ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2012
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

ДИНАМИКА НЕРАВНОВЕСНОЙ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Г.С. Осипенко

Севастопольский институт банковского дела

george.osipenko@mail.ru

Аннотация. Исследуется динамика макроэкономической системы, в которой взаимодействуют национальный доход, ставка процента и уровень цен. Такое взаимодействие моделируется дискретной динамической системой в трехмерном пространстве [1]. Система имеет кривую, заполненную неподвижными точками, которые описывают равновесия на рынке денег, товаров и услуг. Показано, что существует слоение трансверсальное к данной кривой, каждый слой, которого является инвариантным для системы. Существуют слои, на которых состояние равновесия является как устойчивым так и неустойчивым по первому приближению. От слоя к слою динамика системы меняется. При этом существует два маршрута бифуркаций. Первый путь проходит по схеме: неподвижная точка теряет устойчивость, рождается устойчивый инвариантный эллипс (бифуркация Неймарка-Саккера), на эллипсе появляются периодические гиперболические орбиты, которые порождают хаос через трансверсальное пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий. Другой путь приводит к хаосу через бифуркацию удвоения периода. Существование двух путей бифуркаций порождено тем, что имеется разбиение фазового пространства на две области: в одной диффеоморфизм сохраняет ориентацию, а в другой меняет ее. Данные области разделены поверхностью, на которой якобиан равен нулю.

Рассмотрены возмущения системы малыми случайными неконтролируемыми возмущениями, которые естественно моделируют воздействие внешней среды на систему. В этом случае система не сохраняет состояния равновесия и инвариантность слоев, что порождает более сложную динамику.

Ключевые слова: Макроэкономика, дискретное уравнение, национальный доход, ставка процента, уровень цен, периодическая орбита, хаос, возмущение, бифуркация.

1 Введение

Рассмотрим динамику макроэкономической системы "национальный доход - ставка процента - уровень цен". Такая динамика описывается "IS-LM" - моделью, которая является базовой для описания современной рыночной экономики [2, 5, 8]. В монографии [1] выведена дискретная динамическая система описанной макроэкономической модели. Система имеет вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \exp(a(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)),\\ y_{n+1} &= y_n \exp(b(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)),\\ z_{n+1} &= z_n \exp(c(y_n - z_n)), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x = P/P_e$, P - уровень цен, P_e – равновесное значение уровня цен, $y = (r_e/r)^s$, r – ставка процента, r_e – равновесное значение ставки процента, $z = Y/Y_e$, Y - национальный доход, Y_e – равновесное значение национального дохода. Так что, все переменные являются безразмерными величинами, а их изменение отражает отклонение от равновесного состояния. Все параметры a, b, c, m, s являются положительными, s – предельная склонность к сбережениям, $0 < s < 1$. Можно сказать, что переменная x пропорциональна уровню цен, переменная z пропорциональна национальному доходу и переменная y обратно пропорциональна s-й степени ставки процента. Система исследовалась в книге [1]. Рассмотрены частные случаи, когда система может быть сведена к одномерному случаю. Численно показано наличие периодических орбит.

В данной работе проведено детальное изучение глобальной динамики системы. Получены общие теоретические результаты и проведены численные расчеты для конкретных параметров системы. Сначала мы исследуем простой случай $m = 0$. Равенство $m = 0$ означает, что спрос не зависит от ставки процента. Показано, что система имеет кривую K заполненную неподвижными точками. Трансверсально кривой K лежит слоение с инвариантными слоями. Это слоение задается как поверхности уровня функции $U = \frac{x^b}{y^a}$. От слоя к слою происходит изменение (бифуркация) топологической структуры орбит системы. При этом имеются слои с устойчивым состоянием равновесия, но есть слои, где почти всякая орбита, начинающаяся вблизи неподвижной точки, стремится к хаотическому режиму. Показано, что подобная топологическая структура существует при любом $m > 0$. Более того, доказано, что система (1) для произвольного $m \geq 0$ топологически эквивалентна системе с $m = 0$ и измененным параметром a.

Воздействие внешней среды. Внешняя среда, в которой развивается макроэкономика, влияет на систему. Внешнее воздействие можно рассматривать как не контролированное возмущение. Для моделирования внешних воздействий будем предполагать, что возмущение случайно зависит от времени n, является малым и добавляется к отображению в целом. Таким образом, мы приходим к уравнению вида

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \exp(a(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)) + \varepsilon q_1(n), \\ y_{n+1} &= y_n \exp(b(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)) + \varepsilon q_2(n), \\ z_{n+1} &= z_n \exp(c(y_n - z_n)) + \varepsilon q_3(n), \end{aligned} \tag{2}$$

где ε - малое положительное число, $q_i(n)$ - принимает случайные значения на отрезке [-1, 1] и хаотически зависит от времени n. Для моделирования возмущения $q_i(n)$ используем зависимость

$$q(n+1) = 1 - 2q^2(n), \quad q \in [-1, 1],$$

где начальное значение $q(0)$ задается для каждого $i = 1,\ 2,\ 3$ свое. Известно [3, 14], что для почти каждого (по мере Лебега) начального данного $q(0)$ орбита $\{q_n\}$ является хаотической и распределена на отрезке [-1,1] с плотностью

$$\rho = \frac{1}{\pi(1 - x^2)^{1/2}}.$$

Компьютерное обеспечение. Численные расчеты проводились согласно алгоритмов разработанных и обоснованных автором [4, 12]. Компьютерная программа для данных алгоритмов и визуализация реализована выпускником Петербургского университета Михаилом Сеньковым.

2 Динамика вблизи неподвижных точек

Рассмотрим дискретную динамическую систему (1). Как указано выше, сначала будет исследоваться случай $m = 0$, что несколько упрощает вычисления, но показывает суть динамики. Данное предположение будет действовать в этой и следующей секциях. Таким образом, неподвижные точки системы заполняют кривую $K = \{xy = 1,\ y = z\}$. На кривой K дифференциал правой части имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & -ax^2 \\ -by^2 & 1 & -b \\ 0 & cz & 1-cz \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Мультипликаторы неподвижных точек определяются уравнением

$$det(D - \lambda E) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda(2-a-cy) + 1 - a + (b+a-1)cy).$$

Ясно, что мультипликатор $\lambda = 1$ соответствует кривой неподвижных точек K. Остальные мультипликаторы определяются уравнением

$$\lambda^2 - \lambda(2-a-cy) + 1 - a + (b+a-1)cy = 0. \tag{4}$$

Отсюда имеем

$$\lambda_{12} = \frac{2-a-cy \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

где дискриминант $\Delta = c^2y^2 - 2cy(a+2b) + a^2$. Дискриминант будет отрицательным, когда y лежит между корнями y_1 и y_2 уравнения

$$c^2y^2 - 2cy(a+2b) + a^2 = 0, \tag{5}$$

где

$$y_{12} = \frac{(a+2b) \pm 2\sqrt{b(a+b)}}{c}.$$

Для $a = 2.4,\ b = 0.87,\ c = 0.9$ имеем $y_1 = 0.852,\ y_2 = 7.51$. Таким образом, при 0.852<y<7.51 мультипликаторы λ_{12} являются комплексными сопряженными. В этом случае свободный член уравнения (4) есть квадрат модуля мультипликатора

$$1 - a + (b+a-1)cy = \lambda_1\lambda_2 = |\lambda|^2,$$

что дает возможность определить области устойчивости и неустойчивости неподвижных точек. Для $a = 2.4,\ b = 0.87,\ c = 0.9$ и $y = 0.852$ имеем $|\lambda|^2 = 0.3406$, т.е. в плоскости трансверсальной к кривой неподвижных точек мы имеем устойчивый фокус. Когда свободный член $1 - a + (b + a - 1)cy = 1$, то происходит бифуркация Неймарка-Саккера: состояние равновесия теряет устойчивость и от него отделяется устойчивая инвариантная кривая, гомеоморфная окружности. Для $a = 2.4,\ b = 0.87,\ c = 0.9$

бифуркация наступает при $y = 1.174743$. На кривой K между точками $0.852 < y < 1.174743$ расположены устойчивые состояния равновесия, а для $y > 1.174743$ состояния равновесия неустойчивы. Согласно теореме сведения Плисса [6, 7, 13], вблизи кривой K над каждой неподвижной точкой лежит инвариантный диск, который является устойчивым многообразием W^s при $|\lambda| < 1$ (0.852<y<1.174743), или является неустойчивым многообразием W^u при $|\lambda| > 1$ (1.174743<y<7.51). На левом рис. 1 показан инвариантный диск W^u для точки B $(0.851, 1.175, 1.175)$. На W^u имеется неустойчивое состояние равновесия B и инвариантный устойчивый эллипс S. Орбиты начинаются в точке B при $n = -\infty$ и заканчиваются на S при $n = +\infty$. На кривой

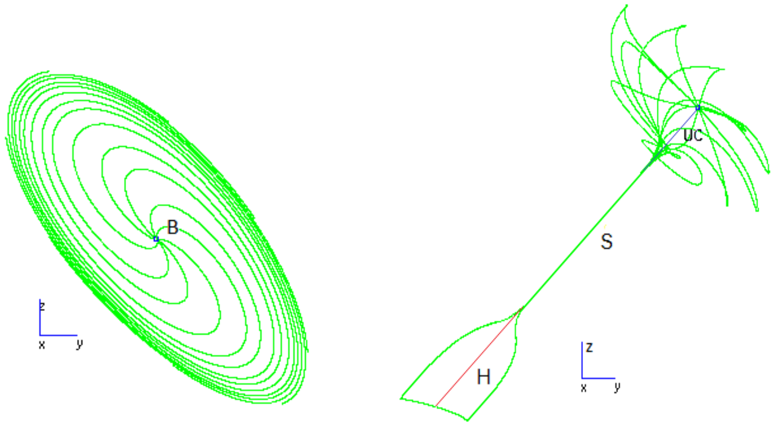


Рис. 1: Динамика вблизи кривой K неподвижных точек системы (3).

K между точками с $0.700 < y < 0.852$ расположены состояния равновесия с двумя отрицательными мультипликаторами по модулю меньшие 1. При $0.685 < y < 0.700$ возникает гиперболический случай: один мультипликатор больше 1 по модулю, а другой меньше 1 по модулю. Вблизи $y = 0.685$ один мультипликатор становится равным 0. Это означает, что якобиан правой части системы (1) $detD = 0$. При $y < 0.685$ один мультипликатор является положительным, а другой отрицательным. В этом случае дифференциал меняет ориентацию (на неустойчивом многообразии). Знак якобиана $detD$ определяет, сохраняет или нет ориентацию динамическая система в данной точке. Следовательно, уравнение $detD(x, y, z) = 0$ задает поверхность Π, на которой система меняет ориентацию. Таким образом, каждое состояние равновесия в плоскости трансверсальной к K может быть устойчивым, неустойчивым с комплексными мультипликаторами и гиперболическим. В последнем случае, один мультипликатор отрицательный, а другой меняет знак на Π. На правом рис. 1 показаны отрезки: $H = \{$гиперболические неподвижные точки$\}$;

$S = \{$устойчивые неподвижные точки$\}$; $UC = \{$неустойчивые неподвижные точки с комплексными мультипликаторами$\}$.

3 Слоение с инвариантными слоями

В этой секции мы покажем, что существует функция $U(x, y, z)$, поверхности уровня которой $U(x, y, z) = const$ являются инвариантными для дискретной системы.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \exp(a(1 - x_n z_n)), \\ y_{n+1} &= y_n \exp(b(1 - x_n z_n)), \\ z_{n+1} &= z_n \exp(c(y_n - z_n)) \end{aligned} \tag{6}$$

Функция $U(x, y, z)$ является аналогом интеграла для автономной системы дифференциальных уравнений.

Утверждение 1. Поверхности уровня функции

$$U = \frac{x^b}{y^a}$$

являются инвариантными для системы (6).

Для доказательства инвариантности надо проверить равенство

$$U(x_n, y_n, x_n) = U(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}).$$

Действительно,

$$U(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) = \frac{x_{n+1}^b}{y_{n+1}^a} = \frac{x_n^b \exp(ba(1 - x_n z_n))}{y_n^a \exp(ab(1 - x_n z_n))} = \frac{x_n^b}{y_n^a} = U(x_n, y_n, z_n).$$

Доказательство закончено.

Каждая поверхность

$$W = \{(x, y, z): \ x = hy^{a/b}\}, \quad h = const$$

трансверсальна кривой неподвижных точек K. Таким образом, инвариантное слоение, порожденное устойчивыми W^s и неустойчивыми дисками W^u, существует не только вблизи кривой K, но оно определено глобально. Инвариантный слой $W = \{(x, y, z): \ x = hy^{a/b}\}, \quad h = const$ является линейчатой поверхностью с прямыми параллельными Z-оси. Система на поверхности $W = \{(x, y, z): \ x = hy^{a/b}\}$ задается в виде

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n \exp(b(1 - hy_n^{a/b} z_n)), \\ z_{n+1} &= z_n \exp(c(y_n - z_n)), \end{aligned} \tag{7}$$

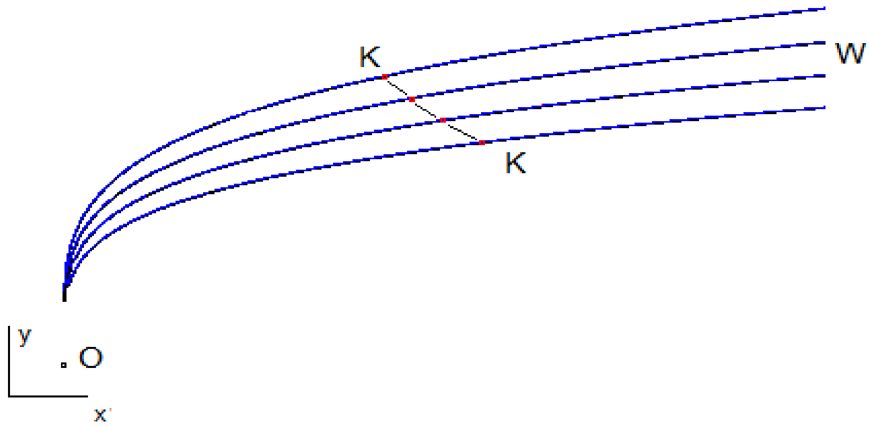


Рис. 2: Кривая неподвижных точек $K = \{(x, y, z): \ xy = 1, \ y = z\}$ и инвариантные слои $W = \{(x, y, z): \ x = hy^{a/b}, \ \ h = const\}$.

где число $h > 0$ задает инвариантный слой. Так $h = 1$ задает поверхность, проходящую через состояние равновесия (1,1,1). Для произвольной поверхности $W(h)$ состояние равновесия определяется равенствами

$$xy = 1, \ \ y = z, \ \ x = hy^{a/b}.$$

Откуда следует, что состояние равновесия имеет координаты

$$(h^{\frac{b}{a+b}}, h^{-\frac{b}{a+b}}, h^{-\frac{b}{a+b}})$$

на каждом слое $W(h)$.

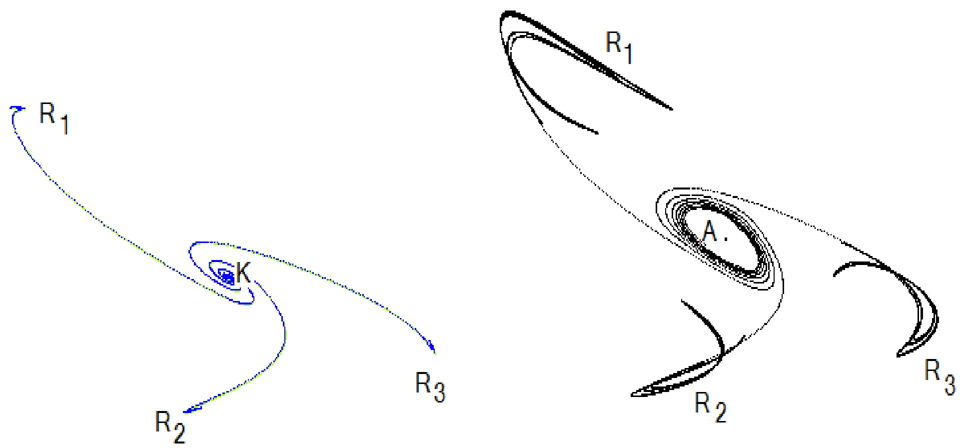
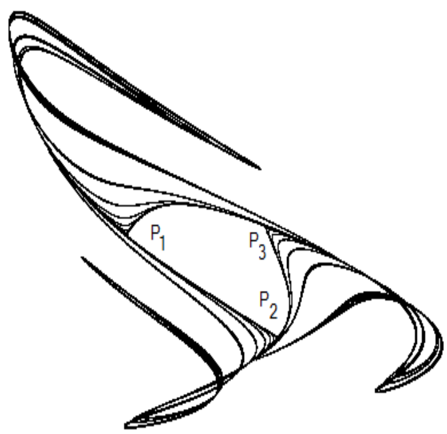


Рис. 3: Рождение устойчивого инвариантного эллипса при изменении h от 0.8 к 0.58.

Исследуем, как меняется динамика системы в слоях $W(h) = \{(x, y, z) : x = hy^{a/b}\}$ в зависимости от значения h. Иначе говоря, рассмотрим бифуркации системы (7) при изменении параметра h. На каждом слое $W(h)$ имеется точка $W(h) \bigcap K$, которая является неподвижной для системы (7). Если слой фиксирован, то для такой неподвижной точки сохраним обозначение K. Рассмотрим систему (7) при $a = 2.4$; $b = 0.9$; $c = 0.9$. На слое $W(h = 1)$ имеется устойчивое состояние равновесия $K(1,\ 1)$ с комплексными мультипликаторами. При уменьшении значения h характер устойчивости начинает меняться. Так, на слое $W(h = 0.8)$ (см. левый рис. 3) имеется 3-периодическое инвариантное множество R, от которого орбиты уходят к устойчивому состоянию равновесия K. При изменении параметра h от 0.8 к 0.58 из устойчивого состояния равновесия рождается устойчивый инвариантный эллипс A, а состояние равновесия K теряет устойчивость, т.е. происходит бифуркация Неймарка-Саккера (см. правый рис. 3). При этом, инвариантное множество R увеличивается в размере. При дальнейшем уменьшении параметра h на устойчивом эллипсе A рождается гиперболическая 3-периодическая орбита P (см. левый рис. 4). Когда h достигает значения 0.515970, неустойчивое многообразие $W^u(P_3)$ пересекается трансверсально с устойчивым многообразием $W^s(P_1)$ орбиты P (0.8037147 1.33638665) (см. правый рис. 4). Построение этих многообразий и оценка трансверсальности проводилась в соответствии с [4, 12]. Согласно теореме Смейла [10], трансверсальное пересечение порождает хаос вблизи точек пересечения. При этом множество A теряет устойчивость и сливается с множеством R, образуя одно инвариантное множество Ω, которое есть замыкание неустойчивого многообразия $W^u(P)$ орбиты P (см. левый рис. 4). Отметим, что орбита, которая начинается вблизи состояния равно-



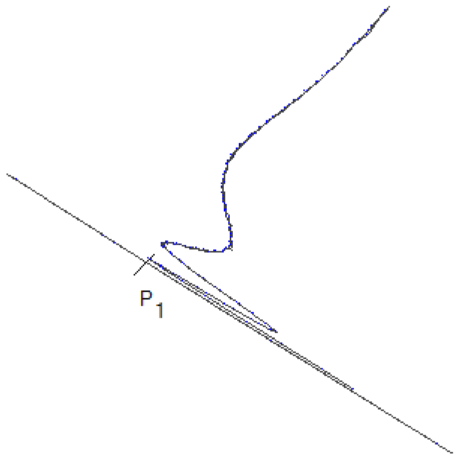


Рис. 4: Хаос на инвариантном слое $W(h = 0.515970)\}$, замыкание неустойчивого многообразия $W^u(P)$. Пересечение неустойчивого и устойчивого многообразий 3-периодической точки P.

весия K (1.1977742, 1.1977742), достигает множество Ω и затем блуждает на нем. На левом рис. 5 представлена орбита точки B (1.2, 1.2). Энтропия E системы на инвариантном множестве Ω была оценена как показатель (по основанию 2) роста длины кривой [11]. Получена оценка снизу $E = 0.69314$. Так как энтропия является мерой хаоса, то мы можем утверждать, что на множестве Ω система допускает хаос. Это наглядно показывает орбита точки B на левом рис. 5. Дальнейшее уменьшение параметра h приводит к усиле-

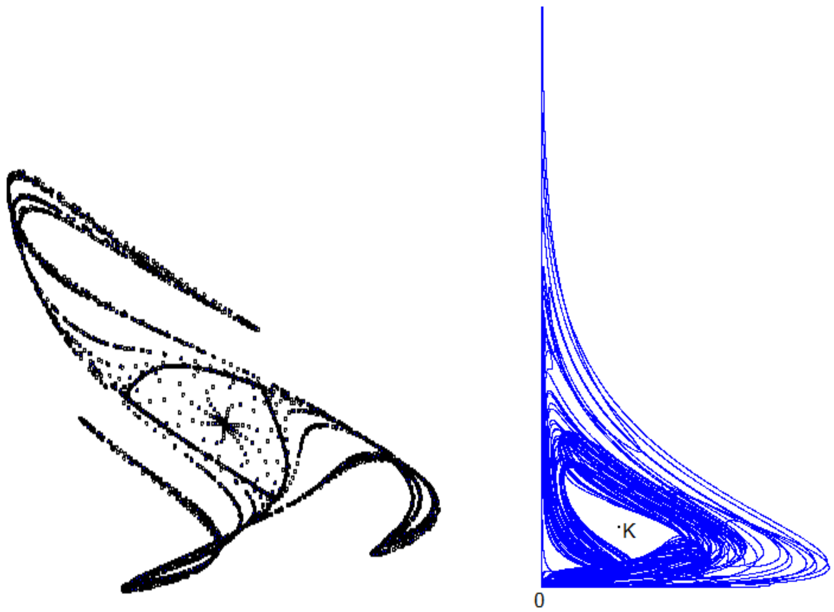


Рис. 5: Орбита точки (1.2, 1.2) на инвариантном слое $W(h = 0.515970)$. Хаос на слое $W(h = 0.3)$ в масштабе 1:10.

нию хаоса. Численные эксперименты показывают, что система (1) обладает слоями, где хаос в аттракторах достигает громадных размеров. На правом рис. 5 представлено хаотическое множество в слое $W(h = 0.3)$ в масштабе 1:10. Это множество является ω-предельным для любой орбиты, которая начинается вблизи неподвижной точки K (1.3886835 1.3886835).

Другая картина бифуркаций наблюдается при увеличении параметра h. Система (7) на слое $W(h)$, $h > 0.8$ имеет устойчивое состояние равновесия K вплоть до $h = 4.02787$. При этом мультипликаторы сначала являются комплексными, а затем они становятся действительными. Когда $h = 4.02787$ состояние равновесия K теряет устойчивость и становится гиперболическим с одним мультипликатором меньше -1. Система меняет ориентацию на одномерном неустойчивом многообразии $W^u(K)$ гиперболической точки K. Многообразие $W^u(K)$ заканчивается в 2-периодической устойчивой орбите A. При дальнейшем увеличении $h > 4.1$ 2-периодическая орбита A теряет устойчивость и происходит бифуркация удвоения периода. Описанная бифуркация удвоения периода, по-видимому, повторяется при достаточно больших h.

4 Исследование общего случая

Рассмотрим дискретную систему (1), где параметр m принимает положительные значения. Неподвижные точки системы определяются равенствами $1 = xy^{m/s}z,\ y = z$. Таким образом, кривая состояний равновесия имеет вид

$$K = \{(x, y, z):\ xy^{m/s+1} = 1,\ y = z\}.$$

Не трудно показать, что динамическая система с произвольным m имеет тоже слоение с инвариантными слоями, как и для $m = 0$. Это слоение задается как поверхности уровня функции

$$U = \frac{x^b}{y^a}.$$

Каждая поверхность

$$W = \{(x, y, z):\ x = hy^{a/b}\},\quad h = const$$

является инвариантной для системы (1). Система на поверхности W задается в виде

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n \exp(b(1 - hy_n^{a/b+m/s} z_n)), \\ z_{n+1} &= z_n \exp(c(y_n - z_n)), \end{aligned} \tag{8}$$

где число $h > 0$ задает инвариантный слой. Таким образом, система (1) имеет тоже слоение как в случае $m = 0$, но динамика на слоях отличается от случая $m = 0$. Рассмотрим различия, которые возникают при $m > 0$. Для определенности будем рассматривать систему (1) при $a = 2.45,\ b = 0.6,\ c = 0.9,\ m = 0.25,\ s = 0.5$. На рис. 6 показана динамика системы вблизи кривой состояний равновесия K. Каждой точке на кривой K соответствует инвариантный слой $W = \{(x, y, z):\ \frac{x^b}{y^a} = h\}$. Данные слои трансверсальны кривой K, при этом сами слои на рис. 6 не показаны, а показаны только периодические орбиты устойчивые в слоях. Состояние равновесия O (1,1,1) является гиперболическим. На левом рис. 6 показано неустойчивое многообразие $W^u(O)$, которое заканчивается в 2-периодической устойчивой орбите. На $W^u(O)$ система меняет ориентацию при каждой итерации. В слоях, которые лежат ниже слоя точки O, возникают бифуркации удвоения периода, что хорошо видно на левом рис. 6. На правом рис. 6 показана динамика в слоях выше слоя проходящего через состояние равновесия O (1,1,1). При увеличении y и z происходит бифуркация состояний равновесий (также как в случае $m = 0$). Сначала состояние равновесия становится устойчивым в слое. Это происходит в $W(h = 0.3083)$, где состояние равновесия имеет координаты (1.234603, 1.234603). Затем появляются комплексные мультипли-

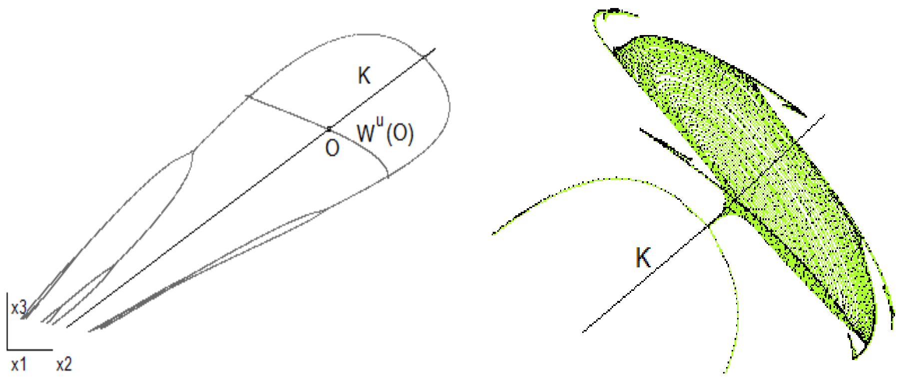


Рис. 6: Динамика вблизи кривой состояний равновесия K.

каторы в $W(h = 0.28)$. Наконец, состояние равновесия теряет устойчивость в $W(h = 0.2311)$ и происходит бифуркация Неймарка-Саккера. На левом рис. 7 показана динамика вблизи инвариантного устойчивого эллипса в слое $W(h = 0.18)$. Здесь K (1.359516, 1.359516) неустойчивое состояние равновесия, вблизи эллипса лежит 5-периодическая гиперболическая орбита H, H_1 имеет координаты (1.289692, 1.235095). Неустойчивое многообразие $W^u(H)$ стремится одним концом к устойчивому эллипсу и другим к устойчивой 5-периодической орбите P, P_1 имеет координаты (1.156926 1.338456) (см. левый рис. 7). При этом орбита, начинающаяся вблизи точки K, заканчивается на эллипсе. Дальнейшее уменьшение h приводит к бифуркации инвариантного эллипса к множеству G, которое изображено на правом рис.7 для слоя $W(h = 0.155)$. Инвариантное множество G является предельным для любой орбиты, начинающейся вблизи точки K. Оценивая энтропию как показатель роста длины кривой при итерации [11], можно показать хаотичность инвариантного множества G. При $h = 0.15075$ предельное множество G любой орбиты, начинающейся вблизи точки K, приобретает большие размеры, и динамика системы становится аналогичной изображенной на правом рис. 5.

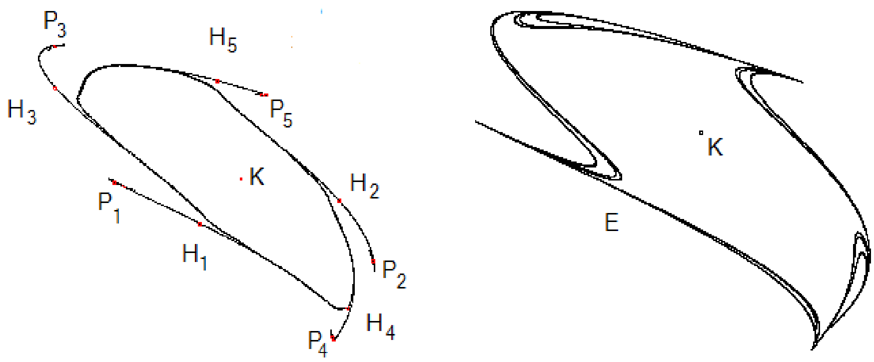


Рис. 7: Динамика вблизи инвариантного эллипса в слое $W(h = 0.18)$. Инвариантное множество G в слое $W(h = 0.155)$.

5 Эквивалентность систем с $m \geq 0$ и $m = 0$

Сравнивая динамику общего случая $m \geq 0$ и частного случая $m = 0$, можно заметить некоторую аналогию. Действительно, имеет место топологическая эквивалентность этих систем, однако для этого параметр a должен быть изменен.

Утверждение 2. Отображение F вида

$$\begin{aligned} X &= xy^{m/s}, \\ Y &= y, \\ Z &= z \end{aligned} \tag{9}$$

переводит дискретную систему

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \exp(a(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)), \\ y_{n+1} &= y_n \exp(b(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)), \\ z_{n+1} &= z_n \exp(c(y_n - z_n)) \end{aligned} \tag{10}$$

в систему вида

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n \exp(d(1 - X_n Z_n)), \\ Y_{n+1} &= Y_n \exp(b(1 - X_n Z_n)), \\ Z_{n+1} &= Z_n \exp(c(Y_n - Z_n)), \end{aligned} \tag{11}$$

где $d = a + \frac{bm}{s}$.

Доказательство. Требуется показать коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
(x_n, y_n, z_n) & \longrightarrow & (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) \\
F\downarrow & & F\downarrow \\
(X_n, Y_n, Z_n) & \longrightarrow & (X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1})
\end{array}$$

или равенств

$$\begin{aligned}
X_{n+1}(F(x_n, y_n, z_n)) &= F_x(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}), \\
Y_{n+1}(F(x_n, y_n, z_n)) &= F_y(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}), \\
Z_{n+1}(F(x_n, y_n, z_n)) &= F_z(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}).
\end{aligned} \tag{12}$$

Для первого уравнения имеем

$$X_{n+1} = X_n \exp(d(1 - X_n Z_n)) = x_n y_n^{m/s} \exp((a + bm/s)(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)) =$$

$$x_n \exp(a(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)) y_n^{m/s} \exp((bm/s)(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)) = x_{n+1} y_{n+1}^{m/s}.$$

Для второго уравнения имеем

$$Y_{n+1} = Y_n \exp(b(1 - X_n Z_n)) = y_n \exp(b(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)) = y_{n+1}.$$

Последнее уравнение тривиально, так как отображение F тождественно по y и z. Доказательство закончено.

Таким образом, системы (10) и (11) топологически эквивалентны. Поэтому, система (10) для $a = 2.45,\ b = 0.6,\ c = 0.9,\ m = 0.25,\ s = 0.5$ эквивалентна системе (11), где $d = 2.75,\ b = 0.6,\ c = 0.9$.

Система (10) имеет слоение с инвариантными слоями вида

$$W(h) = \{(x, y, z) :\ h = \frac{x^b}{y^a}\},$$

а система (11) имеет слоение с инвариантными слоями вида

$$W(H) = \{(X, Y, Z) :\ H = \frac{X^b}{Y^d}\}.$$

Можно показать, что отображение F переводит слой $W(h)$ на слой $W(H)$, При этом системы на этих слоях совпадают.

Учитывая, что $x = P/P_e$, $y = (r_e/r)^s$, P - уровень цен, r - ставка процента, $X = P/P_e((r_e/r)^s)^{m/s} = P/r^m\ r_e^m/P_e$, т. е. с экономической точки зрения координата X пропорциональна уровню цен и обратно пропорциональна m-й степени ставки процента.

6 Неконтролируемое возмущение системы

Обычно экономическая система подвергается возмущениям, которые являются неконтролируемыми и случайными. В этой секции мы исследуем динамику возмущенной системы вида (2), где ε - малое положительное число,

$$q_i(n+1) = 1 - 2q_i^2(n), \tag{13}$$

начальные значения $q_i(0) \in [-1, 1]$ задаются для каждого $i = 1,\ 2,\ 3$ случайным образом. Таким образом, исследуется 6-мерная система, состоящая из уравнений системы (2) и уравнений (13), $i = 1,\ 2,\ 3$. Следует ожидать, что описанные возмущения не сохраняют инвариантное слоение. В каждом инвариантном слое существует аттрактор с некоторой областью притяжения. Результаты, описанные выше, показывают, что аттракторы формируются из устойчивых состояний равновесия кривой K, а при потере устойчивости этих состояний равновесия рождаются аттракторы, которые меняются непрерывно от слоя к слою. Послойное объединение таких аттракторов создает множество, которое при возмущении не исчезает. Это хорошо видно на правом рис. 8, где изображена орбита точки (1,1,1) возмущенной системы (2) для параметров $a = 2.45,\ b = 0.6,\ c = 0.9,\ m = 0$ и величиной хаотичного возмущения $\varepsilon = 0.01$. Следует отметить, что хаотическое возмущение заставляет орбиту двигаться вверх и вниз вблизи аттракторов невозмущенной системы. При этом возмущение может не только перевести орбиту в хаотическую область (см. верхнюю часть правого рис.8), но и возвратить ее из этой области. С экономической точки зрения существуют возмущения, которые мы можем

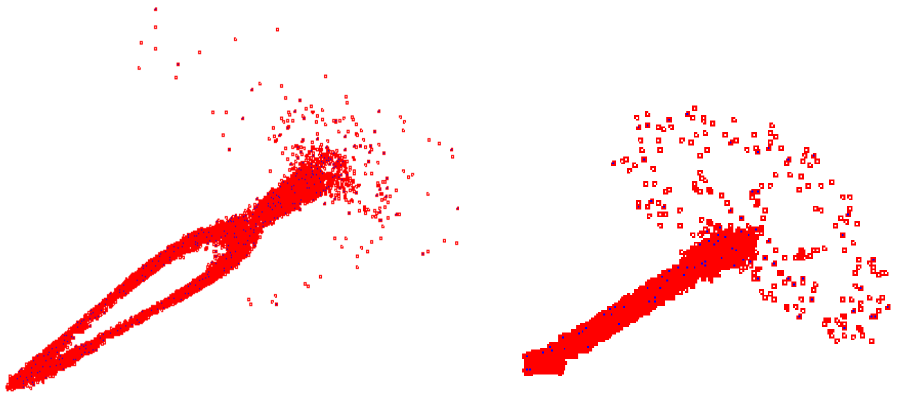


Рис. 8: Орбита точки (1,1,1) возмущенной системы (2) с $\varepsilon = 0.01$. Орбита точки (1,1,1) системы (14) с $\varepsilon_1 = 0.01,\ \varepsilon_{2,3} = 0$.

свести к нулю или сделать их незначительными, а есть возмущения, которые мы не способны существенно уменьшить. Например, центральный банк может контролировать ставку процента и не допускать хаотических возмущений. Но мы не можем избавиться от хаотических возмущений уровня цен. Таким образом, желательно выяснить, какие возмущения существенно влияют на динамику системы, а какие нет. Для этого рассмотрим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \exp(a(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)) + \varepsilon_1 q_1(n), \\ y_{n+1} &= y_n \exp(b(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)) + \varepsilon_2 q_2(n), \\ z_{n+1} &= z_n \exp(c(y_n - z_n)) + \varepsilon_3 q_3(n), \end{aligned} \tag{14}$$

где $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ и ε_3 различны, а q_i удовлетворяют системе (13). Ометим, что возмущение последнего уравнения сохраняет инвариантные слои, т.к. каждый слой является линейчатой поверхностью параллельный оси Z. Таким образом, возмущение вида $\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_3 \neq 0$ сохраняет слои невозмущенной системы и возмущает систему в слое. Это означает, что возмущение национального дохода (производства) существенно не меняет динамику вблизи аттракторов на слоях.

Слабый контроль уровня цен приводит к возмущению первого уравнения. На правом рис. 8 показана орбита точки (1,1,1) системы (14) с $\varepsilon_1 = 0.01,\ \varepsilon_{2,3} = 0$. Из результатов численного расчета следует, что возмущение уровня цен приводит к росту y и z (национального дохода). Возрастание y означает уменьшение ставки процента. Следует отметить, что наиболее сильные бифуркации к хаосу наблюдаются при слабом контроле ставки процента. Численные эксперименты для системы (14) с $\varepsilon_2 = 0.01\ \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0$, показывают, что поведение решений такой системы практически не отличается от возмущенной системы общего типа (2) с $\varepsilon = 0.01$ (см. левый рис. 8). Малые возмущения общего вида приводят к тому, что орбита начинает смещаться вдоль состояний равновесия и попадает сначала в неустойчивое состояние равновесия, а затем в слой, где наблюдается хаос. Величина хаоса может, как увеличиваться, так и уменьшаться при возмущении.

7 Заключение

Проведено исследование дискретной макроэкономической модели (1). Показано, что система (1) топологически эквивалентна системе (1) с $m = 0$. Она имеет кривую, заполненную состояниями равновесия, а трансверсально к этой кривой лежат инвариантные поверхности уровня функции $U = \frac{x^b}{y^a}$, которые образуют слоение. Можно считать, что состояния равновесия являются центром каждой инвариантной поверхности. На каждом слое имеется аттрактор, к которому стремятся почти все орбиты. Данный аттрактор может быть состоянием равновесия или иметь достаточно сложное (хаотическое) строение. При изменении поверхности уровня происходит бифуркация динамики системы от устойчивого состояния равновесия к хаосу. Отметим, что хаос в данной макроэкономической модели является внутренним свойством системы. При этом хаос не всегда порождает экономический кризис. В данном случае, хаос – это невозможность долгосрочного прогнозирования. Численные результаты показывают, что имеются слои, где хаос достигает громадных размеров, тогда происходит разбалансировка экономической системы и наступает кризис.

Малое внешнее возмущение может разрушить описанную топологическую структуру орбит системы. Численные эксперименты и экономическая практика показывают, что не все возмущения одинаково влияют на динамику системы. Так, возмущение национального дохода (z) не меняет инвариантного слоения, возмущение уровня цен (x) приводит к слабому изменению динамики, сохраняя аттракторы слоев. Существенное влияние на динамику системы оказывает возмущение процентной ставки. Малые возмущения приводят к тому, что орбита начинает смещаться вдоль состояний равновесия и попадает сначала в неустойчивое состояние равновесия, а затем в слой, где наблюдается хаос, величина которого может увеличиваться, достигая значительных размеров.

Список литературы

[1] *Лебедев В.В., К.В. Лебедев* Математическое моделирование нестационарных экономических процессов, Москва, ООО "еТест 2011. 336 с.

[2] *Макконнелл К., Брю С.* Экономикс // Москва, 1992.

[3] *Г.Г.Малинецкий, А.Б.Потапов* Современные проблемы нелинейной динамики, Москва: Эдиториал УРСС, 2000, 336 с.

[4] *Осипенко Г.С., Ампилова Н.Б.* Введение в символический анализ динамических систем, С.-Петербургский университет, 2005, 240 с.

[5] *Пезенти А.* Очерки политической экономии капитализма, Москва, 1976.

[6] *Плисс В.А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения. Известия АН. СССР. сер. матем. 28, 6 (1964) 1297-1324.

[7] *Плисс В.А.* К теории инвариантных поверхностей. Дифференциальные уравнения. т.2б (1966), № 9, 1139-1150.

[8] *Столярю Л.* Равновесие и экономический рост, Москва, 1974.

[9] *Gleik J.* Chaos, Making a Mew Science, Viking Press, New York, 1987, 78 p.

[10] *Katok A., Hasselblat B.* Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems, Cambridge University Press, 1995.

[11] *Newhouse S. and Pignataro T.* On the estimation of topological entropy, J. Stat. Phys., 72 (1993), 1331-1351.

[12] *Osipenko G.* Dynamical systems, Graphs, and Algorithms, Lect. Notes in Math, 1889, Springer, 2007, 283 p.

[13] *Osipenko G.* Center manifold. in Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Robert A. Meyers (Ed.) Springer, 936-951.

[14] *Schuster H.G. and Just W.* Deterministic Chaos, WILEY-VCH, Weinheim, 2005.

[15] *Takens F.* Detecting strange attractor in turbulence, Lect. Notes in Math. 898 (1981), Berlin, Springer, p. 89-94.