ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2017
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

УДК 517.936+531.314.3

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ И КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А.Ф. Проневич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

230023, Республика Беларусь, г. Гродно, ул. Ожешко 22, e-mail: pranevich@grsu.by

Аннотация

В работе для системы уравнений в полных дифференциалах установлены критерии существования абсолютного и относительного линейных интегральных инвариантов первого порядка, приведены необходимые условия существования автономных и цилиндричных по части зависимых и независимых переменных абсолютных линейных интегральных инвариантов первого порядка, установлены аналитические связи между абсолютными линейными интегральными инвариантами и первыми интегралами системы. Для гамильтоновых систем в полных дифференциалах полученные критерии конкретизированы, а также доказано отсутствие универсальных абсолютных линейных интегральных инвариантов первого порядка, отличных от тождественного нуля, и указан аналитический вид универсального относительного линейного интегрального инварианта первого порядка.

Ключевые слова: система в полных дифференциалах, гамильтонова дифференциальная система, линейный интегральный инвариант первого порядка, первый интеграл.

Abstract

We consider a system of total differential equations. The criteria for the existence of absolute and relative linear integral invariants of the first order are obtained, the necessary conditions for the existence of autonomous and cylindrical absolute integral invariants of the first order are proved, the analytical relations between absolute linear integral invariants and first integrals are established. For Hamiltonian systems in total differentials these criteria are concretized, the absence of universal absolute linear integral invariants of the first order is proved, the analytical form of universal relative linear integral invariant of the first order is given.

Keywords: system of total differential equations, Hamiltonian differential system, first-order linear integral invariant, first integral.

Введение. Основы теории интегральных инвариантов были заложены А. Пуанкаре (H. Poincaré) в мемуаре «О проблеме трех тел и уравнениях динамики» [1] и позднее изложены им в расширенном виде в книге «Новые методы небесной механики» [2]. При этом важные конкретные примеры интегральных инвариантов были известны и ранее (например, теоремы У. Томсона (W. Thomson) и Г.Л.Ф. Гельмгольца (H.L.F. Helmholtz) из гидродинамики о сохранении циркуляции и потока вихря [3, с. 122 – 127]).

Интегральным инвариантом k-го порядка дифференциальной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \quad X_i \in C^1(D), \quad D = \mathcal{T} \times \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{1+n},$$

следуя [2, с. 13], будем называть k-кратный интеграл

$$I_k = \overbrace{\int \cdots \int}^{k}_{V^k} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} J_{i_1 \ldots i_k}(t, x_1, \ldots, x_n)\, \delta x_{i_1} \ldots \delta x_{i_k},$$

который сохраняет постоянное значение в процессе движения точек многообразия V^k вдоль интегральных кривых этой дифференциальной системы. Здесь V^k есть произвольное многообразие размерности $k \leq n$ из области $\mathcal{X}$ фазового пространства $\mathbb{R}^n$, на котором параметр t имеет постоянное значение. Интегральный инвариант называется *абсолютным*, если свойство инвариантности имеет место для любых областей интегрирования, и *относительным*, если это свойство имеет место только для замкнутых областей.

А. Пуанкаре установил связь между относительными интегральными инвариантами k-го порядка и абсолютными $(k+1)$-го порядка, а также связал теорию интегральных инвариантов с теорией первых интегралов систем уравнений в вариациях и с теорией последнего множителя Якоби. Он широко применял интегральные инварианты для изучения движения небесных тел, и в частности, для изучения устойчивости асимптотических и двояко-асимптотических движений в задаче трех тел. Наконец, А. Пуанкаре указал на интегральные инварианты как на одно из эффективных средств проверки решений задачи трех тел, получающихся в форме рядов после трудоемких вычислений.

Подводя итоги своих научных трудов А. Пуанкаре отметил [4; 5, с. 579 – 663], что гамильтоновы обыкновенные дифференциальные системы

$$\frac{dq_i}{dt} = \partial_{p_i} H(t, q, p), \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\,\partial_{q_i} H(t, q, p), \quad i = 1, \ldots, n, \quad H \in C^2(D), \quad D \subset \mathbb{R}^{2n+1},$$

обладают универсальными инвариантами (имеют место для любой гамильтоновой системы)

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i \,\delta q_i, \qquad I_2 = \iint \sum_{i=1}^{n} \delta p_i \,\delta q_i,$$

$$I_3 = \oint \oint \oint \sum_{i_1, i_2 = 1}^{n} p_{i_1} \delta q_{i_1} \delta p_{i_2} \delta q_{i_2}, \qquad I_4 = \iiiint \sum_{i_1, i_2 = 1}^{n} \delta p_{i_1} \delta q_{i_1} \delta p_{i_2} \delta q_{i_2}, \quad \ldots,$$

$$I_{2n-1} = \overbrace{\oint \dots \oint}^{2n-1} \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} p_{i_1}\,\delta q_{i_1} \dots \delta p_{i_n}\,\delta q_{i_n}, \qquad I_{2n} = \overbrace{\int \dots \int}^{2n} \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} \delta p_{i_1}\,\delta q_{i_1} \dots \delta p_{i_n}\,\delta q_{i_n},$$

которые «проливают яркий свет» на свойства этих дифференциальных систем. Это обстоятельство сразу привлекло внимание ученых к теории интегральных инвариантов. Так, бельгийский математик Т. Дондер (Th. Donder) в 1901 году доказал [6] обратную теорему теории интегральных инвариантов о том, что если дифференциальная система

$$\frac{dq_i}{dt} = X_i(t,q,p), \qquad \frac{dp_i}{dt} = Y_i(t,q,p), \quad i = 1,\dots,n,$$

имеет интегральный инвариант Пуанкаре I_1, то она является гамильтоновой.

Французский математик и астроном Ж. Шази (J. Chazy) в работе [7] методом интегральных инваринтов вслед за А. Пуанкаре еще раз анализирует проблему трех тел и приходит к новым интересным результатам (см., например, научный обзор В.М. Алексеева в статье [8]). В частности, из конечности интегральных инвариантов Ж. Шази делает вывод об устойчивости движения. В ряде работ Т. Дондера, Р. Донто (R. Dontot), Э. Вессио (E. Vessiot) были рассмотрены интегральные инварианты термодинамики, оптики, гидродинамики и общей теории относительности [9 – 13].

Дальнейшее развитие теории интегральных инвариантов связано с работами французского математика Э. Картана (E. Cartan) [14 – 17], который при изучении дифференциальных уравнений, допускающих данные преобразования, пришел к рассмотрению некоторых дифференциальных выражений, названных им интегральными формами: они характеризуются тем свойством, что могут быть выражены через первые интегралы данных дифференциальных уравнений и через их дифференциалы. Оказалось, что понятие интегральной формы не отличается существенно от понятия интегральный инвариант. Сопостовляя эти два понятия Э. Картан в работе «Лекции об интегральных инвариантах» [15, 16] с помощью метода внешних форм завершил построение теории интегральных инвариантов, основанной А. Пуанкаре. При этом общая теория интегральных инвариантов, развитая Э. Картаном, была применена им к проблеме трех тел, к задаче о распространению света в однородной среде, а также, к другим задачам механики и математической физики. Отметим также и то, что результаты, приведенные в книге [15, 16], оказали существенное влияние на геометрическую теорию дифференциальных уравнений и особенно на теорию гамильтоновых систем (см., например, [18 – 22]).

В 1947 году китайский ученый Ли Хуа-Чжун (Lee Hwa-Chung) доказал [23] единственность универсальных интегральных инвариантов Пуанкаре $I_k,\ k = 1,\dots,2n$, для гамильтоновых обыкновенных дифференциальных систем. Он показал, что всякий другой универсальный интегральный инвариант отличается постоянным множителем от одного из интегралов $I_k,\ k = 1,\dots,2n$. Так, теорема Ли Хуа-Чжуна для инварианта первого порядка формулируется следующим образом [3, с. 139 – 142; 24, с. 305 – 311].

Теорема Ли Хуа-Чжуна. *Если криволинейный интеграл второго рода*

$$I' = \oint \sum_{i=1}^{n} \big(A_i(q,p)\,\delta q_i + B_i(q,p)\,\delta p_i\big)$$

есть универсальный относительный интегральный инвариат, то

$$I' = cI_1,$$

где c — постоянная, а I_1 — интегральний инвариант Пуанкаре первого порядка.

Советский механик В.В. Добронравов распространил теорию интегральных инвариантов на неголономные системы референции [25] и нашел, используя теорему Пуанкаре о связи между последним множителем Якоби и интегральным инвариантом, последний множитель Якоби для канонических дифференциальных уравнений в неголономных координатах в виде определителя от матрицы перехода от голономных координат к неголономным. Таким образом, последний множитель определяется, собственно говоря, структурой связей между голономными и неголономными координатами.

Развивая идеи А. Пуанкере [2] об использовании интегральных инвариантов при исследовании приближенных решений дифференциальных уравнений движения, для задач небесной механики А. Вилькенсом (A. Wilkens) в 1955 году построена [26] система интегральных инвариантов теории возмущения для достижения контроля численного решения задачи. Эти исследования дали важные результаты при изучении движения астероидов и комет [26; 27, с. 98 – 99]. Применение теории интегральных инвариантов к задаче n тел, построению новых локальных первых интегралов и изучению устойчивости движений посвящены работы французского механика Л. Лоско (L. Losco) [28 – 30].

Использование интегральных инвариантов позволяет не только исследовать движение динамических систем, но и получать новые соотношения между специальными функциями, описывающими решения этих динамических систем. Так, например, Ю.П. Сурков в 1975 году изучая [31] интегральные инварианты физического маятника установил новые интегральные соотношения между эллиптическими функциями Якоби.

В 1998 году академиком В.В. Козловым в работе «Интегральные инварианты после Пуанкаре и Картана» [32] сделан обзор литературы и научных результатов по теории интегральных инвариантов, полученных после классических работ А. Пуанкаре и Э. Картана.

Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx_i = \sum_{j=1}^{m} X_{ij}(t,x)\,dt_j\,, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{0.1}$$

где функции $X_{ij}\colon D \to \mathbb{R},\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m$, непрерывно дифференцируемы на области $D = \mathcal{T} \times \mathcal{X},\ \mathcal{T} \in \mathbb{R}^m,\ \mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$, из расширенного фазового пространства $\mathbb{R}^{n+m}$.

Система (0.1) индуцирует линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathfrak{X}_j(t,x) = \partial_{t_j} + \sum_{i=1}^{n} X_{ij}(t,x)\,\partial_{x_i} \quad \forall (t,x) \in D, \quad j = 1,\ldots,m.$$

Наряду с дифференциальной системой (0.1) будем рассматривать также гамильтонову систему уравнений в полных дифференциалах [33 – 35]

$$dq_i = \sum_{j=1}^{m} \partial_{p_i} H_j(t,q,p)\, dt_j\,, \qquad dp_i = -\sum_{j=1}^{m} \partial_{q_i} H_j(t,q,p)\, dt_j\,, \quad i=1,\ldots,n, \tag{0.2}$$

с дважды непрерывно дифференцируемыми на области $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^{2n+m}$ гамильтонианами $H_j\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R}$, $j=1,\ldots,m$, которая индуцирует линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{G}_j(t,q,p) = \partial_{t_j} + \sum_{i=1}^{n} \bigl(\partial_{p_i} H_j(t,q,p)\, \partial_{q_i} - \partial_{q_i} H_j(t,q,p)\, \partial_{p_i}\bigr) \quad \forall (t,q,p) \in \widetilde{D}, \quad j=1,\ldots,m.$$

Гамильтонову систему (0.2) можно представить в виде системы (0.1), состоящей из $2n$ дифференциальных уравнений, положив, что переменные $x_i = q_i$, $x_{n+i} = p_i$, $i=1,\ldots,n$, а функции на области $\widetilde{D}$ имеют вид

$$X_{ij}\colon (t,x) \to \partial_{p_i} H_j(t,q,p), \quad X_{n+i,j}\colon (t,x) \to -\partial_{q_i} H_j(t,q,p), \quad i=1,\ldots,n, \ j=1,\ldots,m.$$

В данной работе теория интегральных инвариантов первого порядка обыкновенных дифференциальных систем распространена на системы в полных дифференциалах:

– первый параграф посвящен вопросам существования у системы уравнений в полных дифференциалах (0.1) и многомерной гамильтоновой дифференциальной системы (0.2) абсолютных линейных интегральных инвариантов первого порядка;

– во втором параграфе рассматривается задача существования у системы уравнений в полных дифференциалах (0.1) автономных и цилиндричных по части зависимых и независимых переменных абсолютных интегральных инвариантов первого порядка;

– в третьем параграфе изучена проблема наличия у системы уравнений в полных дифференциалах (0.1) и многомерной гамильтоновой дифференциальной системы (0.2) относительного линейного интегрального инварианта первого порядка.

1. *Абсолютный линейный интегральный инвариант.* Для системы уравнений в полных дифференциалах (0.1) рассмотрим задачу о существовании абсолютного линейного интегрального инварианта первого порядка

$$I = \int\limits_{L} \sum_{i=1}^{n} J_i(t,x)\, \delta x_i\,, \tag{1.1}$$

где L есть произвольная гладкая кривая из области $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ пространства $\mathbb{R}^n$, а функции $J_i\colon D' \to \mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$, непрерывно дифференцируемы на области $D' \subset D \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Критерий существования у системы (0.1) интегрального инварианта (1.1) выражает

Теорема 1.1. *Система уравнений в полных дифференциалах* (0.1) *допускает абсолютный линейный интегральный инвариант первого порядка* (1.1)*, если и только если имеет место система тождеств*

$$\mathfrak{X}_j J_i(t,x) + \sum_{k=1}^{n} J_k(t,x)\, \partial_{x_i} X_{kj}(t,x) = 0 \quad \forall (t,x) \in D', \quad j=1,\ldots,m, \quad i=1,\ldots,n. \tag{1.2}$$

Доказательство. С учетом того, что L есть произвольная гладкая кривая из области $\mathcal{X}' \subset \mathbb{R}^n$, криволинейный интеграл второго рода (1.1) будет абсолютным интегральным инвариантом системы (0.1) тогда и только тогда, когда имеет место тождество

$$d\Big(\sum_{i=1}^{n} J_i(t,x)\,\delta x_i\Big) = 0 \quad \forall (t,x)\in D'$$

или тождество

$$\sum_{i=1}^{n}\big(d\,J_i(t,x)\,\delta x_i + J_i(t,x)\,d\,(\delta x_i)\big) = 0 \quad \forall (t,x)\in D'. \qquad (1.3)$$

Так как дифференциалы в силу системы (0.1) функций $J_i\colon D'\to\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$, равны

$$d\,J_i(t,x) = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{X}_j\,J_i(t,x)\,dt_j \quad \forall (t,x)\in D', \quad i=1,\ldots,n,$$

и вариации координат являются изохронными, а значит,

$$d\,(\delta x_i) = \delta\,(dx_i),\ \ i=1,\ldots,n,$$

то тождество (1.3) запишем в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\bigg(\Big(\sum_{j=1}^{m} \mathfrak{X}_j\,J_i(t,x)\,dt_j\Big)\delta x_i + J_i(t,x)\,\delta\,(dx_i)\bigg) = 0 \quad \forall (t,x)\in D'$$

или, с учетом системы уравнений в полных дифференциалах (0.1), в виде

$$\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_j\,J_i(t,x)\,\delta x_i + J_i(t,x)\,\delta X_{ij}(t,x)\Big)dt_j = 0 \quad \forall (t,x)\in D'.$$

Отсюда, на основании того, что вариации

$$\delta X_{ij}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} X_{ij}(t,x)\,\delta x_k \quad \forall (t,x)\in D, \quad i=1,\ldots,n, \quad j=1,\ldots,m,$$

а переменные $t_j,\ j=1,\ldots,m$, независимы, получаем систему тождеств

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_j\,J_i(t,x)\,\delta x_i + J_i(t,x)\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} X_{ij}(t,x)\,\delta x_k = 0 \quad \forall (t,x)\in D', \quad j=1,\ldots,m,$$

или, перегруппировав слагаемые,

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\mathfrak{X}_j\,J_i(t,x) + \sum_{k=1}^{n} J_k(t,x)\,\partial_{x_i} X_{kj}(t,x)\Big)\,\delta x_i = 0 \quad \forall (t,x)\in D', \quad j=1,\ldots,m.$$

Так как вариации δx_i переменных $x_i,\ i=1,\ldots,n$, являются независимыми, то имеет место система тождеств (1.2), а значит, верна теорема 1.1. ☐

Для обыкновенных дифференциальных систем критерий существования абсолютного линейного интегрального инварианта доказан, например, в [36, с. 141 – 142; 37, с. 355].

Из теоремы 1.1 на случай гамильтоновой дифференциальной системы (0.2) получаем

Следствие 1.1. *Гамильтонова система уравнений в полных дифференциалах* (0.2) *допускает абсолютный линейный интегральный инвариант первого порядка*

$$I = \int\limits_L \sum_{i=1}^{n} \bigl(J_i(t,q,p)\,\delta q_i + J_{n+i}(t,q,p)\,\delta p_i\bigr), \tag{1.4}$$

где L есть произвольная гладкая кривая из области $\widetilde{\mathcal{X}}' \subset \widetilde{\mathcal{X}}$ фазового пространства $\mathbb{R}^{2n}$, а функции $J_l\colon \widetilde{D}' \to \mathbb{R},\ l = 1,\ldots,2n,$ непрерывно дифференцируемы на области $\widetilde{D}' \subset \widetilde{D}$, тогда и только тогда, когда на области $\widetilde{D}'$ имеет место система тождеств

$$\mathfrak{G}_j\, J_i(t,q,p) + \sum_{k=1}^{n} \bigl(J_k(t,q,p)\,\partial^2_{p_k q_i} H_j(t,q,p) - J_{n+k}(t,q,p)\,\partial^2_{q_k q_i} H_j(t,q,p)\bigr) = 0,$$

$$\mathfrak{G}_j\, J_{n+i}(t,q,p) + \sum_{k=1}^{n} \bigl(J_k(t,q,p)\,\partial^2_{p_k p_i} H_j(t,q,p) - J_{n+k}(t,q,p)\,\partial^2_{q_k p_i} H_j(t,q,p)\bigr) = 0,$$

$$\forall (t,q,p) \in \widetilde{D}', \quad j = 1,\ldots,m, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Теорема 1.2. *Гамильтоновы системы уравнений в полных дифференциалах не допускают универсальных абсолютных линейных интегральных инвариантов первого порядка, отличных от тождественного нуля.*

Доказательство. Если гамильтонова система уравнений в полных дифференциалах (0.2) допускает абсолютный линейный интегральный инвариант первого порядка (1.4), то на области $\widetilde{D}'$ выполняется система тождеств (следствие 1.1)

$$\partial_{t_j} J_i(t,q,p) + \sum_{k=1}^{n} \bigl(\partial_{p_k} H_j(t,q,p)\,\partial_{q_k} J_i(t,q,p) - \partial_{q_k} H_j(t,q,p)\,\partial_{p_k} J_i(t,q,p)\bigr) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \bigl(J_k(t,q,p)\,\partial^2_{p_k q_i} H_j(t,q,p) - J_{n+k}(t,q,p)\,\partial^2_{q_k q_i} H_j(t,q,p)\bigr) = 0, \ \ j = 1,\ldots,m, \quad i = 1,\ldots,n,$$

$$\partial_{t_j} J_{n+i}(t,q,p) + \sum_{k=1}^{n} \bigl(\partial_{p_k} H_j(t,q,p)\,\partial_{q_k} J_{n+i}(t,q,p) - \partial_{q_k} H_j(t,q,p)\,\partial_{p_k} J_{n+i}(t,q,p)\bigr) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \bigl(J_k(t,q,p)\,\partial^2_{p_k p_i} H_j(t,q,p) - J_{n+k}(t,q,p)\,\partial^2_{q_k p_i} H_j(t,q,p)\bigr) = 0, \ \ j = 1,\ldots,m, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Для того, чтобы абсолютный линейный интегральный инвариант первого порядка (1.4) был универсальным, полученная система тождеств должна выполняться при любом наборе гамильтонианов $H_j\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R},\ j = 1,\ldots,m,$ т.е. для любой гамильтоновой системы уравнений в полных дифференциалах (0.2). Это возможно, когда выполняются тождества

$$\partial_{t_j} J_l(t,q,p) = 0, \ j = 1,\ldots,m, \quad \partial_{q_k} J_l(t,q,p) = 0, \ \ \partial_{p_k} J_l(t,q,p) = 0, \ \ l = 1,\ldots,2n,$$

а значит,

$$J_l(t,q,p) = 0 \quad \forall (t,q,p) \in \widetilde{D}', \quad l = 1,\ldots,2n.$$

Следовательно, у гамильтоновых систем универсальных абсолютных линейных интегральных инвариантов первого порядка, отличных от тождественного нуля, не существует.

Докажем еще один критерий существования абсолютного линейного интегрального инварианта первого порядка (1.1) у системы в полных дифференциалах (0.1), основанный на существовании первого интеграла у расширенной дифференциальной системы

$$dx_i = \sum_{j=1}^{m} X_{ij}(t,x)\,dt_j\,,\ i=1,\ldots,n, \quad dy_i = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} X_{ij}(t,x)\,y_k\,dt_j\,,\ i=1,\ldots,n. \qquad (1.5)$$

Теорема 1.3. *Система в полных дифференциалах* (0.1) *допускает абсолютный линейный интегральный инвариант первого порядка* (1.1) *тогда и только тогда, когда расширенная система в полных дифференциалах* (1.5) *имеет первый интеграл*

$$F\colon (t,x,y) \to \sum_{i=1}^{n} J_i(t,x)\,y_i \quad \forall (t,x,y)\in D'\times\mathbb{R}^n. \qquad (1.6)$$

Доказательство. Функция (1.6) будет первым интегралом расширенной дифференциальной системы (1.5), если и только если имеет место система тождеств

$$\mathfrak{B}_j F(t,x,y) = 0 \quad \forall (t,x,y)\in D'\times\mathbb{R}^n, \quad j=1,\ldots,m,$$

где линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathfrak{B}_j(t,x,y) = \partial_{t_j} + \sum_{k=1}^{n} X_{kj}(t,x)\,\partial_{x_k} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} X_{kj}(t,x)\,y_i\,\partial_{y_k} \ \ \forall (t,x,y)\in D\times\mathbb{R}^n,\ j=1,\ldots,m.$$

Эта система тождеств равносильна на области $D'\times\mathbb{R}^n$ системе тождеств

$$\sum_{i=1}^{n}\Bigl(\partial_{t_j} J_i(t,x) + \sum_{k=1}^{n} X_{kj}(t,x)\,\partial_{x_k} J_i(t,x) + \sum_{k=1}^{n} J_k(t,x)\,\partial_{x_i} X_{kj}(t,x)\Bigr) y_i = 0, \quad j=1,\ldots,m.$$

Полученные тождества имеют место в том и только в том случае, когда верна система тождеств (1.2). А по теореме 1.1, система тождеств (1.2) выполняется, если и только если система (0.1) допускает абсолютный линейный интегральный инвариант (1.1). По свойству транзитивности отношения эквивалентности получаем утверждение теоремы 1.3. □

Аналог теоремы 1.3 на случай нормальных обыкновенных дифференциальных систем можно найти, например, в работах [36, с. 142; 37, с. 353 – 354].

Для полноты изложения приведем также следующий критерий (теорема 1.4) существования у системы (0.1) абсолютного интегрального инварианта первого порядка вида

$$I = \int\limits_L F(\delta x_1,\ldots,\delta x_n)\,, \qquad (1.7)$$

где L есть произвольная гладкая кривая из области $\mathcal{Y}\subset\mathbb{R}^n$, а функция $F\in C^1(\mathcal{Y})$.

Теорема 1.4. *Система в полных дифференциалах* (0.1) *допускает абсолютный интегральный инвариант* (1.7)*, если и только если расширенная система в полных дифференциалах* (1.5) *имеет автономный n-цилиндричный первый интеграл*

$$F\colon (t,x,y) \to \ F(y) \quad \forall (t,x,y) \in D \times \mathcal{Y}.$$

Доказательство. Функция F будет автономным n-цилиндричным первым интегралом расширенной системы уравнений в полных дифференциалах (1.5) тогда и только тогда, когда имеет место система тождеств

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} X_{kj}(t,x)\, y_i\, \partial_{y_k} F(y) = 0 \quad \forall (t,x,y) \in D \times \mathcal{Y}, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{1.8}$$

С другой стороны, криволинейный интеграл второго рода (1.7) будет абсолютным интегральным инвариантом первого порядка системы (0.1), если и только если

$$dF(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)\Big|_{(0.1)} = 0. \tag{1.9}$$

Дифференциал в силу системы (0.1) равен

$$dF(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)\Big|_{(0.1)} = \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i} F(y)\Big|_{\substack{y_l = \delta x_l,\\ l=1,\ldots,n}} d(\delta x_i)\Big|_{(0.1)} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i} F(y)\Big|_{\substack{y_l = \delta x_l,\\ l=1,\ldots,n}} \delta X_{ij}(t,x) dt_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \Bigg(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \partial_{y_i} F(y)\Big|_{\substack{y_l = \delta x_l,\\ l=1,\ldots,n}} \partial_{x_k} X_{ij}(t,x)\, \delta x_k \Bigg) dt_j \ =$$

$$= \ \sum_{j=1}^{m} \Bigg(\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} X_{kj}(t,x)\, y_i \partial_{y_k} F(y) \Bigg)\Bigg|_{\substack{y_l = \delta x_l,\\ l=1,\ldots,n}} dt_j.$$

Отсюда, с учетом того, что переменные $t_j,\ j = 1, \ldots, m$, независимы, получаем, что дифференциальное тождество (1.9) равносильно системе тождеств (1.8), а значит, имеет место утверждение теоремы 1.4. □

Связи между абсолютными линейными интегральными инвариантами и первыми интегралами системы (0.1) выражают следующие закономерности (теоремы 1.5 и 1.6).

Теорема 1.5. *Если непрерывно дифференцируемая функция* $F\colon D' \to \mathbb{R}$ *является первым интегралом системы* (0.1), *то криволинейный интеграл второго рода*

$$I = \int\limits_{L} \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} F(t,x)\, \delta x_i\,, \tag{1.10}$$

где L *есть произвольная гладкая кривая из области* $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ *пространства* $\mathbb{R}^n$, *будет абсолютным линейным интегральным инвариантом первого порядка системы* (0.1).

Доказательство. Так как функция $F\colon D' \to \mathbb{R}$ является первым интегралом системы (0.1), то дифференциал этой функции в силу системы (0.1) равен нулю:

$$dF(t,x)\Big|_{(0.1)} = 0 \quad \forall (t,x) \in D'.$$

На основании этого тождества, с учетом того, что вариация функции F равна

$$\delta F(t,x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} F(t,x)\, \delta x_i \quad \forall (t,x) \in D',$$

а вариации δx_i переменных $x_i,\ i = 1,\ldots,n$, являются изохронными, получаем, что

$$dI(t)\big|_{(0.1)} = d \int\limits_L \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} F(t,x)\, \delta x_i\big|_{(0.1)} = \int\limits_L d\big(\delta F(t,x)\big)\big|_{(0.1)} = \int\limits_L \delta\left(dF(t,x)\right)\big|_{(0.1)} = 0.$$

Следовательно, криволинейный интеграл второго рода (1.10) будет абсолютным линейным интегральным инвариантом первого порядка системы (0.1). $\square$

Теорема 1.6. *Пусть вполне разрешимая системы в полных дифференциалах* (0.1) *допускает абсолютный линейный интегральный инвариант первого порядка* (1.10), *построенный на основании дважды непрерывно дифференцируемой функции* $F\colon D' \to \mathbb{R}$. *Тогда первым интегралом вполне разрешимой системы* (0.1) *будет функция*

$$W\colon (t,x) \to\ F(t,x) - \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(\tau)\, d\tau_j \quad \forall (t,x) \in D', \tag{1.11}$$

где функции $\varphi_j\colon \mathcal{T}' \to \mathbb{R},\ j = 1,\ldots,m$, *такие, что*

$$\varphi_j(t) = \mathfrak{X}_j F(t,x) \quad \forall (t,x) \in D', \quad j = 1,\ldots,m, \tag{1.12}$$

а t_0 *— произвольное фиксированное число из односвязной области* $\mathcal{T}' \subset \mathbb{R}^m$.

Доказательство. Так как криволинейный интеграл второго рода (1.10) есть абсолютный линейный интегральный инвариант первого порядка системы (0.1), то функции

$$J_i\colon (t,x) \to\ \partial_{x_i} F(t,x) \quad \forall (t,x) \in D', \quad i = 1,\ldots,n,$$

такие, что имеет место (теорема 1.1) система тождеств (1.2):

$$\partial_{t_j}\left(\partial_{x_i} F(t,x)\right) + \sum_{k=1}^{n} X_{kj}(t,x)\, \partial_{x_k}\left(\partial_{x_i} F(t,x)\right) + \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} F(t,x)\, \partial_{x_i} X_{kj}(t,x) = 0$$
$$\forall (t,x) \in D', \quad j = 1,\ldots,m, \quad i = 1,\ldots,n,$$

или

$$\partial_{x_i}\left(\partial_{t_j} F(t,x) + \sum_{k=1}^{n} X_{kj}(t,x)\, \partial_{x_k} F(t,x)\right) = 0 \quad \forall (t,x) \in D', \quad j = 1,\ldots,m, \quad i = 1,\ldots,n,$$

а значит,

$$\partial_{x_i} \mathfrak{X}_j F(t,x) = 0 \quad \forall (t,x) \in D', \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m. \tag{1.13}$$

Из тождеств (1.13) следует, что функции $\mathfrak{X}_j F,\ j = 1,\ldots,m$, не зависят от переменных $x_1,\ldots,x_n$, а зависят только от переменных $t_1,\ldots,t_m$, т.е. верны тождества (1.12).

Дифференциальная 1-форма

$$\omega\colon t \to \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(t)\, dt_j \quad \forall t \in \mathcal{T}'$$

является замкнутой, если и только если имеет место система тождеств

$$\partial_{t_j} \varphi_\zeta(t) = \partial_{t_\zeta} \varphi_j(t) \quad \forall t \in \mathcal{T}', \quad j = 1, \ldots, m, \quad \zeta = 1, \ldots, m.$$

Эта система тождеств равносильна

$$\mathfrak{X}_j \varphi_\zeta(t) = \mathfrak{X}_\zeta \varphi_j(t) \quad \forall (t, x) \in D', \quad j = 1, \ldots, m, \quad \zeta = 1, \ldots, m,$$

или, с учетом (1.12), системе тождеств

$$\mathfrak{X}_j \mathfrak{X}_\zeta F(t, x) = \mathfrak{X}_\zeta \mathfrak{X}_j F(t, x) \quad \forall (t, x) \in D', \quad j = 1, \ldots, m, \quad \zeta = 1, \ldots, m,$$

а значит,

$$\big[\mathfrak{X}_j, \mathfrak{X}_\zeta\big] F(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in D', \quad j = 1, \ldots, m, \quad \zeta = 1, \ldots, m. \tag{1.14}$$

Из системы тождеств (1.14) получаем, что так как система (0.1) является вполне разрешимой на области D', то дифференциальная 1-форма ω будет замкнутой на области $\mathcal{T}'$. По теореме Пуанкаре [38, с. 14; 39, с. 222] форма ω будет точной на односвязной области $\mathcal{T}'$, а значит, криволинейный интеграл $\int \omega$ в области $\mathcal{T}'$ не зависит от пути интегрирования.

Поэтому производные Ли функции (1.11) в силу системы (0.1) на области D' равны:

$$\mathfrak{X}_j W(t, x) = \mathfrak{X}_j F(t, x) - \mathfrak{X}_j \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(\tau)\, d\tau_j = \varphi_j(t) - \partial_{t_j} \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(\tau)\, d\tau_j = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Следовательно, функция (1.11) будет первым интегралом вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах (0.1). □

2.

Автономность и цилиндричность абсолютных линейных интегральных инвариантов первого порядка. Для неавтономных нормальных обыкновенных дифференциальных систем В.И. Мироненко был разработан метод [40; 41, с. 17 – 19] нахождения автономных первых интегралов. В.Н. Горбузовым в работах [38, с. 106 – 120, 164 – 167; 42 – 45] наряду с автономными первыми интегралами была решена задача наличия автономных частных интегралов и автономных последних множителей Якоби в случаях, когда они зависят не обязательно от всех фазовых переменных. Используя эти подходы рассмотрим вопрос существования у системы уравнений в полных дифференциалах (0.1) автономных и цилиндричных по части зависимых и независимых переменных абсолютных линейных интегральных инвариантов первого порядка. При этом будем основываться на следующих определениях s-неавтономности и $(n-k)$-цилиндричности.

Абсолютный линейный интегральный инвариант первого порядка (1.1) системы (0.1) назовем *s-неавтономным*, если функции $J_i\colon D' \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n$, зависят от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и только от $s,\ 0 \le s \le m$, независимых переменных $t_1, \ldots, t_m$.

Если $s = 0$, то s-неавтономный абсолютный линейный интегральный инвариант первого порядка (1.1) системы (0.1) будем называть *автономным* абсолютным линейным интегральным инвариантом первого порядка системы (0.1).

Абсолютный линейный интегральный инвариант первого порядка (1.1) системы (0.1) назовем $(n-k)$-*цилиндричным*, если функции $J_i\colon D' \to \mathbb{R},\ i = 1,\ldots,n$, зависят от переменных $t_1,\ldots,t_m$ и только от $k,\ 0 \le k \le n$, зависимых переменных $x_1,\ldots,x_n$.

Поставим задачу существования у системы (0.1) s-неавтономного $(n-k)$-цилиндричного абсолютного линейного интегрального инварианта первого порядка

$$I = \int\limits_L \sum_{i=1}^{n} J_i({}^s t, {}^k x)\,\delta x_i\,, \tag{2.1}$$

где переменные ${}^s t = (t_1,\ldots,t_s)$ и ${}^k x = (x_1,\ldots,x_k)$, а L есть произвольная гладкая кривая из области $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ фазового пространства $\mathbb{R}^n$.

Согласно критерию существования у системы (0.1) абсолютного линейного интегрального инварианта первого порядка (теорема 1.1) криволинейный интеграл (2.1) будет интегральным инвариантом системы (0.1), если и только если выполняется система тождеств

$${}^{sk}\mathfrak{X}_j\, J_i({}^s t, {}^k x) + \sum_{\xi=1}^{n} J_\xi({}^s t, {}^k x)\,\partial_{x_i} X_{\xi j}(t,x) = 0 \ \ \forall (t,x) \in D',\ \ j = 1,\ldots,m,\ i = 1,\ldots,n, \tag{2.2}$$

где линейные дифференциальные операторы первого порядка

$${}^{sk}\mathfrak{X}_\theta(t,x) = \partial_{t_\theta} + \sum_{\zeta=1}^{k} X_{\zeta\theta}(t,x)\,\partial_{x_\zeta} \quad \forall (t,x) \in D, \quad \theta = 1,\ldots,s,$$

$${}^{sk}\mathfrak{X}_\nu(t,x) = \sum_{\zeta=1}^{k} X_{\zeta\nu}(t,x)\,\partial_{x_\zeta} \quad \forall (t,x) \in D, \quad \nu = s+1,\ldots,m.$$

Относительно функциональных совокупностей

$$M_{i\theta} = \bigl\{1, X_{1\theta}(t,x),\ldots,X_{k\theta}(t,x), \partial_{x_i} X_{1\theta}(t,x),\ldots,\partial_{x_i} X_{n\theta}(t,x)\bigr\}, \quad \theta = 1,\ldots,s, \quad i = 1,\ldots,n,$$

$$M_{i\nu} = \bigl\{X_{1\nu}(t,x),\ldots,X_{k\nu}(t,x), \partial_{x_i} X_{1\nu}(t,x),\ldots,\partial_{x_i} X_{n\nu}(t,x)\bigr\},\ \nu = s+1,\ldots,m,\ i = 1,\ldots,n,$$

система тождеств (2.2) означает: при любых фиксированных значениях независимых переменных $t_\gamma,\ \gamma = 1,\ldots,m$, и зависимых переменных $x_p,\ p = 1,\ldots,n,\ p \ne \beta$, функции каждой из совокупностей $M_{ij},\ j = 1,\ldots,m,\ i = 1,\ldots,n$, линейно зависят по зависимой переменной x_β на области D'. Это имеет место при каждом фиксированном индексе $\alpha = s+1,\ldots,m$, и при каждом фиксированном индексе $\beta = k+1,\ldots,n$.

Поэтому вронскианы по независимым переменным $t_\alpha,\ \alpha = s+1,\ldots,m$, и по зависимым переменным $x_\beta,\ \beta = k+1,\ldots,n$, каждой из совокупностей M_{ij} тождественно равны нулю на области D', т.е. выполняется система тождеств

$$\mathrm{W}_{t_\alpha}\bigl(1, {}^k X^\theta(t,x), \partial_{x_i} X^\theta(t,x)\bigr) = 0 \quad \theta = 1,\ldots,s, \quad i = 1,\ldots,n, \quad \alpha = s+1,\ldots,m,$$

$$
\begin{gathered}
\mathrm{W}_{t_\alpha}\big({}^kX^\nu(t,x),\partial_{x_i}X^\nu(t,x)\big)=0 \quad \nu=s+1,\dots,m, \quad i=1,\dots,n, \quad \alpha=s+1,\dots,m, \\
\mathrm{W}_{x_\beta}\big(1,{}^kX^\theta(t,x),\partial_{x_i}X^\theta(t,x)\big)=0 \quad \theta=1,\dots,s, \quad i=1,\dots,n, \quad \beta=k+1,\dots,n, \\
\mathrm{W}_{x_\beta}\big({}^kX^\nu(t,x),\partial_{x_i}X^\nu(t,x)\big)=0 \quad \nu=s+1,\dots,m, \quad i=1,\dots,n, \quad \beta=k+1,\dots,n,
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

где W_{t_α} и W_{x_β} — вронскианы по переменным t_α и x_β, соответственно, а функции

$$
{}^kX^j\colon (t,x)\to \big(X_{1j}(t,x),\dots,X_{kj}(t,x)\big) \quad \forall (t,x)\in D, \quad j=1,\dots,m,
$$

$$
\partial_{x_i}X^j\colon (t,x)\to \big(\partial_{x_i}X_{1j}(t,x),\dots,\partial_{x_i}X_{nj}(t,x)\big) \quad \forall (t,x)\in D, \quad j=1,\dots,m, \quad i=1,\dots,n.
$$

Тем самым доказан необходимый признак существования s-неавтономного $(n-k)$-цилиндричного абсолютного линейного интегрального инварианта первого порядка у системы уравнений в полных дифференциалах (0.1).

Теорема 2.1. *Система тождеств* (2.3) *является необходимым условием существования у системы уравнений в полных дифференциалах* (0.1) *s-неавтономного $(n-k)$-цилиндричного абсолютного линейного интегрального инварианта первого порядка* (2.1).

Следствие 2.1. *Для того, чтобы система в полных дифференциалах* (0.1) *имела автономный $(n-k)$-цилиндричный абсолютный линейный интегральный инвариант первого порядка* (2.1) *необходимо выполнение системы тождеств*

$$
\mathrm{W}_{t_\alpha}\big({}^kX^j(t,x),\partial_{x_i}X^j(t,x)\big)=0 \ \ \forall (t,x)\in D', \quad \mathrm{W}_{x_\beta}\big({}^kX^j(t,x),\partial_{x_i}X^j(t,x)\big)=0 \ \ \forall (t,x)\in D',
$$

$$
\alpha=1,\dots,m, \quad \beta=k+1,\dots,n, \quad i=1,\dots,n, \quad j=1,\dots,m.
$$

3. *Относительный линейный интегральный инвариант первого порядка.* Критерий существования относительного интегрального инварианта выражает

Теорема 3.1. *Система уравнений в полных дифференциалах* (0.1) *допускает относительный линейный интегральный инвариант первого порядка*

$$
I=\oint\limits_L \sum_{i=1}^n J_i(t,x)\,\delta x_i\,, \tag{3.1}
$$

где L есть произвольная замкнутая гладкая кривая из односвязной области $\mathcal{X}'\subset\mathcal{X}$ фазового пространства $\mathbb{R}^n$, а функции $J_i\colon D'\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$, непрерывно дифференцируемы на области $D'\subset D\subset\mathbb{R}^{n+m}$, если и только если имеет место система тождеств

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{X}_j\big(\partial_{x_\xi}J_i(t,x)\big)+\sum_{k=1}^n\big(\partial_{x_k}J_i(t,x)-\partial_{x_i}J_k(t,x)\big)\,\partial_{x_\xi}X_{kj}(t,x)= \\
=\mathfrak{X}_j\big(\partial_{x_i}J_\xi(t,x)\big)+\sum_{k=1}^n\big(\partial_{x_k}J_\xi(t,x)-\partial_{x_\xi}J_k(t,x)\big)\,\partial_{x_i}X_{kj}(t,x)
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

$$\forall (t,x) \in D', \quad j=1,\ldots,m, \quad i=1,\ldots,n, \quad \xi=1,\ldots,n.$$

Доказательство. Для относительного интегрального инварианта первого порядка (3.1) используя рассуждения аналогичные как и при доказательстве теоремы 1.1 получаем, что

$$\partial_{t_j} I(t) = \oint\limits_L \sum_{i=1}^n \Big(\mathfrak{X}_j J_i(t,x) + \sum_{k=1}^n J_k(t,x)\, \partial_{x_i} X_{kj}(t,x) \Big) \delta x_i =$$

$$= \oint\limits_L \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \Big(\sum_{k=1}^n J_k(t,x)\, X_{kj}(t,x) \Big) \delta x_i +$$

$$+ \oint\limits_L \sum_{i=1}^n \Big(\partial_{t_j} J_i(t,x) + \sum_{k=1}^n \big(\partial_{x_k} J_i(t,x) - \partial_{x_i} J_k(t,x) \big) X_{kj}(t,x) \Big) \delta x_i =$$

$$= \sum_{k=1}^n J_k(t,x)\, X_{kj}(t,x) \Big|_L + \oint\limits_L \sum_{i=1}^n \omega_{ij}(t,x)\, \delta x_i = \oint\limits_L \sum_{i=1}^n \omega_{ij}(t,x)\, \delta x_i , \quad j=1,\ldots,m,$$

где на области D' скалярные функции

$$\omega_{ij} \colon (t,x) \to \partial_{t_j} J_i(t,x) + \sum_{k=1}^n \big(\partial_{x_k} J_i(t,x) - \partial_{x_i} J_k(t,x) \big) X_{kj}(t,x), \quad i=1,\ldots,n, \ j=1,\ldots,m.$$

Криволинейные интегралы второго рода

$$\oint\limits_L \sum_{i=1}^n \omega_{ij}(t,x)\, \delta x_i , \quad j=1,\ldots,m,$$

равны нулю тогда и только тогда, когда изохронные дифференциальные 1-формы

$$\omega_j \colon (t,x) \to \sum_{i=1}^n \omega_{ij}(t,x)\, \delta x_i \quad \forall (t,x) \in D', \quad j=1,\ldots,m,$$

будут точными на односвязной области $\mathcal{X}'$. А, по теореме Пуанкаре [38, с. 14; 39, с. 222], это имеет место, если и только если выполняется система тождеств

$$\partial_{x_\xi} \omega_{ij}(t,x) = \partial_{x_i} \omega_{\xi j}(t,x) \quad \forall (t,x) \in D', \quad i,\xi=1,\ldots,n, \quad j=1,\ldots,m,$$

что равносильно системе тождеств (3.2). $\square$

Следствие 3.1. *Гамильтонова система уравнений в полных дифференциалах* (0.2) *допускает относительный линейный интегральный инвариант первого порядка*

$$I = \oint\limits_L \sum_{i=1}^n \big(J_i(t,q,p)\, \delta q_i + J_{n+i}(t,q,p)\, \delta p_i \big), \quad J_l \in C^2(\widetilde{D}'), \ l=1,\ldots,2n,$$

где L есть произвольная замкнутая гладкая кривая из односвязной области $\widetilde{\mathcal{X}}' \subset \widetilde{\mathcal{X}}$ фазового пространства $\mathbb{R}^{2n}$, тогда и только тогда, когда имеет место система *тождеств*

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\big(\partial_{q_k}J_i(t,q,p)-\partial_{q_i}J_k(t,q,p)\big)\partial_{q_\xi p_k}H_j(t,q,p)-\big(\partial_{p_k}J_i(t,q,p)-\partial_{q_i}J_{n+k}(t,q,p)\big)\partial_{q_\xi q_k}H_j(t,q,p)\Big)-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\Big(\big(\partial_{q_k}J_\xi(t,q,p)-\partial_{q_\xi}J_k(t,q,p)\big)\partial_{q_i p_k}H_j(t,q,p)-\big(\partial_{p_k}J_\xi(t,q,p)-\partial_{q_\xi}J_{n+k}(t,q,p)\big)\partial_{q_i q_k}H_j(t,q,p)\Big)=$$

$$=\mathfrak{G}_j\left(\partial_{q_i}J_\xi(t,q,p)\right)-\mathfrak{G}_j\left(\partial_{q_\xi}J_i(t,q,p)\right)\quad\forall(t,q,p)\in\widetilde{D}',\quad i=1,\ldots,n,\quad \xi=1,\ldots,n,\qquad(3.3)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\big(\partial_{q_k}J_{n+i}(t,q,p)\;-\;\partial_{p_i}J_k(t,q,p)\big)\partial_{p_\xi p_k}H_j(t,q,p)\;-$$

$$-\;\big(\partial_{p_k}J_{n+i}(t,q,p)\;-\;\partial_{p_i}J_{n+k}(t,q,p)\big)\partial_{p_\xi q_k}H_j(t,q,p)\Big)\;-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\Big(\big(\partial_{q_k}J_{n+\xi}(t,q,p)\;-\;\partial_{p_\xi}J_k(t,q,p)\big)\partial_{p_i p_k}H_j(t,q,p)\;-$$

$$-\;\big(\partial_{p_k}J_{n+\xi}(t,q,p)\;-\;\partial_{p_\xi}J_{n+k}(t,q,p)\big)\partial_{p_i q_k}H_j(t,q,p)\Big)=$$

$$=\mathfrak{G}_j\left(\partial_{p_i}J_{n+\xi}(t,q,p)\right)-\mathfrak{G}_j\left(\partial_{p_\xi}J_{n+i}(t,q,p)\right)\quad\forall(t,q,p)\in\widetilde{D}',\quad i=1,\ldots,n,\quad \xi=1,\ldots,n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\big(\partial_{q_k}J_i(t,q,p)-\partial_{q_i}J_k(t,q,p)\big)\partial_{p_\xi p_k}H_j(t,q,p)-\big(\partial_{p_k}J_i(t,q,p)-\partial_{q_i}J_{n+k}(t,q,p)\big)\partial_{p_\xi q_k}H_j(t,q,p)\Big)-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\Big(\big(\partial_{q_k}J_{n+\xi}(t,q,p)\;-\;\partial_{p_\xi}J_k(t,q,p)\big)\partial_{q_i p_k}H_j(t,q,p)\;-$$

$$-\;\big(\partial_{p_k}J_{n+\xi}(t,q,p)\;-\;\partial_{p_\xi}J_{n+k}(t,q,p)\big)\partial_{q_i q_k}H_j(t,q,p)\Big)=$$

$$=\mathfrak{G}_j\left(\partial_{q_i}J_{n+\xi}(t,q,p)\right)-\mathfrak{G}_j\left(\partial_{p_\xi}J_i(t,q,p)\right)\quad\forall(t,q,p)\in\widetilde{D}',\quad i=1,\ldots,n,\quad \xi=1,\ldots,n.$$

Теорема 3.2. *Криволинейный интеграл второго рода*

$$I_{\Pi}\;=\;\oint\limits_{L}\sum_{i=1}^{n}p_i\,\delta q_i\,,\qquad(3.4)$$

где L есть произвольная замкнутая гладкая кривая из односвязной области $\widetilde{\mathcal{X}}$ фазового пространства $\mathbb{R}^{2n}$, является универсальным относительным линейным интегральным инвариантом первого порядка гамильтоновой системы в полных дифференциалах (0.2).

Доказательство. Так как область $\widetilde{\mathcal{X}}$ является односвязной, то, по следствию 4.1, криволинейный интеграл (3.4) будет относительным интегральным инвариантом гамильтоновой системы (0.2), если и только если выполняется система тождеств (3.3) при

$$J_i\colon (t,q,p)\to\ p_i\,,\quad J_{n+i}\colon (t,q,p)\to\ 0\quad \forall (t,q,p)\in \widetilde{D},\quad i=1,\ldots,n,$$

т.е.

$$\partial_{q_\xi q_i}H_j(t,q,p)=\partial_{q_i q_\xi}H_j(t,q,p),\ \partial_{p_\xi p_i}H_j(t,q,p)=\partial_{p_i p_\xi}H_j(t,q,p),\ \partial_{p_\xi q_i}H_j(t,q,p)=\partial_{q_i p_\xi}H_j(t,q,p)$$
$$\forall (t,q,p)\in \widetilde{D},\quad j=1,\ldots,m,\quad i=1,\ldots,n,\ \ \xi=1,\ldots,n. \tag{3.5}$$

Следовательно, криволинейный интеграл (3.4) является относительным линейным интегральным инвариантом первого порядка гамильтоновой системы в полных дифференциалах (0.2). Так как тождества (3.5) верны при любом наборе гамильтонианов $H_j\colon \widetilde{D}\to\mathbb{R},\ j=1,\ldots,m$, т.е. для любой гамильтоновой системы (0.2), то интегральный инвариант (3.4) является универсальным. □

Заключение. В работе для системы уравнений в полных дифференциалах (0.1) установлены критерии существования абсолютного линейного интегрального инварианта первого порядка (теоремы 1.1 и 1.3) и относительного линейного интегрального инварианта первого порядка (теорема 3.1). Для гамильтоновых систем в полных дифференциалах (0.2) полученные критерии конкретизированы (следствия 1.1 и 3.1), а также доказано отсутствие универсальных абсолютных линейных интегральных инвариантов первого порядка, отличных от тождественного нуля (теорема 1.2), и указан аналитический вид универсального относительного линейного интегрального инварианта первого порядка (теорема 3.2). Установлены аналитические связи (теоремы 1.5 и 1.6) между абсолютными линейными интегральными инвариантами и первыми интегралами системы уравнений в полных дифференциалах (0.1). Приведены необходимые условия существования автономных и цилиндричных по части зависимых и независимых переменных абсолютных линейных интегральных инвариантов первого порядка (теорема 2.1 и следствие 2.1).

Полученные результаты могут быть применены в аналитической теории многомерных дифференциальных уравнений и в аналитической механике.

Список литературы

1. *Poincaré H.* Sur le probléme des trois corps et les équations de la dynamique. – Acta Mathematica. – 1890. – Vol. 13. – P. 3 – 270.

2. *Пуанкаре А.* Избранные труды в трех томах. Том II. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. – М.: Наука, 1972. – 358 с.

3. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, 1966. – 300 с.

4. *Poincaré H.* Analyse de ses travaux scientifiques. – Acta Mathematica. – 1921. – Vol. 38. – P. 36 – 135.

5. *Пуанкаре А.* Избранные труды в трех томах. Том III. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ Анри Пуанкаре. – М.: Наука, 1974. – 772 с.

6. *Donder Th.De.* Sur les invariants intégraux // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (France). – 1901. – Vol. 133, No. 11. – P. 129 – 137.

7. *Chazy J.* Sur l'allure finale du mouvement dans le probléme des trois corps // Journal de mathématiques pures et appliquées. – 1929. – Vol. 8. – P. 353 – 380.

8. *Алексеев В.М.* Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика // Успехи математических наук. – 1981. – Т. 36, вып. 4 (220). – С. 161 – 176.

9. *Donder Th.De.* Sur le mouvementde la chaleur dans un corps athermane // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (France). – 1913. – Vol. 157. – P. 1400 – 1403.

10. *Donder Th.De.* Sur les invariants intégraux de l'optique // Bulletin de la société mathématique de France. – 1914. – Vol. 42. – P. 91 – 95.

11. *Dontot R.* Sur les invariants intégraux et quelques points d'optique géométrique // Bulletin de la société mathématique de France. – 1914. – Vol. 42. – P. 53 – 91.

12. *Vessiot E.* Sur les invariants intégraux de la propagation par ondes // Bulletin de la société mathématique de France. – 1914. – Vol. 42. – P. 142 – 167.

13. *Vessiot E.* Sur un invariant intégral de l' Hydrodynamique et sur son application á la theorie de la relativite génerale // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (France). – 1918. – Vol. 167. – P. 1065 – 1068.

14. *Cartan E.* Sur l'intégration des systémes différentiels complétement intégrables I, II // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (France). – 1902. – Vol. 134. – P. 1415 – 1418, 1564 – 1566.

15. *Cartan E.* Leçons sur les invariants intégraux. – Paris: Librairie scientifique A.Hermann & Fils, 1922. – 210 p.

16. *Картан Э.* Интегральные инварианты. – М.–Л.: Гостехиздат, 1940. – 216 с.

17. *Акивис М.А., Розенфельд Б.А.* Эли Картан (1869 – 1951). – М.: МЦНМО, 2007. – 328 с.

18. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 432 с.

19. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 760 с.

20. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 406 с.

21. *Мозер Ю.* Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999. – 296 с.

22. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых Гамильтоновых дифференциальных уравнений. – М: Факториал, 1995. – 448 с.

23. *Hwa-Chung Lee* Invariants of Hamilton systems and applications to the theory of canonical transformations // Proc. Roy. Soc. Edinbough. – Ser. A. – 1947. – Vol. LXII. – P. 237 – 247.

24. *Айзерман М.А.* Классическая механика. – М.: Наука, 1980. – 368 с.

25. *Добронравов В.В.* Аналитическая динамика в неголономных координатах // Ученые записки МГУ. – 1948. – Вып. 122, механика. – Т. 2. – С. 77 – 182.

26. *Wilkens A.* Über die Integral – Invarianten der Störungstheorie // Sitzungsberichte der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Math.-Naturwiss. – 1955. – No. 7. – P. 123 – 173.

27. *Тяпкин А.А., Шибанов А.С.* Пуанкаре. – М.: Молодая гвардия, 1982. – 415 с.

28. *Losco L.* Sur une application des invariants intégraux au probléme des n corps // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (France). – 1973. – Vol. 277. – P. 323 – 325.

29. *Losco L.* Sur un invariant inégral du probléme des n corps: conséquence de l'homogénéité du potentiel // The stability of the solar system and of small stellar systems: Proceedings of the Symposium, Poland, Warsaw, September 5 – 8, 1973 / International Astronomical Union, International Union of Theoretical and Applied Mechanics, and Polska Akademia Nauk / Dordrecht (D. Reidel Publishing Co.), 1974. – P. 249 – 255.

30. *Losco L.* Le probléme des n corps et les invariants intégraux // Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy. – 1977. – Vol. 15, No. 4, – P. 477 – 488.

31. *Сурков Ю.П.* Интегральные инварианты физического маятника // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. Вып. 5. / Высшая школа. – М., 1975. – С. 56 – 58.

32. *Козлов В.В.* Интегральные инварианты после Пуанкаре и Картана // Библиотека «R&C Dynamics». – 1998. – Т. 1. – С. 217 – 260.

33. *Аржаных И.С.* Об интегрировании канонической системы уравнений в точных дифференциалах// Успехи математических наук.– 1953. – Т. VIII, вып. 3(55). – С. 99–104.

34. *Гайшун И.В.* Устойчивость линейных гамильтоновых систем в полных дифференциалах с периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, No. 1. – С. 33 – 40.

35. *Проневич А.Ф.* Теорема Пуассона построения стационарных интегралов автономных систем уравнений в полных дифференциалах // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – No. 3. – С. 52 – 57.

36. *Галиуллин А.С.* Аналитическая динамика. – М.: Высшая школа, 1989. – 264 с.

37. *Уиттекер Э.Т.* Аналитическая динамика. – Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. – 588 с.

38. *Горбузов В.Н.* Интегралы дифференциальных систем. – Гродно: ГрГУ, 2006. – 447 с.

39. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 392 с.

40. *Мироненко В.И.* Замечания о стационарных интегралах и стационарных преобразованиях неавтономных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, No. 5. – С. 864 – 868.

41. *Мироненко В.И.* Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений. – Минск: БГУ им. В.И.Ленина, 1981. – 104 с.

42. *Горбузов В.Н.* Автономность интегралов и последних множителей обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30, No. 6. – С. 939 – 946.

43. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф.* Автономность и цилиндричность R-дифференцируемых интегралов систем в полных дифференциалах // Дифференциальные уравнения

и процессы управления. – 2008. – No. 1. – С. 35 – 48.

44. *Gorbuzov V.N., Pranevich A.F.* $\mathbb{R}$-holomorphic solutions and $\mathbb{R}$-differentiable integrals of multidimensional differential systems // Mathematics.Dynamical Systems (0909.3245v1 [math.DS], Cornell Univ., Ithaca, New York). – 2009. – P. 1 – 29.

45. *Проневич А.Ф.* R-дифференцируемые интегралы систем в полных дифференциалах. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 104 с.