \frac{\partial \bar{B}_1}{\partial (\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})}. \end{aligned} \quad (142)$$

Аналогично, подставляя выражение (141) в (138) и (139) можно получить матричнозначные производные для выражений $\frac{\partial \Pi}{\partial (\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})}$ и $\frac{\partial L}{\partial (\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})}$.

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial (\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} = & \left(\bar{B}_0^T \otimes (\Pi \bar{B}_1^T) \right) \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial (\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} + \\ & + \left(\left(\bar{B}_1^T \tilde{Y} \bar{B}_0 \right)^T \otimes I_l \right) \frac{\partial \Pi}{\partial (\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})} + \left((\tilde{Y} \bar{B}_0) \otimes \Pi \right) \Upsilon_{2n,l} \frac{\partial \bar{B}_1}{\partial (\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})}. \end{aligned} \quad (143)$$

Таким образом, на основании выражений (139) и (143) получим матричнозначные производные

$$\frac{\partial L}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \frac{\partial L}{\partial(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})} \cdot \frac{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}_1, \hat{C})}, \quad (144)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}_1, \hat{C})} = \frac{\partial \Sigma}{\partial(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})} \cdot \frac{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}, \quad (145)$$

где производная $\frac{\partial(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}$ определяется из выражения (133). Учитывая, что

$$\frac{\partial L}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \left[\frac{\partial L_1}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} \quad \frac{\partial L_2}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} \right]^T \quad (146)$$

и матрица $M = L_1 + L_2$, получим

$$\frac{\partial M}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = [I_{nl} \quad I_{nl}] \frac{\partial L_1}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}. \quad (147)$$

Далее определим матричнозначные производные $A_\omega, C_\omega, L_\omega$ уравнения Риккати (48) по матрицам регулятора $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\omega}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} &= \frac{\partial \bar{A}}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} + \tilde{\Omega}_n \begin{bmatrix} (I_n \otimes B_1) \frac{\partial L_1}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} \\ 0_{n^2 \times s} \\ (I_n \otimes B_1) \frac{\partial L_2}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} \\ 0_{n^2 \times s} \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial B_\omega}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} &= (\Upsilon_{m_1, 2} \otimes I_n) \begin{bmatrix} (I_{m_1} \otimes B_1) \frac{\partial \Sigma}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} \\ 0_{nm_1 \times s} \end{bmatrix} + \\ &+ (\Upsilon_{m_1, 2} \otimes I_n) \begin{bmatrix} 0_{nm_1 \times s} \\ (\mathbf{D}_{21}^T \otimes I_n) \frac{\partial \hat{B}}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial C_\omega}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} &= \frac{\partial \bar{C}}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}, \end{aligned}$$

где

$$\frac{\partial \hat{B}}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \begin{bmatrix} 0_{np_2 \times 1} & 0_{np_2 \times n^2} & I_{np_2} & 0_{np_2 \times m_2 n} \end{bmatrix}.$$

Причем, производные $\frac{\partial L_1}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}$ и $\frac{\partial L_2}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}$ определены блочным разбиением (146) и выражением (144), а производные $\frac{\partial \bar{A}}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}$, $\frac{\partial \bar{C}}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}$ и $\frac{\partial \Sigma}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}$ определяются выражениями (129), (131) и (145), соответственно.

Справедливо следующее

$$\frac{\partial(A_\omega, B_\omega, C_\omega)}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_\omega}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} & \frac{\partial B_\omega}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} & \frac{\partial C_\omega}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} \end{bmatrix}^T,$$

и

$$\frac{\partial(A_\omega, B_\omega, C_\omega)}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(A_\omega, B_\omega, C_\omega)}{\partial q} & \frac{\partial(A_\omega, B_\omega, C_\omega)}{\partial(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} \end{bmatrix}. \quad (148)$$

Производные стабилизирующего решения R уравнения Риккати (48) и матриц L_ω и Σ_ω по параметру q и матрицам $A_\omega, C_\omega, L_\omega$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial(q, A_\omega, C_\omega, L_\omega)} &= \left\{ I_{4n^2} - \left(A_\omega^T \otimes A_\omega^T \right) - \Upsilon_{2n, 2n} \left(L_\omega^T B_\omega^T \otimes L_\omega^T B_\omega^T \right) \right\}^{-1} \times \\ &\quad \left[\text{col} \left(C_\omega^T C_\omega \right) + \left(I_{4n^2} + \Upsilon_{2n, 2n} \right) \text{col} \left(L_\omega^T D_\omega^T C_\omega \right), \right. \\ &\quad \left. \left(I_{4n^2} + \Upsilon_{2n, 2n} \right) \left[\left(I_{2n} \otimes \left(A_\omega^T + L_\omega^T B_\omega^T \right) R, \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(L_\omega^T \otimes \left(L_\omega^T B_\omega^T R \right) \right) + \left(\left(A_\omega^T R \right) \otimes L_\omega^T \right) \Upsilon_{2n, m_1}, \left(I_{2n} \otimes q \left(C_\omega^T + L_\omega^T D_\omega^T \right) \right) \right], \right. \\ \frac{\partial \Sigma_\omega}{\partial(q, A_\omega, C_\omega, L_\omega)} &= \left(\left(\Sigma_\omega B_\omega^T \right) \otimes \left(\Sigma_\omega B_\omega^T \right) \right) \frac{\partial R}{\partial(q, A_\omega, B_\omega, C_\omega)} + \\ &\quad \left[\begin{array}{ccc} 0_{m_1^2 \times 1} & 0_{m_1^2 \times 4n^2} & \left(I_{m_1^2} + \Upsilon_{m_1, m_1} \right) \left(\Sigma_\omega \otimes \left(\Sigma_\omega B_\omega^T R \right) \right) \\ & & 0_{m_1^2 \times 2np_1} \end{array} \right], \\ \frac{\partial L_\omega}{\partial(q, A_\omega, C_\omega, L_\omega)} &= \left(\left(L_\omega^T \Sigma_\omega^{-1} \right) \otimes I_{m_1} \right) \frac{\partial \Sigma_\omega}{\partial(q, A_\omega, C_\omega, L_\omega)} + \\ &\quad + \left(A_\omega^T \otimes \left(\Sigma_\omega B_\omega^T \right) \right) \frac{\partial R}{\partial(q, A_\omega, C_\omega, L_\omega)} + \\ &\quad + \left[\left(\left(D_\omega^T C_\omega \right)^T \otimes \Sigma_\omega \right) \left(I_{2n} \otimes \left(\Sigma_\omega B_\omega^T R \right) \right) \right. \\ &\quad \left. \Upsilon_{m_1, 2n} \left(\Sigma_\omega \otimes \left(R A_\omega \right)^T \right) \left(I_{2n} \otimes \left(q \Sigma_\omega D_\omega^T \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial L_\omega}{\partial(q, A_\omega, B_\omega, C_\omega)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_\omega}{\partial q} & \frac{\partial L_\omega}{\partial(A_\omega, B_\omega, C_\omega)} \end{bmatrix}, \quad (149)$$

$$\frac{\partial \Sigma_{\omega}}{\partial (q, A_{\omega}, B_{\omega}, C_{\omega})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Sigma_{\omega}}{\partial q} & \frac{\partial \Sigma_{\omega}}{\partial (A_{\omega}, B_{\omega}, C_{\omega})} \end{bmatrix}. \quad (150)$$

Тогда

$$\frac{\partial L_{\omega}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_{\omega}}{\partial q} & \frac{\partial L_{\omega}}{\partial (A_{\omega}, B_{\omega}, C_{\omega})} & \frac{\partial (A_{\omega}, B_{\omega}, C_{\omega})}{\partial (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \Sigma_{\omega}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Sigma_{\omega}}{\partial q} & \frac{\partial \Sigma_{\omega}}{\partial (A_{\omega}, B_{\omega}, C_{\omega})} & \frac{\partial (A_{\omega}, B_{\omega}, C_{\omega})}{\partial (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} \end{bmatrix}.$$

Причем

$$\frac{\partial L_{\omega}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_{1\omega}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} & \frac{\partial L_{2\omega}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} \end{bmatrix}^T. \quad (151)$$

Определим матричную производную $\frac{\partial P}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}$, для этого рассмотрим

уравнение Ляпунова (49). Продифференцируем его, получим

$$\frac{\partial P}{\partial \Sigma_{\omega}} = \{I_{4n^2} - (A_{\omega} + B_{\omega}L_{\omega}) \otimes (A_{\omega} + B_{\omega}L_{\omega})\}^{-1} (B_{\omega} \otimes B_{\omega}),$$

$$\frac{\partial P}{\partial L_{\omega}} = \{I_{4n^2} - (A_{\omega} + B_{\omega}L_{\omega}) \otimes (A_{\omega} + B_{\omega}L_{\omega})\}^{-1} \times$$

$$\times (I_{4n^2} + \Upsilon_{2n,2n}) \left(((A_{\omega} + B_{\omega}L_{\omega})P) \otimes B_{\omega} \right),$$

$$\frac{\partial P}{\partial (A_{\omega}, B_{\omega})} = \{I_{4n^2} - (A_{\omega} + B_{\omega}L_{\omega}) \otimes (A_{\omega} + B_{\omega}L_{\omega})\}^{-1} \times$$

$$\times (I_{4n^2} + \Upsilon_{2n,2n}) \left((((A_{\omega} + B_{\omega}L_{\omega})P)(A_{\omega} + B_{\omega}L_{\omega})PL_{\omega}^T + B_{\omega}\Sigma_{\omega}) \otimes I_{2n} \right),$$

Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \begin{bmatrix} 0_{4n^2} & \frac{\partial P}{\partial (A_{\omega}, B_{\omega})} & \frac{\partial (A_{\omega}, B_{\omega})}{\partial (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} \end{bmatrix} +$$

$$\frac{\partial P}{\partial L_{\omega}} \cdot \frac{\partial L_{\omega}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} + \frac{\partial P}{\partial \Sigma_{\omega}} \cdot \frac{\partial \Sigma_{\omega}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}.$$

Рассмотрим функционал анизотропии (50) и определим производную $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}$. Справедливо

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2} \ln \det \begin{bmatrix} m_1 \Sigma_{\omega} \\ \Phi \end{bmatrix},$$

где $\Phi = \text{tr}(L_\omega P L_\omega^T + \Sigma_\omega)$, имеем

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Sigma_\omega} \cdot \frac{\partial \Sigma_\omega}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}, \quad (152)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} &= \frac{\partial \Phi}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} + \frac{\partial \Phi}{\partial L_\omega} \cdot \frac{\partial L_\omega}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_\omega} \cdot \frac{\partial \Sigma_\omega}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial P} &= \text{coltr}(m_1)(L_\omega \otimes L_\omega), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial L_\omega} = 2 \text{coltr}(m_1)((L_\omega P) \otimes I_{m_1}), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_\omega} = \text{coltr}(m_1). \end{aligned}$$

Определим производные стабилизирующего решения уравнения Риккати (54). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{A}_{11}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} &= \frac{\partial (A + B_3 L_1 + (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_{\omega 1})}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \\ &= (I_n \otimes B_3) \frac{\partial L_{\omega 1}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} + (I_n \otimes B_1) \frac{\partial L_1}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} + \\ &+ (L_{1\omega}^T \otimes B_1) \frac{\partial \Sigma}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} + (I_n \otimes (B_1 \Sigma)) \frac{\partial L_{1\omega}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}, \\ \frac{\partial \tilde{B}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} &= \frac{\partial (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) \Sigma_\omega^{1/2}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \\ &= (I_{m_1} \otimes (B_3 + B_1 \Sigma)) \frac{\partial \Sigma_\omega^{1/2}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} + (\Sigma_\omega^{1/2} \otimes B_1) \frac{\partial \Sigma}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}, \\ \frac{\partial \tilde{C}_{21}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} &= \frac{\partial (C_3 + D_{33} L_{1\omega})}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = (I_n \otimes D_{33}) \frac{\partial L_{1\omega}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}, \\ \frac{\partial \tilde{D}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} &= (I_{m_1} \otimes D_{33}) \frac{\partial \Sigma_\omega^{1/2}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}, \\ \frac{\partial (\tilde{A}_{11}, \tilde{B}, \tilde{C}_{11}, \tilde{D})}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} &= (I_{m_1} \otimes D_{33}) \frac{\partial \Sigma_\omega^{1/2}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \\ &= \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial \tilde{A}_{11}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} & \frac{\partial \tilde{B}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} & \frac{\partial \tilde{C}_{21}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} & \frac{\partial \tilde{D}}{\partial (q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} \end{array} \right]^T, \end{aligned}$$

где матричные производные $\frac{\partial L_{\omega}}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}$, $\frac{\partial L_1}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}$ и $\frac{\partial \Sigma}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}$

определяются из выражений (151), (146) и (145), а матричная производная

$\frac{\partial \Sigma_{\omega}^{1/2}}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}$ – дифференцированием выражения $\Sigma_{\omega}^{1/2} \Sigma_{\omega}^{1/2} = \Sigma_{\omega}$:

$$\frac{\partial \Sigma_{\omega}^{1/2}}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \left\{ \left(I_{m_1} \otimes \Sigma_{\omega}^{1/2} \right) + \left(\Sigma_{\omega}^{1/2} \otimes I_{m_1} \right) \right\}^{-1} \frac{\partial \Sigma_{\omega}}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}.$$

Производные стабилизирующего решения S алгебраического уравнения Риккати (54) и соответствующих матриц Λ, Θ по матрицам $\tilde{A}_{11}, \tilde{B}, \tilde{C}_{21}, \tilde{D}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}, \tilde{C}_{21}, \tilde{D})} &= \left(I_{n^2} - \left((\tilde{A}_{11} - \Lambda \tilde{C}_{21}) \otimes \tilde{A}_{11} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \Upsilon_{n,n} \left((\Lambda \tilde{C}_{21}) \otimes (\tilde{A}_{11} - \Lambda \tilde{C}_{21}) \right) \right)^{-1} \left(I_{n^2} + \Upsilon_{n,n} \right) \times \\ &\quad \times \left[\left(\left[(\tilde{A}_{11} - \Lambda \tilde{C}_{21}) S, \tilde{B} - \Lambda D \right] \otimes I_n \right), - \left(\left[(\tilde{A}_{11} - \Lambda \tilde{C}_{21}) S, \tilde{B} - \Lambda D \right] \otimes \Lambda \right) \right], \\ \frac{\partial \Theta}{\partial(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}, \tilde{C}_{21}, \tilde{D})} &= \left(\tilde{C}_{21} \otimes \tilde{C}_{21} \right) \frac{\partial S}{\partial(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}, \tilde{C}_{21}, \tilde{D})} + \\ &\quad + \left[\begin{array}{c} 0 \\ I_{p_2^2 \times n(n+m_1)} \end{array} \left(I_{p_2^2} + \Upsilon_{p_2, p_2} \right) \left(\left[\tilde{C}_{21} S, \tilde{D} \right] \otimes I_{p_2} \right) \right], \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}, \tilde{C}_{21}, \tilde{D})} &= \left(\Theta^{-1} \otimes I_n \right) \left\{ \left(\tilde{C}_{21} \otimes \tilde{A}_{11} \right) \frac{\partial S}{\partial(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}, \tilde{C}_{21}, \tilde{D})} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\left[\tilde{C}_{21} S, \tilde{D} \right] \otimes I_n + \Upsilon_{p_2, n} \right) \left(\left[\tilde{A}_{11} S, \tilde{B} \right] \otimes I_{p_2} \right) - \left(I_{p_2} \otimes \Lambda \right) \frac{\partial \Theta}{\partial(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}, \tilde{C}_{21}, \tilde{D})} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда матричнозначная производная $\frac{\partial \Lambda}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}$ определяется в виде

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})} = \frac{\partial \Lambda}{\partial(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}, \tilde{C}_{21}, \tilde{D})} \cdot \frac{\partial(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}, \tilde{C}_{21}, \tilde{D})}{\partial(q, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})}. \quad (152)$$

Производные стабилизирующего решения T алгебраического уравнения Риккати (56) и соответствующих матриц Υ, N по матрицам (57), (58) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial(A_u, B_u, C_u, D_u)} &= \left\{ I_{4n^2} - \left(A_u^T \otimes \left(A_u^T + N^T B_u^T \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. \Upsilon_{2n, 2n} \left(\left(A_u^T + N^T B_u^T \right) \otimes \left(N^T B_u^T \right) \right) \right\}^{-1} \left(I_{4n^2} + \Upsilon_{2n, 2n} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\left[I_{2n}, N^T \right] \otimes \left(A_u^T + N^T B_u^T \right) T, \left[I_{2n}, N^T \right] \otimes \left(N^T D_u^T + C_u^T \right) \right], \\ & \frac{\partial \Upsilon}{\partial (A_u, B_u, C_u, D_u)} = \left(B_u^T \otimes B_u^T \right) \frac{\partial T}{\partial (A_u, B_u, C_u, D_u)} + \\ & \times \left(I_{m_2} + \Upsilon_{m_2, m_2} \right) \left[0_{m_2 \times 4n^2}, I_{m_2} \otimes \left(B_u^T T \right), 0_{m_2 \times 2np_1} \left(I_{m_2} \otimes D_u^T \right) \right], \\ & \frac{\partial N}{\partial (A_u, B_u, C_u, D_u)} = - \left(I_{2n} \otimes \Upsilon^{-1} \right) \left\{ \left(A_u^T \otimes B_u^T \right) \frac{\partial T}{\partial (A_u, B_u, C_u, D_u)} + \right. \\ & \left. \left[\left(I_{2n} \otimes \left(B_u^T T \right) \right), \Upsilon_{2n, m_2} \left(I_{m_2} \otimes \left(A_u^T T \right) \right), \left(I_{2n} \otimes D_u^T \right), \Upsilon_{2n, 2m} \left(I_{m_2} \otimes C_u^T \right) \right] + \right. \\ & \left. + \left(N^T \otimes I_{m_2} \right) \frac{\partial \Upsilon}{\partial (A_u, B_u, C_u, D_u)} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, приведены все необходимые матричнозначные выражения для реализации метода гомотопии.

5. Постановка задачи: математическая модель объекта управления

Рассматривается движение самолета по заданной траектории глиссады [5]. Выбранная траектория в координатах высоты и дальности представляет собой прямую линию с заданным углом наклона траектории $\theta_0 = -2.7^\circ$. В результате линеаризации исходной нелинейной системы в точке траектории с параметрами

$$x_1 = V = 71,375 \text{ [м/с]}, \quad x_2 = \theta_{\text{гл}} = -2,7^\circ, \quad x_3 = \omega_{z0} = 0 \text{ [с}^{-1}\text{]}, \quad (153)$$

$$x_4 = \vartheta_0 = 0^\circ, \quad x_5 = h_0 = 400 \text{ [м]}, \quad x_6 = T = 52540 \text{ [H]} \quad (154)$$

была получена система линейных дифференциальных уравнений.

Полученные линейные дифференциальные уравнения были переведены в область дискретного времени с шагом дискретизации $0,01 \text{ [с]}$. Дискретизованная модель объекта управления (1), имеет следующие параметры:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,9994 & -0,0008 & 0,0000 & -0,0009 & 0,0000 & 0,0009 \\ 0,0022 & 0,9938 & 0,0011 & 0,0072 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0001 & 0,0052 & 0,9842 & -0,0154 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0099 & 0,9999 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0005 & 0,0124 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,9960 \end{bmatrix}, \quad (155)$$

$$\mathbf{B}_\omega = \begin{bmatrix} 0,0000 & -0,0100 & 0,0005 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,0004 & -0,0080 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0100 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0012 & 0,0000 \\ 0,0117 & 0,0000 \\ 0,0001 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0040 \end{bmatrix}, \quad (156)$$

$$\mathbf{C}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (157)$$

$$\mathbf{D}_{z\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{z\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{y\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{yu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (158)$$

Задача системы управления состоит в поддержании постоянной воздушной скорости $V_0 = 71,375 [м/с]$ и заданной высоты полета при действии внешних возмущений — сдвига ветра.

Окончательные формулы для скоростей ветра в точках пространства с координатами (x, h) имеют вид:

$$w_x = \frac{1,182\rho\Gamma}{2\pi} \left\{ \frac{R}{\left((x-X)^2 + h_p^2 + R^2 \right)^{1/2}} \left(\frac{h_p}{r_{2p}} - \frac{h_p}{r_{1p}} \right) - \frac{R}{\left((x-X)^2 + h_m^2 + R^2 \right)^{1/2}} \left(\frac{h_m}{r_{2m}} - \frac{h_m}{r_{1m}} \right) \right\}, \quad (159)$$

$$w_y = \frac{1,576\rho\Gamma}{2\pi} \left\{ \frac{R}{\left(\frac{1}{4}(x-X)^2 + h_p^2 + R^2 \right)^{3/4}} \left(\frac{x_1}{r_{1p}^{3/4}} - \frac{x_2}{r_{2p}^{3/4}} \right) - \frac{R}{\left(\frac{1}{4}(x-X)^2 + h_m^2 + R^2 \right)^{3/4}} \left(\frac{x_1}{r_{1p}^{3/4}} - \frac{x_2}{r_{2p}^{3/4}} \right) \right\}, \quad (160)$$

где

$$x_1 = x - X - R, h_p = h - H, r_{1p} = x_1^2 + h_p^2, r_{2p} = x_2^2 + h_p^2, \quad (161)$$

$$x_2 = x - X + R, h_m = h + H, r_{1m} = x_1^2 + h_m^2, r_{2m} = x_2^2 + h_m^2, \\ r_0 = \min(r_{1p}, r_{2p}), \rho = 1 - e^{(-r_0/R_c)}. \quad (162)$$

Приведенные формулы для составляющих скорости ветра описывают течение от единичного вихря с центром в начале цилиндрической системы координат. Ниже приводятся параметры вихревой модели микропорыва ветра при посадке самолета

$$\Gamma = 41319; R_c = 122; H = 689; R = 1090. \quad (163)$$

5.1. Анализ качества управления при использовании H_∞ , H_2 и H_α регуляторов: сравнение полученных результатов

Для системы (1) с приведенными значениями матриц (155)-(158) в соответствии с методикой, изложенной выше, был проведен синтез H_α – регулятора полного порядка по выходу. Вычисление матриц реализаций H_α – субоптимального анизотропийного регулятора проводилось с использованием пакета MATLAB.

С целью сравнения качества переходных процессов в замкнутой системе с H_α – субоптимальным анизотропийным регулятором для системы (1) была также решена задача синтеза H_2 / H_∞ – оптимального регулятора с помощью встроенных функций пакета Robust Control Toolbox.

Проведем результаты сравнения переходных процессов в системе (1), (143)-(146) замкнутых соответственно H_∞ – субоптимальным, H_2 – оптимальным (полностью определенной системы) и H_α – анизотропийным регуляторами по управляемым выходам (отклонения высоты Δh и воздушной скорости ΔV) и управлениям. При моделировании на вход каждой замкнутой системы подавался одинаковый сигнал, моделирующий ветровое возмущение, действующее на самолет при его движении в зоне микропорыва ветра.

На рис. 1-6, приведены графики отклонений воздушной скорости ΔV , а также графики отклонений высоты Δh от номинальных значений для трех регуляторов. Нетрудно заметить, что по отклонениям высоты H_∞ – субоптимальный регулятор обеспечивает лучшее качество переходных процессов, чем H_2 / H_α – регуляторы. Лучшие показатели с точки зрения качества и энергетических затрат на управление демонстрирует H_α – анизотропийный регулятор.

Результаты получены для различных уровней средней анизотропии α .

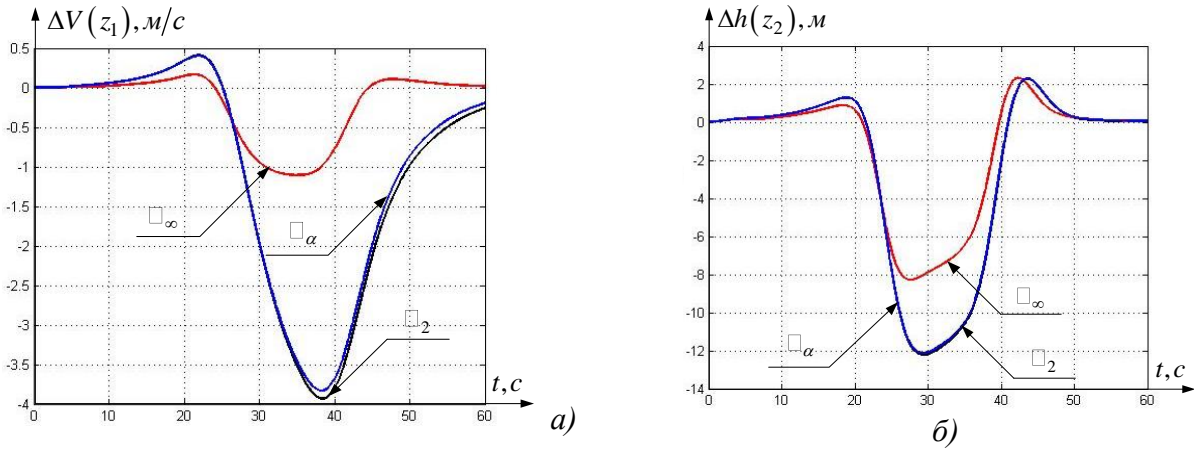


Рис. 1. Графики отклонения воздушной скорости $\Delta V(a)$ и высоты $\Delta h(b)$ в присутствии шумов измерений (при $\alpha = 0,0000007$).

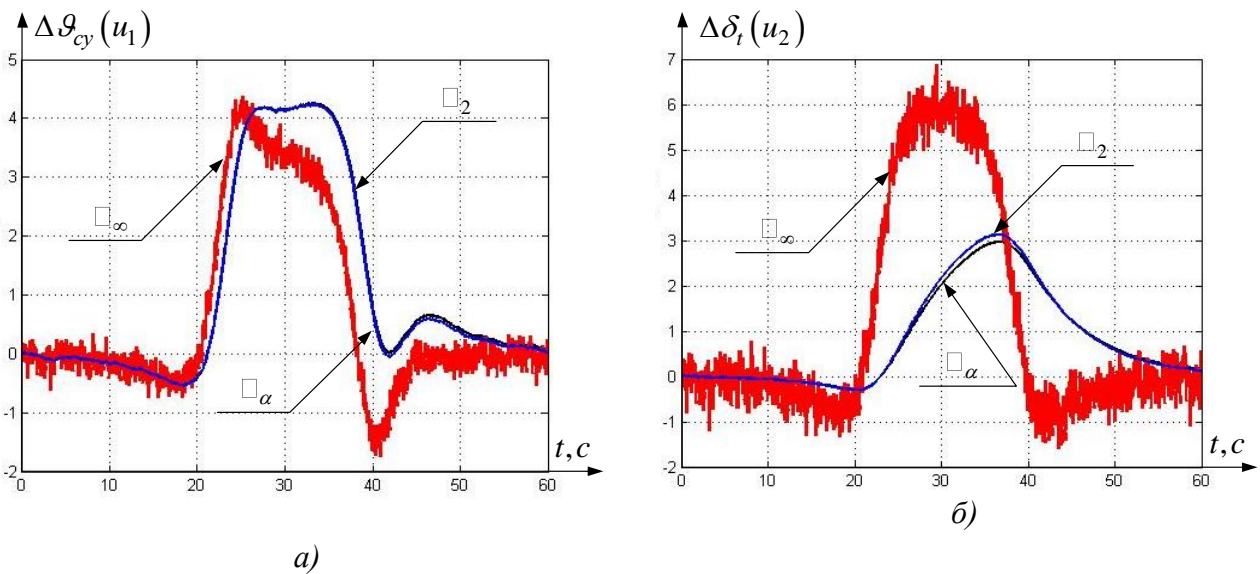


Рис. 2. Графики управлений $\Delta g_{cy}(a)$ и $\Delta \delta_t(b)$ в присутствии шумов измерений (при $\alpha = 0,0000007$).

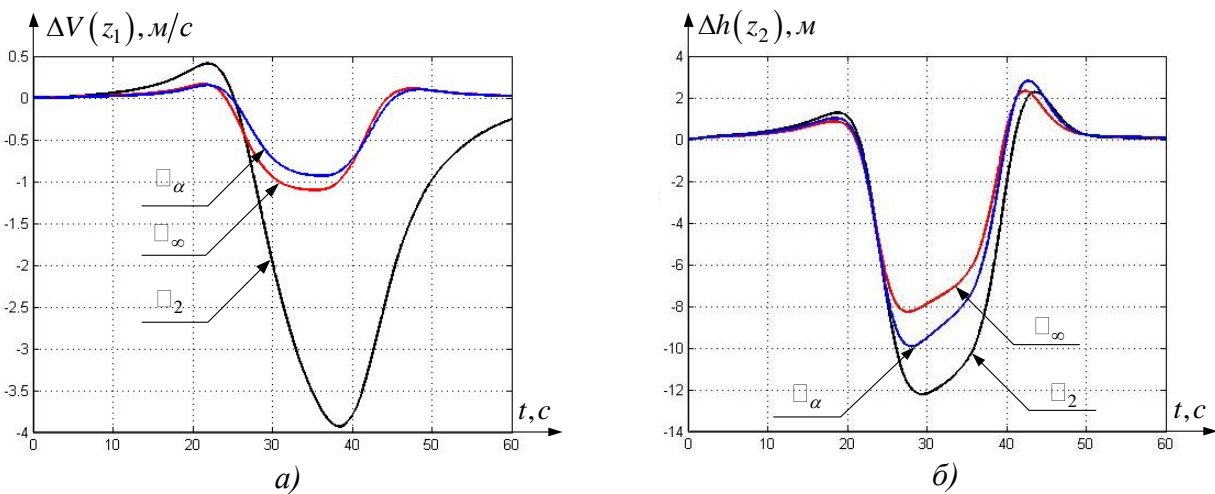


Рис. 3. Графики отклонения воздушной скорости $\Delta V(a)$ и высоты $\Delta h(b)$ в присутствии шумов измерений (при $\alpha = 0,7$).

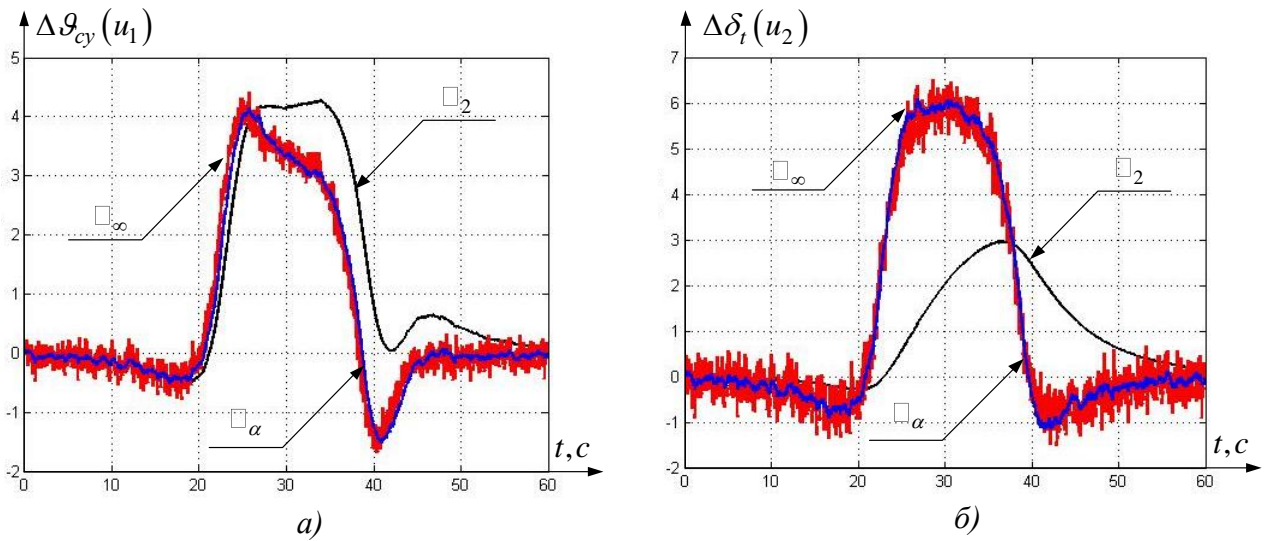


Рис. 4. Графики управлений $\Delta g_{cy}(a)$ и $\Delta \delta_t(b)$ в присутствии шумов измерений (при $\alpha = 0,7$).

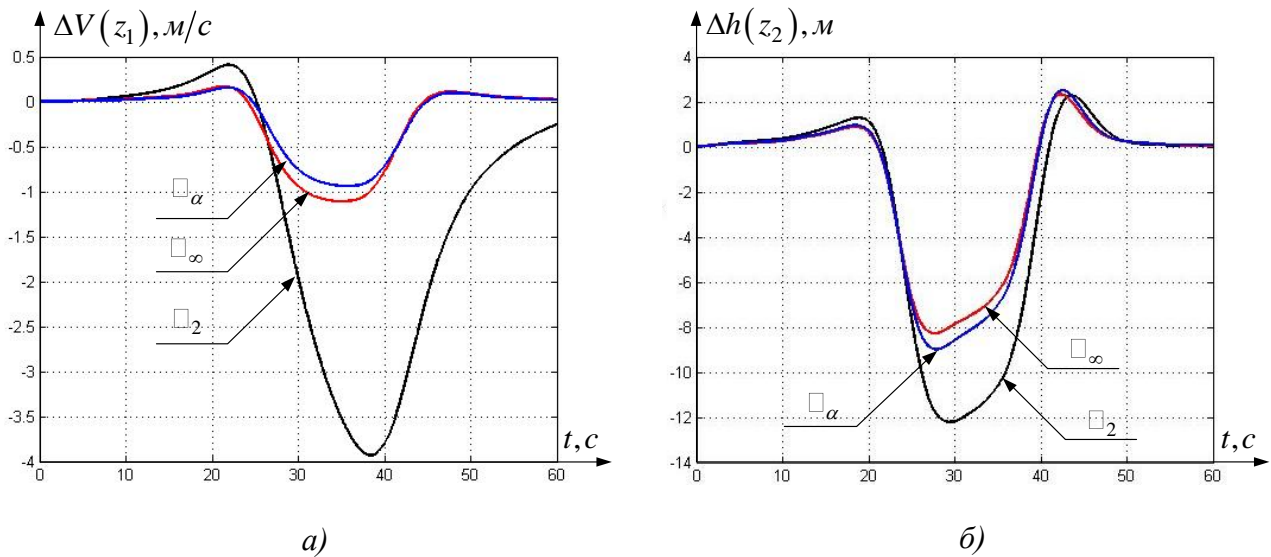


Рис. 5. Графики отклонения воздушной скорости $\Delta V(a)$ и высоты $\Delta h(b)$ в присутствии шумов измерений (при $\alpha = 100000000000$).

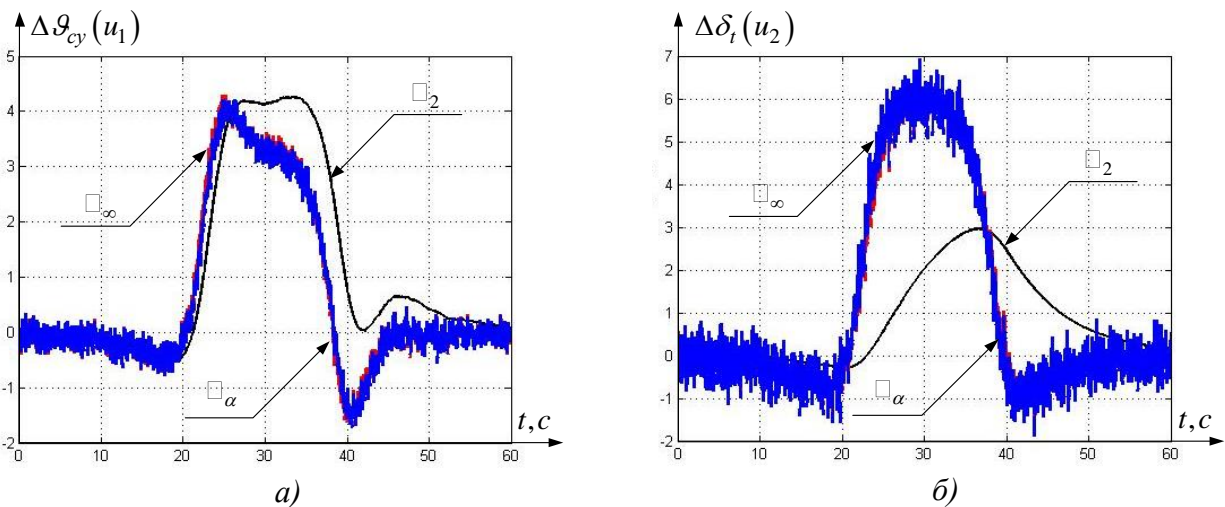


Рис. 6. Графики управлений $\Delta g_{cy}(a)$ и $\Delta \delta_t(b)$ в присутствии шумов измерений (при $\alpha = 100000000000$).

6. Выводы

В работе рассмотрена задача синтеза робастного управления по смешанному критерию в условиях действия помех, доставляющих минимум анизотропийной норме для линейной дискретной системы со структурированной неопределенностью. Введены основные понятия анизотропийной теории: анизотропия, средняя анизотропия, анизотропийная норма. Излагается синтез анизотропийного регулятора, выводятся уравнения синтеза оптимального регулятора, минимизирующего анизотропийную норму замкнутой системы. Задача синтеза анизотропийного робастного регулятора сводится к стохастической задаче H_∞ – оптимизации для объекта без неопределенности, но с одним дополнительным входом, т.е. подход заключается в «замене» объекта с неопределенностью новым – полностью определенным объектом, но содержащим один дополнительный вход с внешними возмущениями, с последующим погружением исходной задачи в более общую задачу H_∞ – субоптимизации. Другими словами, параметрическая неопределенность заменяется на внешнее возмущение, после чего решается классическая задача H_∞ – субоптимизации. Эта задача является смешанной задачей H_α/H_∞ – оптимизации, где для каждого возмущения выбирается свой критерий качества: минимизация анизотропийной нормы системы от внешнего возмущения с ограниченным уровнем средней анизотропии к управляемому выходу (H_α критерий) и минимизация H_∞ – нормы при дополнительном возмущении. Классическая задача H_2/H_∞ – оптимизации является частным случаем H_α/H_∞ – оптимизации, если внешнее возмущение имеет стохастические характеристики соответствующие «белому шуму». Аналитически задача синтеза робастного регулятора по предлагаемому критерию сведена к решению следующих уравнений: уравнения Риккати для оптимального регулятора, уравнения Риккати для наилучшего фильтра, уравнения Риккати для оптимального оценщика состояния, уравнения Риккати и Ляпунова для вычисления анизотропийной нормы замкнутой системы. Предлагается метод гомотопии для решения полученной системы нелинейных алгебраических уравнений, приводится отличие данного метода от классического метода Давыденко. Проведено математическое моделирование на примере самолета на режиме посадки в условиях сдвига ветра. На примере показано, что робастный регулятор синтезированный по смешанному критерию обладает меньшей консервативностью по отношению к H_∞ регулятору, а также меньшими энергетическими затратами на управление.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Diamond P., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems, Int. J. Control. 2001. Vol. 74, No. 1. P. 28-42.
- [2] Doyle J., Zhou K., Glover K., Bodenheimer B. Mixed H_2 and H_∞

- performance objectives II: Optimal control, IEEE Trans. Automat. Control. 1994. Vol. 39. P. 1575-1587.
- [3] Green M., Limebeer D.J.N. Linear robust control. N. J.: Prentice Hall. - 1995. -538 P.
- [4] Gu D.-W., Tsai M.C., O'Young S.D. and others State-space formulae for discrete-time H_∞ optimization Int. J. of Contr. - 1989. - Vol.49. -P. 1683-1723.
- [5] Kurdyukov A.P., Yurchenkov A.V., Kustov A.Yu. Robust Stability in Anisotropy-Based Theory with Non-Zero Mean of Input Sequence, Proceedings of the 21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2014). Groningen, The Netherlands: University of Groningen, 2014. P. 208-214.
- [6] Semyonov A.V., Vladimirov I.G., and Kurdjukov A.P. Stochastic approach to H_∞ -optimization , Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control. Florida, USA. 1994. Vol. 3. P. 2249-2250.
- [7] Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semenov A.V. State-space solution to anisotropy-based stochastic H_∞ -optimization problem , Proc. 13 IFAC World Congr. USA, 1996. Paper IFAC-3d-01.6. - Н, P. 427-432.
- [8] Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В. Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем , Доклады Академии Наук, 1995, 342, с. 583-585.
- [9] Владимиров И.Г., Даймонд Ф, Клоеден П. Анизотропный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном интервале времени , АиТ. и телемех. , - 2006, - №8, - С. 92-111.
- [10] Кицул П.И., Липцер Р.Ш. Рекуррентное оценивание случайных последовательностей, М.: Изд-во Ин-та пробл. упр., 1976. – 68 с.
- [11] Курдюков А.П., Максимов Е.А. Решение задачи стохастической оптимизации для линейной дискретной системы с неопределенностью, АиТ. – 2006. – С. 22-46.
- [12] Кустов А.Ю., Курдюков А.П., Начинкина Г.Н. Стохастическая теория анизотропного робастного управления, Научное издание. – М.: ИПУ РАН, 2012. – 128 с.
- [13] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
- [14] Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе решения систем нелинейных уравнений. Доклады АН СССР. 1953. 88 601 – 602.