ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2014
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Управление в нелинейных системах

Метод положительно инвариантных конусов для эволюционных систем с кубическими и периодическими нелинейностями

С. А. Попов[1]
Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург

Аннотация

Рассматривается метод положительно инвариантных конусов для эволюционных уравнений с кубической нелинейностью типа Дуффинга и с периодической нелинейностью. Для уравнений первого типа доказывается существование положительно инвариантного ограниченного множества. Для уравнений второго типа доказывается ограниченность решений. Приводится лемма о нестрогой разделимости квадратичных конусов в оснащенном гильбертовом пространстве.

Abstract

We investigate the method of positively invariant cones for evolutionary variational equations with monotone nonlinearities in a rigged Hilbert space structure. A theorem of existence and uniqueness is stated for such class of systems. In the paper we consider cubic nonlinearity of Duffing-type and periodic

[1]Работа выполнена при поддержке Немецко-российского междисциплинарного научного центра (G-RISC) и Германской службы академических обменов (DAAD), Министерства Образования и Науки РФ и Санкт-Петербургского государственного университета.

nonlinearity. The existense of a positively invariant bounded set is proved for equations of the first type. The boundedness of solutions is proved for equations of the second type. A lemma on non-strict seperation of quadratic cones in a rigged Hilbert space is stated.

1 Введение

В данной работе изучается метод положительно инвариантных конусов для общих эволюционных систем. Метод положительно инвариантных конусов с использованием частотной теоремы впервые был представлен для обыкновенных дифференциальных уравнений в работах ([4], [15]). В работе ([4]) был доказан аналог кругового критерия абсолютной устойчивости нелинейных систем управления, дающий ограниченность решения нелинейных систем управления с периодической нелинейностью. Однако, в этой и последующих работах ([5], [13]) рассмотрен лишь только случай дифференциальных уравнений, заданных на конечномерных пространствах. В данной работе приводится аналог этого результата для случая эволюционных уравнений с периодической нелинейностью на оснащенном гильбертовом пространстве. В частности, сюда входят некоторые дифференциальные уравнения в частных производных с периодической нелинейностью.

Метод инвариантных конусов в данной работе рассматривается также для эволюционных систем с кубической нелинейностью типа Дуффинга, для которых доказана теорема о существовании положительно инвариантного выпуклого множества. Для этого в работе доказана обобщенная лемма о разделении конусов ([12]) для случая нестрогой разделимости. Впервые такая задача была рассмотрена для обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейностью типа Дуффинга в работе ([6]).

Переходим к краткому изложению содержания статьи. Данная работа состоит из трех глав и одного приложения. В первой главе рассмотрены вопросы существования решения для одного класса эволюционных уравнений с монотонной нелинейностью. Во второй главе изучаются эволюционные уравнения типа Дуффинга, используя при этом метод положительно инвариантных конусов. В третьей главе рассматривается ограниченность решений эволюционных систем с периодической нелинейностью. Важную роль в доказательстве ограниченности решений играет построение сетки положительно инвариантных конусов, которая получается с помощью леммы о строгой разделимости квадратичных конусов. В приложении для полноты изложения приведена частотная теорема Лихтарникова-Якубовича ([7]) для эволюционных систем.

2 Системы управления с монотонной нелинейностью

Рассмотрим оснащение вещественного гильбертова пространства Y_0, то есть тройку
$$Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}, \tag{1}$$
в которой Y_1 и Y_{-1} - также вещественные гильбертовы пространства, и вложения плотны и непрерывны. Пусть $(\cdot,\cdot)_i$ и $\|\cdot\|_i, i=1,0,-1$ - скалярное произведение и норма в Y_i соответственно. Непрерывность вложения означает, что существуют такие константы $\kappa > 0$ и $\kappa' > 0$, что
$$\|y\|_0 \le \kappa \|y\|_1\ , \quad \forall\, y \in Y_1 \tag{2}$$
и
$$\kappa' \|y\|_{-1} \le \|y\|_0\ , \quad \forall\, y \in Y_0\ . \tag{3}$$
Предположим, что оснащение (1) - (3) реализовано как показано в ([1], [18]). Также полагаем, что в гильбертовой тройке пространств (1) даны только $Y_1 \subset Y_0$, где для простоты предполагаем $\kappa = 1$. Введем на Y_0 следующую норму:
$$\|y\|_{-1} := \sup_{0\neq\eta\in Y_1} \frac{|(y,\eta)_0|}{\|\eta\|_1} \tag{4}$$
и обозначим через Y_{-1} замыкание Y_0 по этой норме. Тогда Y_{-1} может быть рассмотрено как третье пространство в оснащении (1) (см. [1, 18]). Это пространство также можно рассматривать как сопряжённое к Y_1 относительно Y_0. Продолжив по непрерывности функцию $(u,v)_0$ на $Y_{-1}\times Y_1$, получим скобку двойственности между Y_{-1} и Y_1, то есть билинейную форму $(\cdot,\cdot)_{-1,1}$ на $Y_{-1}\times Y_1$, которая совпадает с $(\cdot,\cdot)_0$ на $Y_0 \times Y_1$ и удовлетворяет неравенству
$$|(h,y)_{-1,1}| \le \|h\|_{-1}\|y\|_1\ , \quad \forall\, h \in Y_{-1},\ \forall\, y \in Y_1\ . \tag{5}$$
В соответствии с гильбертовой тройкой пространств (1) рассмотрим три линейных оператора
$$A \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1})\ , \quad B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, Y_{-1})\ , \quad C \in \mathcal{L}(Y_0, \mathbb{R})\ . \tag{6}$$

Вместе с оператором $A \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1})$ мы будем рассматривать *сопряжённый относительно* Y_0 *оператор* $A^+ \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1})$, который рассматривается в соответствии с ([1])

$$(Ay, \eta)_{-1,1} = (A^{+}\eta, y)_{-1,1} \;, \quad \forall\, y, \eta \in Y_1 \;. \tag{7}$$

Если $A^{+} = A$, то оператор A называется *самосопряжённым относительно* Y_0. Самосопряжённость относительно Y_0 может быть введена подобным образом и для линейных операторов, действующих между другими пространствами в гильбертовой тройке (1).

Построение некоторых вспомогательных эволюционных вариационных уравнений основывается на функциональных пространствах, которые мы введём в ближайшее время.

Если даны $-\infty \le T_1 < T_2 \le +\infty$ - два произвольных числа, то мы определим норму для измеримых функций по Бохнеру ([18]) в $L^2(T_1, T_2; Y_j)$, $\quad j = 1, 0, -1$, как

$$\|y\|_{2,j} := \left(\int_{T_1}^{T_2} \|y(t)\|_j^2 \; dt \right)^{1/2} \; . \tag{8}$$

Через $\mathcal{W}(T_1, T_2; Y_1, Y_{-1})$ обозначим пространство функций y таких, что $y \in L^2(T_1, T_2; Y_1)$, $\dot{y} \in L^2(T_1, T_2; Y_{-1})$ и нормой

$$\|y\|_{\mathcal{W}(T_1,T_2;Y_1,Y_{-1})} := \left(\|y\|_{2,1}^2 + \|\dot{y}\|_{2,-1}^2 \right)^{1/2} \; . \tag{9}$$

По теореме вложения ([14, 18]) можно полагать, что любая функция из $\mathcal{W}(T_1, T_2; Y_1, Y_{-1})$ принадлежит $C(T_1, T_2; Y_0)$. Мы будем использовать это предположение относительно операторов A, B, C.

Рассмотрим относительно гильбертовой тройки пространств $Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$ на интервале $J \subset \mathbb{R}$ следующее уравнение:

$$\dot{y} = Ay + B\phi(t, Cy) + f(t) \,, \tag{10}$$

где $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(J; Y_{-1})$.

Решением (10) назовём функцию $y \in L^2_{\mathrm{loc}}(J; Y_1) \cap C(J; Y_0)$ такую, что $\dot{y} \in L^2_{\mathrm{loc}}(J; Y_{-1})$ и y удовлетворяет уравнению (10) в вариационном смысле, то есть для почти всех $t \in J$

$$(\dot{y}(t) - Ay(t) - B\phi(t, Cy(t)) - f(t) \,,\; \eta - y(t))_{-1,1} = 0 \,, \quad \forall\, \eta \in Y_1 \,. \tag{11}$$

Для того чтобы получить свойства существования и единственности решения рассматриваемой задачи ([9]), введем следующее предположение.

(A) Нелинейность $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующему свойству. Семейство операторов $\{\mathbb{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}} := -A - B\phi(t, C\cdot) : Y_1 \to Y_{-1}$ такое, что для каждого $t \in \mathbb{R}$ оператор $\mathbb{A}(t)$ монотонный, семинепрерывный, такой что выполнено неравенство

$$\|\mathbb{A}(t)y\|_{-1} \leq c_1\|y\|_1 + c_2, \ \ \forall y \in Y_1, \tag{12}$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 \in \mathbb{R}$ константы.

Также предположим, что

$$(\mathbb{A}(t)y, y)_{-1,1} \geq c_3\|y\|_1^2 + c_4, \ \ \forall y \in Y_1, \tag{13}$$

где $c_3 > 0$ и $c_4 \in \mathbb{R}$ константы.

Для этого случая мы имеем следующие результаты существования и единственности ([9]).

Теорема 1 *Пусть выполнено предположение* **(A)**. *Тогда для любого* $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; Y_{-1})$ *и любого* $y_0 \in Y_0$ *существует единственное решение* $y \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; Y_1) \cap C(\mathbb{R}_+; Y_0)$ *уравнения (11) такое, что* $y(0) = y_0$. *А также для любого* $T > 0$ *верно*

$$\|y\|_{L^2(0,T;Y_1)} \leq k_1(\|f\|_{L^2(0,T;Y_{-1})}, \|y_0\|_0) \tag{14}$$

и

$$\|y\|_{C([0,T];Y_0)} \leq k_2(\|f\|_{L^2(0,T;Y_{-1})}, \|y_0\|_0)\,, \tag{15}$$

где $k_1(\cdot,\cdot)$ *и* $k_2(\cdot,\cdot)$ *- непрерывные и неубывающие по каждой переменной функции.*

3 Эволюционные системы управления Лурье с нелинейностью типа Дуффинга

Пусть $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{-1}$ - оснащение вещественного гильбертова пространства $\mathcal{V}_0$, то есть тройка гильбертовых пространств с компактным и непрерывным вложением. Обозначим через $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{V}_j}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{V}_j}$, $j = 1, 0, -1$, скалярное произведение и норму в $\mathcal{V}_j (j = 1, 0, -1)$ соответственно, и через $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{V}_{-1},\mathcal{V}_1}$ - скобку двойственности между $\mathcal{V}_{-1}$ и $\mathcal{V}_1$. Пусть $A_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_{-1})$ - линейный оператор, $b_0 \in \mathcal{V}_{-1}$ - обобщённый вектор, $c_0 \in \mathcal{V}_0$ - вектор и $d_0 \leq 0$ - число. Введем линейные операторы $C_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_0, \mathbb{R})$ и $B_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathcal{V}_{-1})$, соответствующие векторам

c_0 и b_0, которые определяются следующим образом: $C_0\nu = (c_0,\nu)_{\mathcal{V}_0}$, $\forall\,\nu\in\mathcal{V}_0$, и $B_0\xi := \xi b_0$, $\forall\xi\in\mathbb{R}$.

Предположим, что $\phi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - две скалярные функции. Рассмотрим систему непрямого управления, которая формально записывается как

$$\begin{aligned} \dot\nu &= A_0\nu + b_0[\phi(t,w)+g(t)]\,, \\ \dot w &= (c_0,\nu)_{\mathcal{V}_0} + d_0[\phi(t,w)+g(t)]\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Перепишем (16) как систему управления в стандартном виде. Для этого рассмотрим гильбертову тройку пространств $Z_1\subset Z_0\subset Z_{-1}$, в которой $Z_j := \mathcal{V}_j\times\mathbb{R}$, $j=1,0,-1$. Скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_{Z_j}$ в Z_j вводится соотношением $\big((\nu_1,w_1),(\nu_2,w_2)\big)_{Z_j} := (\nu_1,\nu_2)_{\mathcal{V}_j} + w_1w_2$, где $(\nu_1,w_1),(\nu_2,w_2)\in Z_j$, - произвольные. Скобка двойственности между Z_{-1} и Z_1, определённая для $(h,\xi)\in\mathcal{V}_{-1}\times\mathbb{R}=Z_{-1}$ и $(\nu,\varsigma)\in\mathcal{V}_1\times\mathbb{R}=Z_1$, записывается следующим образом:

$$((h,\xi),(\nu,\varsigma))_{Z_{-1},Z_1} := (h,\nu)_{\mathcal{V}_{-1},\mathcal{V}_1} + \xi\,\varsigma\,.$$

Пусть $\hat b := \begin{bmatrix} b_0 \\ d_0\end{bmatrix}\in Z_{-1}$ и $\hat c := \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\in Z_0$. Предположим, что операторы $\hat C\in\mathcal{L}(Z_0,\mathbb{R})$ и $\hat B\in\mathcal{L}(\mathbb{R},Z_{-1})$ представлены как

$$\hat C z = (\hat c, z)_{Z_0}\,,\quad \forall\, z\in Z_0\,,\qquad \hat B\xi = \xi\hat b\,,\quad \forall\,\xi\in\mathbb{R}\,,$$

и оператор $\hat A\in\mathcal{L}(Z_1,Z_{-1})$ определён как

$$\hat A := \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ C_0 & 0\end{bmatrix}\,.$$

Теперь рассмотрим систему

$$\dot z = \hat A z + \hat B\,[\phi(t,w)+g(t)]\,,\ w = \hat C z\,, \tag{17}$$

эквивалентную (16) при $z=(\nu,w)$. Если выбрать $-\infty\le T_1 < T_2\le+\infty$ произвольными, то мы определим норму для измеримых по Бохнеру функций в $L^2(T_1,T_2;Z_j)$, $j=1,0,-1$, как

$$\|z\|_{2,j} := \left(\int_{T_1}^{T_2}\|z(t)\|^2_{Z_j}dt\right)^{1/2}\,. \tag{18}$$

Пусть $\mathcal{W}(T_1,T_2;Z_1,Z_{-1})$ - пространство функций z таких, что $z\in L^2(T_1,T_2;Z_1)$ и $\dot z\in L^2(T_1,T_2;Z_{-1})$, с нормой

$$\|z\|_{\mathcal{W}(T_1,T_2;Z_1,Z_{-1})} := \left(\|z\|^2_{2,-1}+\|\dot z\|^2_{2,-1}\right)^{1/2}\,. \tag{19}$$

Введём предположения **(A1)** – **(A6)** относительно оператора $A_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_{-1})$, векторов $b_0 \in \mathcal{V}_{-1}$ и $c_0 \in \mathcal{V}_0$ и функций ϕ и g.

(A1) Для любого $T > 0$ и любой $f = (f_1, f_2) \in L^2(0, T; \mathcal{V}_{-1} \times \mathbb{R})$ задача

$$\begin{aligned} &\dot{\nu} = A_0\nu + f_1(t)\,, \\ &\dot{w} = (c_0, \nu)_{\mathcal{V}_0} + f_2(t)\;, \quad (\nu(0), w(0)) = (\nu_0, w_0) \end{aligned} \tag{20}$$

корректно поставлена, то есть для произвольных $(\nu_0, w_0) \in Z_0$, $(f_1, f_2) \in L^2(0, T; \mathcal{V}_{-1} \times \mathbb{R})$ существует единственное решение $(\nu, w) \in \mathcal{W}(0, T; Z_1, Z_{-1})$, удовлетворяющее (20) в вариационном смысле, и которое непрерывно зависит от начальных данных, то есть

$$\|(\nu, w)\|^2_{\mathcal{W}(0,T;Z_1,Z_{-1})} \leq k_3\|(\nu_0, w_0)\|^2_{\mathcal{V}_0\times\mathbb{R}} + k_4\|(f_1, f_2)\|^2_{2,-1}\;, \tag{21}$$

где $k_3 > 0$ и $k_4 > 0$ - некоторые константы.

(A2) Существует $\lambda > 0$ такое, что $A_0 + \lambda I$ - гурвицев оператор.

(A3) Для любых $T > 0$, $(\nu_0, w_0) \in Z_1 \times \mathbb{R}$, $(\tilde{\nu}_0, \tilde{w}_0) \in Z_1 \times \mathbb{R}$ и $(f_1, f_2) \in L^2(0, T; \mathcal{V}_1 \times \mathbb{R})$ решение прямой задачи (20) и решение смежной задачи

$$\begin{aligned} &\dot{\tilde{\nu}} = -(A_0^+ + \lambda\, I)\tilde{\nu} + f_1(t), \\ &\dot{\tilde{w}} = -C_0^+\tilde{w} - \lambda\,\tilde{w} + f_2(t), \end{aligned} \tag{22}$$

непрерывно по t в сильном смысле по норме пространства $\mathcal{V}_1 \times \mathbb{R}$.

(A4) Пара (A_0, b_0) - L^2 - управляема, то есть для произвольного $\nu_0 \in \mathcal{V}_0$ существует управление $\xi\,(\cdot) \in L^2(0, \infty; \mathbb{R})$ такое, что задача

$$\dot{\nu} = A_0\nu + b_0\xi\;, \quad \nu(0) = \nu_0$$

корректно поставлена в вариационном смысле на $(0, \infty)$.

Введём передаточную функцию для тройки (A_0^c, b_0^c, c_0^c) как

$$\chi(p) = \left(c_0^c, (A_0^c - pI^c)^{-1}\, b_0^c\right)_{Z_0}\;, \quad p \in \rho(A_0^c).$$

(A5) Предположим, что $\lambda > 0$ и $\kappa_1 > 0$ - параметры, где λ из предположения **(A2)**. Тогда:

$$\lambda d_0 + \mathrm{Re}\,(-i\omega - \lambda)\chi(i\omega - \lambda) + \kappa_1\,|\,\chi(i\omega - \lambda) - d_0\,|^2 \leq 0\;, \quad \forall\,\omega \geq 0\,. \tag{23}$$

(A6) Функция $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и $\phi(t, 0) = 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ принадлежит $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\,; \mathbb{R})$. Существуют числа $\kappa_1 > 0$ (из **(A5)**), $0 \leq \kappa_2 < \kappa_3 < +\infty$, $\beta_1 < \beta_2$ и $\zeta_2 < \zeta_1$ такие, что a)

$$\beta_1 < g(t) < \beta_2\,, \tag{24}$$

для почти всех t из произвольного компактного временного интервала;

b)

$$(\phi(t,w) + \beta_i)(w - \zeta_i) \le \kappa_1 (w - \zeta_i)^2,\ i = 1, 2, \\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, w \in [\zeta_2, \zeta_1]\,; \tag{25}$$

c)

$$\kappa_2 (w_1 - w_2)^2 \le (\phi(t, w_1) - \phi(t, w_2))(w_1 - w_2) \le \kappa_3 (w_1 - w_2)^2, \\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, w_1, w_2 \in [\zeta_2, \zeta_1]\,. \tag{26}$$

Замечание 1 *Нелинейность, обладающая свойствами b) и c) называется нелинейностью типа Дуффинга. Для конечномерного случая уравнение с нелинейностью типа Дуффинга было рассмотрено в работе ([2]).*

Далее будем предполагать, что решение уравнения (17) для любого $T > 0$ принадлежит пространству $\mathcal{W}(0, T; Z_1, Z_{-1})$. Тогда мы покажем существование решений с начальными данными из определённого множества. Для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты.

Предположим, что $Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$ - гильбертово оснащение пространства $Y_0, \|\cdot\|_j, (\cdot,\cdot)_j$ - норма и скалярное произведение соответственно, и $(\cdot,\cdot)_{-1,1}$ - скобка двойственности между Y_{-1} и Y_1. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{y} = Ay\,, \quad w = (c, y)_0\,, \tag{27}$$

где $A \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1})$ и $c \in Y_0$.

Предположим, что для каждого $y_0 \in Y_0$ существует единственное решение $y(\cdot, y_0)$ системы (27) в $\mathcal{W}(0, \infty; Y_1, Y_{-1})$, удовлетворяющее условию $y(0, y_0) = y_0$. В дальнейшем нам понадобится это предположение.

(A7) Пространство Y_0 можно разложить $Y_0 = Y_0^+ \oplus Y_0^-$ так, что верно следующее:

a) Для каждого $y_0 \in Y_0^+$ мы имеем $\lim\limits_{t\to\infty} y(t, y_0) = 0$, и для каждого $y_0 \in Y_0^-$ существует единственное решение $y_-(t) = y(t, y_0)$ системы (27), определённое на $(-\infty, 0)$, такое, что $\lim\limits_{t\to -\infty} y_-(t) = 0$ и $(c, y(t, y_0))_0 = 0$, $\forall\, t \ge 0$ тогда и только тогда, когда $y_0 = 0$.

b) Для каждого $y_0 \in Y_0^+$ равенство $(c, y(t, y_0))_0 = 0, \forall\, t \leq 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $y_0 = 0$, и для каждого $y_0 \in Y_0^-$ равенство $(c, y(t, y_0))_0 = 0, \forall t \leq 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $y_0 = 0$.

Далее, запись $L \geq 0$ для линейного оператора $L \in \mathcal{L}(Z)$, где Z - гильбертово пространство, означает, что L - *положительный*, то есть, $(z, Lz)_Z > 0,\ \forall\, z \in Z \backslash \{0\}$; $\quad L \leq 0$ означает, что $-L$ - положительный.

Следующая лемма связана с нестрогим разделением квадратичных конусов с помощью специальных функционалов. Для дальнейшего изложения введем некоторые определения. Предположим, что H - гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. *Конусом* в H назовём множество $\mathcal{C} \subset H$, $\mathcal{C} \neq \varnothing$ такое, что если $u \in \mathcal{C}$, $\zeta \in \mathbb{R}$, то $\zeta u \in \mathcal{C}$.

Предположим, что $P \in \mathcal{L}(H), P = P^*$. Тогда множество $\mathcal{C} := \{u \in H \,|\, (u, Pu) \leq 0\}$ - конус, который мы будем называть *квадратичным.*

Предположим, что существует разложение $H = H^+ \oplus H^-$ такое, что $P_{|H^+} \geq 0$ и $P_{|H^-} \leq 0$. Тогда квадратичный конус $\{u \in H \,|\, (u, Pu) \leq 0\}$ назовём *квадратичным конусом размерности* $\dim H^-$.

Лемма 1 *Предположим что:*

1. $Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$ *- тройка оснащенных гильбертовых пространств со скалярными произведениями* $(\cdot, \cdot)_i$, *соответствующими нормами* $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 0, -1$ *и скобкой двойственности* $(\cdot, \cdot)_{-1,1}$ *между* Y_{-1} *и* Y_1;

2. *существует оператор* $P \in \mathcal{L}(Y_{-1}, Y_0) \cap \mathcal{L}(Y_0, Y_1)$, *самосопряжённый и положительный в* Y_0 *такой, что*

$$\mathcal{C} := \{y \in Y_0 \,|\, (y, Py)_0 \leq 0\} \quad \text{- одномерный квадратичный конус;}$$

3. *существуют векторы* $r \in Y_0$, $h \in Y_{-1}$ *и* $b \in Y_{-1}$, *такие что* $Ph = r$, $(h, r)_{-1,1} = 0$, $Pb = h$, $(h, b) < 0$, $(r, b) < 0$, *а также* $2(h, Py)_{-1,1} = (r, y)_0$ $\forall y \in Y_0$.

Тогда справедливы включения

$$\{y \in Y_0 | (y, Py)_0 < 0, (r, y)_0 < 0\} = \{y \in Y_0 | (y, Py)_0 < 0, (h, y)_{-1} < 0\}, \quad (28)$$

$$\{y \in Y_0 | (y, Py)_0 \leq 0, (h, y)_{-1} \leq 0\} \subset \{y \in Y_0 | (y, Py)_0 \leq 0, (r, y)_0 \leq 0\}, \quad (29)$$

$$\{y \in Y_0 | (y, Py)_0 \leq 0, (r, y)_0 < 0\} \subset \{y \in Y_0 | (y, Py)_0 \leq 0, (h, y)_{-1} \leq 0\}, \quad (30)$$

$$\{y \in Y_0 | (y, Py)_0 \leq 0, (h, y)_{-1} \leq 0, (r, y)_0 = 0\} = \{y \in Y_0 | Py = \mu r, \mu \in [0, +\infty)\}. \quad (31)$$

Доказательство. Обозначим через y_0 такой вектор из Y_0, что $Py_0 = h$, а через $y_1 \in Y_{-1}$ такой вектор, что $Py_1 = r$. Из условия леммы $(r, y_0)_0 = (h, y_1)_{-1} < 0$, $(h, y_0)_{-1} = (y_0, Py_0)_0 < 0$, $(r, y_1)_{-1} = (y_1, Py_1)_{-1} = 0$. Как показано в ([12]), при условиях леммы выполнено

$$\{y \in Y_0 | (y, Py)_0 < 0\} \cap \{y \in Y_0 | (r, y)_0 = 0\} = \emptyset, \tag{32}$$

$$\{y \in Y_0 | (y, Py)_0 \leq 0\} \cap \{y \in Y_0 | (h, y)_{-1} = 0\} = \{0\}. \tag{33}$$

Докажем (28). Пусть для некоторого вектора $y \in Y_0$ выполнено $(y, Py)_0 < 0$, $(r, y)_0 < 0$, но $(h, y)_{-1} \geq 0$. Тогда из (33) $(h, y)_{-1} \neq 0$. Определим вектор $z \in Y_0$ по формуле $z = y + \alpha_1 y_0$, где $\alpha_1 = -(h, y)_0/(h, y_0)_{-1} > 0$. Из равенства $(h, z)_{-1} = 0$ и (33) следует $(z, Pz)_0 \geq 0$, но $(z, Pz)_0 = (y, Py)_0 + \alpha_1^2 (y_0, Py_0)_0 + 2\alpha_1 (y_0, Py)_0$, где $(y, Py)_0 < 0$, $(y_0, Py_0)_0 = 0$, поэтому $(y, Py_0)_0 > 0$. Определим вектор $z_1 \in Y_0$ по формуле $z_1 = y_1 - \beta_1 y_0$, где $\beta_1 = (r, y)_0/(r, y_0)_0 > 0$. Из равенства $(r, z_1)_0 = 0$ и (32) вытекает, что $(z_1, Pz_1)_0 \geq 0$, откуда $(y, Py_0)_0 < 0$, что противоречит с выведенным ранее неравенством $(y, Py_0)_0 > 0$. Обратное включение в (28), а также включения в (29) и (30) доказываются аналогично.

Для доказательства (31) достаточно показать, что при сделанных предположениях

$$\{y \in Y_0 | (y, Py)_0 \leq 0, (r, y)_0 = 0\} = \{y \in Y_0 | y = \mu y_1, \mu \in (-\infty, +\infty)\}. \tag{34}$$

Вектор вида μy_1, очевидно, принадлежит множеству в левой части (34), так как $(y_1, Py_1) = (r, y_1)_{-1} = 0$. Допустим, что существует вектор $y \in Y_{-1}$, линейно независимый с y_1, такой, что $(y, Py)_{-1} \leq 0$ и $(r, y)_{-1} = 0$. Из (32) $(h, y) \neq 0$. Определим вектор $z_2 = y_1 - \alpha_2 y$, где $\alpha_2 = (h, y_1)/(h, y)_{-1}$. Так как y и y_1 линейно независимы, то $z_2 \neq 0$. Очевидно, $(h, z_2) = 0$, откуда $(z_2, Pz_2) > 0$. В то же время $(z_2, Pz_2) = (y_1, Py_1) + \alpha_2^2 (y, Py)_0 - 2\alpha_2 (y_1, Py_1)_{-1} < 0$. Полученное противоречие доказывает (34). $\square$

Замечание 2 *Данная лемма является обобщением аналогичной леммы из ([6]) на случай бесконечномерных пространств.*

Приведем формулировку леммы из [2], которая будет использоваться при доказательстве теоремы 2.

Лемма 2 *Предположим, что* $t_0 \geq 0$, $k(\cdot), R(\cdot), V_i(\cdot), U_i(\cdot) : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, *- непрерывные функции и* $\varkappa_1 > \varkappa_2$ *- числа такие, что выполнены следующие условия:*

1) В некоторой окрестности множества

$$\mathbb{T}_1 := \{t \in (t_0, \infty) \,|\, R(t) = \varkappa_1 \ , \ V_i(t) \le 0 \ , \ i = 1, 2 \ , \ U_1(t) \le 0\}$$

функция R не возрастает, и в некоторой окрестности множества

$$\mathbb{T}_2 := \{t \in (t_0, \infty) \,|\, R(t) = \varkappa_2 \ , \ V_i(t) \le 0 \ , \ i = 1, 2 \ , \ U_2(t) \ge 0\}$$

функция R не убывает.

2) В некоторой окрестности множества

$$\mathbb{T}_3 := \{t \in (t_0, \infty) \,|\, \varkappa_2 \le R(t) \le \varkappa_1 \ , \ V_i(t) \le 0 \ , \ i = 1, 2 \ , \ U_1(t) = 0\}$$

функция U_1 не возрастает, и в некоторой окрестности множества

$$\mathbb{T}_4 := \{t \in (t_0, \infty) \,|\, \varkappa_2 \le R(t) \le \varkappa_1 \ , \ V_i(t) \le 0 \ , \ i = 1, 2 \ , \ U_2(t) = 0\}$$

функция U_2 не убывает.

3) На множестве $\{t \in (t_0, \infty) \,|\, \varkappa_2 \le R(t) \le \varkappa_1\}$ функция $k(\cdot)$ неотрицательна, и функция $t \mapsto V_i(t) + \int_0^t k(\tau)V_i(\tau)d\tau$, $i = 1, 2$, не возрастает.

4) $R(t_0) \in [\varkappa_2, \varkappa_1]$, $V_i(t_0) \le 0$, $\quad i = 1, 2$, $U_1(t_0) \le 0$, $U_2(t_0) \ge 0$.

Тогда для любого $t \ge t_0$ верно, что $R(t) \in [\varkappa_2, \varkappa_1]$, $V_i(t) \le 0$, $\quad i = 1, 2$, $U_1(t) \le 0$, $U_2(t) \ge 0$.

Следующая теорема дает существование положительно инвариантного выпуклого множества для системы (16). В работе ([12]) была доказана аналогичная теорема для случая строгого разделения конусов.

Теорема 2 *Предположим, что для системы (16) выполнены* **(A1)** – **(A7)**. *Тогда существует замкнутое, положительно инвариантное и выпуклое множество $\mathcal{G}$ такое, что*

$$\{(\nu, w) \in \mathcal{V}_1 \times \mathbb{R} \,|\, \nu = 0, w \in [\zeta_2, \zeta_1]\} \subset \mathcal{G} \subset \{(\nu, w) \in \mathcal{V}_1 \times \mathbb{R} \,|\, w \in [\zeta_2, \zeta_1]\} \ . \tag{35}$$

Доказательство аналгоично доказательству из ([12]) с применением леммы 1 о нестрогом разделении конусов.

Доказательство. Рассмотрим систему (16) в форме (17). По теореме Лихтарникова-Якубовича (Приложение А) предположения **(A1)**, **(A3)**,

(A4), **(A6)** гарантируют существование линейного непрерывного оператора $\hat{P} \in \mathcal{L}(Z_{-1}, Z_0) \cap \mathcal{L}(Z_0, Z_1)$, который является самосопряжённым в Z_0, такого, что следующая квадратичная форма в $Z_1 \times \mathbb{R}$:

$$W(z,\xi) := 2\,((\hat{A}+\lambda I)z + \hat{b}\,\xi, \hat{P}z)_{Z_{-1},Z_1} + (\kappa_1(\hat{c},z)_{Z_0} - \xi)\,(\hat{c},z)_{Z_0},$$

удовлетворяет неравенству

$$W(z,\xi) \le 0\,, \quad \forall\, z \in Z_1, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}\,. \tag{36}$$

Подставив $\xi = 0$ в (36), получаем следующее неравенство

$$2\,((\hat{A}+\lambda I)z, \hat{P}z)_{Z_{-1},Z_1} \le -\kappa_1(\hat{c},z)^2_{Z_0}\,, \quad \forall\, z \in Z_1\,. \tag{37}$$

В силу **(A2)** существует разложение $Z_0 = Z_0^+ \oplus Z_0^-$ при $\dim Z_0^- = 1$ такое, что выполняется **(A7)** для $Y_j = Z_j, j = 1, 0, -1,\ A = \hat{A} + \lambda I$ и $c = \hat{c}$. Из (37) следует, что для любого $z_0 \in Z_0$ решение $z(\cdot)$ системы

$$\dot{z} = (\hat{A}+\lambda I)z\,, \quad z(0) = z_0 \tag{38}$$

удовлетворяет неравенству

$$V(y(t,y_0)) - V(y(s,y_0)) \le -\int_s^t (c, y(\tau,y_0))_0^2\ d\tau\,. \tag{39}$$

при $V(z) = (z, \hat{P}z)_{Z_0}$ и $c = \hat{c}$. Тогда по лемме 4 из ([12]) выполнено

$$\hat{P}_{|Z_0^+} \ge 0 \qquad \text{и} \qquad \hat{P}_{|Z_0^-} \le 0\,. \tag{40}$$

Таким образом, мы показали, что множество $\hat{\mathcal{C}} := \{z \in Z_0 \,|\, (z, \hat{P}z)_{Z_0} \le 0\}$ является одномерным квадратичным конусом. Также из (36) следует, что

$$2\,(\hat{b}, \hat{P}z)_{Z_{-1},Z_1} = (\hat{c}, z)_{Z_0}\,, \quad \forall\, z \in Z_1\,. \tag{41}$$

Заметим, что в скобке двойственности $(\cdot,\cdot)_{Z_{-1},Z_1}$ мы имеем

$$(\hat{b}, \hat{c})_{Z_{-1},Z_1} = d_0 \le 0\,. \tag{42}$$

Вариант строгого неравенства в (42) относится к случаю строго разделения конусов, который рассмотрен в работе ([12]). Рассморим случай $(\hat{b}, \hat{c})_{Z_{-1},Z_1} = 0$.

При выполнении (40) - (42) все гипотезы леммы 1 выполнены, поэтому справедливы включения (28) - (31), (33), где вектор $r = \hat{c}$ и обобщённый вектор $h = \hat{b}$. Выберем точки $z_1 = (0, \zeta_1) \in \mathcal{V}_1 \times \mathbb{R}$ и $z_2 := (0, \zeta_2) \in \mathcal{V}_1 \times \mathbb{R}$. Очевидно, что

$$(\hat{c}, z_1)_{Z_0} = \zeta_1\,,\ \hat{A}z_1 = 0\,,\ (\hat{c}, z_2)_{Z_0} = \zeta_2\,,\ \hat{A}z_2 = 0\,. \tag{43}$$

Определим вдоль произвольного решения $z(\cdot)$ уравнения (17) функции

$$\begin{aligned}&\hat{V}_i(t) := (z(t) - z_i\,,\ \hat{P}(z(t) - z_i))_{Z_0}\,,\\ &\hat{U}_i(t) := (\hat{c}, z(t) - z_i)_{Z_0}\,,\ i = 1, 2\,,\end{aligned}$$

и введём множество

$$\mathcal{G} := \{z \in Z_1 \,|\, (z - z_i, \hat{P}(z - z_i))_{Z_0} \le 0\,,\ i = 1, 2\,,\ (\hat{c}, z)_{Z_0} \in [\zeta_2, \zeta_1]\}\,. \tag{44}$$

Так как выполнены (40) и (33), то множество $\mathcal{G}$ выпукло и ограничено. Покажем, что $\mathcal{G}$ положительно инвариантно для решений уравнения (17). Для этого мы применим лемму 4 из ([12]) для временного интервала $[t_0, \infty)$, функций $k(t) \equiv 2\lambda$, $V_i(t) = \hat{V}_i(t)$, $U_i(t) = \hat{U}_i(t)$ и чисел $\varkappa_1 = w_1$, $\varkappa_2 = w_2$. Из (36) следует, что для $i = 1, 2,\ t_0 \le s \le t$, вдоль решения $z(t)$ и $w(t) = (\hat{c}, z(t))_{Z_0}$

$$\begin{aligned}&\hat{V}_i(\tau)\,|_s^t + 2\,\lambda \int_s^t \hat{V}_i(\tau) d\tau\\ &\le -\int_s^t [\kappa_1(w(\tau) - \zeta_i) - \ (\phi(\tau, w(\tau)) + \beta_i)]\,(w(\tau) - \zeta_i) d\tau\\ &+ \int_s^t (g(\tau) - \beta_i)(w(\tau) - \zeta_i) d\tau\ .\end{aligned} \tag{45}$$

Воспользовавшись **(A6)**, мы заключаем, что для $i = 1, 2$ и всех $t \ge s \ge t_0$ таких, что

$$\begin{aligned}&w(\tau) \in [\zeta_2, \zeta_1], \tau \in [s, t],\\ &\int_s^t [\kappa_1(w(\tau) - \zeta_i) - (\phi(\tau, w(\tau)) + \beta_i)](w(\tau) - \zeta_i)\, d\tau \ge 0\\ \text{и}\quad &\int_s^t (g(\tau) - \beta_i)\,(w(\tau) - \zeta_i)\, d\tau \le 0\ .\end{aligned} \tag{46}$$

Таким образом, из (45) и (46) следует, что для $i = 1, 2$ и $t \ge s \ge t_0$ мы имеем

$$\hat{V}_i(\tau)\,|_s^t + 2\lambda \int_s^t \hat{V}_i(\tau) d\tau \le 0\,,$$

то есть, функции $t \mapsto \hat{V}_i(t) + 2\lambda \int_0^t \hat{V}_i(\tau)\, d\tau$ не возрастают. Получили, что условие 3) леммы 4 из [12] выполнено. В силу $z(t_0) \in \mathcal{G}$, условие 4) леммы также выполнено.

Далее, через $\mathbb{T}_i, i = 1, 2, 3, 4$ мы будем обозначать множества, которые определены в лемме 2. Из (31) следует, что если $t \in \mathbb{T}_1$, тогда $z(t) = z_1$. Таким образом, из (16) и (25) следует, что

$$\dot{w}(t) = d_0[\phi(t, w(t)) + g(t)] < 0 \, . \tag{47}$$

Аналогично можно показать, что $w(t)$ не возрастает в окрестности $\mathbb{T}_2$.

Из (31) и равенства $(\hat{b}, \hat{c})_{Z_{-1},Z_1} = 0$ следует, что для $t \in \mathbb{T}_3$ мы имеем $z(t) = z_1$, и в силу (44) и **(A6)** имеем

$$\begin{aligned}\dot{\hat{U}}_1(t) =&(\dot{z}(t), \hat{c})_{Z_{-1},Z_1} = (\hat{A}z(t) + \hat{b}\,[\phi(t, w(t)) + g(t)], \hat{c})_{Z_{-1},Z_1} \\ =&(\hat{b}, \hat{c})_{Z_{-1},Z_1}[\phi(t, w_1) + g(t)] < 0 \, .\end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что $\hat{U}_2(t)$ не возрастает вблизи $\mathbb{T}_4$.

Таким образом, мы проверили все предположения леммы 2. Следовательно, $\mathcal{G}$ положительно инвариантно. Остаётся показать включение (35). Пусть $z = (0, w) \in \mathcal{V}_1 \times \mathbb{R}$, где $w \in [w_2, w_1]$. Так как $(\hat{c}, z)_{Z_0} = w$, то вложение (35) верно, если

$$(z - z_i \, , \, \hat{P}(z - z_i))_{Z_0} \le 0 \, , \quad i = 1, 2 \, . \tag{48}$$

Из (31) и (43) следует, что для выполнения (48) достаточно, чтобы из $\hat{A}z = 0$ вытекало $(z, \hat{P}z)_{Z_0} \le 0$. Но последнее неравенство следует из (37), так как

$$2\,\lambda(z, \hat{P}z)_{Z_0} \le -\kappa_1(\hat{c}, z)^2_{Z_0} \le 0 \, .$$

□

4 Эволюционные уравнения с периодической нелинейностью

В этой главе будем рассматривать эволюционные системы, где нелинейность является периодической относительно части пространственных переменных функцией.

Рассмотрим тройку оснащенных гильбертовых пространств $Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$, которая вводится аналогично тому, как она введена в первой главе.

Пусть $A : Y_1 \to Y_{-1}$ линейный непрерывный оператор, имеющий ноль, как собственное число, b – вектор из Y_{-1}, c – вектор из Y_0. Определим операторы $C \in \mathcal{L}(Y_0, \mathbb{R})$ и $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, Y_{-1})$ следующим образом:

$$Cy = (c, y)_0, \;\; \forall y \in Y_0, \quad B\xi = \xi b, \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{49}$$

Определим также нелинейность $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая является периодической функцией с периодом ζ.

Рассмотрим задачу Коши для эволюционного вариационного уравнения ([11])

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t) = Ay(t) + B\phi(Cy(t)), \\ &y(0) = y_0 \in Y_0. \end{aligned} \tag{50}$$

Функция $y \in \mathcal{W}(T_1, T_2; Y_1, Y_{-1}) \cap C(T_1, T_2; Y_0)$ называется решением (50) на (T_1, T_2), если $y(0) = y_0$ и уравнение (50) выполнено в вариационном смысле (11).

В дальнейшем будем предполагать что для решения (50) выполнены свойства существования и единственности решения.Также будем предполагать в дальнейшем что $\lambda > 0$ некоторое фиксированное число. Введем некоторые предположения.

(F1) Для любого $T > 0$ и любого $f \in L^2(0, T; Y_1)$ задача

$$\dot{y} = (A + \lambda I)y + f(t), \quad y(0) = y_0 \tag{51}$$

корректно поставлена, т. е. для произвольного $y_0 \in Y_0, f \in L^2(0, T; Y_{-1})$ существует единственное решение $y \in \mathcal{W}(0, T; Y_1, Y_{-1})$, удовлетворяющее (51) в том смысле что

$$(\dot{y}, \eta)_{-1,1} = ((A + \lambda I)y, \eta)_{-1,1} + (f(t), \eta)_{-1,1}, \quad \forall \eta \in Y_1, \text{ для п. в. } t \in [0, T]$$

и зависящее непрерывно от начальных данных, т. е.

$$\|y(\cdot)\|^2_{\mathcal{W}(0,T;Y_1,Y_{-1})} \leq c_1 \|y_0\|_0^2 + c_2 \|f\|^2_{2,-1}, \tag{52}$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ некоторые константы.

(F2) Пара $(A + \lambda I, B)$ L^2-управляема ([7]), т. е. для произвоьного $y_0 \in Y_0$ существует управление $\xi(\cdot) \in L^2(0, \infty; \mathbb{R})$ такое что задача

$$\dot{y} = (A + \lambda I)y + B\xi, \quad y(0) = y_0 \tag{53}$$

хорошо обусловлена на полуоси $[0, +\infty)$, т. е. существет решение $y(\cdot) \in L^\infty$ с $y(0) = y_0$.

Обозначим через H^c and L^c комплексификацию вещественного линейного пространства H и вещественного линейного оператора L, соответственно, и введем через

$$\chi(p) = C^c(A^c - pI^c)^{-1}B^c, \quad p \in \rho(A^c) \tag{54}$$

передаточную функцию тройки (A^c, B^c, C^c).

Следующее предположение описывает класс нелинейностей, которые мы будем рассматривать в будущем.

(F3) Предположим, что ϕ принадлежит сектору $M[\kappa_1, \kappa_2]$, т. е.

$$\kappa_1 \leq \frac{\phi(w)}{w} \leq \kappa_2 \;\; w \neq 0. \tag{55}$$

Следующая теорема связана с постороением конусной сетки. Введем некоторые определения.

Теорема 3 *Предполжим что с некоторым $\lambda > 0$ выполнены следующие условия для системы (50)*

1) *Рассмотрим уравнение*
$$\dot{y} = (A + \lambda I)y \tag{56}$$
в Y_0. Пространство Y_0 может быть разложено на $Y_0 = Y_0^- \oplus Y_0^+$ где $dimY_0^- =: 1$. Обозначим через $y(\cdot, y_0)$ глобальное решение (56), удовлетворяющее $y(0, y_0) = y_0$. Для любого $y_0 \in Y_0^-$ будем предполагать, что $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t, y_0) = 0$ и для любого $y_0 \in Y_0^+$ будем предполагать, что $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t, y_0) = 0$;

2) *Выполнено частотное условие*
$$\mathrm{Re}[(1 + \chi(i\omega - \lambda)\kappa_1)^*(1 + \chi(i\omega - \lambda)\kappa_2)] < 0 \;\; \forall \omega \in \mathbb{R}; \tag{57}$$

3) $(b, c)_{-1} < 0$.

Тогда система (50) устойчива по Лагранжу, т. е. любое решение системы (50) ограничено на $[t_0, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $y(\cdot, t_0, y_0)$ - решение системы (50) с $y(t_0, t_0, y_0) = y_0$. Пусть $d \in Y_1$ - собственная функция оператора A, которая соответствует нулевому собственному числу, такая что $(C, d) = \zeta$.

По теореме Лихтарникова-Якубовича (Приложение А) существует оператор $P = P^* \in \mathcal{L}(Y_{-1}, Y_0) \cap \mathcal{L}(Y_0, Y_1)$ и число $\delta > 0$, такие что

$$2((A+\lambda I)y+B\xi, Py)_{-1,1}+(\kappa_2^{-1}\xi-Cy)(\kappa_1^{-1}\xi-Cy) \leq -\delta(\|y\|_1^2+|\xi|^2) \;\; \forall y \in Y_1, \xi \in \mathbb{R}. \tag{58}$$

Подставив в (58) $\xi = 0$, получаем наравенство

$$2((A+\lambda I)y, Py)_{-1,1} + (Cy)^2 \leq -\delta \|y\|_1^2 \ \ \forall y \in Y_1. \tag{59}$$

В силу неравенства (59), предположения 1) теоремы, а также наблюдаемости пары $(A+\lambda I, C)$, мы можем использовать обобщенную лемму Ляпунова ([10]), в силу которой существует разложение $Y_0 = Y_0^+ \oplus Y_0^-$ при $\dim Y_0^- = 1$ такое, что выполняется

$$P_{|Y_0^+} \geq 0 \qquad \text{и} \qquad P_{|Y_0^-} \leq 0\ . \tag{60}$$

Рассмотрим функцию Ляпунова $V(y) = (y, Py)_0$. Ее производная в силу системы (50)

$$\dot{V}(y(t)) = 2(Ay(t) + B\phi(Cy(t)), Py(t))_0 \tag{61}$$

Тогда из соотношения (58) и предположения **(F3)** получаем, что для $v(t) := V(y(t))$, где y - решение (50) выполнено

$$\frac{d}{dt} v(t) \leq -2\lambda v(t) \ \ \text{для п. в.} \ \ t \geq t_0. \tag{62}$$

Отсюда, в силу леммы 3.1.1 ([13]), множество $\{y | (y, Py)_0 < 0\}$ является положительно инвариантным для системы (50).

Из вышесказанного следует что $\mathcal{C} := \{y \in Y_1 | (y, Py)_0 < 0\}$ является положительно инвариантным квадратичным конусом размерности 1.

Легко проверить, что для решений системы (50) выполнено соотношение

$$y(t, t_0, y_0) - jd = y(t, t_0, y_0 - jd) \ \ \forall t \geq t_o, j \in \mathbb{Z}. \tag{63}$$

Следовательно внутренность

$$\Omega_j := \{y \in Y_1 | (y - jd, P(y - jd))_0 < 0\} \tag{64}$$

квадратичного конуса

$$\{y \in Y_1 | (y - jd, P(y - jd))_0 \leq 0\} \tag{65}$$

является положительно инвариантным множеством.

В силу условия 3) в формулировке теоремы, по лемме 5 ([12]) существует вектор $r \in Y_0$, такой что

$$\text{int}\mathcal{C} \cap \{y \in Y_1 | (y, r)_0 = 0\} = \emptyset. \tag{66}$$

Подставив в (58) $y = d,\ \xi = 0$, получаем $(d, Pd)_{-1,1} < 0$. Следовательно можно найти такое j, что

$$|(r, y_0)_0| < j|(r, d)_0|, \quad (y_0, Py_0)_0 \mp (y_0, Pd)_0 + j^2(d, Pd)_0 < 0. \tag{67}$$

Из вышесказанного следует, что

$$y(t, t_0, y_0) \in \Gamma_j := \Omega_j \cap \Omega_{-j}. \tag{68}$$

Теперь покажем, что

$$|(r, y(t, t_0, y_0))_0| < j|(r, d)_0| \;\; t \geq t_0. \tag{69}$$

Действительно, если это не так, то существует $\bar{t} > t_0$, такое что $|(r, y(t, t_0, y_0))_0| = j|(r, d)_0|$. А это значит, что для $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$ имеем $(y(\bar{t}, t_0, y_0 + \sigma jd), P(y(\bar{t}, t_0, y_0) + \sigma jd))_0 > 0$, что противоречит условию $y(t, t_0, y_0) \in \Gamma_j$.

Теперь покажем ограниченность $y(t, t_0, y_0)$. В силу условия (66) оператор P может быть представлен в форме $P = M - \tau(r, r)_0$, где M - положительно определенный оператор, а τ положительное число.

Пусть ε будет положительным числом, таким что $M > \varepsilon I$. Для решения $y(t) = y(t, t_0, y_0)$, которое удовлетворяет неравенствам (68) и (69) справедливо

$$\begin{aligned} \varepsilon\|y(t) - jd\|^2 \leq &(y(t) - jd, M(y(t) - jd))_0 \\ = &(y(t) - jd, P(y(t) - jd))_0 + \tau|(r, y(t) - jd)_0|^2 \\ < &\tau[2(r, y)_0^2 + 2j^2(r, d)^2] \\ < &4\tau j^2(r, d)^2 \end{aligned} \tag{70}$$

для $t \geq t_0$, что означает ограниченность $y(\cdot, t_0, y_0)$ на $[t_0, +\infty)$. $\square$

Замечание 3 *Эволюционные уравнения (50) описывают широкий класс дифференциальных уравнений в частных производных с периодическими нелинейностями. Например, можно показать, что уравнение синус-Гордона ([17]) может быть представлено в виде (50).*

Приложение A

Частотная теорема для эволюционных систем

Для полноты изложения представим формулировку частотной теоремы Лихтарникова-Якубовича для эволюционных систем. Эта теорема дает необходимые и достаточные условия разрешимости некоторых операторных неравенств. В приложении предполагается, что все пространства и операторы комплексны, звездочка обозначает комплексное сопряжение.

Предположим что Y_1, Y_0, Y_{-1} гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_1, (\cdot,\cdot)_0, (\cdot,\cdot)_{-1}$ и нормами $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_0, \|\cdot\|_{-1}$, соответственно. Рассмотрим оснащение оснащение комплексного гильбертова пространства
$Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$ [1]. Пусть Ξ будет также гильбертовым пространством со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|_\Xi$.

Пусть A и B – линейные непрерывные операторы $A \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1}), B \in \mathcal{L}(\Xi, Y_{-1})$. Введем следующие предположения.

(H1) Оператор $A \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1})$ является регулярным, т. е., для любого $T > 0$, $y_0 \in Y_1, \psi_T \in Y_1$ и $f \in L^2(0,T;Y_0)$ решение прямой задачи Коши

$$\dot{y} = Ay + f(t), y(0) = y_0, \;\; a.\ a.\ t \in [0,T]$$

и двойственной задачи Коши

$$\dot{\psi} = -A^*\psi + f(t), \psi(T) = \psi_T, \;\; a.\ a.\ t \in [0,T]$$

сильно непрерывны по t по норме пространства Y_1.

(H2) Пара (A,B) L^2 - управляема, т.е., для произвольного $y_0 \in Y_0$ существует управление $\xi(\cdot) \in L^2(0,\infty;\Xi)$ такое что задача Коши

$$\dot{y} = Ay + B\xi, y(0) = y_0$$

корректно поставлена на полуоси $[0,\infty)$, т.е., существует решение $y(\cdot) \in L^\infty$, удовлетворяющее $y(0) = y_0$.

(H3) Пусть $\mathcal{F}(y,\xi)$ – эрмитова форма на $Y_1 \times \Xi$, т. е.,

$$\mathcal{F}(y,\xi) = (F_1 y, y)_{-1,1} + 2\mathrm{Re}(F_2 y, \xi)_\Xi + (F_3\xi,\xi)_\Xi,$$

где

$$F_1 = F_1^* \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1}), F_2 \in \mathcal{L}(Y_0, \Xi), F_3 = F_3^* \in \mathcal{L}(\Xi,\Xi).$$

Определим число

$$\alpha := \sup_{\omega,y,\xi}(\|y\|_1^2 + \|\xi\|_\Xi^2)^{-1}\mathcal{F}(y,\xi),$$

где супремум берется по всем тройкам $(\omega, y, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times Y_1 \times \Xi$, таким что $i\omega y = Ay + B\xi$.

[1] Построение оснащения гильбертова пространства в комплексном случае аналогично вещественному случаю

Теорема 4 *(Частотная теорема Лихтарникова-Якубовича для неособого случая, ([7])) Предположим что для линейных операторов* $A \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1}), B \in \mathcal{L}(\Xi, Y_{-1})$ *и эрмитовой формы* $\mathcal{F}$ *на* $Y_1 \times \Xi$ *выполнены предположения* **(H1)**, **(H2)**. *Тогда существует оператор* $P = P^* \in \mathcal{L}(Y_{-1}, Y_0) \cap \mathcal{L}(Y_0, Y_1)$ *и число* $\delta > 0$ *такие что*

$$2\mathrm{Re}(Ay + B\xi, Py)_{-1,1} + \mathcal{F}(y, \xi) \leq -\delta(\|y\|_1^2 + \|\xi\|_\Xi^2), \forall (y, \xi) \in Y_1 \times \Xi, \quad (71)$$

тогда и только тогда, когда выполнено частотное условие $\alpha < 0$ *где* α *берется из* **(H3)**.

Замечание 4 *Если в (71) операторы* A, B *и все пространства вещественны, тогда оператор* P*, который является решением этого неравенства, также может быть взят вещественным ([7]).*

Список литературы

[1] Березанский, Ю. М., ”Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов”, Наукова думка, Киев, (1965).

[2] Блягоз, З. У., Леонов, Г. А., *Частотные критерии устойчивости в большом нелинейных систем*, Вестник ЛГУ, **13**, (1978), 18 – 23.

[3] Буркин, И. М., Якубович, В. А., *Частотные условия существования двух почти периодических решений у нелинейной системы автоматического регулирования*, Сибирск. математ. журн., **16**, 5, (1975), 916 – 924.

[4] Леонов, Г. А., *Об ограниченности траекторий фазовых систем*, Сибирский математ. журн., **15**, 3, (1974), 687–692.

[5] Леонов, Г. А., *Фазовая синхронизация. Теория и приложения*, Автомат. и телемех., **67**, 10, (2006), 47 – 85.

[6] Леонов, Г. А., Чурилов, А. Н., *Частотные условия ограниченности решений фазовых систем*, Динамика систем, **10**, (1976), 3 – 20.

[7] Лихтарников, А. Л., Якубович, В. А., *Частотная теорема для уравнений эволюционного типа*, Сибирск. математ. журн., **17**, 5, (1976), 1069–1085.

[8] Лихтарников, А. Л., Якубович, В. А., *Дихотомия и абсолютная устойчивость неопределенных нелинейных систем в гильбертовых пространствах*, Алгебра и анализ, **9**, 6, (1997), 132–155.

[9] Brézis, H., *Problemes unilateraux*, J. Math. Pures Appl., **51**, (1972), 1–168.

[10] Datko, R., *Extending a theorem of A. M. Liapunov to Hilbert spaces*, J. Math. Pures Appl., **32**, (1970), 610–616.

[11] Duvant, G., Lions, J. L., "Inequalities in Mechanics and Physics", Springer-Verlag, Berlin, (1976).

[12] Kalinin, Yu. N., Reitmann, V., *Almost periodic solutions in control systems with monotone nonlinearities*, Differential equations and control processes, **4**, (2012), 40–68.

[13] Leonov, G. A., Reitmann, V., Smirnova, V. B., "Non-Local Methods for Pendulum-Like Feedback Systems", Teubner, Stuttgart, (1992).

[14] Lions, J. L., Magenes, E., "Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications", Springer. Berlin, vol. I–III, (1972).

[15] Noldus, E., *New direct Lyapunov-type method for studying synchronization problems*, Automatika, **13**, 2, (1977), 139–151.

[16] Popov, S. A., Reitmann, V., *Frequency domain conditions for finite-dimensional projectors and determining observations for the set of amenable solutions*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **34**, 1, (2014), 249–267.

[17] Webb, G. F., *A bifurcation problem for a nonlinear hyperbolic partial differential equation*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, **10**, 5, (1979), 922—932.

[18] Wloka, J., "Partial Differential Equations Cambridge Univ. Press. Cambridge, (1987).