ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 4, 2016
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Численные методы

УДК 519.642

МНОГОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ ТИПА ГУРСА

Т.Д. Омуров, А.О. Рыспаев, М.Т. Омуров

Кыргызский национальный университет им.Ж.Баласагына, Бишкек
Кыргызстан
E-mail: Ryspaev.Amantur@yandex.ru, Omurovtd@mail.ru

Аннотация

В данной работе с учетом аналитико-регуляризационных методов исследована многомерная обратная задача с условиями типа Гурса, где вырождается двумерное интегральное уравнение Вольтерра-Фредгольма первого рода. На основе созданных системных алгоритмов разработан численный метод решения этого уравнения, причем построенные разностные (сеточные) аналоги схемы являются устойчивыми.

Ключевые слова: уравнение Вольтерра-Фредгольма, обратная задача, разностные схемы, квадратурная формула, метод регуляризации, численно-системный алгоритм.

Abstract

In this work by analytic-regularization methods we investigate a multidimensional inverse problem with Goursat type conditions ,where a two-dimensional first kind Volterra-Fredholm integral equation degenerates. On the base of developed system algorithm the numerical method for solving this equation is elaborated, such that the constructed difference scheme analogues are stable.

Keywords: Volterra-Fredholm equation, inverse problem, difference schemes, quadrature formula, method of regularization, numerically-system algorithm.

Введение. В работах [3-5,10] изучены обратные задачи и на основе метода регуляризации доказаны достаточные условия разрешимости исходных задач. В указанной области отметим и работу[8], где изучаются обратные задачи с интегральной зависимостью для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, сводящиеся к одномерным уравнениям Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма первого рода [6,9,11], причем предлагаются регуляризационные и численные методы решения изучаемых задач [1,2,7].

В этой работе мы исследуем многомерную обратную задачу, где вырождается двумерное уравнение Вольтерра-Фредгольма первого рода, при этом на основе аналитико-регуляризационных методов работы [8] разработан регуляризационно-численный метод решения указанного уравнения. Изучаемые классы задач встречаются в области геофизики, в теории электромагнитных зондирований, слоистых сред [4,5] и др.

§ 1. Обратная задача с интегральной зависимостью

В данном параграфе изучим многомерную обратную задачу с условиями типа Гурса, где вырождается уравнение Вольтерра-Фредгольма первого рода. На основе метода регуляризации докажем достаточные условия разрешимости в классе $W_n = (C_n^{1,1,1}(\Omega);\ C_n^{1,0}(D_0))$.

Рассмотрим уравнение

$$u_{xyt}(x,y,t) + a(y)u_{xt} = f(x,y,t,u,u_y), \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} u(x,0,t) = (G_0 z)(x,t), \\ (u_y + au)\big|_{x=0} = \varphi(y,t), \\ (u_y + au)\big|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$u(x,y,t)\big|_{y=y_0} = g(x,t),\ y_0 \in (0,\infty), \tag{1.3}$$

то есть получим гранично-обратную задачу (1.1)-(1.3), где требуется определить функции (u,z), так, чтобы

$$G_0 z \equiv \int_0^t K(x,t,s)z(x,s)ds + \lambda \int_0^T \int_0^{N_0(x)} H_0\left(x,t,s,\tau,\int_0^s z(\tau,s')ds'\right)d\tau ds. \tag{1.4}$$

При этом φ, g, f $-$известные $n-$мерные векторные функции, и

$\varphi \in C_n^{0,1}(R_+ \times [0,T]),\ g \in C_n^{1,1}(D_0 = [0,X]\times[0,T]),\ f \in C_n^{0,0,0,1,1}(\Omega \times R \times R),\ \Omega = [0,X]\times R_+ \times [0,T]$; функции $a(y) \ge 0, \varphi(y,t)$ интегрируемы по y в $R_+ = [0,\infty)$, кроме того $K, H_0 : K \in C_n^{1,1,1}(D_3)$;

$K_t^{(i)}(x,t,t) \equiv 0,\ (i=0,1),\ D_3 = D_0 \times \{0 \le s \le t \le T\},\ H_0(x,t,s,\tau,l) \in C_n^1(D_4),\ \ D_4 = D_0 \times \{0 \le \tau \le X\} \times R,$

$H_0\big|_{s=t} \equiv 0,\ \ H_0\big|_{\tau=x} \equiv 0.$ Функция $N_0(x) \in C^1[0,X],\ 0 \le N_0(x) \le x \le X$, а $z(x,0) = q = \text{const}$,

G_0 $-$оператор типа Вольтерра-Фредгольма, $0 < \lambda -$известный параметр.

Так как искомые функции $(u;z)$ являются $n-$мерными векторными функциями, то $u(x,y,t)\in C_n^{1,1,1}(\Omega), z(x,t)\in C_n^{1,0}(D_0)$.

1. Исследуем задачу (1.1)-(1.3) в $C_n^{1,1,1}(\Omega)$. Выполнив подстановку

$$u_y + au = Ve^{-y} + \varphi(y,t), \quad \forall (x,y,t)\in\Omega, \tag{1.5}$$

где $V-$ новая искомая функция и

$$\begin{aligned} &x=0: \quad V(0,y,t)=0,\\ &t=0: \quad V(x,y,0)+\varphi(y,0)=0,\\ &V(x,y,0)=0, \quad \forall (x,y,t)\in\Omega=[0,X]\times R_+\times[0,T], \end{aligned} \tag{1.6}$$

получим

$$u(x,y,t)=e^{-\int_0^y a(s)ds}\cdot\psi(x,t)+\int_0^y e^{-\int_s^y a(s')ds'}\cdot\{e^{-s}V(\eta,s,\tau)+\varphi(s,t)\}ds \equiv (A_1V)(x,y,t). \tag{1.7}$$

Тогда учитывая (1.3), имеем:

$$g(x,t)=e^{-\int_y^{y_0} a(s)ds\cdot}\cdot\psi(x,t)+\int_0^{y_0}\{e^{-s}V(\eta,s,\tau)+\varphi(s,t)\}ds\,,$$

или

$$\psi(x,t)=\left[g(x,t)-\int_0^{y_0}\{e^{-s}V(s,x,t)+\varphi(s,t)\}ds\right]e^{-\int_0^{y_0} a(s)ds\cdot}\equiv F(x,t). \tag{1.8}$$

Подставляя функцию $\psi(x,t)$ в (1.7), получим

$$\begin{aligned} u(x,y,t)=e^{-\int_{y_0}^{y_y} a(s)ds\cdot}&\left[g(x,t)-\int_0^{y_0}\{e^{-s}V(s,x,t)+\varphi(s,t)\}ds\right]+\\ +\int_0^y e^{-\int_s^y a(s')ds'\cdot}&\left\{e^{-s}V(s,x,t)+\varphi(s,t)\right\}ds\equiv (AV)(x,y,t). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Основываясь на (1.3), (1.7) из (1.1), имеем

$$V_{xt} = f(x,y,t,A_1V,Ve^{-y}+\varphi(y,t)-a\cdot A_1V). \tag{1.10}$$

Интегрируя уравнение (1.10) по x и t, получаем интегральное уравнение второго рода:

$$\begin{aligned} V(x,y,t)=\int_0^x\int_0^t f(\eta,y,\tau,(A_1V)(\eta,y,\tau),V(\eta,y,\tau)e^{-y}+\varphi(y,\tau)-a\cdot(A_1V)(\eta,y,\tau))d\tau d\eta\equiv\\ \equiv(Q_1V)(x,y,t). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Утверждение 1. Пусть

$$\begin{cases} \sqrt{n}L_f[2N_0+1+\|a\|_c\,2N_0]XT=d<1,\\ L_{1f}=\sup\limits_{\Omega}\left\|f_{l_1}(x,y,t,l_1,l_2)\right\|, L_{2f}=\sup\limits_{\Omega}\left\|f_{l_2}(x,y,t,l_1,l_2)\right\|, L_f=\max(L_{1f},L_{2f}) \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\begin{cases} Q_1 : S_r(V_0) \to S_r(V_0) = \{V : |V - V_0| \le r = \text{const}, \ \forall (x,y,t) \in \Omega\}, \\ \|Q_1 V_0 - V_0\| \le (1-d)r. \end{cases} \tag{1.13}$$

Тогда уравнение (1.11) однозначно разрешимо в $C^{1,0,1}(\Omega)$.

Действительно, первое условие (1.12) означает сжимаемость оператора Q_1, так как d является коэффициентом сжатия оператора Q_1,

$\|Q_1 V - Q_1 \tilde{V}\| \le \sqrt{n} L_f [2N_0 + 1 + \|a\|_c \, 2N_0] XT \cdot \|V - \tilde{V}\| = d \, \|V - \tilde{V}\|.$

Второе условие (1.13) означает, что оператор Q_1 отображает область определения в себя, так как при условии $\|Q_1 V_0 - V_0\| \le (1-d)r,$ имеет место

$|Q_1 V - V_0| = |Q_1 V - Q_1 V_0 + Q_1 V_0 - V_0| \le d \, \|V - V_0\| + (1-d)r \le dr + (1-d)r = r.$

Из полученных результатов следует, что для оператора Q_1 реализуются условия принципа Банаха [12], тогда существует единственное решение (1.11) в $C^{1,0,1}(\Omega)$.

Поэтому уравнения (1.11) строятся по правилу Пикара:

$$V_{n+1} = Q_1 V_n, \quad (n = 0,1,2,..), \tag{1.14}$$

с оценкой погрешности $\|V - V_n\| \le d^n r \xrightarrow[n\to\infty]{d<1} 0,$

где V_0 – начальное приближение.

2. Далее, учитывая (1.4) и $G_0 z$ для построения функции $z(x,t)$, имеем систему интегральных уравнений Вольтерра-Фредгольма первого рода:

$$\int_0^t K_t(x,t,s) z(x,s) d\tau ds + \lambda \int_0^T \int_0^{N_0(x)} H_{0t}\left(x,t,s,\tau, \int_0^s z(\tau,s')ds' \right) d\tau ds = F_t'(x,t), \tag{1.15}$$

где $0 < \lambda$ – не является характеристическим значением уравнения (1.15). Система (1.15) приводится к виду:

$$\int_0^t K_{ts}(x,t,s) \int_0^s z(x,s')ds'ds - \lambda \int_0^T \int_0^{N_0(s)} \left(H_{0t}(x,t,s,\tau, \int_0^s z(s')ds' \right) d\tau ds = -F_t'(x,t). \tag{1.16}$$

Введя подстановку вида

$$\int_0^t z(x,s)ds = \theta(x,t), \ \theta(x,0) = 0, \tag{1.17}$$

получим

$$\begin{cases} (G\theta)(x,t) \equiv \int\limits_0^t K_0(x,s)\theta(x,s)ds + \int\limits_0^t K_1(x,t,s)\theta(x,s)ds + \lambda\int\limits_0^T \int\limits_0^{N_0(x)} H(x,t,s,\tau,\theta(\tau,s))d\tau ds = -F_t'(x,t), \\ \int\limits_0^t z(x,s)ds = \theta(x,t), \\ K_0(x,s) \equiv K_{ts}(x,s,s); 0 \le K_1(x,t,s) \equiv K_{ts}(x,t,s) - K_{ts}(x,s,s); -H_{0t}(x,t,s,\tau,\theta(\tau,s)) \equiv H(x,t,s,\tau,\theta(\tau,s)) \ge 0, \\ (\lambda > 0), \end{cases} \tag{1.18}$$

при этом для $n \times n-$ матричной функции $C_n(D_0) \ni K_0(x,s)$, требуется, чтобы $\gamma_i(x,s), (i = \overline{1,n})$ являлись собственными значениями этой матрицы, причем

$$\gamma_i(x,s) \ge \alpha > 0. \tag{*}$$

Введем возмущенную систему

$$\begin{cases} \varepsilon\theta_\varepsilon(x,t) + (G\theta_\varepsilon)(x,t) = -F_t'(x,t), \theta_\varepsilon(x,0) = 0, \\ \delta z_\delta(x,t) + \int\limits_0^t z_\delta(x,s)ds = \theta_\varepsilon(x,t) + \delta z(x,0), \end{cases} \tag{1.19}$$

где ε, δ - малые параметры.

Если $W(x,t,0,\varepsilon)$ – матричная функция Коши системы

$$\theta_{\varepsilon t} + \frac{1}{\varepsilon}K_0\theta_\varepsilon = F_0(x,t), \theta_\varepsilon(x,0) = 0, \tag{1.20}$$

то на основе неравенства Важевского [8] получаем

$$W(x,t,s,\varepsilon) \equiv e^{-\int\limits_s^t \frac{K_0(x,\tau)d\tau}{\varepsilon}}; \qquad \|W(x,t,s,\varepsilon)\| \le \sqrt{n}e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)}, \quad (s \le t). \tag{1.21}$$

Поэтому, проведя алгебраические операции относительно $\theta_\varepsilon(x,t)$, из (1.19) получим:

$$\begin{aligned} \theta_\varepsilon(x,t) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t W(x,t,s,\varepsilon)K_0(x,s)\cdot\Big\{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^s \big[K_1(x,s,s') - K_1(x,s',s')\big]\theta_\varepsilon(x,s')ds' + \\ +\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \big[K_1(x,t,s') - K_1(x,s',s')\big]\theta_\varepsilon(x,s')ds' - \frac{1}{\varepsilon}\lambda\int\limits_0^T \int\limits_0^{N_0(x)} [H(x,t,s',\tau,\theta_\varepsilon(\tau,s')) - \\ -H(x,s,s',\tau,\theta_\varepsilon(\tau,s'))]d\tau ds' - \frac{1}{\varepsilon}(F(x,s) - F(x,t))\Big\}ds - \frac{1}{\varepsilon}W(x,t,0,\varepsilon)\times \\ \times\Big\{\int\limits_0^t \big[K_1(x,t,s') - K_1(x,s',s')\big]\theta_\varepsilon(x,s')ds' - \lambda\int\limits_0^T \int\limits_0^{N_0(x)} H(x,t,s',\tau,\theta_\varepsilon(\tau,s'))d\tau ds' + F(x,t)\Big\} \equiv (\aleph_0\theta_\varepsilon)(x,t,\varepsilon). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Аналогично получим

$$\begin{cases} z_\delta(x,t) = -\dfrac{1}{\delta^2}\displaystyle\int_0^t W_0(x,t,s,\delta)(\theta_\varepsilon(x,s)-\theta_\varepsilon(x,t))ds + \dfrac{1}{\delta}W_0(x,t,0,\delta)\theta_\varepsilon(x,t) + \\ +W_0(x,t,0,\delta)z(x,0), \\ \|W_0(x,t,0,\delta)\| \le \sqrt{n}e^{-\frac{1}{\delta}t}. \end{cases} \quad (1.23)$$

Оценка (1.22) дает

$$\begin{cases} \|\theta_\varepsilon\| \le m_0\|\theta_\varepsilon\|_{C_n} + M_1, \\ 0 < M_1 = \sqrt{n}(2L_{K_1}\dfrac{1}{\alpha^2}C_0T_0 + L_{K_1}e^{-1}\dfrac{1}{\alpha})\cdot T + \sqrt{n}(L_F\dfrac{1}{\alpha^2}C_0 + \lambda L_H\dfrac{1}{\alpha}e^{-1}), \\ 0 < m_0 = \sqrt{n}(2L_H\dfrac{1}{\alpha^2}C_0T_0\lambda + L_H\dfrac{1}{\alpha}e^{-1}\lambda)T < 1, \\ T_0 = \sup\limits_{D_0}\|K_0(x,t)\|,\ C_0 = \displaystyle\int_0^\infty e^{-z}zdz = 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\|\theta_\varepsilon\|_{C_n} \le (1-m_0)^{-1}\cdot M_1. \quad (1.24)$$

Далее, учитывая, $\theta_\varepsilon = \theta + \Im_\varepsilon$, имеем:

$$\Im_\varepsilon(x,t) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t W(x,t,s,\varepsilon)K_0(x,s)\Big\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s [K_1(x,s,s')-K_1(x,s',s')]\Im_\varepsilon(x,s')ds +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [K_1(x,t,s')-K_1(x,s',s')]\Im_\varepsilon(x,s')ds' + \frac{1}{\varepsilon}\lambda\int_0^T\int_0^{N_0(x)} [H(x,s,s',\tau,\theta(\tau,s')) + \quad (1.25)$$
$$+\Im_\varepsilon(\tau,s') - H(x,s,s',\tau,\theta(\tau,s'))]d\tau ds' - \frac{1}{\varepsilon}\lambda\int_0^T\int_0^{N_0(x)} [H(x,t,s',\tau,\theta(\tau,s')) + \Im_\varepsilon(\tau,s') -$$
$$-H(x,t,s',\tau,\theta(\tau,s'))]d\tau ds'\Big\}ds - \frac{1}{\varepsilon}W(x,t,0,\varepsilon)\cdot\Big\{\int_0^t [K_1(x,t,s')-K_1(x,s',s')]\Im_\varepsilon(x,s')ds' -$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\lambda\int_0^T\int_0^{N_0(x)} [H(x,t,s',\tau,\theta(\tau,s')) + \Im_\varepsilon(\tau,s') - H(x,t,s',\tau,\theta(\tau,s'))]d\tau ds'\Big\}ds + \Delta(x,t,\varepsilon,0) \equiv (D\Im_\varepsilon)(x,t,\varepsilon),$$

при этом

$$\begin{cases} \Delta(x,t,\varepsilon,0) \equiv -\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^T W(x,t,s,\varepsilon)K_0(x,s)(\theta(x,t)-\theta(x,s))ds - W(x,t,0,\varepsilon)\theta(x,t), \\ \|\Delta\|_{C_n} \le (L_0T_0\sqrt{n}\dfrac{1}{\alpha^2} + L_0\sqrt{n}\dfrac{1}{\alpha}e^{-1})\varepsilon = Q_1\varepsilon. \end{cases}$$

Следовательно

$$\|\Im_\varepsilon\|_{C_n} \le (1-m_0)^{-1}Q_1\varepsilon = M_2(\varepsilon). \quad (1.26)$$

Пусть

$$z_\delta = z + \xi_\delta.$$

Тогда

$$\xi_\delta(x,t) = -\frac{1}{\delta^2}\int_0^T W_0(x,t,s,\delta)(\theta_\varepsilon(x,s)-\theta(x,s))ds + \frac{1}{\delta}(\theta_\varepsilon(x,s)-\theta(x,s)) - W_0(x,t,0,\delta)\times$$

$$\times(z(x,t)-z(x,0)) - \frac{1}{\delta}\int_0^t W_0(x,t,s,\delta)(z(x,t)-z(x,s))ds,$$

то есть

$$\|\xi_\delta\|_{C_n} \le 2\sqrt{n}(\frac{1}{\delta}M_2(\varepsilon) + L_z\delta) = Q_0(\varepsilon,\delta),\ (0 < L_z = \text{const}). \tag{1.27}$$

Значит

$$\Im_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,\ \xi_\delta(x,t) \xrightarrow[\varepsilon\to 0,\delta\to 0]{} 0, \forall(x,t)\in D_0, \tag{1.28}$$

так как

$$Q_0(\varepsilon,\delta) \xrightarrow[\varepsilon\to 0,\delta\to 0]{} 0,\ \text{когда}\ \frac{1}{\delta}M_2(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0,\delta\to 0]{} 0.$$

Отсюда видно, что

$$(\theta_\varepsilon, z_\delta) \xrightarrow[\varepsilon\to 0,\delta\to 0]{} (\theta; z),\ \forall(x,t)\in A. \tag{1.29}$$

Утверждение 2. При условии (1.28) система (1.16) регуляризируема в $C_n^{1,0}(D_0 = [0,X]\times[0,T])$, причем

$$z_\delta(x,t) \xrightarrow[\delta\to 0]{} z(x,t),\quad \forall(x,t)\in[0,X]\times[0,T] = \Omega_0,\ \text{когда}\ \frac{M_2(\varepsilon)}{\delta} \xrightarrow[\delta\to 0,\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{1.30}$$

Отметим, что по условию заданная функция $z(x,t)$ должна быть дифференцируема по x. Поэтому и от решения уравнения (1.16) требуем это условие, а по t функция непрерывна. Следовательно, можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. При условиях исходной задачи и условиях утверждений 1, 2 решение уравнения (1.1) устойчиво относительно функции ψ, т.е.

$$\|u_\delta(x,0,t) - u(x,0,t)\|_{C_n} \le r_1 Q_0(\varepsilon,\delta), (M_3 = \sup_{D_3}\|K(.)\|,\ \ r_1 = k_0[M_3T + |\lambda|\frac{1}{2}L_H T^2\cdot\|N_0(x)\|_C]).$$

Замечание 1. Полученные результаты данного раздела применимы и к задаче (1.1) - (1.3), когда

$$G_1 z \equiv \int_0^t K(x,t,s)z(x,s)ds + \lambda\int_0^T\int_0^x\int_0^s H_0(x,t,s,\tau)z(\tau,s'))ds'd\tau ds. \tag{1.31}$$

В этом случае, допуская, что имеют место результаты утверждения 2, в следующем разделе мы рассмотрим реализацию численного метода на основе разработанных системных алгоритмов.

§2. Численные методы решения двумерных уравнений Вольтерра-Фредгольма первого рода

В первом параграфе, на основе аналитико-регуляризационных методов доказаны достаточные условия разрешимости многомерной обратной задачи в неограниченной области, где вырождается уравнение Вольтерра-Фредгольма первого рода. Здесь, как для развития теории интегральных уравнений Вольтерра-Фредгольма первого рода рассмотрим численные методы для решения этих уравнений.

Пусть

$$\int_0^t K(x,t,s)z(x,s)ds+\lambda\int_0^1\int_0^x H_0(x,t,s,\tau)z(\tau,s)d\tau ds = f(x,t),\ \ 0<\lambda, \tag{2.1}$$

тогда (2.1) может быть записано в эквивалентной форме

$$\begin{cases} \int_0^t K^0(x,s)\psi(x,s)ds+\int_0^t N^0(x,t,s)\psi(x,s)ds+\lambda\int_0^1\int_0^x H(x,t,s,\tau)\psi(\tau,s)d\tau ds = f(x,t), \\ \int_0^t z(x,s)ds=\psi(x,t),\ \ z(x,0)=0,\quad \psi(x,0)=0, \end{cases} \tag{2.2}$$

с учетом условий

a1) $\left|f_{\tilde\delta}(x,t)-f(x,t)\right|\le C_1\tilde\delta,\ 0<C_1=const, \forall(x,t)\in D_0,$ где $\forall(x,t)\in D_0=[0,1]\times[0,1]$,

$0\le N^0\equiv -K_s(x,t,s)+K_s(x,s,s), 0<\alpha\le K_0(x,s)\equiv -K_s(x,s,s),$ [так как $K_s(x,s,s)\le-\alpha<0, \alpha>0$];

a2) $H_0(x,t,1,\tau)\equiv 0, H_{0s}(x,t,s,\tau)\equiv H(x,t,s,\tau)>0$.

Используя малые параметры и формулу средних прямоугольников, введем системный алгоритм вида:

$$\begin{cases} \varepsilon\psi_{i_2-\frac12,i_1-\frac12}+h_1\sum_{j_1=1}^{i_1-1}K^0_{i_2,j_1-\frac12}\psi_{i_2,j_1-\frac12}+h_1\sum_{j_1=1}^{i_1-1}N^0_{i_2,i_1,j_1-\frac12}\psi_{i_2,j_1-\frac12}+\lambda h_1h_2\sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{i_2}H_{i_2,i_1,j_1-\frac12,j_2-\frac12}\psi_{j_2-\frac12,j_1-\frac12}=f_{\tilde\delta i_2,i_1}, \\ x_{k,i_k}=i_kh_k, t_{ki-\frac12}=(i_k-\frac12)h_k,\ i_k=\overline{1,N_k}, h_kN_k=T_k,\ k=1,2,\ h=h_1+h_2,\ f_{\tilde\delta i_2,i_1}=f_{\tilde\delta i_2,i_1}(x_{1i_2},x_{2i_1}), \qquad (2.3_1) \\ \delta z_{i_2,i_1}+h_1\sum_{j_1=1}^{i_1-1}z_{i_2,j_1-\frac12}=\psi_{\varepsilon,i_2,i_1},[x_1=x,x_2=t,x_3=s,x_4=\tau]. \qquad (2.3_2) \end{cases}$$

1. Если имеет место (2.3_1), то, чтобы исследовать (2.3_1) поступим следующим образом.

Обозначим через $\tilde\psi^{\alpha,h}=\left\{\tilde\psi^{\alpha,h}_{i_2-\frac12,i_1-\frac12}\right\}$ решение (2.3_1) и введем вектор

$$\left\{\tilde\beta^{\varepsilon,h}_{i_2-\frac12,i_1-\frac12}\right\}=\left\{\psi_{i_2-\frac12,i_1-\frac12}-\tilde\psi^{\alpha,\varepsilon}_{i_2-\frac12,i_1-\frac12}\right\},\quad i_k=\overline{1,N_k}, k=\overline{1,2}.$$

Так как

$$\varepsilon\psi_{i_2-\frac{1}{2},i_1-\frac{1}{2}}+h_1\sum_{j_1=1}^{i_1-1}K^0_{i_2,j_1-\frac{1}{2}}\psi_{i_2,j_1-\frac{1}{2}}+h_2\sum_{j_1=1}^{i_1-1}N^0_{i_2,j_2,j_1-\frac{1}{2}}\psi_{i_2,j_1-\frac{1}{2}}+$$
$$+\lambda h_1h_2\sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{i_2}H_{i_2,i_1,j_1-\frac{1}{2},j_2-\frac{1}{2}}\psi_{j_2-\frac{1}{2},j_1-\frac{1}{2}}=f_{i_2,i_1}-r_{i_1,i_2}+\varepsilon\psi_{i_2-\frac{1}{2},i_1-\frac{1}{2}},\tag{2.4}$$
$$i_k=\overline{1,N_k},k=1,2,$$

где

$$r_{i_1i_2}=\lambda\int_0^1\int_0^{x_{1i_2}}H(x_{1i_2},x_{2i_1},t_1,t_2)\psi(t_1,t_2)dt_1dt_2-\lambda h_1h_2\sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{i_2}H_{i_2,i_1,j_1-\frac{1}{2},j_2-\frac{1}{2}}\psi_{1j_2-\frac{1}{2},j_1-\frac{1}{2}}+$$
$$+h_1\int_0^{x_{2i_1}}N^0(x_{1i_2},t)\psi(x_{1_{i_2}},t)dt-h_1\sum_{j=1}^{i-1}N^0_{i_2,i_1,j_1-\frac{1}{2}}\psi_{i_2,j_1-\frac{1}{2}}+\int_0^{x_{2i_1}}K^0(x_{1i_2},t)\psi(x_{1i_2},t)dt-$$
$$-h_1\sum_{j_1=1}^{i-1}K^0_{i_2,j_1-\frac{1}{2}}\psi_{i_2,j_1-\frac{1}{2}}$$

остаточный член формулы средних прямоугольников, то вычитая (2.4) из (2.3_1), имеем:

$$[\varepsilon+h_1K^0_{i_2,j_1-\frac{1}{2}}+h_1N^0_{i_2,j_1-\frac{1}{2}}+\lambda h_1h_2H_{i_2,i_1,,j_1-\frac{1}{2},j_2-\frac{1}{2}}]\beta^{\varepsilon,h}_{i_2-\frac{1}{2},i_1-\frac{1}{2}}+h_1\sum_{j_1=1}^{i_1-1}K^0_{i_2,\,2j_1-\frac{1}{2}}\beta^{\varepsilon,h}_{i_2,j_1-\frac{1}{2}}+$$
$$+h_1\sum_{j_1=1}^{i_1-1}N^0_{i_2,i_1,\,j_1-\frac{1}{2}}\beta^{\varepsilon,h}_{i_2,j_1-\frac{1}{2}}+\lambda h_1h_2\sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{i_2}H_{i_2,i_1,j_1-\frac{1}{2},j_2-\frac{1}{2}}\beta^{\varepsilon,h}_{j_2-\frac{1}{2},j_1-\frac{1}{2}}=\tag{2.5}$$
$$=f_{i_2,i_1}-f_{\tilde{\delta}i_2,i_1}-r_{i_1,i_2}+\varepsilon\psi_{i_2-\frac{1}{2},i_1-\frac{1}{2}},\quad i_k=\overline{1,N},\quad k=1,2.$$

Найдем разность между соседними строками треугольной СЛАУ (2.5) и переходя к оценке по модулю, получим:

$$\left|\beta^{\varepsilon,h}_{i_2-\frac{1}{2},i_1-\frac{1}{2}}\right|\le\frac{\varepsilon}{\varepsilon+h_1K_1+h_1K_2+\lambda h_1h_2K_3}\left|\tilde{\beta}^{\varepsilon,h}_{i_2-\frac{3}{2},i_1-\frac{3}{2}}\right|+\frac{h^2L_1}{\varepsilon+h_1(K_1+K_2)+\lambda h_1h_2K_3}\sum_{j_1=1}^{i_1-1}\left|\tilde{\beta}^{\varepsilon,h}_{i_2-\frac{1}{2},j_1-\frac{1}{2}}\right|+$$
$$+\frac{h^2L_2}{\varepsilon+h_1(K_1+K_2)+\lambda h_1h_2K_3}\sum_{j_1=1}^{i_1-1}\left|\tilde{\beta}^{\varepsilon,h}_{i_2-\frac{3}{2},j_1-\frac{1}{2}}\right|+\frac{\lambda h_1L_3}{\varepsilon+h_1(K_1+K_2)+\lambda h_1h_2K_3}\sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{i_2-1}\left|\tilde{\beta}^{\varepsilon,h}_{j_2-\frac{1}{2},j_1-\frac{1}{2}}\right|+\tag{2.6}$$
$$+\frac{c_1\tilde{\delta}+\left|r_{i_1,i_2}-r_{i_1-1,i_2-1}\right|+\varepsilon\left|\psi_{i_2-\frac{1}{2},i_1-\frac{1}{2}}-\psi_{i_2-\frac{3}{2},i_1-\frac{3}{2}}\right|}{\varepsilon+h_1(K_1+K_2)+\lambda h_1h_2K_3},$$

где

$$\begin{cases}L_1=\max\left|K_x^0(x,s)\right|,\quad K_1=\min K_0(x,t),L_2=\max\left|N_x^0(x,t,s)\right|,\quad K_2=\min N^0(x,t,t),\\ L_3=\max\left|H_x(x,t,s,\tau)\right|,\quad K_3=\min H(x,t,t,x);\ 0<\lambda<\dfrac{\alpha-(K_1+K_2)}{h_2K_3},\alpha>K_1+K_2,\alpha h_1<1.\end{cases}$$

С другой стороны:

$$\left|\psi_{i_2-\frac{1}{2},i_1-\frac{1}{2}}-\psi_{i_2-\frac{3}{2},i_1-\frac{3}{2}}\right|\le \Phi_1 h,\quad \Phi_1=\|\psi\|_C,$$

$$\left|r_{i_1,i_2}-r_{i_1-1,i_2-1}\right|\le C_2h^3,\quad C_2=const,\quad i_k=\overline{1,N_k}.$$

Поэтому из (2.5) вытекает неравенство (2.6)

$$\begin{gathered}\left|\tilde\beta^{\varepsilon,h}_{i_2-\frac{1}{2},i_1-\frac{1}{2}}\right|\le\frac{\varepsilon}{\varepsilon+h_1K_1+h_1K_2+\lambda h_1h_2K_3}\left|\tilde\beta^{\varepsilon,h}_{i_2-\frac{3}{2},j_1-\frac{3}{2}}\right|+\frac{h^2L_1}{\varepsilon+h_1(K_1+K_2)+\lambda h_1h_2K_3}\times\\ \times\sum_{j_1=1}^{i_1-1}\left|\tilde\beta^{\varepsilon,h}_{i_2-\frac{1}{2},j_1-\frac{1}{2}}\right|+\frac{h^2L_2}{\varepsilon+h_1(K_1+K_2)+\lambda h_1h_2K_3}\sum_{j_1=1}^{i_1-1}\left|\tilde\beta^{\varepsilon,h}_{i_2-\frac{3}{2},j_1-\frac{1}{2}}\right|+\frac{\lambda h_1L_3}{\varepsilon+h_1(K_1+K_2)+\lambda h_1h_2K_3}\times\\ \times\sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{i_2-1}\left|\tilde\beta^{\varepsilon,h}_{j_2-\frac{1}{2},j_1-\frac{1}{2}}\right|+\frac{C_1\tilde\delta+C_2h^3+\varepsilon h\Phi_1}{\varepsilon+h_1(K_1+K_2)+\lambda h_1h_2K_3},\quad i_k=\overline{1,N_k},\quad k=\overline{1,2}.\end{gathered}\tag{2.7}$$

Из (2.3) при $i_1=1, i_2=1$, следует оценка

$$\left|\tilde\beta^{\varepsilon,h}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right|\le\frac{C_1\tilde\delta+C_2h^3+\varepsilon\left|\psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right|}{\varepsilon+h_1(K_1+K_2)+\lambda h_1h_2K_3}.\tag{2.8}$$

Так как $\psi(x,0)=0$, то

$$\left|\tilde\beta^{\varepsilon,h}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right|\le\frac{C_1\tilde\delta+C_2h^3+\varepsilon h\Phi_1}{\varepsilon+h_1(K_1+K_2)+\lambda h_1h_2K_3}.\tag{2.9}$$

Обозначим через A_0 правые части (2.9) и полагая в (2.6) $i_2=2$, найдем:

$$\left|\tilde\beta^{\varepsilon,h}_{\frac{3}{2},i_1-\frac{1}{2}}\right|\le\left(1+\frac{\varepsilon+h^2(L_1+L_2)+2\lambda h_1h_2L_3}{\varepsilon+h_1(K_1+K_2)+\lambda h_1h_2K_3}\right)A_0.\tag{2.10}$$

Рассмотрим разностные уравнения

$$\mu_{i_k}=\frac{\varepsilon+h^2(L_1+L_2)+2\lambda h_1h_2L_3}{\varepsilon+h_1(K_1+K_2)+\lambda h_1h_2K_3}\mu_{i_k-1}+\frac{\varepsilon+h^2(L_1+L_2)+2\lambda h_1h_2L_3}{\varepsilon+h_1(K_1+K_2)+\lambda h_1h_2K_3}\sum_{j_1=1}^{i_1-2}\mu_{j_k}+A_0,\tag{2.11}$$

$$i_k=\overline{2,N_k},\quad N_k=\overline{1,2},\quad \mu_1=A_0.$$

При этом очевидно, что

$$\left|\tilde\beta^{\varepsilon,h}_{i_1-\frac{3}{2},j_2-\frac{1}{2}}\right|\le\mu_{i_k}.\tag{2.12}$$

Найдем разность $\mu_{i_k}-\mu_{i_k-1}$ и сведем (2.11) к задаче Коши для однородного разностного уравнения второго порядка, имеем

$$\begin{gathered}\mu_{i_k}-\left(1+\frac{\varepsilon+h^2(L_1+L_2)+2\lambda h_1h_2L_3}{\varepsilon+h_1(K_1+K_2)+\lambda h_1h_2K_3}\right)\mu_{i_k-1}+\frac{\varepsilon}{\varepsilon+h_1(K_1+K_2)+\lambda h_1h_2K_3}\mu_{j_k-2}=0,\\ i_k=\overline{3,N_k},\quad k=\overline{1,2},\quad j_k=\overline{3,N_k},\quad k=\overline{1,2},\end{gathered}\tag{2.13}$$

$$\mu_{1} = A_0, \quad \mu_{2} = \left(1 + \frac{\varepsilon + h^2(L_1 + L_2) + 2\lambda h_1 h_2 L_3}{\varepsilon + h_1(K_1 + K_2) + \lambda h_1 h_2 K_3}\right) A_0. \tag{2.14}$$

Известно решение (2.13) и (2.14), которое имеет вид:

$$\mu_{i_k} = l_1 \tau_1^{i_k - 1} + l_2 \tau_2^{i_k - 1}, \quad i_k = \overline{1, N_k}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{2.15}$$

где τ_1 и τ_2 - корни характеристического уравнения

$$\begin{cases} \tau^2 - \left(1 + \dfrac{\varepsilon + h^2(L_1 + L_2) + 2\lambda h_1 h_2 L_3}{\varepsilon + h_1(K_1 + K_2) + \lambda h_1 h_2 K_3}\right)\tau + \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon + h_1(K_1 + K_2) + \lambda h_1 h_2 K_3} = 0, \\ l_1 = \dfrac{\mu_{i_1}\tau_2 - \mu_{i_2}}{\tau_2 - \tau_1}, \qquad l_2 = \dfrac{\mu_{i_2} - \tau_1 \mu_{i_1}}{\tau_2 - \tau_1}, \\ D = [2\varepsilon + h_1(K_1 + K_2) + h^2(L_1 + L_2) + \lambda h_1 h_2 (K_3 + 2L_3)]^2 - 4\varepsilon(\varepsilon + h_1(K_1 + K_2) + \lambda h_1 h_2 K_3), \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\tau_{1,2} = \frac{2\varepsilon + h_1(K_1 + K_2) + h^2(L_1 + L_2) + \lambda h_1 h_2 (K_3 + 2L_3) \pm \sqrt{D}}{2(\varepsilon + h_1(K_1 + K_2) + \lambda h_1 h_2 K_3)}, \tag{2.17}$$

здесь

$$\tau_1 = \frac{2\varepsilon + [h_1(K_1 + K_2) + h^2(L_1 + L_2) + \lambda h_1 h_2 (K_3 + 2L_3)] \times [1 - \eta(\varepsilon, h, h_1, h_2)]}{2(\varepsilon + h_1(K_1 + K_2) + \lambda h_1 h_2 K_3)},$$

$$\tau_2 = \frac{2\varepsilon + [h_1(K_1 + K_2) + h^2(L_1 + L_2) + \lambda h_1 h_2 (K_3 + 2L_3)] \times [1 + \eta(\varepsilon, h, h_1, h_2)]}{2(\varepsilon + h_1(K_1 + K_2) + \lambda h_1 h_2 K_3)},$$

$$\eta(\varepsilon, h, h_1, h_2) = \sqrt{D \times [h_1(K_1 + K_2) + h^2(L_1 + L_2) + \lambda h_1 h_2 (K_3 + 2L_3)]^{-2}}. \tag{2.18}$$

Эти формулы полностью определяют решение задачи. Так как $\tau_2 \ge 0$, а $l_2 \le 0, \forall\, \varepsilon \ge 0$, то из (2.15) имеем:

$$\mu_{i_k} \le l_1 \tau_1^{i_k - 1}, \quad i_k = \overline{1, N_k}, \quad N_k = \overline{1,2}. \tag{2.19}$$

Следовательно, с учетом $l_1 \le A_0 = const, \quad i = \overline{1, n}$ и

$$A_0 = \frac{C_1\tilde{\delta} + C_2 h_1^3 + \varepsilon h_1 \Phi_1}{\varepsilon + h_1(K_1 + K_2) + \lambda h_1 h_2 K_3},$$

переходим к неравенству:

$$\mu_{i_k} \le \frac{C_0[\tilde{\delta} + h_1^3 + \varepsilon h_1]}{\varepsilon + h_1(K_1 + K_2) + \lambda h_1 h_2 K_3}, \; 0 < C_j = const, \; C_0 = \max C_j, \; j = \overline{1,3}; \; i_k = \overline{1, N_k}, \; N_k = \overline{1,2}.$$

Тогда

$$\left|\tilde{\beta}^{\varepsilon,h}_{i-\frac{1}{2}, i_2 - \frac{1}{2}}\right| \le \frac{C_0[\tilde{\delta} + h^3 + \varepsilon h_1]}{\varepsilon + h_1(K_1 + K_2) + \lambda h_1 h_2 K_3},$$

т.е. искомая оценка погрешности $\varepsilon-$ регуляризируемого каркаса в первом случае приближенного решения уравнения (2.3_1) получена, причем

$$h_{\text{к.о.с.}}(\tilde{\delta})=\tilde{\delta}^{\frac{1}{3}},\quad \varepsilon_{\text{к.о.с.}}(\tilde{\delta})=\tilde{\delta}^{\frac{2}{3}},\quad \left\|\tilde{\beta}^{\varepsilon_{\text{к.о.с.}}h_{\text{к.о.с.}}}\right\|_{C_{h_{\text{к.о.с.}}}}=O(\tilde{\delta}^{\frac{2}{3}}). \tag{2.20}$$

Теорема 2. При условии (2.20) справедлива оценка для $\varepsilon-$регуляризируемого каркаса приближенного решения уравнения (2.2) с условиями (a_1, a_2), удовлетворяющая СЛАУ (2.3_1), то есть:

$$\left|\psi_{i_2-\frac{1}{2},i_1-\frac{1}{2}}-\tilde{\psi}^{\varepsilon(\tilde{\delta}),h(\tilde{\delta})}_{i_2-\frac{1}{2},i_1-\frac{1}{2}}\right|=O(\tilde{\delta}^{\frac{2}{3}}),\ i_k=\overline{1,N_k},\ k=\overline{1,2}, \tag{2.21}$$

если $h(\tilde{\delta})=\tilde{\delta}^{\frac{1}{3}},\quad \varepsilon(\tilde{\delta})=\tilde{\delta}^{\frac{2}{3}}.$

2. Далее, исследуем систему (2.3_2). Для этого, учитывая (2.21) и оценку [4,8] имеем

$$\left\|z(x,t)-\tilde{z}^{\delta,\varepsilon}(x,t)\right\|_{C_n}\le d_1\delta+d_2\frac{\varepsilon}{\delta}=O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})=\sqrt{\varepsilon}(d_1+d_2),\ \text{где}\ d_1,d_2=\text{const},\ \delta=\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{2.22}$$

Теорема 3. При условиях теоремы 2 и (2.22), если $\delta(\varepsilon)=\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, то допускаемая погрешность численного алгоритма будет иметь порядок $O(\tilde{\delta}^{\frac{1}{3}})$.

Список литературы

[1] **Апарцин А.С.** Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы, – Новосибирск: Наука. Сиб.изд. фирма РАН-1999.-193с.

[2] **Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.** Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.:Наука, 1985.С.179.

[3] **Бухгейм А.Л.** Уравнения Вольтерра и обратные задачи. - Новосибирск: Наука, 1983.-207с.

[4] **Денисов А.М.** О приближенном решении уравнения Вольтерра первого рода, связанного с одной обратной задачей для уравнения теплопроводности// Вест. МГУ. – Вычисл. матем. и киберн.-1980.-№3. – С.49-52.

[5] **Дмитриев В.И.** Обратные задачи электромагнитных методов геофизики//Некорректные задачи естествознания. Москва. Изд-во Московского университета, 1987. с.54-76.

[6] **Лаврентьев М.М.** Регуляризация операторных уравнений типа Вольтерра//Проблемы матем.физики и вычислит.матем. – М.:Наука, 1977. – С.199-205.

[7] **Маркова Е.В.** Особенности численного решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода с переменным нижним пределом//Материалы XXVIII конф. научной молодежи. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 1999. –С.144-152.

[8] **Омуров Т.Д., Рыспаев А.О., Омуров М.Т.** Обратные задачи в приложениях математической физики. – Бишкек 2014. -192с.

[9] **Омуров Т.Д.** Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода. – Бишкек: Илим,2003.-162с.

[10] **Романов В.Г.** Обратные задачи для дифференциальных уравнений .- Н.: НГУ,1973.-225с.

[11] **Сергеев В.О.** Регуляризация уравнений Вольтерра первого рода// ДАН СССР -1971.-Т.197.-№3. -С.531-534.

[12] **Треногин В.А.** Функциональный анализ. М.:Наука, 1980 – 496с.