ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2011
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Динамические системы на многообразиях

Обратные периодические свойства отслеживания.

А.В. Осипов[1]

Россия, 199178, Санкт-Петербург, 14-я линия В.О. 29Б,
Санкт-Петербургский государственный университет,
математико-механический факультет, лаборатория им. П.Л. Чебышева,
e-mail: osipovav@list.ru

Аннотация.

Рассматриваются обратные периодические свойства отслеживания дискретных динамических систем, порожденных диффеоморфизмами гладких замкнутых многообразий. Показано, что C^1-внутренность множества диффеоморфизмов, обладающих так называемым обратным периодическим свойством отслеживания, совпадает с множеством Ω-устойчивых диффеоморфизмов. Доказана эквивалентность липшицевого обратного периодического свойства отслеживания и гиперболичности замыкания всех периодических точек. Кроме того, установлено, что множество диффеоморфизмов, обладающих липшицевым обратным периодическим свойством отслеживания, у которых периодические точки плотны в неблуждающем множестве, совпадает с множеством диффеоморфизмов, обладающих аксиомой A.

[1]Работа автора поддержана лабораторией Чебышева (математико-механический факультет СПбГУ), грант 11.G34.31.0026 правительства Российской Федерации, и программой Леонарда Эйлера, финансируемой Германской Службой Академических Обменов (DAAD).

1 Введение. Основные определения. Формулировка результатов.

Теория отслеживания изучает проблему близости приближенных и точных траекторий динамических систем на неограниченных временных промежутках. Так как понятия приближенной траектории и близости можно формализовывать по разному, рассматривают различные свойства отслеживания (см. монографии [1, 2]). Задача о классических свойствах отслеживания неформально формулируется так: верно ли, что любая достаточно точная приближенная траектория динамической системы близка к некоторой истинной? В работе [3] была впервые рассмотрена обратная задача, которая неформально может быть сформулирована так: пусть имеется метод (псевдометод), порождающий приближенные траектории (псевдотраектории) динамической системы, верно ли, что любая точная траектория близка к какой-то псевдотраектории, порожденной псевдометодом?

В данной работе мы ограничимся дискретными динамическими системами, порожденными C^1-диффеоморфизмами гладких замкнутых многообразий. Одна из задач теории отслеживания — это характеризация множеств диффеоморфизмов, обладающих некоторым свойством отслеживания, или C^1-внутренностей этих множеств. Приходится рассматривать C^1-внутренности во многом потому, что описать сами множества в терминах гиперболической теории динамических систем часто не удается. Для многих свойств отслеживания C^1-внутренности множеств диффеоморфизмов, обладающих этими свойствами, совпадают с множеством структурно устойчивых или Ω-устойчивых диффеоморфизмов. К. Сакай (см. [4]) доказал, что C^1-внутренность множества диффеоморфизмов, обладающих стандартным свойством отслеживания, совпадает с множеством структурно устойчивых диффеоморфизмов.

Однако недавно С.Ю. Пилюгин и С.Б. Тихомиров показали [5], что липшицево свойство отслеживания эквивалентно структурной устойчивости, а С.Ю. Пилюгин, С.Б. Тихомиров и автор доказали [6], что так называемое липшицево периодическое свойство отслеживания эквивалентно Ω-устойчивости, и C^1-внутренность множества диффеоморизмов, обладающих периодическим свойством отслеживания, совпадает с множеством Ω-устойчивых диффеоморфизмов. Кроме того, недавно С.Ю. Пилюгин, Д.И.Тодоров и Г.И.Вольфсон (см. [7]) развили технику из работы [5] для доказательства эквивалентности липшицевого обратного свойства отслеживания (для определенных классов псевдометодов) и структурной устойчивости.

При изучении вопроса о том, насколько хорошо истинные траектории приближаются псевдотраекториями, порожденными псевдометодами, необязательно рассматривать все точки фазового пространства. Можно ограничиться каким-нибудь важным инвариантным подмножеством фазового пространства, например, множеством всех периодических точек. Будем называть соответствующие свойства отслеживания обратными периодическими свойствами отслеживания (строгие определения даются ниже). Изучению этих свойств и посвящена данная работа. Сначала мы дадим основные определения, а потом сформулируем результаты.

Пусть M — гладкое замкнутое многообразие с римановой метрикой dist, f — диффеоморфизм многообразия M.

Будем называть последовательность непрерывных отображений $\{\Psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ d-псевдометодом, если

$$\mathrm{dist}(\Psi_k(x), f(x)) \leq d \quad \text{для любых } x \in M. \tag{1}$$

Будем называть последовательность $\theta = \{x_k\} \subset M$ псевдотраекторией, порожденной d-псевдометодом $\Psi = \{\Psi_k\}$, если

$$x_{k+1} = \Psi_k(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Будем говорить, что для диффеоморфизма f выполняется обратное периодическое свойство отслеживания InvPerSh, если для любого положительного числа ϵ найдется такое положительное число d, что для любой периодической точки p и для любого d-псевдометода $\Psi = \{\Psi_k\}$ найдется такая псевдотраектория $\theta = \{x_k\}$, порожденная d-псевдометодом Ψ, что

$$\mathrm{dist}(x_k, f^k(p)) < \epsilon \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

В случае выполнения неравенств (3) будем говорить, что псевдометод $\{\Psi_k\}$ ϵ-отслеживает точку p или точка p ϵ-отслеживается псевдометодом $\{\Psi_k\}$.

Определим липшицев аналог свойства InvPerSh. Будем говорить, что для диффеоморфизма f выполняется липшицево обратное периодическое свойство отслеживания LipInvPerSh, если существуют такие положительные числа L и d_0, что для любой периодической точки p и для любого d-псевдометода $\Psi = \{\Psi_k\}$ с $d \leq d_0$ найдется такая псевдотраектория $\theta = \{x_k\}$, порожденная d-псевдометодом Ψ, что

$$\mathrm{dist}(x_k, f^k(p)) \leq Ld \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Как обычно, будем обозначать через ΩS множество Ω-устойчивых диффеоморфизмов. Будем обозначать через $\mathrm{Int}^1(A)$ C^1-внутренность некоторого множества A диффеоморфизмов. Наконец, обозначим через $\mathrm{Per}(f)$ множество всех периодических точек диффеоморфизма f.

Нашим основным результатом является следующая теорема.

Теорема.

1) $\mathrm{Int}^1(\mathrm{InvPerSh}) = \Omega S$;
2) свойство LipInvPerSh эквивалентно гиперболичности множества $\mathrm{Cl}(\mathrm{Per}(f))$;
3) если обозначить через LIPS множество диффеоморфизмов, обладающих свойством LipInvPerSh, у которых плотны периодические точки в неблуждающем множестве, то LIPS совпадает с множеством диффеоморфизмов, обладающих аксиомой A.

Замечание 1. Существует несколько способов введения псевдометодов. Один из них был описан выше. Такие псевдометоды называются псевдометодами класса Θ_s. При таком способе определения отображения Ψ_k близки к диффеоморфизму f. Можно называть d-псевдометодом такую последовательность непрерывных отображений $\{\Psi_k\}$, что вместо неравенств (1) выполняются неравенства

$$\mathrm{dist}(\Psi_{k+1}(x), f(\Psi_k(x))) \leq d \quad \text{для любых } x \in M,\ k \in \mathbb{Z},$$

и говорить, что последовательность $\{x_k\}$ является псевдотраекторией, порожденной d-псевдометодом $\{\Psi_k\}$, если

$$x_k = \Psi_k(x_0) \quad \text{для любых } k \in \mathbb{Z}.$$

Такие псевдометоды называются псевдометодами класса Θ_t. Существуют примеры псевдометодов класса Θ_s, которые не принадлежат классу Θ_t и наоборот. Для псевдометодов класса Θ_t тоже можно вводить обратные периодические свойства отслеживания, и для них тоже можно доказать аналог приведенной выше теоремы. Доказательство в целом будет аналогичным, однако, псевдометоды необходимо будет строить по-другому. В частности отображения Ψ_k при каждом фиксированном k необходимо положить постоянными. Мы не будем подробно описывать процесс построения этих постоянных отображений, так как их можно просто построить, отталкиваясь от псевдометодов класса Θ_s, построение которых будет подробно описано.

Кроме того, пункт 2) теоремы можно рассматривать как критерий проверки гиперболичности замыкания всех периодических точек. Достаточно много работ посвящено получению различных критериев гиперболичности некоторого множества. Например, в работе [11] Кастро получает различные критерии гиперболичности, и, в частности, там доказывается следующее утверждение: из неравномерной гиперболичности периодического множества, наличия на нем доминирующего разбиения (dominated splitting) и выполнения эргодического свойства замыкания (ergodic closing property) следует гиперболичность замыкания всех периодических тосек.

Схема доказательства теоремы. По существу мы пользуемся стратегией из работы [6].

1) Обозначим через HP множество диффеоморфизмов, у которых все периодические точки гиперболичны. Фактически в работе [8] доказывается, что HP содержится в LipInvPerSh. Мы воспользуемся результатом Хаяши и Аоки (см. [9, 10]), согласно которому $\mathrm{Int}^1(\mathrm{HP}) = \Omega S$. Таким образом, для доказательства пункта 1) достаточно установить включение $\mathrm{Int}^1(\mathrm{InvPerSh}) \subset \mathrm{HP}$. Для этого мы так C^1-мало возмутим диффеоморфизм с негиперболической периодической точкой, чтобы для него не выполнялось InvPerSh.

2) Опишем схему доказательства пункта 2). Сначала докажем, что из наличия LipInvPerSh следует гиперболичность всех периодических точек, потом докажем равномерную гиперболичность множества всех периодических точек. И наконец мы установим, что замыкание всех периодических точек гиперболично.

3) Пункт 3) по существу следует из пункта 2), так как по определению аксиома A эквивалентна гиперболичности неблуждающего множества и плотности периодических точек в неблуждающем множестве.

2 Технические замечания и экспоненциальное отображение.

Доказательство теоремы разбивается на отдельные леммы, в доказательстве большинства из них используется известная техника, основанная на экспоненциальном отображении, позволяющая переходить от точек многообразия к касательным векторам и обратно, которую мы и опишем в этом разделе. Кроме того, именно в этом разделе удобно ввести основные обозначения, которые будут использоваться в дальнейшем.

Пусть M гладкое замкнутое многообразие с римановой метрикой dist. Обозначим через $\exp : TM \to M$ стандартное экспоненциальное отображение, а через $\exp_x$ — сужение этого отображения на T_xM, касательное пространство в точке x.

Обозначим через $N(r,x)$ r-окрестность точки x в многообразии M, а через $B_T(r,y)$ — шар радиуса r с центром в точке y в пространстве T_xM. Кроме того, будем обозначать через $B(r,A)$ r-окрестность множества A, содержащегося в Евклидовом пространстве.

Существует такое положительное число $r < 1$, что для любой точки $x \in M$ отображение $\exp_x$ является диффеоморфизмом множества $B_T(r,0)$ на образ, и отображение $\exp_x^{-1}$ является диффеоморфизмом множества $N(r,x)$ на образ. Кроме того, будем считать, что число r выбрано настолько малым, чтобы выполнялось следующее:

$$\frac{\operatorname{dist}(\exp_x(v), \exp_x(w))}{|v-w|} \le 2 \quad \text{при } v, w \in B_T(r,x), v \ne w; \tag{4}$$

$$\frac{|\exp_x^{-1}(y) - \exp_x^{-1}(z)|}{\operatorname{dist}(y,z)} \le 2 \quad \text{при } y, z \in N(r,x), y \ne z. \tag{5}$$

Выполнения этих условий можно добиться, так как

$$D\exp_x(0) = \mathrm{id}. \tag{6}$$

Пусть p точка некоторого диффеоморфизма f многообразия M, $p_k = f^k(p)$ и $A_k = Df(p_k)$ для любых $k \in \mathbb{Z}$ (эти обозначения будут использоваться и в дальнейшем). Рассмотрим отображения

$$F_k = \exp_{p_{k+1}}^{-1} \circ f \circ \exp_{p_k} : T_{p_k}M \mapsto T_{p_{k+1}}M. \tag{7}$$

В силу стандартного свойства (6) экспоненциального отображения, $DF_k(0) = A_k$. Представим $F_k(v)$ в виде

$$F_k(v) = A_k v + \phi_k(v), \quad \text{где } \frac{|\phi_k(v)|}{|v|} \longrightarrow 0 \text{ при } |v| \to 0.$$

Будем обозначать через $O(p,f)$ траекторию точки p диффеоморфизма f, т.е. множество $\{p_k = f^k(p) | k \in \mathbb{Z}\}$.

Кроме того, нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, которым удобно пользоваться для построения псевдометодов.

Утверждение. Пусть $f : B(b, O(p, f)) \mapsto \mathbb{R}^n$ C^1-гладкое отображение, p периодическая точка отображения f основного периода m, множества $B(b, p_1), \ldots, B(b, p_m)$ дизъюнктны.

1) Пусть $\epsilon < b/2$ малое число. Предположим, что $f(x) = p_{k+1} + A_k(x - p_k)$ на множестве $B(b, p_k)$ $(1 \leq k \leq m)$, т.е. f является линейным отображением. Пусть $d < \epsilon/2$ произвольное достаточно малое число. Предположим, что построено такое непрерывное отображение $\psi : B(b, O(p, f)) \mapsto \mathbb{R}^n$, что

$$|\psi(x) - A_k(x - p_k) - p_{k+1}| \leq d \quad \text{для любых } x \in B(b, p_k),\ 1 \leq k \leq m. \tag{8}$$

Тогда существует такое отображение $\Psi : B(b, O(p, f)) \mapsto \mathbb{R}^n$, что $|\Psi(x) - -f(x)| \leq d$ для любых $x \in B(b, p_k), 1 \leq k \leq m$, отображения ψ и Ψ совпадают на множестве $B(\epsilon/2, O(p, f))$, а отображения Ψ и f совпадают на множестве $B(b, O(p, f)) \backslash B(\epsilon, O(p, f))$.

2) Пусть $C > 1$ произвольное большое число, а d произвольное достаточно малое число такое, что $Cd < b/2$. Пусть

$$f(x) = p_{k+1} + A_k(x - p_k) + \phi_k(x) \quad \text{для } x \in B(b, p_k), 1 \leq k \leq m,$$

где $|\phi_k(x)| \longrightarrow 0$ при $|x| \to 0$. Пусть число d настолько мало, что

$$|\phi_k(x)| \leq d/2 \quad \text{при } |x| \leq Cd.$$

Наконец, предположим, что построено такое непрерывное отображение $\psi : B(b, O(p, f)) \mapsto \mathbb{R}^n$, что выполняется условие (8) с d, замененным на $d/2$. Тогда существует такое отображение $\Psi : B(b, O(p, f)) \mapsto \mathbb{R}^n$, что $|\Psi(x) - -f(x)| \leq d$ для любых $x \in B(b, O(p, f))$, отображения ψ и Ψ совпадают на множестве $B(Cd/2, O(p, f))$, а отображения Ψ и f совпадают на множестве $B(b, O(p, f)) \backslash B(Cd, O(p, f))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начнем с пункта 1). Выберем гладкую монотонную функцию $\beta : [0, +\infty) \mapsto [0, 1]$ такую, что $\beta(x) = 0$ при $x \leq \epsilon/2$, $\beta(x) = 1$ при $x \geq \epsilon$.

Определим отображение Ψ по следующей формуле:

$$\Psi(x) = (1 - \beta(|x - p_k|))\psi(x) + \beta(|x - p_k|)(p_{k+1} + A_k(x - p_k))$$

для $x \in B(b, p_k)$, $1 \leq k \leq m$. Для $x \in B(b, p_k)$

$$|\Psi(x) - f(x)| = |\Psi(x) - (\beta(|x - p_k|) + 1 - \beta(|x - p_k|))f(x)| \leq (1 - \beta(x))d + 0 \leq d.$$

Ясно, что отображение Ψ является искомым.

Пункт 2) разбирается совершенно аналогично.

Замечание 2. Ограничения на малость числа d не зависят от отображения ψ, если только выполняется условие (8).

3 Доказательство основного результата

В статье [8] доказывается, что если множество A является гиперболическим, то существуют такие постоянные L и d_0, что для любой точки $p \in A$, любого числа $d \le d_0$ и любого d-псевдометода $\Psi = \{\Psi_k\}$, найдется такая псевдотраектория $\{x_k\}$, порожденная псевдометодом Ψ, что выполняется аналог соотношения (3) с $\epsilon = Ld$. Таким образом, выполняется следующая лемма.

Лемма 1. Если $\mathrm{Cl}(\mathrm{Per}(f))$ гиперболично, то для f выполняется свойство LipInvPerSh.

Следствие. $\Omega S \subset \mathrm{Int}^1(\mathrm{InvPerSh})$.

Лемма 2. $\mathrm{Int}^1(\mathrm{InvPerSh}) \subset \Omega S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы Хаяши и Аоки ([9, 10]) $\mathrm{Int}^1(\mathrm{HP}) = \Omega S$. Поэтому достаточно доказать, что $\mathrm{Int}^1(\mathrm{InvPerSh}) \subset \mathrm{HP}$. Предположим, что диффеоморфизм $f \in \mathrm{Int}^1(\mathrm{InvPerSh})$ и не содержится в множестве HP. Таким образом, существует такая окрестность W диффеоморфизма f в C^1-топологии, что $W \subset \mathrm{InvPerSh}$ и $W \cap \mathrm{HP} = \emptyset$. У диффеоморфизма f существует негиперболическая периодическая точка p основного периода m, т.е. у оператора $Df^m(p)$ существует собственное число $|\lambda| = 1$. Без ограничения общности будем считать λ чисто комплексным собственным числом. Случай вещественного λ разбирается аналогично.

Для начала мы так C^1-мало возмутим диффеоморфизм f, чтобы получить диффеоморфизм h с определенными свойствами, линейный в окрестности своей периодической траектории $p_1, \dots, p_m$.

Существуют такое число $a \in (0, r)$ (напомним, что число r определялось в разделе 2) и диффеоморфизм $h \in W$, что $h(p_j) = p_{j+1}$, точке p_j соответствует точка 0 в координатах $v_j = (\rho_j \cos\theta_j, \rho_j \sin\theta_j, w_j)_j$ в пространстве $T_{p_j}M$, и если

$$H_j = \exp_{p_{j+1}}^{-1} \circ h \circ \exp_{p_j},$$

и $|v_j| \le a$, то для некоторых вещественного числа χ и натурального числа ν таких, что $\cos\nu\chi = 1$,

$$H_j(v_j) = A_j v_j = (r_j\rho_j\cos(\theta_j + \chi), r_j\rho_j\sin(\theta_j + \chi), B_j w_j)_{j+1}$$

(где B_j — матрица размера $(n-2)\times(n-2)$, $n = \dim M$, $B_{j+m} = B_j$), причем

$$r_0 r_1 \cdots r_{m-1} = 1, \quad r_{j+m} = r_j.$$

При записи в координатах в касательных пространствах мы ставим индекс j после скобок, чтобы подчеркнуть, что речь идет о касательном пространстве в точке p_j.

Таким образом, диффеоморфизм h C^1-близок к диффеоморфизму f, и у оператора $Dh^m(p_0)$ есть собственное число λ, являющееся корнем степени ν из 1, которому соответствует жорданов блок размерности 1.

Выберем число $\bar{a} < a$ так, чтобы $B_T(\bar{a}, 0)_j \subset H_j^{-1}(B_T(a, 0)_{j+1})$ при любых j. Мы ставим индекс j после скобок, чтобы подчеркнуть, что речь идет о шаре в пространстве $T_{p_j}M$.

Определим число

$$R = 2\max(r_0, \ldots, r_{m-1}).$$

Будем считать, что числа a и $\bar{a}$ были выбраны столь малыми, что окрестности $\exp_{p_k}(B_T(\bar{a}, 0)_k)$ являются дизъюнктными при всех $1 \le k \le m$. Пусть $\epsilon_0 = \bar{a}/3$, $\epsilon = \epsilon_0/10$, и $m\nu d < \epsilon/3$ произвольное достаточно малое число.

Определим отображения $\psi_k : \bigcup_{1\le l\le m} B_T(\bar{a}, 0)_l \mapsto \bigcup_{1\le l\le m} B_T(a, 0)_l$ следующим образом:

$$\psi_{k+m\nu} = \psi_k \quad \text{для любых } k \in \mathbb{Z},$$

$$\psi_k(y) = A_k y + (dr_0 \cdots r_k(\cos(k+1)\chi)/(2R^m), dr_0 \cdots r_k(\sin(k+1)\chi)/(2R^m), 0)_{k+1}$$

при $0 \le k \le m\nu - 1$ для $y \in B_T(\bar{a}, 0)_k$, и $\psi_k(y) = H_l(y)$ для $y \in B_T(\bar{a}, 0)_l$ при $l \ne k$.

Отображения ψ_k можно рассматривать как отображения дизъюнктного объединения n-мерных шаров, содержащихся в $\mathbb{R}^n$, в дизъюнктное объединение n-мерных шаров большего радиуса, содержащееся в $\mathbb{R}^n$. Выберем произвольное число $k \in \mathbb{Z}$. Мы видим, что для отображения ψ_k выполняется условие (8). Таким образом, по сути, мы находимся в условиях утверждения из раздела 2. При необходимости уменьшив число d, мы можем считать, что d — это число из пункта 1) утверждения, примененного к числу ϵ_0 (не числу ϵ) в качестве числа ϵ и отображению ψ_k (берется $b = \bar{a}$). В силу замечания 2 выбор числа d не зависит от отображения ψ_k, лишь бы только выполнялось условие (8). Следовательно, отображение ψ_k продолжается до отображения Φ_k, совпадающего с H_k на множествах $\bigcup_{1\le l\le m} B_T(\bar{a}, p_l) \setminus \bigcup_{1\le l\le m} B_T(\epsilon_0/2, p_l)$. Определим отображение $\Psi_k(x) = \exp_{p_{l+1}} \circ \Phi_k \circ \exp_{p_l}^{-1}(x)$ при $x \in \exp_{p_l}(B_T(\bar{a}, 0)_l)$.

Если мы доопределим $\Psi_k = h$ на дополнении $\bigcup_{1\le l\le m} \exp_{p_l} B_T(\bar{a},0)_l$ в многообразии M, то мы получим непрерывное отображение. В силу свойства (4) отображения $\{\Psi_k\}$ будут $2d$-псевдометодом.

Однако ни одна из псевдотраекторий, порожденных этим $2d$-псевдометодом ϵ-не отслеживает точку p. Действительно, предположим противное и рассмотрим псевдотраекторию $\{y_k\}$ точки $y \in N(\epsilon, p)$, определенную аналогом равенств (2), которая ϵ-отслеживает точку p, пусть $q = \exp_p^{-1}(y) = (q_1, q_2, q_3)$ (в доказательстве леммы 2 в такой записи первые две компоненты имеют размерность 1). Пусть $q^k = \exp_{p_k}^{-1} y_k$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, тогда $q^{k+1} = \Phi_k q^k$. Отметим, что в силу свойства (5) точки q^k будут 2ϵ-близки к точке 0 в координатах в $T_{p_k}M$. Подчеркнем, что $2\epsilon < \epsilon_0/2$, а в $\epsilon_0/2$-окрестности нуля (в координатах в $T_{p_k}M$) отображения Φ_k будут совпадать с отображениями ψ_k. Поэтому

$$q^{m\nu k} = A^{m\nu k} q + (km\nu d/(2R^m), 0, 0).$$

Будем обозначать через $pr_{1,2}$ проекцию вектора на первую и вторую компоненты. Тогда

$$|pr_{1,2} q^{mk\nu}| \ge mk\nu d/(2R^m) - |pr_{1,2} q|^{mk\nu} = mk\nu d/(2R^m) - |pr_{1,2} q|. \qquad (9)$$

Согласно нашим предположениям $|q_k| \le 2\epsilon$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Однако в силу оценок (9) для достаточно большого положительного числа k эта последовательность $\{q_k\}$ уйдет по первым двум компонентам на 3ϵ от нуля (в пространстве $T_{p_k}M$). Значит, наше предположение не верно, у диффеоморфизма f нет негиперболических периодических точек, и C^1-внутренность InvPerSh содержится в ΩS.

Лемма 3. Если для диффеоморфизма f выполняется свойство LipInvPerSh, то любая периодическая точка гиперболична.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничений общности будем считать число L из свойства LipInvPerSh натуральным.

Пусть p — негиперболическая периодическая точка диффеоморфизма f. Для простоты обозначений будем считать точку p неподвижной. Общий случай разбирается аналогично. В случае неподвижной точки отображение (7) принимает вид

$$F(v) = \exp_p^{-1} \circ f \circ \exp_p(v) = Av + \phi(v),$$

и у матрицы A есть собственное число $|\lambda| = 1$. Будем считать λ чисто комплексным собственным числом. Случай вещественного λ разбирается аналогично.

В силу выбора координат, мы можем считать, что матрица A приведена к виду $\mathrm{diag}(H_1, H_2)$, где

$$H_1 = \begin{pmatrix} Q & I & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & Q & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & Q \end{pmatrix},$$

причем

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

При выборе новых координат константы L,d_0,r, вообще говоря, изменятся (напомним, что число r определялось в разделе 2). Для удобства мы будем обозначать новые константы теми же символами. Если v — двумерный вектор, то

$$|Qv| = |v|.$$

Пусть $2l$ — это размерность жордановой клетки H_1 и $n = \dim M$.

Введем несколько обозначений. Пусть v n-мерный вектор. Будем обозначать через $pr_{i,j}v$ двумерный вектор, состоящий из i-й и j-й компонент вектора v. Пусть V матрица 2×2, а W матрица размера $n \times n$. Под записью $W = (0, V, 0)^{k-1,k}$ мы будем понимать следующее: на позициях $(k-1, k) \times (k-1, k)$ у матрицы W находится матрица V, все остальные элементы равны нулю.

Выберем число $\bar{r} < r/2$ так, чтобы $B_T(\bar{r}, 0) \subset F^{-1}(B_T(r, 0))$. Пусть d — произвольное достаточно малое число такое, что $20Ld < \bar{r}/10$.

Определим отображения $\psi_k : B_T(\bar{r}, 0) \mapsto B_T(r, 0)$ следующим образом:

$$\psi_k(y) = Ay + (d/2)(0, Q^k w, 0)^{(2l-1,2l)},$$

где w — это двумерный вектор единичной длины.

Зафиксируем произвольное число k. Для отображения ψ_k выполняется условие (8). Будем считать, что число d меньше соответствующего числа из пункта 2 утверждения, примененного к $C = 20L$, $b = \bar{r}$. Подчеркнем, что в силу замечания 2 выбор числа d не зависит от индекса k, так как для отображений ψ_k выполняется аналог условия (8). Пусть Φ_k — это аналог отображения Ψ_k, построенного в пункте 2 утверждения, совпадающего с отображением F на множестве $B_T(\bar{r}, 0) \backslash B_T(10Ld, 0)$. Тогда отображение $\Psi_k = \exp_p \circ \Phi_k \circ \exp_p^{-1}$

продолжается до непрерывного отображения Ψ_k многообразия M. В силу свойства (4) отображения $\{\Psi_k\}$ будут $2d$-методом.

По построению, при $k > l$

$$|\Phi_{k-1} \circ \ldots \circ \Phi_0(q)| = |A^k q + c_k^1 d(0, Q^{k-l+1} w, 0)^{(1,2)} + \ldots +$$
$$+ c_k^{l-1} d(0, Q^{k-1} w, 0)^{(2l-3, 2l-2)} + d(0, kQ^k w, 0)^{(2l-1, 2l)})|,$$

где c_k^m — некоторые вещественные числа. Имеет место следующее неравенство

$$|pr_{(2l-1,2l)}(\Phi_{k-1} \circ \ldots \circ \Phi_0(q))| \geq kd - |pr_{(2l-1,2l)}(A^k q)| \geq kd - |pr_{(2l-1,2l)} q|^k. \quad (10)$$

Предположим, что точка p $2Ld$-отслеживается псевдотраекторией $\{y_k\}$ некоторой точки y псевдометода Ψ_k. Пусть $q_k = \exp_{p_k}^{-1} y_k$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, тогда $q_{k+1} = \Phi_k q_k$. Заметим, что в силу неравенств (5)

$$|pr_{(2l-1,2l)} q_k| \leq |q_k| \leq 4Ld \quad \text{для любых } k \in \mathbb{Z} \quad (11)$$

(в координатах в $T_{p_k}M$). Отметим, что в $10Ld$-окрестности нуля отображения Φ_k и ψ_k совпадают.

В силу формулы (10) и формулы (11)

$$|pr_{(2l-1,2l)} q_{10L}| \geq (10Ld - |pr_{(2l-1,2l)} q|) \geq 6Ld.$$

Последнее неравенство противоречит неравенству (11). Значит, у диффеоморфизма f нет негиперболических периодических точек.

Лемма 4. Если для f выполняется свойство LipInvPerSh, то все периодические точки диффеоморфизма f равномерно гиперболичны (то есть гиперболичны с одними и теми же показателями C и λ). Иными словами существуют такие константы $C > 0$ и $0 < \lambda < 1$, зависящие только от L, что для любой периодической точки p диффеоморфизма f существуют Df-инвариантные дополнительные подпространства $S(p)$ и $U(p)$ касательного пространства $T_{p_k}M$, для которых выполняются оценки

$$|Df^j(p)v| \leq C\lambda^j |v| \quad \text{при } v \in S(p),\ j \geq 0,$$

$$|Df^{-j}(p)v| \leq C\lambda^j |v| \quad \text{при } v \in U(p),\ j \geq 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничений общности будем считать, что число L из свойства LipInvPerSh является натуральным.

Пусть p — периодическая точка периода m. Обозначим через m_0 основной период точки p. Пусть $p_i = f^i(p)$, $A_i = Df(p_i)$ и $B = Df^m(p)$. По лемме 3 точка p является гиперболической периодической точкой. Поэтому в точке p определены пространства $S(p)$ и $U(p)$, которые являются дополнительными, Df-инвариантными, и выполняются соотношения

$$\lim_{n\to+\infty} B^n v_s = \lim_{n\to+\infty} B^{-n} v_u = 0 \quad \text{для } v_s \in S(p), v_u \in U(p). \tag{12}$$

Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $v_u \in U(p)$. Пусть $e_0 = v_u/|v_u|$. Рассмотрим последовательность

$$a_0 = \tau, \quad a_{i+1} = a_i|A_i e_i| - 1,$$

где $e_{i+1} = A_i e_i/|A_i e_i|$, а число τ выбирается так, чтобы $a_m = 0$. В работе [6] приводится явная формула для числа τ, которое удовлетворяет необходимым условиям. Отметим, что $a_j > 0$ при всех $0 \le j \le m-1$ (так как неравенство $a_j \le 0$ влечет неравенство $a_{j+1} < 0$, а $a_m = 0$).

В силу соотношений (12) существует такое число $n > 0$, что

$$|B^{-n}\tau e_0| < 1. \tag{13}$$

Рассмотрим конечную последовательность $w_i \in T_{p_i}M$ для $0 \le i \le$ $\le m(n+1)$, определенную равенствами

$$w_i = a_i e_i \quad \text{при } i \in \{0, \dots, m-1\},$$

$$w_m = B^{-n}\tau e_0,$$

$$w_{m+1+i} = A_i w_{m+i} \quad \text{при } i \in \{0, \dots, mn-1\}.$$

Отметим, что

$$w_{km} = B^{k-1-n}\tau e_0 \quad \text{при } k \in \{1, \dots, n+1\}.$$

Таким образом, мы можем рассматривать последовательность $\{w_i\}$ как $m(n+1)$-периодическую последовательность, определенную при всех $i \in \mathbb{Z}$.

Пусть $N > \max_{k\in\mathbb{Z}} |w_k|$, при необходимости увеличивая число N, будем считать, что $N > 20L$. Ясно, что если все вектора последовательности $\{w_k\}$ умножить на число d, то и максимум тоже вырастет в d раз.

Выберем такое число $\epsilon_1 < r$, что окрестности $\exp_{p_j} B_T(\epsilon_1, 0)_j$ при любых $1 \le j \le m_0$ являются дизъюнктными. Подчеркнем, что индекс j после скобок означает, что речь идет о шаре в пространстве $T_{p_j}M$. Выберем такое число $\epsilon_2 \le \epsilon_1$, что $B_T(\epsilon_2, 0)_j \subset F_j^{-1}(B_T(\epsilon_1, 0))_j$ при любых $1 \le j \le m_0$.

Будем считать, что d является достаточно малым произвольным числом, удовлетворяющим неравенству $100Nd < \epsilon_2$.

Определим отображения $\psi_k : \bigcup_{1\le i\le m_0} B_T(\epsilon_2, 0)_i \mapsto \bigcup_{1\le i\le m_0} B_T(\epsilon_1, 0)_i$ следующим образом:

1) $\psi_{k+m(n+1)} = \psi_k$ для любых $k \in \mathbb{Z}$;

2) при $y \in B_T(\epsilon_2, 0)_k$:

   2.1) $\psi_k(y) = A_k y - de_{k+1}$ при $0 \le k \le m-2$,

   2.2) $\psi_{m-1}(y) = A_{m-1}y - de_m + B^{-n}\tau de_0$ при $k = m-1$,

   2.3) $\psi_k(y) = A_k y$ при $m \le k \le mn+m-1$;

3) при других y ($y \in B_T(\epsilon_2, 0)_l$ и $l-k$ не кратно m_0, основному периоду точки p) отображение $\psi_k(y) = F_l(y)$.

Покажем, что имеют место следующие равенства

$$\psi_{k-1} \circ \ldots \circ \psi_0(w_0 d) = w_k d \quad \text{при всех } k \ge 1, \tag{14}$$

$$\psi_k^{-1} \circ \ldots \circ \psi_{-1}^{-1}(w_0 d) = w_k d \quad \text{при всех } k \le 0. \tag{15}$$

Действительно, для $0 \le k \le m-2$

$$dw_{k+1} = da_{k+1}e_{k+1} = d((a_k|A_k e_k|-1)/|A_k e_k|)A_k e_k = A_k dw_k - de_{k+1} = \psi_k(dw_k).$$

Так как, по выбору τ, $1 = a_{m-1}|A_{m-1}e_{m-1}| = |w_{m-1}||A_{m-1}e_{m-1}| = |A_{m-1}w_{m-1}|$, выполняется равенство $A_{m-1}w_{m-1} = e_m$, поэтому

$$\psi_{m-1}(dw_{m-1}) = A_{m-1}dw_{m-1} - de_m + B^{-n}\tau de_0 = B^{-n}\tau de_0 = dw_m.$$

Итак, мы обосновали равенства (14) и (15). Отметим, что отображения ψ_k строились ровно из тех соображений, чтобы эти равенства выполнялись.

Заметим, что, учитывая неравенство (13), для отображений ψ_k выполняется аналог условия (8), в котором число $d/2$ заменено на $2d$. Зафиксируем произвольное число $k \in \mathbb{Z}$. Фактически мы находимся в условиях пункта 2 утверждения. Применим утверждение к числу $C = 100N$, $b = \epsilon_2$. При необходимости уменьшив число d, мы можем добиться, чтобы оно было меньше числа $d/4$ из пункта 2 утверждения. Подчеркнем, что в силу замечания 2 число d не зависит от индекса k. Обозначим через Φ_k аналог отображения Ψ_k, которое строится в утверждении. Согласно заключению утверждения $|\Phi_k(x) - F_j(x)| \le 4d$ для $x \in B_T(\epsilon_2, 0)_j$ и $1 \le j \le m_0$.

Подчеркнем, что отображение Φ_k совпадает с отображением F_k на множестве $\bigcup_{0\le j\le m_0} B_T(\epsilon_2,0)_j \setminus \bigcup_{0\le j\le m_0} B_T(50Nd,0)_j$. Рассмотрим отображения Ψ_k, определенные формулой

$$\Psi_k(y)=\exp_{p_{l+1}}\circ F_k\circ \exp_{p_l}^{-1}(y)\quad \text{при } y\in \exp_{p_l}(B_T(\epsilon_2,0)_l),\ 1\le l\le m_0.$$

Ясно, если отображения Ψ_k определить равными диффеоморфизму f во всех остальных точках многообразия M, то отображения Ψ_k останутся непрерывными отображениями. Отметим, что в силу неравенств (4) отображения Ψ_k будут образовывать $8d$-псевдометод.

В силу наших предположений, точка p $8Ld$-отслеживается одной из псевдотраекторий, порожденных методом $\Psi=\{\Psi_k\}$. Следовательно, найдется псевдотраектория $\{y_k\}$ точки y, определенная аналогом равенств (2), $8Ld$-отслеживающая точку p. Пусть $q_k=\exp_{p_k}^{-1} y_k$ при всех $k\in\mathbb{Z}$, тогда $q_{k+1}=\Phi_k q_k$. Наши предположения влекут

$$|q_k|\le 16Ld. \tag{16}$$

Отметим, что $16Ld<50Ld$, а отображения Φ_k и ψ_k совпадают в $50Ld$-окрестности нуля (в пространстве $T_{p_k}M$).

Нетрудно видеть, что

$$\Phi_0(q-w_0d+w_0d)=A_0(q-w_0d)+\Phi_0(w_0d)=A_0(q-w_0d)+w_1d,$$

$$\Phi_{k-1}\circ\dots\circ\Phi_0(q-w_0d+w_0d)=A_{k-1}\cdots A_0(q-w_0d)+\Phi_{k-1}\circ\dots\circ\Phi_0(w_0d)=$$
$$=A_{k-1}\cdots A_0(q-w_0d)+w_kd,\quad k\ge 1, \tag{17}$$
$$\Phi_{-k}^{-1}\circ\dots\circ\Phi_{-1}^{-1}(q-w_0d+w_0d)=A_{-k}^{-1}\cdots A_{-1}^{-1}(q-w_0d)+w_{-k}d,\quad k\ge 1. \tag{18}$$

В формулах (17) и (18) норма второго слагаемого ограничена сверху числом $Nd>20Ld$, а первое слагаемое в одной из этих двух формул в силу гиперболичности точки p будет велико по норме (больше $2Nd$) при достаточно больших по модулю k (т.е. норма первого слагаемого будет значительно больше нормы второго слагаемого), если только $q\ne w_0d$. Значит, точка p может отслеживаться только псевдотраекторией, соответствующей вектору w_0d, т.е. $q=w_0d$. Но тогда неравенства (16) влекут оценки

$$|a_k|=|w_k|\le 16L\quad \text{при } 0\le k\le m-1,$$

из которых также как в работе [6] можно вывести искомые оценки гиперболичности для зафиксированного заранее произвольного вектора v.

Отметим, что фактически из леммы 4 следует пункт 2) (а значит и пункт 3)) теоремы, так как в работе [6] доказывается, что если выполняется заключение леммы 4, т.е. на множестве периодических точек $\mathrm{Per}(f)$ есть гиперболическая структура, то она есть и на множестве $\mathrm{Cl}(\mathrm{Per}(f))$, т.е. множество $\mathrm{Cl}(\mathrm{Per}(f))$ гиперболично.

Список литературы

[1] S.Yu.Pilyugin, Shadowing in Dynamical Systems. Lect. Notes in Math., vol. 1706, Springer, Berlin, 1999.

[2] K. Palmer, Shadowing in Dynamical Systems. Theory and Applications., Kluwer, Dordrecht, 2000.

[3] R. M. Corless, S. Yu. Pilyugin, Approximate and real trajectories for generic dynamical systems, J. Math. Anal. Appl., vol. 189, pp. 409–423, 1995.

[4] K. Sakai, Pseudo orbit tracing property and strong transversality of diffeomorphisms of closed manifolds, Osaka J. Math. 1994. Vol. 31. P. 373–386.

[5] S. Yu. Pilyugin, S. B. Tikhomirov, Lipschitz shadowing implies structural stability, Nonlinearity, vol. 23, pp. 2509–2515, 2010.

[6] Osipov A. V., Pilyugin S. Yu., Tikhomirov S. B. Periodic shadowing and stability, Reg. Chaotic Dynamics, 2010, Vol. 15, N 2–3, P.406–419.

[7] Г.И.Вольфсон, С.Ю.Пилюгин, Д.И.Тодоров, Динамические системы с липшицевыми обратными свойствами отслеживания. *Представлено к публикации в Вестник СПбГУ.*

[8] S. Yu. Pilyugin, Inverse shadowing by continuous methods, Discrete Contin. Dyn. Syst., vol. 8, P. 29-38, 2002.

[9] S.Hayashi, Diffeomorphisms in $\mathcal{F}^1(M)$ satisfy Axiom A, Ergod. Theory Dyn. Syst., Vol. 12, 1992, P. 233–253.

[10] N.Aoki, The set of Axiom A diffeomorphisms with no cycle, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), Vol. 23, 1992, P. 21–65.

[11] A. Castro, Ergodic closing and new criteria for hyperbolicity based on periodic sets. Preprints of IMPA, serie D 77/2010,
http://www.preprint.impa.br/Shadows/SERIE D/2010/77.html