

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2019

Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>
e-mail: jodiff@mail.ru

Интегро-дифференциальные системы

Сочетание метода шагов и расширения пространства состояний для анализа линейных стохастических систем с различными формами запаздывания и случайными входами в виде аддитивных и мультипликативных белых шумов

И.Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
e-mail: polosk@psu.ru

Аннотация

В статье представлены теоретический аппарат и методика стохастического анализа систем линейных дифференциальных уравнений с двумя формами конечных запаздываний (сосредоточенными и распределенными), возмущаемых аддитивными и мультипликативными белыми шумами. Задача исследования решается на основе построения обыкновенных дифференциальных уравнений для первых моментных функций вектора состояния системы. В качестве инструмента такого построения применяется схема, которая объединяет классический метод шагов и расширение пространства состояний и использует аппарат многомерных матриц. С помощью этой схемы строится цепочка систем стохастических дифференциальных уравнений без запаздывания, а затем и уравнения для искомым моментов. Программа, реализующая предлагаемую схему, исполнялась в среде пакета компьютерной алгебры

Mathematica и была применена для анализа одной модельной системы. В заключительной части работы представлены полученные результаты расчетов, а также некоторые детали алгоритма программы.

Ключевые слова: стохастический анализ, линейная динамическая система, сосредоточенные и распределенные запаздывания, вектор состояния, аддитивные и мультипликативные шумы, моментные функции.

Abstract

We represent the theoretical method and technique for stochastic analysis of systems of linear differential equations which have two forms of finite delays (concentrated and distributed) and are perturbed by additive and multiplicative white noises. The research problem is solved on the basis of constructing ordinary differential equations for the first moment functions of the system state vector. As a tool for such a construction, we consider a scheme that integrates the classical method of steps and an expansion of the state space, and uses the technique of multidimensional matrices. By using this scheme we construct a chain of systems of stochastic differential equations without delays, and then the equations for the moments required. The program implementing the proposed scheme was performed in the environment of the computer algebra package *Mathematica* and was used to analyze a model system. The final part of the work presents both the results of calculations and some details of the program algorithm.

Keywords: stochastic analysis, linear dynamic system, lumped and distributed delays, state vector, additive and multiplicative noises, moment functions.

1 Введение

Детерминированные и стохастические обыкновенные интегро-дифференциальные уравнения (ДОИДУ, СОИДУ), являющиеся подклассами детерминированных [1, 3, 17, 27, 29, 35, 55] и стохастических функционально дифференциальных уравнений (ДФДУ, СФДУ) разных типов [13, 15, 21, 41, 43, 45], включая обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздыванием, дифференциальные уравнения нейтрального типа, интегро-дифференциальные уравнения и их различные сочетания, интересны как с теоретической, так и с прикладной точек зрения, поскольку эти уравнения являются моделями явлений в значительном количестве различных областей науки и техники и призваны учесть влияние последствий на динамику различных систем. Отметим, что

вопросы, связанные со строгим определением понятий и объектов для семейства стохастических интегральных дифференциальных уравнений, существованием и единственностью их решений, были представлены в [41, 43, 45].

В настоящее время не существует формализма для точного расчета эффектов флуктуаций в нелинейных системах с различными формами запаздывания. Стандартный подход на основе уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова не применим вследствие того, что он предназначен для марковских систем. Дифференциальные же системы с последствием, включая интегро-дифференциальные, являются немарковскими, хотя различные приближения к ним могут быть марковскими [39].

Анализ СФДУ вызывает значительные трудности, поскольку эти СФДУ не могут быть решены точно. Поэтому актуальной задачей является разработка эффективных прямых (для получения реализаций решений) и косвенных (для вычисления статистических характеристик) приближенных аналитических и численных алгоритмов для анализа систем СФДУ.

В данный момент существует довольно широкий класс методов решения ДФДУ [16, 20]. Приближенные алгоритмы прямого численного интегрирования СФДУ разных типов (например, [22, 37, 38]) основаны на этих схемах и специальных комплексных методах численного решения стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) [5, 34, 42].

Методы исследования СОИДУ общего типа, обычно используемые для прямой генерации временных траекторий включают: 1) полностью численные и получисленные методы (классические и модифицированные гибридные), такие как явные и неявные (backward) схемы Эйлера, τ -методы, одношаговые и многошаговые алгоритмы Рунге–Кутты, методы экстраполяции и итераций на последнем шаге, разложения по вейвлетам, глобально определенным базисным Sinc-функциям и обобщениям гамма-распределения; 2) приближенные аналитические методы, к которым относятся алгоритмы разложения в ряды Тейлора (в т.ч. с разбиением промежутка интегрирования на частичные), асимптотические методы, схемы стохастического усреднения, методы многих масштабов, коллокаций и теории возмущений, методы упрощения интегральных ядер (использование рядов Прони, метод полиномиальной аппроксимации Лагерра для представления функций релаксации), аппроксимации переходных функций экспонентами и т.д. Отметим также схему приближенного преобразование СОИДУ в СОДУ на основе усреднения ядра [8, 10, 51] и метод последовательных приближений для вычисления функции Грина [9, 48]. Более полный обзор таких алгоритмов можно найти

в [48].

Если обратиться к уравнениям рассматриваемого типа, то модели с их использованием применяются для решения задач управления [2], автоматического регулирования [4] (включают подструктуры, аналогичные ПИД-регуляторам для технических устройств), математической экономики (проблемы долгосрочного планирования) [4], нелинейной фильтрации с запаздыванием в уравнениях состояния и наблюдений [53], изучения материалов, электромагнетизма, сетей связи [50]; исследования динамических рекламных задач в условиях неопределенности при наличии переноса и распределенных эффектов забывания [28], поведения популяций [30], нейронных полей и сетей [52, 54], плюрипотентных гемопоэтических стволовых клеток [18], динамики упругих движений аэродинамического профиля в двумерном несжимаемом потоке [24], системы регулирования глюкоза–инсулин [50], клеточной населенности [19] и др.

Кроме того, системы подобных уравнений, сами по себе важные для моделирования различных объектов и процессов, могут быть результатом линеаризации нелинейных стохастических систем с различными формами запаздывания и мультипликативными флуктуациями.

Для детерминированных аналогов анализируемых в статье систем применяются расчетные схемы на основе аппроксимаций функций Грина [33], сочетание явного метода Эйлера с формулой трапеций [26], многошаговые методы Рунге–Кутты для интегрирования ОДУ и составные квадратурные формулы [57], методы Рунге–Кутты совместно с линейными многошаговыми методами типа Пузе [32], непрерывные методы Рунге–Кутты [50], θ -методы [36], методы полиномиальной сплайн-коллокации [31], приближения на основе метода Галеркина [25] и т.д.

Семейство же специализированных методов для исследования стохастических систем с конечными сосредоточенными и распределенными запаздываниями является достаточно ограниченным. Так для численного интегрирования применяются аналоги схемы Эйлера, Эйлера–Маруямы и Мильштейна [23, 30, 44], комбинация схемы Эйлера–Маруямы для первой стохастической дифференциальной части уравнений и θ -метода для аппроксимации интеграла квадратурами [49], сильные и слабые сбалансированные неявные методы [56].

Ниже представлены теоретический аппарат и методика стохастического анализа систем линейных дифференциальных уравнений с двумя формами конечных запаздываний (сосредоточенными и распределенными), возму-

щаемых аддитивными и мультипликативными белыми шумами, или, что то же самое, линейных параметрических стохастических систем с конечными (ограниченными) сосредоточенными (точечными) и распределенными запаздываниями. Задача исследования решается на основе построения ОДУ для первых моментных функций вектора состояния системы. В качестве инструмента такого построения применяем схему, которая сочетает классический метод шагов и расширение пространства состояний [7, 46, 47] в комбинации с использованием аппарата многомерных матриц [14] и посредством которой строится цепочка систем СОДУ без запаздывания, а затем и уравнения для искомым моментов. Данная схема реализована в виде программы в среде пакета компьютерной алгебры *Mathematica* [40] и применена на анализа одной модельной системы. В конце статьи представлены результаты расчетов, а также некоторые детали алгоритма указанной программы.

2 Постановка задачи

Рассмотрим систему линейных параметрических стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) Стратоновича с конечными сосредоточенными $\tau > 0$ и распределенными запаздываниями следующего вида:

$$d\mathbf{X}(t) = \left[\mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{R}(t) \mathbf{X}(t - \tau) + \mathbf{Q}(t) \int_{t-\tau}^t \mathbf{\Phi}(\theta) \mathbf{X}(\theta) d\theta + \mathbf{c}(t) \right] dt + \\ + \left[\llbracket \mathbf{B}(t) \rrbracket :: \mathbf{X}(t) + \llbracket \mathbf{H}(t) \rrbracket :: \mathbf{X}(t - \tau) + \llbracket \mathbf{J}(t) \rrbracket :: \int_{t-\tau}^t \mathbf{\Psi}(\theta) \mathbf{X}(\theta) d\theta + \mathbf{g}(t) \right] \circ d\mathbf{W}(t), \\ t_1 = t_0 + \tau < t \leq T < +\infty, \quad (1)$$

где t – время; $::$ символ умножения трехмерной матрицы на вектор:

$$\llbracket \mathbf{P}(t) \rrbracket :: \mathbf{A}(t) = \left\{ \sum_{\ell=1}^r p_{ij\ell}(t) \Lambda_{\ell}(t), i = \overline{1, r}, j = \overline{1, q} \right\}, \\ \llbracket \mathbf{P}(t) \rrbracket = \{p_{ij\ell}(t)\} \in \mathbb{M}_{r \times q \times r}, \quad \mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^r;$$

$\mathbb{M}_{\ell_1 \times \ell_2}$ и $\mathbb{M}_{\ell_1 \times \ell_2 \times \ell_3}$ – линейные пространства всех $(\ell_1 \times \ell_2)$ и $(\ell_1 \times \ell_2 \times \ell_3)$ матриц соответственно; $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых

случайных винеровских процессов, причем для обобщенной производной вектора $\mathbf{W}(t)$ – векторного белого шума $\dot{\mathbf{W}}(t)$ имеем:

$$\mathbb{E}[\dot{\mathbf{W}}(t)] = 0, \quad \mathbb{E}[\dot{\mathbf{W}}(t_1) \dot{\mathbf{W}}^\top(t_2)] = \mathbf{I} \delta(t_2 - t_1);$$

\top и $\mathbb{E}[\cdot]$ – символы транспонирования матрицы и математического ожидания соответственно; \mathbf{I} – единичная матрица соответствующего порядка; $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака.

Будем считать, что на интервале $(t_0, t_1]$ вектор состояния $\mathbf{X}(t)$ удовлетворяет системе СОДУ без запаздывания

$$d\mathbf{X}(t) = [\mathbf{A}_0(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{c}_0(t)] dt + [[\mathbf{B}_0(t)] :: \mathbf{X}(t) + \mathbf{g}_0(t)] \circ d\mathbf{W}(t),$$

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}^0, \quad (2)$$

причем в уравнениях (1) и (2) $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{Q}(t)$, $\Phi(\theta)$, $[\mathbf{B}(t)]$, $[\mathbf{H}(t)]$, $[\mathbf{J}(t)]$, $\Psi(\theta)$, $\mathbf{g}(t)$, $\mathbf{A}_0(t)$, $[\mathbf{B}_0(t)]$, $\mathbf{g}_0(t)$ и $\mathbf{c}(t)$, $\mathbf{c}_0(t)$ – известные непрерывные матричные и векторные функции. Кроме того, предположим, что известны все необходимые числовые характеристики случайного вектора \mathbf{X}^0 . В частности, пусть в начальный момент времени t_0 для вектора $\mathbf{X}(t_0)$ заданы вектор математических ожиданий $\mathbf{m}^0 = \mathbb{E}[\mathbf{X}^0]$ и ковариационная матрица $\mathbf{D}^0 = \mathbb{E}[(\mathbf{X}^0 - \mathbf{m}^0)(\mathbf{X}^0 - \mathbf{m}^0)^\top]$. Заметим, в рамках настоящей работы предполагается, что компоненты всех векторных случайных процессов (состояния и шумов) являются стохастически непрерывными на отрезке $[t_0, T]$.

Задачей исследования является получение систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) без запаздывания для компонентов векторной функции математических ожиданий $\mathbf{m}(t) = \mathbb{E}[\mathbf{X}(t)]$ и матричной функции ковариаций $\mathbf{D}(t) = \mathbb{E}[\{\mathbf{X}(t) - \mathbf{m}(t)\}\{\mathbf{X}(t) - \mathbf{m}(t)\}^\top]$ вектора состояний $\mathbf{X}(t)$ при любом $t > t_0$.

3 Аналитический аппарат исследования линейных параметрических СОДУ без запаздывания

Построим общую систему ОДУ, которая описывает поведение первых моментных функций, включающих компоненты вектора функций математического ожидания $\underline{\mathbf{m}}_Z(s) = \{\underline{m}_i(s)\} = \mathbb{E}[\underline{\mathbf{Z}}(s)]$ и матрицы ковариаций

$$\underline{\mathbf{D}}_{ZZ}(s) = \{\underline{\mathcal{D}}_{ij}(s)\} = \mathbb{E}[\{\underline{\mathbf{Z}}(s) - \underline{\mathbf{m}}_Z(s)\}\{\underline{\mathbf{Z}}(s) - \underline{\mathbf{m}}_Z(s)\}^\top],$$

для вектора состояния векторного случайного процесса $\underline{Z}(s) = \{Z_i(s)\} \in \mathbb{R}^r$ линейной стохастической дифференциальной системы с аддитивными и мультипликативными шумами в форме Стратоновича:

$$d\underline{Z}(s) = [\underline{A}(s) \underline{Z}(s) + \underline{c}(s)] ds + [[\underline{B}(s)] :: \underline{Z}(s) + \underline{g}(s)] \circ d\underline{W}(s),$$

$$s_* < s \leq s^*, \tag{3}$$

$$\underline{Z}(s_*) = \underline{Z}_*, \tag{4}$$

где основная часть обозначений соответствует обозначениям, введенным в начале статьи, а точка указывает на производную по s . Начальное положение, задаваемое вектором $\underline{Z}_* = (Z_{*1}, Z_{*2}, \dots, Z_{*r})$, является случайным и распределено с плотностью вероятности $\hat{p}_*(\underline{z})$, где $\underline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_r)$. Его среднее значение равно $\underline{m}_Z^* = \mathbb{E}[\underline{Z}_*]$, а его матрица ковариаций –

$$\underline{D}_{ZZ}^* = \mathbb{E}[(\underline{Z}_* - \underline{m}_Z^*)(\underline{Z}_* - \underline{m}_Z^*)^T].$$

Возмущение $\{\underline{W}(s) = \{W_i(s)\}, s_* \leq s \leq s^* \in \mathbb{R}^q\}$ – винеровский стохастический процесс с независимыми компонентами. В уравнениях (3) $\underline{A}(s) = \{a_{ij}(s)\}$, $[\underline{B}(s)] = \{b_{ijk}(s)\}$ и $\underline{g}(s) = \{g_{ij}(s)\}$ являются детерминированными вещественными матрицами в $\mathbb{M}_{r \times r}$, $\mathbb{M}_{r \times q \times r}$ и $\mathbb{M}_{r \times q}$ соответственно, $\underline{c}(s) = \{c_i(s)\} \in \mathbb{R}^r$ – детерминированный вещественный вектор. Предполагается, что элементы всех этих матриц и векторов являются непрерывными функциями относительно аргумента s .

Коэффициенты сноса \hat{a}_i и коэффициенты диффузии \hat{b}_{ij} уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК-уравнения)

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial s} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r \frac{\partial^2 (\hat{b}_{ij} \hat{p})}{\partial z_i \partial z_j} - \sum_{i=1}^r \frac{\partial (\hat{a}_i \hat{p})}{\partial z_i}, \tag{5}$$

$$\hat{p}(\underline{z}, s_*) = \hat{p}_*(\underline{z}), \tag{6}$$

где плотность вероятности $\hat{p}(\underline{z}, s)$ вектора состояния $\underline{Z}(s)$ можно рассчитать, если учесть следующие формулы:

$$\hat{a}_i = \sum_{\ell=1}^r a_{i\ell} z_\ell + c_i + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k=1}^q b_{ik\nu} \left(\sum_{\ell=1}^r b_{\nu k\ell} z_\ell + g_{\nu k} \right), \tag{7}$$

$$\hat{b}_{ij} = \sum_{k=1}^q \left(\sum_{\ell=1}^r b_{ik\ell} z_\ell + g_{ik} \right) \left(\sum_{\ell=1}^r b_{j k\ell} z_\ell + g_{jk} \right). \tag{8}$$

Используя уравнение (5) и соотношения (7), (8), мы можем получить ОДУ для математических ожиданий и ковариаций, которые принимают следующий вид:

$$\dot{\underline{\mathbf{m}}}_Z(s) = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{m}}_Z(s), s), \quad \underline{\mathbf{m}}_Z(s_*) = \underline{\mathbf{m}}_Z^*, \quad (9)$$

$$\dot{\underline{\mathbf{D}}}_{ZZ}(s) = \underline{\mathcal{F}}(\underline{\mathbf{D}}_{ZZ}(s), \underline{\mathbf{m}}_Z(s), s), \quad \underline{\mathbf{D}}_{ZZ}(s_*) = \underline{\mathbf{D}}_{ZZ}^*, \quad (10)$$

где $\underline{\mathbf{f}} = \{\underline{f}_i\} \in \mathbb{R}^r$ и $\underline{\mathcal{F}} = \{\underline{\mathcal{F}}_{ij}\} \in \mathbb{M}_{r \times r}$ – детерминированная векторная и матричная функции, компоненты которых можно вычислить, если воспользоваться соотношениями вида:

$$\underline{f}_i = \sum_{\ell=1}^r \underline{a}_{i\ell} \underline{m}_\ell + \underline{c}_i + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k=1}^q \underline{b}_{ik\nu} \left(\sum_{\ell=1}^r \underline{b}_{\nu k\ell} \underline{m}_\ell + \underline{g}_{\nu k} \right), \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{F}}_{ij} = \sum_{\ell=1}^r \left[\underline{\mathcal{D}}_{i\ell} \left(\underline{a}_{j\ell} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k=1}^q \underline{b}_{j k\nu} \underline{b}_{\nu k\ell} \right) + \underline{\mathcal{D}}_{j\ell} \left(\underline{a}_{i\ell} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k=1}^q \underline{b}_{i k\nu} \underline{b}_{\nu k\ell} \right) \right] + \\ + \sum_{k=1}^q \left[\sum_{\ell_1, \ell_2=1}^r \underline{b}_{i k\ell_1} \underline{b}_{j k\ell_2} (\underline{\mathcal{D}}_{\ell_1 \ell_2} + \underline{m}_{\ell_1} \underline{m}_{\ell_2}) + \right. \\ \left. + \sum_{\ell=1}^r (\underline{g}_{i k} \underline{b}_{j k\ell} + \underline{g}_{j k} \underline{b}_{i k\ell}) \underline{m}_\ell + \underline{g}_{i k} \underline{g}_{j k} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, r. \quad (12) \end{aligned}$$

4 Методика решения задачи (1), (2)

Основная идея достижения требуемого результата – получение СОДУ без запаздывания – это применение комбинации классического метода шагов и метода расширения пространства состояний.

Для реализации идеи рассмотрим равномерную временную сетку $t_q = t_0 + q \cdot \tau$, $q = 0, 1, 2, \dots, N$ ($\tau(N+1) \geq T$) и введем новую временную переменную s , изменяющуюся на промежутке $[0, \tau]$, а также следующие обозначения:

$$s_q = s + t_q, \quad \Delta_q = (t_q, t_{q+1}], \quad \mathbf{X}_q(s) = \mathbf{X}(s_q), \quad \mathbf{X}_q(0) = \mathbf{X}_{q-1}(\tau),$$

$$\mathbf{W}_q(s) = \mathbf{W}(s_q), \quad \mathbf{W}_q(0) = \mathbf{W}_{q-1}(\tau), \quad \mathbf{Y}(s) \equiv \mathbf{Y} = \mathbf{X}^0,$$

$$\mathbf{U}_q(s) = \int_0^s \Phi(t_q + \theta) \mathbf{X}_q(\theta) d\theta, \quad \mathbf{V}_q(s) = \int_0^s \Psi(t_q + \theta) \mathbf{X}_q(\theta) d\theta,$$

$$\mathbf{U}_q^*(s) \equiv \mathbf{U}_q^* = \mathbf{U}_{q-1}(\tau), \quad \mathbf{V}_q^*(s) \equiv \mathbf{V}_q^* = \mathbf{V}_{q-1}(\tau), \quad q \geq 1,$$

$$\text{col}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_{L-1}, \mathbf{d}_L) =$$

$$= \{d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1n}, \dots, d_{L-1,1}, d_{L-1,2}, \dots, d_{L-1,n}, d_{L1}, d_{L2}, \dots, d_{Ln}\}^T, \\ n_2 = 2n, \quad n_3 = 3n, \quad n_4 = 4n, \quad n_5 = 5n.$$

Рассмотрим последовательность полуинтервалов (сегментов) Δ_q .

0°. На сегменте Δ_0 систему СОДУ без запаздывания для вектора $\mathbf{Z}_0(s) = \text{col}(\mathbf{Y}(s), \mathbf{X}_0(s), \mathbf{U}_0(s), \mathbf{V}_0(s))$ представим в виде:

$$\begin{aligned} d\mathbf{Y}(s) &= \mathbf{O}_n ds, & \mathbf{Y}(0) &= \mathbf{X}^0, \\ d\mathbf{X}_0(s) &= \left[\mathbf{A}_0(s_0) \mathbf{X}_0(s) + \mathbf{c}_0(s_0) \right] ds + \\ &+ \left[\llbracket \mathbf{B}_0(s_0) \rrbracket :: \mathbf{X}_0(s) + \mathbf{g}_0(s_0) \right] \circ d\mathbf{W}_0(s), & \mathbf{X}_0(0) &= \mathbf{X}^0, \quad (13) \\ d\mathbf{U}_0(s) &= \mathbf{\Phi}(s_0) \mathbf{X}_0(s) ds, & \mathbf{U}_0(0) &= \mathbf{O}_n, \\ d\mathbf{V}_0(s) &= \mathbf{\Psi}(s_0) \mathbf{X}_0(s) ds, & \mathbf{V}_0(0) &= \mathbf{O}_n. \end{aligned}$$

Если воспользоваться объединенной формой уравнений (13):

$$\begin{aligned} d\mathbf{Z}_0(s) &= \left[\mathbf{A}_0^+(s) \mathbf{Z}_0(s) + \mathbf{c}_0^+(s) \right] ds + \\ &+ \left[\llbracket \mathbf{B}_0^+(s) \rrbracket :: \mathbf{Z}_0(s) + \mathbf{g}_0^+(s) \right] \circ d\mathbf{W}_0^+(s), \quad (14) \end{aligned}$$

$$\mathbf{Z}_0(0) = \text{col}(\mathbf{X}^0, \mathbf{X}^0, \mathbf{O}_n, \mathbf{O}_{n_2}), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n_2} \\ \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{A}_0(s_0) & \mathbf{O}_{n \times n_2} \\ \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{\Phi}(s_0) & \mathbf{O}_{n \times n_2} \\ \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{\Psi}(s_0) & \mathbf{O}_{n \times n_2} \end{bmatrix}, & \mathbf{c}_0^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_n \\ \mathbf{c}_0(s_0) \\ \mathbf{O}_{n_2} \end{bmatrix}, \\ \llbracket \mathbf{B}_0^+(s) \rrbracket &= \begin{bmatrix} \llbracket \mathbf{O} \rrbracket_{n \times m \times n} \\ \llbracket \mathbf{O} \rrbracket_{n \times m \times n} \\ \llbracket \mathbf{O} \rrbracket_{n_2 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} \llbracket \mathbf{O} \rrbracket_{n \times m \times n} \\ \llbracket \mathbf{B}_0(s_0) \rrbracket \\ \llbracket \mathbf{O} \rrbracket_{n_2 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} \llbracket \mathbf{O} \rrbracket_{n \times m \times n_2} \\ \llbracket \mathbf{O} \rrbracket_{n \times m \times n_2} \\ \llbracket \mathbf{O} \rrbracket_{n_2 \times m \times n_2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}_0^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times m} \\ \mathbf{g}_0(s_0) \\ \mathbf{O}_{n_2 \times m} \end{bmatrix}, & \mathbf{W}_0^+(s) &= \mathbf{W}_0(s), & r_0 &= n_4, \end{aligned}$$

$\mathbf{O}_l \in \mathbb{R}^l$, $\mathbf{O}_{l_1 \times l_2} \in \mathbb{M}_{l_1 \times l_2}$ и $\llbracket \mathbf{O} \rrbracket_{l_1 \times l_2 \times l_3} \in \mathbb{M}_{l_1 \times l_2 \times l_3}$ – нулевой вектор, обычная и трехмерная нулевые матрицы соответственно, и сравнить системы уравнений (14), (15) и (3), (4), то можно заключить, что эти системы будут одинаковы, если

$$r = r_0, \quad q = m, \quad s_* = 0, \quad s^* = \tau, \quad \underline{\mathbf{A}}(s) = \mathbf{A}_0^+(s),$$

$$\underline{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}_0^+(s), \quad \llbracket \underline{\mathbf{B}}(s) \rrbracket = \llbracket \mathbf{B}_0^+(s) \rrbracket, \quad \underline{\mathbf{g}}(s) = \mathbf{g}_0^+(s).$$

Поэтому мы можем записать уравнение и начальное условие для плотности вероятности $p_{Z_0}(\mathbf{z}_0, s)$ расширенного векторного процесса состояния $\mathbf{Z}_0(s)$:

$$\frac{\partial p_{Z_0}}{\partial s} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r \frac{\partial^2 (\tilde{b}_{0ij} p_{Z_0})}{\partial z_{0i} \partial z_{0j}} - \sum_{i=1}^r \frac{\partial (\tilde{a}_{0i} p_{Z_0})}{\partial z_{0i}}, \quad (16)$$

$$p_{Z_0}(\mathbf{z}_0, 0) \equiv p_{Z_0}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, 0) = p^0(\mathbf{x}_0) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \delta(\mathbf{u}_0) \delta(\mathbf{v}_0),$$

где коэффициенты \tilde{a}_{0i} и \tilde{b}_{0ij} могут быть вычислены по формулам (7), (8) как \hat{a}_i and \hat{b}_{ij} соответственно, $\delta(\mathbf{d}) = \delta(d_1) \delta(d_2) \dots \delta(d_\nu)$, если $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^\nu$.

Более того, этот факт дает нам возможность построить явный вид уравнений (9) и (10). Конечной точкой этого этапа является определение начальных условий для $\mathbf{m}_{Z_0}(s)$ и $\mathcal{D}_{Z_0 Z_0}(s)$. Первые две группы таких условий таковы:

$$\mathbf{m}_{Z_0}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_X^0 \\ \mathbf{m}_X^0 \\ \mathbf{O}_{n_2} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_{Z_0 Z_0}(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{XX}^0 & \mathcal{D}_{XX}^0 & \mathcal{O}_{n \times n_2} \\ \mathcal{D}_{XX}^0 & \mathcal{D}_{XX}^0 & \mathcal{O}_{n \times n_2} \\ \mathcal{O}_{n_2 \times n} & \mathcal{O}_{n_2 \times n} & \mathcal{O}_{n_2 \times n_2} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Далее надо вычислить $\mathbf{m}_{Z_0}(s)$ как $\underline{\mathbf{m}}_Z(s)$ и $\mathcal{D}_{Z_0 Z_0}(s)$ как $\underline{\mathcal{D}}_{ZZ}(s)$.

1°. Определенный на полуинтервалах Δ_0 и Δ_1 вектор $\mathbf{Z}_1(s) = \text{col}(\mathbf{Z}_0(s), \mathbf{X}_1(s), \mathbf{U}_1(s), \mathbf{V}_1(s), \mathbf{U}_1^*(s), \mathbf{V}_1^*(s)) \equiv \text{col}(\mathbf{Y}(s), \mathbf{X}_0(s), \mathbf{U}_0(s), \mathbf{V}_0(s), \mathbf{X}_1(s), \mathbf{U}_1(s), \mathbf{V}_1(s), \mathbf{U}_1^*(s), \mathbf{V}_1^*(s))$ будет удовлетворять системе СОДУ (13), к которой добавлены уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned} d\mathbf{X}_1(s) &= \left[\mathcal{A}(s_1) \mathbf{X}_1(s) + \mathcal{R}(s_1) \mathbf{X}_0(s) + \right. \\ &+ \left. \mathcal{Q}(s_1) \{ \mathbf{U}_1^*(s) - \mathbf{U}_0(s) + \mathbf{U}_1(s) \} + \mathbf{c}(s_1) \right] ds + \\ &+ \left[\llbracket \mathbf{B}(s_1) \rrbracket :: \mathbf{X}_1(s) + \llbracket \mathcal{H}(s_1) \rrbracket :: \mathbf{X}_0(s) + \right. \\ &+ \left. \llbracket \mathcal{J}(s_1) \rrbracket :: \{ \mathbf{V}_1^*(s) - \mathbf{V}_0(s) + \mathbf{V}_1(s) \} + \mathbf{g}(s_1) \right] \circ d\mathbf{W}_1(s), \\ \mathbf{X}_1(0) &= \mathbf{X}_0(\tau), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{U}_1(s) &= \Phi(s_1) \mathbf{X}_1(s) ds, & \mathbf{U}_1(0) &= \mathbf{O}_n, \\ d\mathbf{V}_1(s) &= \Psi(s_1) \mathbf{X}_1(s) ds, & \mathbf{V}_1(0) &= \mathbf{O}_n, \\ d\mathbf{U}_1^*(s) &= \mathbf{O}_n ds, & \mathbf{U}_1^*(0) &= \mathbf{U}_0(\tau), \\ d\mathbf{V}_1^*(s) &= \mathbf{O}_n ds, & \mathbf{V}_1^*(0) &= \mathbf{V}_0(\tau). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что для $t \in (t_1, t_2]$ при $\mathbf{r} = \Phi, \Psi$

$$\begin{aligned} \int_{t-\tau}^t \mathbf{r}(\theta) \mathbf{X}(\theta) d\theta &= \int_{t-\tau}^{t_1} \mathbf{r}(\theta) \mathbf{X}(\theta) d\theta + \int_{t_1}^t \mathbf{r}(\theta) \mathbf{X}(\theta) d\theta = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{r}(\theta) \mathbf{X}(\theta) d\theta - \int_{t_0}^{t-\tau} \mathbf{r}(\theta) \mathbf{X}(\theta) d\theta + \int_{t_1}^t \mathbf{r}(\theta) \mathbf{X}(\theta) d\theta = \\ &= \int_0^\tau \mathbf{r}(t_0 + \theta) \mathbf{X}_0(\theta) d\theta - \int_0^s \mathbf{r}(t_0 + \theta) \mathbf{X}_0(\theta) d\theta + \int_0^s \mathbf{r}(t_1 + \theta) \mathbf{X}_1(\theta) d\theta = \\ &= \begin{cases} \mathbf{U}_0(\tau) - \mathbf{U}_0(s) + \mathbf{U}_1(s), & \mathbf{r} = \Phi, \\ \mathbf{V}_0(\tau) - \mathbf{V}_0(s) + \mathbf{V}_1(s), & \mathbf{r} = \Psi. \end{cases} \end{aligned}$$

Действуя так же, как на шаге $\mathbf{0}^0$, мы можем записать компактную форму уравнений (18):

$$\begin{aligned} d\mathbf{Z}_1(s) &= [\mathcal{A}_1^+(s) \mathbf{Z}_1(s) + \mathbf{c}_1^+(s)] ds + \\ &+ [[\mathcal{B}_1^+(s)] :: \mathbf{Z}_1(s) + \mathcal{G}_1^+(s)] \circ d\mathbf{W}_1^+(s), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathbf{Z}_1(0) = \text{col}(\mathbf{Z}_0(0), \mathbf{X}_0(\tau), \mathbf{O}_{2n}, \mathbf{U}_0(\tau), \mathbf{V}_0(\tau)), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathcal{A}_0^+(s) & \mathcal{O}_{n_4 \times n_5} \\ \mathcal{A}_{121}^+ & \mathcal{A}_{122}^+ \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A}_{121}^+ &= \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{R}(s_1) & -\mathcal{Q}(s_1) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{O}_{n_4 \times n} & \mathcal{O}_{n_4 \times n} & \mathcal{O}_{n_4 \times n} & \mathcal{O}_{n_4 \times n} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A}_{122}^+ &= \begin{bmatrix} \mathcal{A}(s_1) & \mathcal{Q}(s_1) & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{Q}(s_1) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \Phi(s_1) & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \Psi(s_1) & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{O}_{n_2 \times n} & \mathcal{O}_{n_2 \times n} & \mathcal{O}_{n_2 \times n} & \mathcal{O}_{n_2 \times n} & \mathcal{O}_{n_2 \times n} \end{bmatrix}, \\ [\mathcal{B}_1^+(s)] &= \begin{bmatrix} [\mathcal{B}_{111}^+] & [\mathcal{O}]_{n_4 \times m \times r_1} \\ [[\mathcal{O}]_{n_5 \times m \times r_1} & [\mathcal{B}_{122}^+] \end{bmatrix}, \\ [\mathcal{B}_{111}^+] &= [\mathcal{B}_0^+(s)] \ddagger [\mathcal{O}]_{n_4 \times m \times n_5}, \\ [\mathcal{B}_{122}^+] &= \begin{bmatrix} [[\mathcal{O}]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\mathcal{H}(s_1)] \\ [[\mathcal{O}]_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [[\mathcal{O}]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \ddagger \begin{bmatrix} -\llbracket \mathcal{J}(s_1) \rrbracket \\ \llbracket \mathcal{O} \rrbracket_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} \llbracket \mathcal{B}(s_1) \rrbracket \\ \llbracket \mathcal{O} \rrbracket_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} \llbracket \mathcal{O} \rrbracket_{n \times m \times n} \\ \llbracket \mathcal{O} \rrbracket_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \\ & \ddagger \begin{bmatrix} \llbracket \mathcal{J}(s_1) \rrbracket \\ \llbracket \mathcal{O} \rrbracket_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} \llbracket \mathcal{O} \rrbracket_{n \times m \times n} \\ \llbracket \mathcal{O} \rrbracket_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} \llbracket \mathcal{J}(s_1) \rrbracket \\ \llbracket \mathcal{O} \rrbracket_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{c}_1^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0^+(s) \\ \mathbf{c}(s_1) \\ \mathbf{O}_{n_4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0^+(s) & \mathbf{O}_{n_4 \times m} \\ \mathbf{O}_{n \times m} & \mathbf{g}(s_1) \\ \mathbf{O}_{n_4 \times m} & \mathbf{O}_{n_4 \times m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_0^+(s) \\ \mathbf{W}_1(s) \end{bmatrix}, \\ & r_1 = n_4 + n_5 = 9, \quad q_1 = 2m. \end{aligned}$$

Как и выше, сравниваем структуры уравнений (19), (20) и (3), (4) и заключаем, что эти системы идентичны, если

$$\begin{aligned} r = r_1, \quad q = q_1, \quad s_* = 0, \quad s^* = \tau, \quad \underline{\mathbf{A}}(s) &= \mathbf{A}_1^+(s), \\ \underline{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}_1^+(s), \quad \llbracket \underline{\mathbf{B}}(s) \rrbracket &= \llbracket \mathbf{B}_1^+(s) \rrbracket, \quad \underline{\mathbf{g}}(s) = \mathbf{g}_1^+(s). \end{aligned}$$

Это позволяет построить ФПК-уравнение и начальное условие для плотности вероятности $p_{Z_1}(\mathbf{z}_1, s)$ расширенного вектора состояния $\mathbf{Z}_1(s)$ в следующем виде:

$$\frac{\partial p_{Z_1}}{\partial s} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r \frac{\partial^2 (\tilde{b}_{1ij} p_{Z_1})}{\partial z_{1i} \partial z_{1j}} - \sum_{i=1}^r \frac{\partial (\tilde{a}_{1i} p_{Z_1})}{\partial z_{1i}}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} p_{Z_1}(\mathbf{z}_1, 0) &\equiv p_{Z_1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1^*, \mathbf{v}_1^*, 0) = \\ &= p_{Z_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1^*, \mathbf{v}_1^*, \tau) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \delta(\mathbf{u}_0) \delta(\mathbf{v}_0) \delta(\mathbf{u}_1) \delta(\mathbf{v}_1). \end{aligned}$$

Очевидно, что коэффициенты \tilde{a}_{1i} и \tilde{b}_{1ij} можно найти по формулам (7), (8) как \hat{a}_i и \hat{b}_{ij} соответственно.

Теперь мы можем построить явный вид уравнений (9) и (10). А заканчивается этот шаг фиксацией начальных условий для $\mathbf{m}_{Z_1}(s)$ и $\mathcal{D}_{Z_1 Z_1}(s)$ для $\mathbf{Z}_1(s)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{Z_1}(0) &= \text{col}(\mathbf{m}_{Z_0}(0), \mathbf{m}_{X_0}(\tau), \mathbf{O}_{n_2}, \mathbf{m}_{U_0}(\tau), \mathbf{m}_{V_0}(\tau)), \\ \mathcal{D}_{Z_1 Z_1}(0) &= \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{Z_0 Z_0}(0) & \mathcal{D}_{112} \\ \mathcal{D}_{121} & \mathcal{D}_{122} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\mathcal{D}_{112} = (\mathcal{D}_{121})^\top = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{Y X_0}(\tau) & \mathbf{O}_{n \times n_2} & \mathcal{D}_{Y U_0}(\tau) & \mathcal{D}_{Y V_0}(\tau) \\ \mathcal{D}_{Y X_0}(\tau) & \mathbf{O}_{n \times n_2} & \mathcal{D}_{Y U_0}(\tau) & \mathcal{D}_{Y V_0}(\tau) \\ \mathbf{O}_{n_2 \times n} & \mathbf{O}_{n_2 \times n_2} & \mathbf{O}_{n_2 \times n} & \mathbf{O}_{n_2 \times n} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\mathbf{D}_{122} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{X_0X_0}(\tau) & \mathbf{O}_{n \times n_2} & \mathbf{D}_{X_0U_0}(\tau) & \mathbf{D}_{X_0V_0}(\tau) \\ \mathbf{O}_{n_2 \times n} & \mathbf{O}_{n_2 \times n_2} & \mathbf{O}_{n_2 \times n} & \mathbf{O}_{n_2 \times n} \\ \mathbf{D}_{U_0X_0}(\tau) & \mathbf{O}_{n \times n_2} & \mathbf{D}_{U_0U_0}(\tau) & \mathbf{D}_{U_0V_0}(\tau) \\ \mathbf{D}_{V_0X_0}(\tau) & \mathbf{O}_{n \times n_2} & \mathbf{D}_{V_0U_0}(\tau) & \mathbf{D}_{V_0V_0}(\tau) \end{bmatrix},$$

– и оценкой $\mathbf{m}_{Z_1}(s)$ как $\underline{\mathbf{m}}_Z(s)$ и $\mathbf{D}_{Z_1Z_1}(s)$ как $\underline{\mathbf{D}}_{ZZ}(s)$.

... ..

N°. Обозначая через $\mathbf{Z}_N(s)$ вектор $\text{col}(\mathbf{Z}_{N-1}(s), \mathbf{X}_N(s), \mathbf{U}_N(s), \mathbf{V}_N(s), \mathbf{U}_N^*(s), \mathbf{V}_N^*(s))$, находим, что вектор $\mathbf{Z}_N(s)$, замещающий векторный случайный процесс $\mathbf{X}(t)$ и представляющий состояние исследуемой стохастической системы на полуинтервалах $\Delta_0, \Delta_0, \dots, \Delta_N$, будет решением системы СО-ДУ, полученной добавлением к уравнениям для вектора $\mathbf{Z}_{N-1}(s)$ уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} d\mathbf{X}_N(s) &= \left[\mathbf{A}(s_N) \mathbf{X}_N(s) + \mathbf{R}(s_N) \mathbf{X}_{N-1}(s) + \right. \\ &+ \mathbf{Q}(s_N) \{ \mathbf{U}_N^*(s) - \mathbf{U}_{N-1}(s) + \mathbf{U}_N(s) \} + \mathbf{c}(s_N) \left. \right] ds + \\ &+ \left[\mathbf{B}(s_N) \mathbf{X}_N(s) + \mathbf{H}(s_N) \mathbf{X}_{N-1}(s) + \right. \\ &+ \mathbf{J}(s_N) \{ \mathbf{V}_N^*(s) - \mathbf{V}_{N-1}(s) + \mathbf{V}_N(s) \} + \mathbf{g}(s_N) \left. \right] \circ d\mathbf{W}_N(s), \\ \mathbf{X}_N(0) &= \mathbf{X}_{N-1}(\tau), \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{U}_N(s) &= \mathbf{\Phi}(s_N) \mathbf{X}_N(s) ds, & \mathbf{U}_N(0) &= \mathbf{O}_n, \\ d\mathbf{V}_N(s) &= \mathbf{\Psi}(s_N) \mathbf{X}_N(s) ds, & \mathbf{V}_N(0) &= \mathbf{O}_n, \\ d\mathbf{U}_N^*(s) &= \mathbf{O}_n ds, & \mathbf{U}_N^*(0) &= \mathbf{U}_{N-1}(\tau), \\ d\mathbf{V}_N^*(s) &= \mathbf{O}_n ds, & \mathbf{V}_N^*(0) &= \mathbf{V}_{N-1}(\tau) \end{aligned}$$

с учетом того, что для $t \in (t_N, t_{N+1}]$ при $\mathbf{r} = \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi}$

$$\begin{aligned} \int_{t-\tau}^t \mathbf{r}(\theta) \mathbf{X}(\theta) d\theta &= \int_{t-\tau}^{t_N} \mathbf{r}(\theta) \mathbf{X}(\theta) d\theta + \int_{t_N}^t \mathbf{r}(\theta) \mathbf{X}(\theta) d\theta = \\ &= \int_{t_{N-1}}^{t_N} \mathbf{r}(\theta) \mathbf{X}(\theta) d\theta - \int_{t_{N-1}}^{t-\tau} \mathbf{r}(\theta) \mathbf{X}(\theta) d\theta + \int_{t_N}^t \mathbf{r}(\theta) \mathbf{X}(\theta) d\theta = \\ &= \int_0^\tau \mathbf{r}(t_{N-1} + \theta) \mathbf{X}_{N-1}(\theta) d\theta - \int_0^s \mathbf{r}(t_{N-1} + \theta) \mathbf{X}_{N-1}(\theta) d\theta + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^s \mathbf{r}(t_N + \theta) \mathbf{X}_N(\theta) d\theta = \begin{cases} \mathbf{U}_{N-1}^*(\tau) - \mathbf{U}_{N-1}(s) + \mathbf{U}_N(s), & \mathbf{r} = \Phi, \\ \mathbf{V}_{N-1}^*(\tau) - \mathbf{V}_{N-1}(s) + \mathbf{V}_N(s), & \mathbf{r} = \Psi. \end{cases}$$

Действуя так же, как и выше, мы можем записать компактную форму уравнений (24):

$$d\mathbf{Z}_N(s) = [\mathbf{A}_N^+(s) \mathbf{Z}_N(s) + \mathbf{c}_N^+(s)] ds + [[\mathbf{B}_N^+(s)] :: \mathbf{Z}_N(s) + \mathbf{g}_N^+(s)] \circ d\mathbf{W}_N^+(s), \quad (25)$$

$$\mathbf{Z}_N(0) = \text{col}(\mathbf{Z}_{N-1}(0), \mathbf{X}_{N-1}(\tau), \mathbf{O}_{2n}, \mathbf{U}_{N-1}(\tau), \mathbf{V}_{N-1}(\tau)), \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_N^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{N-1}^+(s) & \mathcal{O}_{(r_N-n_5) \times n_5} \\ \mathbf{A}_{N21}^+ & \mathbf{A}_{N22}^+ \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{N21}^+ &= \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{n \times r_{N-2}} & \mathcal{R}(s_N) & -\mathcal{Q}(s_N) & \mathcal{O}_{n \times n_3} \\ \mathcal{O}_{n_4 \times r_{N-2}} & \mathcal{O}_{n_4 \times n} & \mathcal{O}_{n_4 \times n} & \mathcal{O}_{n_4 \times n_3} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{N22}^+ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}(s_N) & \mathcal{Q}(s_N) & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{Q}(s_N) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \Phi(s_N) & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \Psi(s_N) & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{O}_{n_2 \times n} & \mathcal{O}_{n_2 \times n} & \mathcal{O}_{n_2 \times n} & \mathcal{O}_{n_2 \times n} & \mathcal{O}_{n_2 \times n} \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{B}_N^+(s)] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_{N11}^+] & [\mathcal{O}]_{r_{N-1} \times m \times r_N} \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times q_{N-1} \times r_N} & [\mathbf{B}_{N22}^+] \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{B}_{N11}^+] &= [\mathbf{B}_{N-1}^+(s)] \ddagger [\mathcal{O}]_{r_{N-1} \times r_{N-1} \times n_5}, \\ [\mathbf{B}_{N22}^+] &= \begin{bmatrix} [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times r_{N-2}} \\ [[\mathcal{O}]]_{n_4 \times m \times r_{N-2}} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [[\mathcal{H}(s_N)]] \\ [[\mathcal{O}]]_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \\ &\ddagger \begin{bmatrix} [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]]_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} -[[\mathcal{J}(s_N)]] \\ [[\mathcal{O}]]_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]]_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \\ &\ddagger \begin{bmatrix} [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]]_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [[\mathcal{B}(s_N)]] \\ [[\mathcal{O}]]_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]]_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \\ &\ddagger \begin{bmatrix} [[\mathcal{J}(s_N)]] \\ [[\mathcal{O}]]_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]]_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [[\mathcal{J}(s_N)]] \\ [[\mathcal{O}]]_{n_4 \times m \times n} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{c}_N^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{N-1}^+(s) \\ \mathbf{c}(s_N) \\ \mathbf{O}_{n_4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{N-1}^+(s) & \mathcal{O}_{r_{N-1} \times m} \\ \mathcal{O}_{n \times q_{N-1}} & \mathbf{g}(s_N) \\ \mathcal{O}_{n_4 \times q_{N-1}} & \mathcal{O}_{n_4 \times m} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{W}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{N-1}^+(s) \\ \mathbf{W}_N(s) \end{bmatrix}, \quad r_N = n_4 + 5 N n, \quad q_N = m (N + 1).$$

Сравнивая структуры уравнений (25), (26) и (3), (4), можно заключить, что эти системы идентичны, если

$$\begin{aligned} r &= r_N, & q &= q_N, & s_* &= 0, & s^* &= \tau, & \underline{\mathbf{A}}(s) &= \underline{\mathbf{A}}_N^+(s), \\ \underline{\mathbf{c}}(s) &= \underline{\mathbf{c}}_N^+(s), & \llbracket \underline{\mathbf{B}}(s) \rrbracket &= \llbracket \underline{\mathbf{B}}_N^+(s) \rrbracket, & \underline{\mathbf{g}}(s) &= \underline{\mathbf{g}}_N^+(s). \end{aligned}$$

Отсюда ФПК-уравнение и начальное условие для плотности вероятности $p_{Z_N}(\mathbf{z}_N, s)$ расширенного вектора состояния $\mathbf{Z}_N(s)$ примут следующую форму:

$$\frac{\partial p_{Z_N}}{\partial s} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r \frac{\partial^2 (\tilde{b}_{Nij} p_{Z_N})}{\partial z_{Ni} \partial z_{Nj}} - \sum_{i=1}^r \frac{\partial (\tilde{a}_{Ni} p_{Z_N})}{\partial z_{Ni}}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} p_{Z_N}(\mathbf{z}_N, 0) &\equiv p_{Z_N}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1^*, \mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}, \mathbf{v}_{N-1}, \\ &\quad \mathbf{u}_{N-1}^*, \mathbf{v}_{N-1}^*, \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N, \mathbf{u}_N^*, \mathbf{v}_N^*, 0) = \\ &= p_{Z_{N-1}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1^*, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{v}_2^*, \mathbf{u}_1^*, \mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N^*, \mathbf{v}_N^*, \mathbf{u}_{N-1}^*, \mathbf{v}_{N-1}^*, \tau) \times \\ &\quad \times \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \prod_{\ell=0}^N [\delta(\mathbf{u}_\ell) \delta(\mathbf{v}_\ell)]. \end{aligned}$$

Очевидно, что коэффициенты \tilde{a}_{Ni} и \tilde{b}_{Nij} можно найти по формулам (7), (8) как \hat{a}_i и \hat{b}_{ij} соответственно.

Теперь уже все есть для того, чтобы построить явный вид уравнений (9) и (10). А закончим этот шаг доопределением начальных условий для $\mathbf{m}_{Z_N}(s)$ и $\mathcal{D}_{Z_N Z_N}(s)$ для $\mathbf{Z}_N(s)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{Z_N}(0) &= \text{col}(\mathbf{m}_{Z_{N-1}}(0), \mathbf{m}_{X_{N-1}}(\tau), \mathbf{O}_{n_2}, \mathbf{m}_{U_{N-1}}(\tau), \mathbf{m}_{V_{N-1}}(\tau)), \\ \mathcal{D}_{Z_N Z_N}(0) &= \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{Z_{N-1} Z_{N-1}}(0) & \mathcal{D}_{N12} \\ \mathcal{D}_{N21} & \mathcal{D}_{N22} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_{N12} = (\mathcal{D}_{N21})^\top = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{N120} \\ \mathcal{D}_{N121} \\ \dots \\ \mathcal{D}_{N12, N-1} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{D}_{N120} &= \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{YX_{N-1}}(\tau) & \mathbf{O}_{n \times n_2} & \mathcal{D}_{YU_{N-1}}(\tau) & \mathcal{D}_{YV_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{D}_{YX_{N-1}}(\tau) & \mathbf{O}_{n \times n_2} & \mathcal{D}_{YU_{N-1}}(\tau) & \mathcal{D}_{YV_{N-1}}(\tau) \\ \mathbf{O}_{n_2 \times n} & \mathbf{O}_{n_2 \times n_2} & \mathbf{O}_{n_2 \times n} & \mathbf{O}_{n_2 \times n} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{N121} &= \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{X_0 X_{N-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n_2} & \mathcal{D}_{X_0 U_{N-1}}(\tau) & \mathcal{D}_{X_0 V_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{O}_{n_2 \times n} & \mathcal{O}_{n_2 \times n_2} & \mathcal{O}_{n_2 \times n} & \mathcal{O}_{n_2 \times n} \\ \mathcal{D}_{U_0 X_{N-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n_2} & \mathcal{D}_{U_0 U_{N-1}}(\tau) & \mathcal{D}_{U_0 V_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{D}_{V_0 X_{N-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n_2} & \mathcal{D}_{V_0 U_{N-1}}(\tau) & \mathcal{D}_{V_0 V_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix}, \quad (28) \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 \mathcal{D}_{N12, N-1} &= \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{X_{N-2} X_{N-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n_2} & \mathcal{D}_{X_{N-2} U_{N-1}}(\tau) & \mathcal{D}_{X_{N-2} V_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{O}_{n_2 \times n} & \mathcal{O}_{n_2 \times n_2} & \mathcal{O}_{n_2 \times n} & \mathcal{O}_{n_2 \times n} \\ \mathcal{D}_{U_{N-2} X_{N-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n_2} & \mathcal{D}_{U_{N-2} U_{N-1}}(\tau) & \mathcal{D}_{U_{N-2} V_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{D}_{V_{N-2} X_{N-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n_2} & \mathcal{D}_{V_{N-2} U_{N-1}}(\tau) & \mathcal{D}_{V_{N-2} V_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{D}_{N22} &= \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{X_{N-1} X_{N-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n_2} & \mathcal{D}_{X_{N-1} U_{N-1}}(\tau) & \mathcal{D}_{X_{N-1} V_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{O}_{n_2 \times n} & \mathcal{O}_{n_2 \times n_2} & \mathcal{O}_{n_2 \times n} & \mathcal{O}_{n_2 \times n} \\ \mathcal{D}_{U_{N-1} X_{N-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n_2} & \mathcal{D}_{U_{N-1} U_{N-1}}(\tau) & \mathcal{D}_{U_{N-1} V_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{D}_{V_{N-1} X_{N-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n_2} & \mathcal{D}_{V_{N-1} U_{N-1}}(\tau) & \mathcal{D}_{V_{N-1} V_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

– и вычислением $\mathbf{m}_{Z_N}(s)$, $\mathcal{D}_{Z_N Z_N}(s)$ в форме $\underline{\mathbf{m}}_Z(s)$, $\underline{\mathcal{D}}_{ZZ}(s)$ соответственно.

5 Пример

Рассмотрим следующую модельную колебательную стохастическую систему, записанную в нестрогой форме:

$$\begin{aligned}
 \ddot{X}(t) &= 0, \quad -\tau < t \leq 0, \quad (29) \\
 \ddot{X}(t) &+ 2 \left[\alpha_1 \dot{X}(t) + \alpha_2 \dot{X}(t - \tau) + \alpha_3 \int_{t-\tau}^t \phi_1(\theta) \dot{X}(\theta) d\theta \right] + \\
 &+ \omega_0^2 \left[\beta_1 X(t) + \beta_2 X(t - \tau) + \beta_3 \int_{t-\tau}^t \phi_2(\theta) X(\theta) d\theta \right] = \\
 &= \left[\gamma_0 + \gamma_1 X(t) + \gamma_2 X(t - \tau) + \gamma_3 \int_{t-\tau}^t \psi(\theta) X(\theta) d\theta \right] \dot{W}(t), \\
 &0 < t \leq T, \quad (30)
 \end{aligned}$$

где $\omega_0 > 0$, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$), γ_0 – постоянные, $N \in \mathbb{N}$, $N < +\infty$, $T = (N+1)\tau$. Обозначая $X(t)$ через $X_1(t)$ и $\dot{X}(t)$ через $X_2(t)$, можно записать

уравнения (29), (30) в виде (1), (2). В этом случае

$$n = 2, \quad m = 1, \quad t_0 = -\tau, \quad \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_0 = \mathbf{O}_2, \quad [\mathbf{B}_0] = [\mathbf{O}]_{2 \times 1 \times 2}, \quad \mathbf{g}_0 = \mathbf{O}_{2 \times 1},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta_1 \omega_0^2 & -2\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta_2 \omega_0^2 & -2\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\beta_3 \omega_0^2 & -2\alpha_3 \end{bmatrix},$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_2(\theta) & 0 \\ 0 & \phi_1(\theta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{O}_2, \quad [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{J}(t)] = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi(\theta) = \begin{bmatrix} \psi(\theta) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}.$$

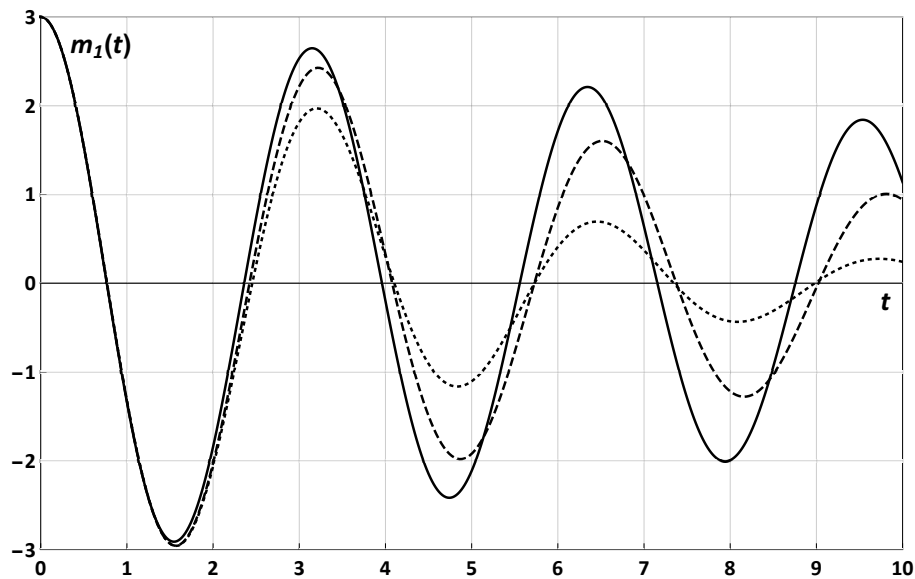


Рис. 1

В предположении, что $p^0(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}; \mathbf{m}_X^0, \mathbf{D}_{XX}^0)$, расчеты статистических характеристик вектора $\mathbf{X}(t)$ проводились для различных значений констант и начальных условий, включая следующие:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0,15; & \beta_1 &= 1,00; & \gamma_1 &= 0,10; \\ \alpha_2 &= -0,05; & \beta_2 &= 0,10; & \gamma_2 &= 0,15; \\ \alpha_3 &= 0,05; & \beta_3 &= 0,05; & \gamma_3 &= -0,15; \end{aligned}$$

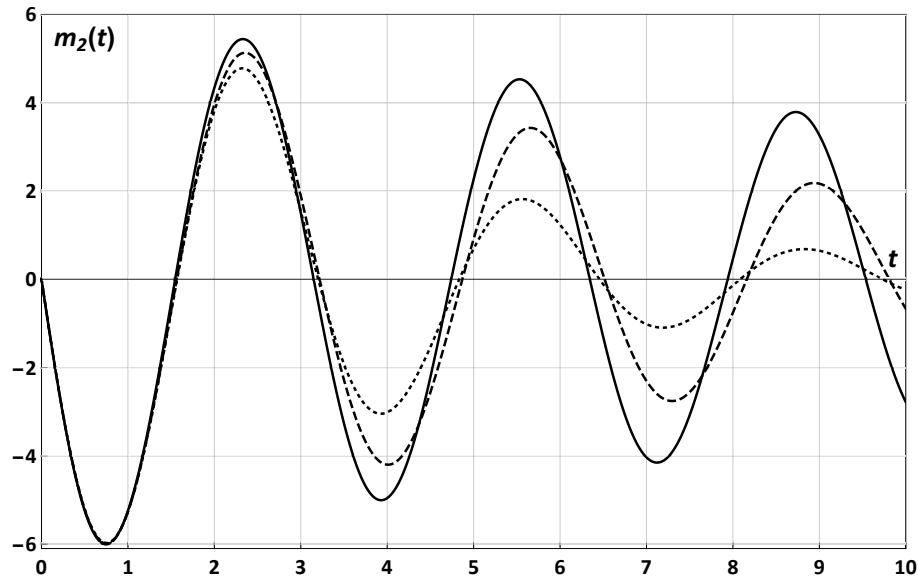


Рис. 2

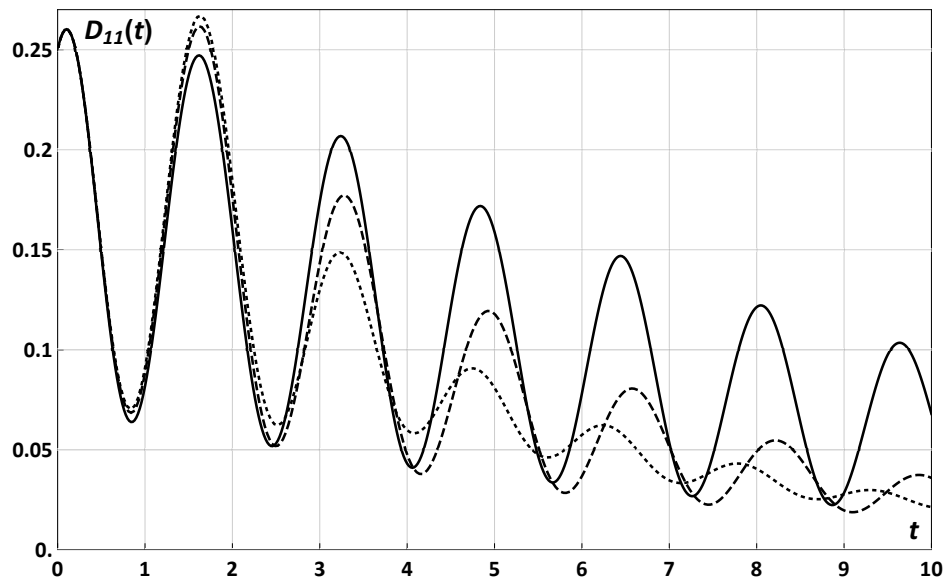


Рис. 3

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 0,1; & \omega_0 &= 2,0; & \tau &\in \{1,0; 1,5; 2,0\}; & T &= 10,0; \\ \phi_1(\theta) &= \frac{2\theta}{\tau^2}, & \phi_2(\theta) &= \frac{2(\tau - \theta)}{\tau^2}, & \psi(\theta) &= \frac{2(\tau - |2\theta - \tau|)}{\tau^2}, & \theta &\in [0, \tau]; \\ \mathbf{m}_X^0 &= \begin{bmatrix} 3,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}; & \mathbf{D}_{XX}^0 &= \begin{bmatrix} 0,25 & 0,10 \\ 0,10 & 0,16 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Результаты этих расчетов для приведенных выше значений данных представлены на рис. 1–5. Типы линий (непрерывная, штриховая, пунктирная) соответствуют длинам запаздываний в указанном в перечне данных порядке.

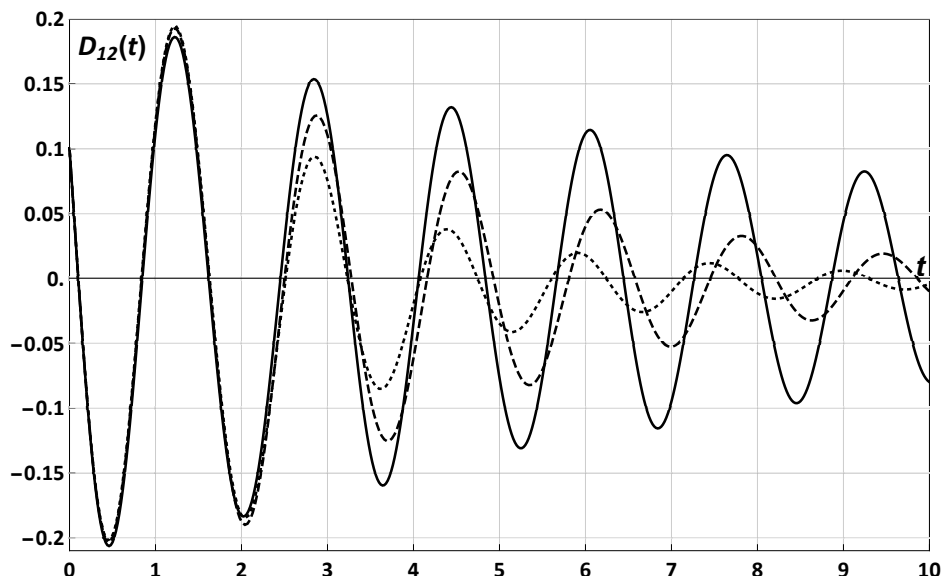


Рис. 4

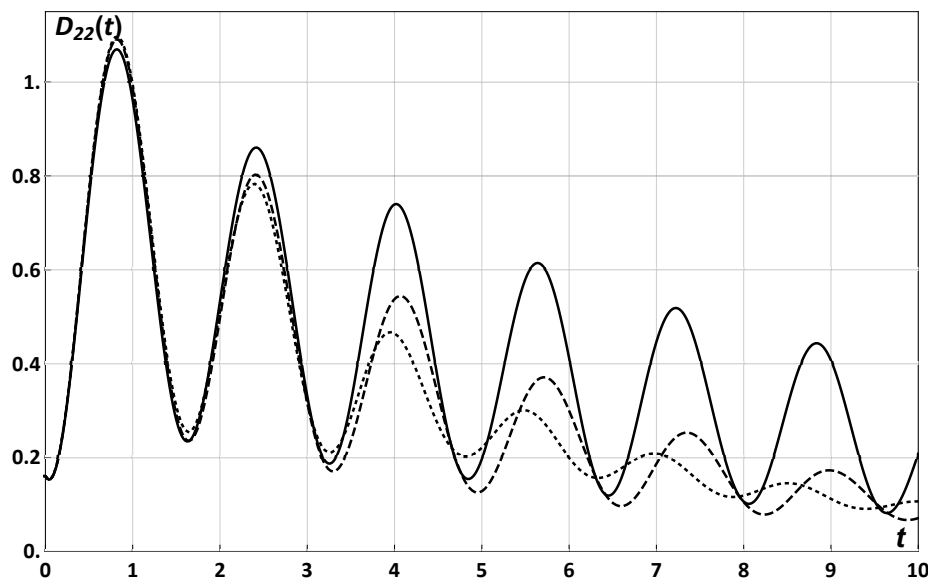


Рис. 5

Рис. 1 и 2 показывают динамику изменения функций математического ожидания $m_{X_1}(t)$ и $m_{X_2}(t)$, рис. 3–5 демонстрируют поведение центральных моментов второго порядка, а именно, $\mathcal{D}_{X_1X_1}(t)$, $\mathcal{D}_{X_1X_2}(t)$ и $\mathcal{D}_{X_2X_2}(t)$. Символьная генерирование ОДУ для моментных функций и их численное интегрирование были выполнены в среде пакета компьютерной алгебры *Mathematica* [40].

6 Заключение

В статье рассмотрена новая схема, упрощающая исследование линейных параметрических стохастических систем с конечными сосредоточенными и распределенными запаздываниями. На основе сочетания классического метода шагов и расширения пространства состояний построена цепочка систем линейных параметрических СОДУ (13), (18) и (24) для расширенных векторов состояния увеличивающейся размерности и сходной структуры без запаздывания. Для дальнейшего исследования поведения этих векторов применимы как стандартные для различных классов СОДУ методы [6, 11], включающие как прямые методы численного интегрирования СОДУ, так и косвенные – для вычисления моментных характеристик случайного процесса $\mathbf{X}(t)$. В рассмотренной схеме это может быть выполнено на основе конкретизации полученных ОДУ (9), (10), (11) и (12) с начальными условиями (17), (23) и (28).

При необходимости получения моментных функций более высокого порядка, чем второй, можно использовать комбинацию изложенной выше схемы и алгоритма из работы [12].

Описанная схема может конкурировать с методом статистического моделирования в области расчета функций первого и старших моментов для указанного выше класса систем. Кроме того, результаты применения схемы можно использовать для проверки качества новых алгоритмов численного интегрирования СОДУ с запаздыванием, поскольку в нашей схеме нет ошибки метода, а погрешность в вычислениях может быть уменьшена путем выбора наиболее эффективного интегратора для систем ОДУ без запаздывания.

Список литературы

- [1] *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.
- [2] *Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е.* Управление системами с последствием. М.: Наука, 1992. 336 с.
- [3] *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

- [4] Колмановский В.Б., Майзенберг Т.Л. Оптимальное управление стохастическими системами с последствием // Автоматика и телемеханика. 1973. № 1. С. 47–61.
- [5] Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. 4-е изд. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. XXX+786 с.
- [6] Маланин В.В., Полосков И.Е. Методы и практика анализа случайных процессов в динамических системах: учеб. пособие. Ижевск: РХД, 2005. 296 с.
- [7] Полосков И.Е. Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С. 58–73.
- [8] Полосков И.Е. Об анализе некоторых классов стохастических интегродифференциальных уравнений // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2003. С. 99–106.
- [9] Полосков И.Е. Об одном методе приближенного анализа линейных стохастических интегродифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 9. С. 1276–1279.
- [10] Полосков И.Е. О расчете первых моментов линейных интегродифференциальных систем с параметрическими возмущениями // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2006. Вып. 38. С. 133–142.
- [11] Полосков И.Е. Стохастический анализ динамических систем [Электронный ресурс]: монография. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2016. 772 с.
- [12] Полосков И.Е. Расчет старших моментов вектора состояний линейной стохастической дифференциальной системы с запаздыванием, возбуждаемой аддитивными и мультипликативными белыми шумами // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2018. Вып. 50. С. 73–94.
- [13] Рубаник В.П. Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием. Мн.: Изд-во "Университетское", 1985. 143 с.

- [14] *Соколов Н.П.* Введение в теорию многомерных матриц. Киев: Наукова думка, 1972. 176 с.
- [15] *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига: Зинатне, 1989. 421 с.
- [16] *Шампайн Л.Ф., Гладвел И., Томпсон С.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием MATLAB: учеб. пособие. СПб.: Изд-во "Лань", 2009. 304 с.
- [17] *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
- [18] *Adimy M., Crauste F., Halanay A. et al.* Stability of limit cycles in a pluripotent stem cell dynamics model // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2006. Vol. 27, № 4. P. 1091–1107.
- [19] *Banks H.T., Dediu S., Nguyen H.K.* Time delay systems with distribution dependent dynamics // *Annual Reviews in Control*. 2007. Vol. 31, № 1. P. 17–26.
- [20] *Bellen A., Zennaro M.* Numerical methods for delay differential equations. Oxford: Oxford University Press, 2003. XIV+395 p.
- [21] *Boukas El-K., Liu Zi-K.* Deterministic and stochastic time delay systems. Boston: Birkhäuser, 2002. XVI+423 p.
- [22] *Buckwar E.* Introduction to the numerical analysis of stochastic delay differential equations // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2000. Vol. 125, № 1–2. P. 297–307.
- [23] *Buckwar E.* Euler–Maruyama and Milstein approximations for stochastic functional differential equations with distributed memory term // *SFB 373 Discussion Papers: Humboldt University of Berlin, Interdisciplinary Research Project 373*. 2003. № 16. 24 p.
- [24] *Cao Y., Cerezo G., Herdman T.L., Turi J.* Singularity expansion for a class of neutral equations // *Journal of Integral Equations and Applications*. 2007. Vol. 19, № 1. P. 13–32.
- [25] *Chekroun M.D., Kröner A., Liu H.* Galerkin approximations of nonlinear optimal control problems in Hilbert spaces // *Electronic Journal of Differential Equations (Texas State University)*. 2017. Vol. 2017 (189). P. 1–40.

- [26] *Chocholatý P.* Integro-differential equations with time-varying delay // Programs and Algorithms of Numerical Mathematics: Proc. of Seminar / J. Chleboun, K. Segeth, J. Šístek, and T. Vejchodský (eds.). Prague: Institute of Mathematics AS CR, 2013. P. 51–56.
- [27] *Cushing J.M.* Integrodifferential equations and delay models in population dynamics. Berlin, Heidelberg: Springer, 1977. VI+198 p.
- [28] *Gozzi F., Marinelli C., Savin S.* On controlled linear diffusions with delay in a model of optimal advertising under uncertainty with memory effects // arXiv:math/0701580. 2008. 27 p.
- [29] *Hale J.K., Lunel S.M.V.* Introduction to functional differential equations. New York: Springer, 1993. X+450 p.
- [30] *Hopkins T.* Numerical solution of stochastic delay integrodifferential equations in population dynamics. Masters Thesis. Texas Tech University, 2004.
- [31] *Horvat V.* On polynomial spline collocation methods for neutral Volterra integro-differential equations with delay arguments // Proc. of the 1th Conf. on Applied Mathematics and Computation. Dubrovnik, 1999. P. 113–128.
- [32] *Huang C., Vandewalle S.* Stability of Runge–Kutta–Pouzet methods for Volterra integro-differential equations with delays // Frontiers of Mathematics in China. 2009. Vol. 4, № 1. P. 63–87.
- [33] *Kim B.M., Tsuruta K.* Retarded resolvent operators for linear retarded functional differential equations in a Banach space // Japanese Journal of Mathematics. 1994. Vol. 20, № 2. P. 319–363.
- [34] *Kloeden P.E., Platen E., Schurz H.* Numerical solution of SDE through computer experiments. Berlin: Springer, 2003. XIV+294 p.
- [35] *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Applied theory of functional differential equations: Mathematics and its applications. Dordrecht: Springer, 1992. XVI+234 p.
- [36] *Koto T.* Stability of θ -methods for delay integro-differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2003. Vol. 161, № 2. P. 393–404.
- [37] *Küchler U., Platen E.* Strong discrete time approximation of stochastic differential equations with time delay // Mathematics and Computers in Simulation. 2000. Vol. 54, № 1–3. P. 189–205.

- [38] *Kushner H.J.* Numerical methods for controlled stochastic delay systems. Boston: Birkhauser, 2008. XIX+281 p.
- [39] *Longtin A., Milton J.G., Bos J.E., Mackey M.C.* Noise and critical behavior of the pupil light reflex at oscillation onset // *Physical Review A*. 1990. Vol. 41, № 12. P. 6992–7005.
- [40] *Mangano S.* Mathematica cookbook. Cambridge: O'Reilly, 2010. XXIV+800 p.
- [41] *Mao X.* Stochastic differential equations and applications. 2nd ed. Cambridge, UK: Woodhead Publishing, 2011. XVIII+422 p.
- [42] *Milstein G.N., Tretyakov M.V.* Stochastic numerics for mathematical physics. Berlin: Springer, 2004. XIX+594 p.
- [43] *Mohammed S.E.A.* Stochastic functional differential equations. Boston, London: Pitman Publishing, 1984. IX+245 p.
- [44] *Niu Yu., Zhang Ch., Duan J.* A delay-dependent stability criterion for nonlinear stochastic delay-integro-differential equations // *Acta Mathematica Scientia*. 2011. Vol. 31, № 5. P. 1813–1822.
- [45] *Padgett W.J., Tsokos C.P.* Stochastic integro-differential equations of Volterra type // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1972. Vol. 23, № 4. P. 499–512.
- [46] *Poloskov I.E.* Symbolic-numeric algorithms for analysis of stochastic systems with different forms of aftereffect // *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM)*. 2007. Vol. 7, № 1. P. 2080011–2080012.
- [47] *Poloskov I.E.* Numerical and analytical methods of study of stochastic systems with delay // *Journal of Mathematical Sciences*. 2018. Vol. 230, № 5. P. 746–750.
- [48] *Poloskov I.E., Soize C.* Symbolic and numeric scheme for solution of linear integro-differential equations with random parameter uncertainties and Gaussian stochastic process input // *Applied Mathematical Modelling*. 2018. Vol. 56, April. P. 15–31.
- [49] *Shaikhet L.E., Roberts J.* Reliability of difference analogues to preserve stability properties of stochastic Volterra integro-differential equations // *Advances in Difference Equations*. 2006. Vol. 2006. Article ID 73897. P. 1–22.

- [50] *Shakourifar M., Enright W.H.* Reliable approximate solution of systems of Volterra integro-differential equations with time-dependent delays // SIAM Journal on Scientific Computing. 2011. Vol. 33, № 3. P. 1134–1158.
- [51] *Soize C., Poloskov I.* Time-domain formulation in computational dynamics for linear viscoelastic media with model uncertainties and stochastic excitation // Computers & Mathematics with Applications. 2012. Vol. 64, № 11. P. 3594–3612.
- [52] *Touboul J.* Propagation of chaos in neural fields // Annals of Applied Probability. 2014. Vol. 24, №3. P. 1298–1328.
- [53] *Twardowska K., Marnik T., Paławska-Południak M.* Approximation of the Zakai equation in a nonlinear filtering problem with delay // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. 2003. Vol. 13, № 2. P. 151–160.
- [54] *Wang Z., Liu Y., Fraser K., Liu X.* Stochastic stability of uncertain Hopfield neural networks with discrete and distributed delays // Physics Letters A. 2006. Vol. 354, № 4. P. 288–297.
- [55] *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer, 1996. X+432 p.
- [56] *Wu Q., Hu L., Zhang Z.* Convergence and stability of balanced methods for stochastic delay integro-differential equations // Applied Mathematics and Computation. 2014. Vol. 237. P. 446–460.
- [57] *Zhang Ch., Vandewalle S.* General linear methods for Volterra integro-differential equations with memory // SIAM Journal on Scientific Computing. 2006. Vol. 27, № 6. P. 2010–2031.