ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2011
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

УДК 517.95

О работах А.И. Кошелева по теории регулярности обобщенных решений квазилинейных систем эллиптического и параболического типов

М.А. Нарбут

Россия, Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: narbut2010@yandex.ru

В теории краевых задач для эллиптических, а также параболических уравнений и систем большое внимание уделяется проблеме регулярности решений, т.е. выяснению условий, при которых обобщенное решение краевой задачи оказывается достаточно гладким (непрерывным, непрерывным по Гёльдеру, непрерывно дифференцируемым и т.п.). А.И. Кошелевым выполнен ряд глубоких исследований по проблеме регулярности, основу которых составили предложенные им итерационные процессы, сходящиеся как в энергетической, так и в сильной норме, а также полученные априорные оценки в функциональных пространствах с сингулярной весовой функцией. Во многих изученных случаях оценки А.И. Кошелева содержат явно вычисляемые, а порой и точные (неулучшаемые) постоянные. Результаты, полученные для достаточно широкого класса задач, были адаптированы А.И. Кошелевым к исследованию краевых задач механики сплошной среды, среди которых в первую очередь следует указать на задачи нелинейной теории упругости (деформационной теории пластичности) и на задачи гидродинамики вязкой жидкости (уравнения Навье-Стокса).

Составление приведенного ниже обзора исследований, выполненных профессором А.И. Кошелевым, было в значительной степени облегчено наличием монографий [15, 21, 32], к которым мы и адресуем читателей, заинтересованных в более обстоятельном изучении данной темы. Прежде чем перейти к изложению основных результатов А.И. Кошелева по проблеме регулярности, приведем краткие биографические данные.

Александр Иванович Кошелев родился 20 августа 1927 года в Ленинграде. Закончив математико-механический факультет Ленинградского государственного университета в 1949 году, он продолжил обучение в аспирантуре Математического института имени В.А. Стеклова. В 1953 г. А.И. Кошелев защитил кандидатскую диссертацию «Исследование некоторых нелинейных задач с помощью метода Ньютона». В 1958 г. им была защищена диссертация на соискание степени доктора физико-математических наук «Априорные оценки в L_p и теоремы существования эллиптических уравнений и систем».

Александр Иванович был хорошо известен в математическом мире, на протяжении ряда лет работал приглашенным профессором в университетах Европы и США, принимал участие в работе международных математических конгрессов, выступал с докладами на многочисленных конференциях и семинарах. В 1964-1965 г.г. он работал профессором Каирского университета, в 1968-1969 г.г. входил в комиссию ЮНЕСКО, где занимался проблемами математического образования в Египте. Обладая замечательными организаторскими способностями, А.И. Кошелев успешно руководил кафедрами высшей математики в Ленинградском текстильном институте (до 1974 г.) и в Ленинградском электротехническом институте (до 1993 г.). С 1993 г. по 2009 г. Александр Иванович работал профессором кафедры теории упругости на математико-механическом факультете СПбГУ, читая основные разделы математической теории упругости в курсе «Механика деформируемого твердого тела», а также специальный курс по теории регулярных решений нелинейных задач теории упругости. Он продолжал активно заниматься научной работой, был научным руководителем ряда грантов РФФИ.

А.И. Кошелев скончался в Гейдельберге 28 Ноября 2009 года на 83 году жизни.

1. Универсальный итерационный процесс для эллиптических систем с ограниченными нелинейностями

При исследовании квазилинейных эллиптических систем порядка $2r$ в ограниченной области $\Omega \subset R^m$ с достаточно гладкой границей А.И. Кошелев систематически применяет введенные им [3, 11] итерационные процессы, сходящиеся в пространстве $W_2^{(r)}$ со скоростью геометрической прогрессии, начиная с любого начального приближения из $W_2^{(r)}$. Здесь мы для краткости и большей ясности изложения ограничимся обсуждением систем второго порядка

$$-\sum_{i=1}^{m} D_i a_{ik}(x, Du) + a_{0k}(x, Du) = 0, \quad k = 1, \ldots, N \tag{1.1}$$

для векторной функции $u = (u_1, \ldots, u_N)$ с граничным условием

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.2}$$

В этом случае универсальный итерационный процесс записывается в виде

$$-\Delta u^{(n+1)} + u^{(n+1)} = -\Delta u^{(n)} + u^{(n)} - \varepsilon L(u^{(n)}), \quad u^{(n+1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.3}$$

Функции $a_{ik}(x, Du) \equiv a_{ik}(x, D_j u_l) \equiv a_{ik}(x, p_{jl})$ удовлетворяют условиям эллиптичности

$$\mu_0 \sum_{i=0}^{m} |\xi_i|^2 \leqslant \frac{\partial a_{ik}}{\partial p_{jl}} \xi_{ik}\xi_{jl} \leqslant \nu_0 \sum_{i=0}^{m} |\xi_i|^2, \quad \left|\frac{\partial a_{ik}}{\partial p_{jl}}\right| \leqslant \nu_0$$

с положительными постоянными μ_0, ν_0.

В интегральной форме итерационный процесс (1.3) сводится к системе тождеств

$$\int_\Omega D_i u_k^{(n+1)} D_i v_k \, dx = \int_\Omega (D_i u_k^{(n)} - \varepsilon a_{ik}(x, D_j u_k^{(n)}) D_i v_k \, dx, \tag{1.4}$$

которые выполняются для произвольной векторной функции $v = (v_1, \ldots, v_N) \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{(1)}(\Omega)$ и по повторяющимся индексам производится суммирование. Если функция $a_0(x, Du) = 0$ и $a_i(x, D_k u), i = 1, \ldots, m$ не зависят от u, то вместо (1.3) рассматривается итерационный процесс

$$-\Delta u^{(n+1)} = -\Delta u^{(n)} - \varepsilon L(u^{(n)}), \quad u^{(n+1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.5}$$

который также можно записать в интегральной форме.

А.И. Кошелевым доказано, что при достаточно малом значении параметра ε указанные выше итерационные процессы сходятся в пространстве $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{(1)}$

со скоростью геометрической прогрессии, начиная с произвольного начального приближения $u^{(0)} \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$. Установлено значение ε, при котором скорость сходимости наибольшая.Если, в частности, матрица коэффициентов $a_{ik}(x,p)$ системы (1.1) симметричная, $\lambda > 0$ — точная нижняя граница наименьшего собственного числа матрицы, составленной из производных этих коэффициентов по p и $\Lambda < +\infty$ — точная верхняя граница наибольшего собственного числа той же матрицы, то оптимальное значение параметра ε равно $2/(\Lambda+\lambda)$, а знаменатель прогрессии $q = (\Lambda - \lambda)/(\Lambda + \lambda)$.

2. Гёльдеровость обобщенных решений эллиптических систем второго порядка с ограниченными нелинейностями

Если спектр матрицы эллиптичности имеет не слишком большой разброс значений собственных чисел, то удается доказать, что обобщенные решения эллиптических систем удовлетворяют условию Гёльдера, а значит, являются непрерывными функциями. В случае, когда матрица $a_{ik}(x,p)$ коэффициентов системы (1.1) симметричная, обобщенное решение системы (1.1) гёльдерово при дополнительном условии

$$\frac{\Lambda - \lambda}{\Lambda + \lambda}\sqrt{1 + \frac{(m-2)^2}{m-1}} < 1. \tag{2.1}$$

Условие (2.1) — точное: если знак неравенства заменить на знак равенства, то удается построить примеры систем второго порядка с разрывными решениями [12, 21]. Случай системы второго порядка с несимметричной матрицей составляет содержание теоремы 2.3.1 книги [21].

При доказательстве гёльдеровости обобщенного решения краевой задачи (1.1) существенно используются свойства функциональных пространств с сингулярной весовой функцией [15]. Пусть область Ω' — строго внутренняя подобласть Ω, граница которой удалена от $\partial\Omega$ на расстояние $\delta_0 > 0$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in \Omega'$ и окружим ее шаром $B_\delta(x_0)$, где $\delta < \delta_0$. Введем пространство Ч. Морри $H_\alpha(\Omega')$, норма в котором определяется по формуле

$$||u||^2_{H_\alpha(\Omega')} = \sup_{x_0\in\Omega',\delta<\delta_0} \sum_{i,k=1}^{m} \int_{B_\delta(x_0)} |D_i u_k|^2 |x - x_0|^\alpha \, dx + ||u||^2_{H_0}, \tag{2.2}$$

где $\alpha = 2 - m - 2\gamma \quad (0 < \gamma < 1), \quad H_0 \equiv \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$. Известно, что если $u \in H_\alpha$, то функция u удовлетворяет условию Гёльдера с показателем γ.

А.И. Кошелев [11, 15] доказал, что процесс (1.3) сходится в $H_\alpha(\Omega')$, так что все итерации и искомое решение принадлежат $H_\alpha(\Omega')$. Несколько более сложным оказывается доказательство теоремы 2.4.1, приведенное в [21] и свидетельствующее о том, что обобщенное решение рассматриваемой задачи принадлежит пространству $H_\alpha(\bar{\Omega})$. Доказательство теоремы 2.4.1 А.И.Кошелев предваряет выводом оценки для сингулярного интегрального оператора

$$J = \frac{1}{(m-2)S} D_k \int_\Omega f^{(k)}(y)|x-y|^{2-m}\,dy, \quad m \geqslant 3, \tag{2.3}$$

который в случае $\Omega \subset R^2$ заменяется на логарифмический потенциал

$$J = \frac{1}{2\pi} D_k \int_\Omega f^{(k)}(y) \ln|x-y|\,dy.$$

В (2.3) S означает площадь поверхности сферы единичного радиуса. Если Ω и $\omega \subset \Omega$ — ограниченные области в R^m, $x_0 \in \omega$, $\quad \alpha \in (-m, 2-m) \bigcup (2-m, 0]$ и выполнено условие

$$1 - \frac{\alpha(\alpha+m-2)}{2(m-1)} > 0,$$

то справедлива такая оценка:

$$\int_\omega |\nabla J|^2 |x-x_0|^\alpha\,dx \leqslant \left(1 - \frac{\alpha(m-2)}{(m-1)} + \eta\right) \times$$

$$\times \left(\min\left\{1 - \frac{\alpha(\alpha+m-2)}{2(m-1)}, 1\right\}\right)^{-2} \int_\Omega |f|^2 |x-x_0|^\alpha\,dx + C\int_\Omega |f|^2\,dx. \tag{2.4}$$

Оценка (2.4) используется для получения оценки производных обобщенного решения следующей краевой задачи

$$\Delta u - u = \operatorname{div} f + \varphi, \quad u|_{x_m=0} = 0$$

в полупространстве $\Omega = \{x | x_m < 0\}$, которую мы здесь не приводим.

3.Коэрцитивные неравенства в весовых пространствах

Коэрцитивными оценками для уравнения Пуассона называются оценки вида

$$||D^2 u|| \leqslant C_1 ||f|| + C_2 ||u|| \tag{3.1}$$

в подходящем функциональном пространстве. В пространствах с весом H_α А.И. Кошелевым были получены явные выражения для констант C_1, C_2. В качестве примера рассмотрим шар единичного радиуса B в пространстве $R^m (m > 2)$ с центром в точке $x_0 = 0$ и пусть $\alpha = 2 - m - 2\gamma \quad (0 < \gamma < 1)$. Если $u(x)$ обращается в нуль на границе ∂B, то справедливо неравенство

$$\int_B \left|D^2 u\right|^2 |x|^\alpha\,dx \leqslant \left[1 + \frac{m-2}{m+1} + O(\gamma)\right] \int_B |\Delta u|^2 |x|^\alpha\,dx +$$

$$+C\left(\int_B \left|D^2u\right|^2 |x|^\alpha\, dx\right)^{\frac{m}{m+2\gamma}} \left(\int_B |Du|^2\, dx\right)^{\frac{2\gamma}{m+2\gamma}}, \tag{3.2}$$

где символами $\left|D^2u\right|^2$ и $|Du|^2$ обозначены соответственно суммы квадратов поизводных второго и первого порядка от функции u. При доказательстве неравенства (3.2) используется Лемма 2.1.4 из книги [21]: если $u \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^{(1)}_{2,\alpha}(B(x_0))$, то справедливо неравенство

$$|u(x_0)|^2 \leqslant C\left(\int_B |Du|^2 |x-x_0|^\alpha\, dx\right)^{\frac{m}{m+2\gamma}} \left(\int_B |u|^2\, dx\right)^{\frac{2\gamma}{m+2\gamma}}. \tag{3.3}$$

Если же $u \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^{(2)}_{2,\alpha}(B(x_0))$, то верно также неравенство

$$|u(x_0)| \leqslant C\left(\int_B \left|D^2u\right|^2 |x-x_0|^\alpha\, dx\right)^{\frac{m}{m+2\gamma}} \left(\int_B |Du|^2\, dx\right)^{\frac{2\gamma}{m+2\gamma}}. \tag{3.4}$$

Доказательства неравенств (3.2)-(3.4) и другие примеры коэрцитивных неравенств приводятся в [21].

Для параболических систем второго порядка А.И. Кошелевым также доказаны коэрцитивные неравенства. Если, например, $u \in W^{(1,2)}_{2,\alpha}$ в цилиндре $Q = (0,T)\times B$, то при нулевых граничных и начальных условиях справедлива оценка

$$\int_Q |D^2u|^2|x-x_0|^\alpha\, dx\, dt \leqslant [M(\gamma)+\eta]A\int_Q |\varepsilon\partial_t u - \Delta u|^2|x-x_0|^\alpha\, dx\, dt +$$

$$+C\int_Q |Du|^2\, dx\, dt,$$

где константы M, A, C вычисляются в явном виде и не зависят от ε, η — произвольно малая положительная постоянная.

4. Итерационные процессы для нелинейной краевой задачи теории упругости и проблема регулярности

Интерес к задачам математической теории упругости у А.И. Кошелева проявился уже в студенческие годы. Его дипломная работа была посвящена изучению упруго-пластического кручения стержня с выпуклым полигональным сечением. В дальнейшем, занимаясь теорией эллиптических уравнений и систем, А.И. Кошелев рассматривает приложения этой теории к задачам малых упруго-пластических деформаций для упрочняющихся сред [15, 21]. Остановимся несколько более подробно на одной из последних работ Александра Ивановича [18]. В этой работе рассматривается упругое тело, занимающее ограниченную область $\Omega \subset R^m$. Через $u(x) = \{u_i(x_1, \ldots, x_m)\}, i = 1, \ldots, m$ обозначается векторное поле перемещений. Обычным образом вводятся деформации

$$\varepsilon_{ij}[u] = \frac{1}{2}(D_j u_i + D_i u_j) \quad (i, j = 1, \ldots, m) \tag{4.1}$$

и напряжения σ_{ij}. Соотношения (4.1) определяют геометрически линейные зависимости. Физические (вообще говоря, нелинейные) соотношения между компонентами тензоров деформаций и напряжений определяются равенствами

$$\sigma_{ik}[u] = a_{ik}(x, \varepsilon_{jl}[u]), (i, j, k, l = 1, \ldots, m), \tag{4.2}$$

где a_{ik} — достаточно гладкие функции своих аргументов, симметричные относительно индексов i и k. Для однородной изотропной упругой среды соотношения (4.2) имеют вид

$$\sigma_{ik}[u] = \lambda D_j u_j \delta_{ik} + 2\mu\varepsilon_{ik}[u], \tag{4.3}$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование, λ и μ — постоянные Ламе. Уравнения равновесия имеют вид

$$L_k(u) \equiv D_i a_{ik}(x, \varepsilon_{jl}[u]) = -F_k(x), \tag{4.4}$$

где $F_k(x)$ — k-я проекция массовых сил. На границе области $\partial\Omega$ задается условие

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.5}$$

Слабое решение $u \in H_0$ краевой задачи (4.4)–(4.5) удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\int_\Omega a_{ik}(x, \varepsilon_{jl}[u]) D_i v_k \, dx + \int_\Omega F_k v_k \, dx = 0, \tag{4.6}$$

которое выполняется для любой $v \in H_0(\Omega)$, где $H_0(\Omega)$ — гильбертово пространство функций, удовлетворяющих условию (4.5) и квадратично суммируемых вместе со всеми первыми обобщенными производными. Предполагается, что $a_{ik}(x, \varepsilon_{jl}[u]) \in L_2(\Omega)$ и $F_k \in L_2(\Omega)$. Что же касается определяющих соотношений (4.2), то для них вводятся условия

$$\int_\Omega \big(a_{ik}(x, \varepsilon_{jl}[u]) - a_{ik}(x, \varepsilon_{jl}[z])\big)\varepsilon_{ik}[u-z] \, dx \geqslant a \sum_{i,k=1}^{m} \int_\Omega |\varepsilon_{ik}[u-z]|^2 \, dx, \tag{4.7}$$

$$\sum_{i,k=1}^{m}\int_{\Omega}|a_{ik}(x,\varepsilon_{jl}[u])-a_{ik}(x,\varepsilon_{jl}[z])|^{2}\,dx\leqslant b^{2}\sum_{i,k=1}^{m}\int_{\Omega}|\varepsilon_{ik}[u-z]|^{2}\,dx \qquad (4.8)$$

с постоянными $a, b > 0$.

Итерационный процесс для рассматриваемой краевой задачи принимает вид

$$\int_{\Omega}D_{i}u_{k}^{(n+1)}D_{i}v_{k}\,dx=\int_{\Omega}(D_{i}u_{k}^{(n)}-\varepsilon a_{ik}(x,\varepsilon_{jl}[u^{(n)}])D_{i}v_{k}\,dx+\varepsilon\int_{\Omega}F_{k}v_{k}\,dx, \quad (4.9)$$

где ε — положительная постоянная, которая должна быть подобрана с помощью условий (4.7) и (4.8). Соотношения (4.9) являются слабыми равенствами для итерационной системы

$$\Delta u_{k}^{(n+1)}=\Delta u_{k}^{(n)}-\varepsilon[L_{k}(u^{(n)})+F_{k}(x)], \qquad (4.10)$$

в которой $L_k(u)$ определяется по формулам (4.4). Краевое условие (4.5) должно выполняться для каждой итерации.

В статье [18] показано,что если начальное приближение $u^{(0)}(x) \in H_0(\Omega)$,то все итерации $u^{(n)}(x) \in H_0(\Omega)$. Для величин $w^{(n+1)} = u^{(n+1)} - u^{(n)}$ получена оценка

$$\left|\int_{\Omega}D_{i}w_{k}^{(n+1)}D_{i}v_{k}\,dx\right|^{2}\leqslant\int_{\Omega}\sum_{i,k=1}^{m}\Big\{|(D_{i}w_{k}^{(n)}|^{2}-$$

$$-2\varepsilon a\;\varepsilon_{ik}^{2}[w^{(n)}]+\varepsilon^{2}b^{2}\varepsilon_{ik}^{2}[w^{(n)}]\Big\}\;dx\sum_{i,k=1}^{m}\int_{\Omega}|D_{i}v_{k}|^{2}\,dx, \qquad (4.11)$$

которая с учетом неравенств Корна

$$\sum_{i,k=1}^{m}\int_{\Omega}|D_{i}u_{k}|^{2}\,dx\geqslant\sum_{i,k=1}^{m}\int_{\Omega}\varepsilon_{ik}^{2}[u]\,dx\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{m}\int_{\Omega}|D_{i}u_{k}|^{2}\,dx.$$

сводится к неравенству

$$\left|\int_{\Omega}D_{i}w_{k}^{(n+1)}D_{i}v_{k}\,dx\right|^{2}\leqslant|1-\varepsilon a+\varepsilon^{2}b^{2}|\sum_{i,k=1}^{m}\int_{\Omega}|D_{i}w_{k}^{(n)}|^{2}\,dx\sum_{i,k=1}^{m}\int_{\Omega}|D_{i}v_{k}|^{2}\,dx.$$

Принимая $v = w^{(n+1)}$ и сокращая на

$$||w^{(n+1)}||_{H}^{2}=\sum_{i,k=1}^{m}\int_{\Omega}|D_{i}w_{k}^{(n+1)}|^{2}\,dx,$$

придем к соотношению

$$||w^{(n+1)}||_H \leqslant q_\varepsilon ||w^{(n)}||_H, \tag{4.12}$$

где $q_\varepsilon^2 = |1 - \varepsilon a + \varepsilon^2 b^2|$.

Оптимальное значение

$$q = \min_{\varepsilon > 0} q_\varepsilon = \sqrt{1 - \varepsilon a + \varepsilon^2 b^2}\Big|_{\varepsilon = \frac{a}{2b^2}} = \sqrt{1 - \frac{a}{4b^2}}. \tag{4.13}$$

Из сказанного следует, что итерационный процесс (4.9) сходится наибыстрейшим образом в H_0 при $\varepsilon = \frac{a}{2b^2}$ и скорость сходимости определяется геометрической прогрессией со знаменателем (4.13). В частности, для однородной изотропной среды, удовлетворяющей соотношениям (4.3), постоянные a и b из неравенств (4.7) и (4.8) имеют вид

$$a = 2\mu, \quad b = \lambda m + 2\mu,$$

так что

$$q = \min_{\varepsilon > 0} q_\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{(\lambda m + 2\mu)^2}}. \tag{4.14}$$

Более высокую скорость сходимости обеспечивает итерационный процесс

$$L^0(u^{(n+1)}) = L^0(u^{(n)}) - \varepsilon[L(u^{(n)}) + F(x)] \quad (\varepsilon = \mathrm{const} > 0), \tag{4.15}$$

где оператор $L^0(u) = \Delta u + \nabla \operatorname{div} u$ представляет собой оператор линейной теории упругости, — оператор Ламе с постоянными $\mu = 1$ и $\lambda = 0$. В интегральной форме процесс (4.15) имеет вид

$$\int_\Omega \left(D_i u_k^{(n+1)} + D_k u_i^{(n+1)} \right) D_i v_k \, dx =$$

$$= \int_\Omega \left[D_i u_k^{(n)} + D_k u_i^{(n)} - \varepsilon a_{ik}(x, \varepsilon_{jl}[u^{(n)}]) \right] D_i v_k \, dx - \varepsilon \int_\Omega F_k v_k \, dx. \tag{4.16}$$

Если $F \in L_2(\Omega)$, то решение задачи $L^0(u) = F$ с граничным условием (4.5) принадлежит $W_2^{(1)} \cap H_0$ в Ω и, следовательно, все итерации процесса (4.15)-(4.16) принадлежат этому пространству. Процесс сходится в пространстве $H_0(\Omega)$ как геометрическая прогрессия со знаменателем

$$q = \min_{\varepsilon > 0} \sqrt{1 - a\varepsilon + \frac{b^2}{4}\varepsilon^2} = \sqrt{1 - a\varepsilon + \frac{b^2}{4}\varepsilon^2}\Bigg|_{\varepsilon = \frac{2a}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}.$$

Доказательство гёльдеровости рассмотренных обобщенных решений краевых задач теории упругости удается получить, рассматривая весовые пространства типа Морри. Полученная в [18] оценка

$$||w^{(n+1)}||_{H_\alpha(\Omega')} \leqslant Q||w^{(n)}||_{H_\alpha(\Omega')} + Cq^n,$$

с постоянной

$$Q = \left(1 - \frac{1}{4(m-1)^2}\frac{a^2}{b^2}\right)^{1/2} \sqrt{1 + \frac{(m-2)^2}{m-1}} \tag{4.19}$$

указывает на сходимость процесса (4.10) в $H_\alpha(\Omega')$, если $Q < 1$, а значит, и в пространстве $C^\gamma(\Omega')$. К сожалению, условие $Q < 1$ не выполняется в случае пространственной задачи теории упругости, когда $m = 3$. Для доказательства сходимости итерационного процесса (4.10) в $H_\alpha(\Omega')$ при $m = 3$ в монографии [15] постулируются соотношения

$$\int_\Omega (a_{ik}(x, \varepsilon_{jl}[u]) - a_{ik}(x, \varepsilon_{jl}[v]))\, \varepsilon_{ik}[u-v]\, dx \geqslant a' \sum_{i,k=1}^{m} \int_\Omega \varepsilon_{ik}^2[u-v]\, dx,$$

$$\sum_{i,k=1}^{m} \int_\Omega (a_{ik}(x, \varepsilon_{jl}[u]) - a_{ik}(x, \varepsilon_{jl}[v]))^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant b' \int_\Omega (a_{ik}(x, \varepsilon_{jl}[u]) - a_{ik}(x, \varepsilon_{jl}[v]))\, \varepsilon_{ik}[u-v]\, dx,$$

где $a', b' = \mathrm{const} > 0$. Эти соотношения позволили доказать, что если имеет место неравенство

$$\left(1 - \frac{2}{m-1}\frac{a'}{b'}\right)\left[1 + \frac{(m-2)^2}{m-1}\right] < 1,$$

то для задачи (4.4), (4.5) процесс (4.10) сходится в $H_\alpha(\Omega')$ при достаточно малом $\gamma > 0$, а значит, для рассматриваемой задачи обобщенное решение в трехмерном пространстве будет принадлежать $C^\gamma(\Omega')$.

Различным аспектам математической теории упругости посвящены также работы А.И. Кошелева [16, 20, 33, 35]. В препринте [33] получена следующая оценка для производных поля упругих перемещений:

$$\sup_{x_0\in\Omega'} |D_j u|_{x=x_0}| \leqslant m^{\frac{2\gamma}{m+2\gamma}} (S\gamma)^{-1} \left(1+\frac{2\gamma}{m}\right)^{1/2} \times$$

$$\left\{\mu^{-1}M\left[1+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left(1-\frac{\alpha(m-2)^2}{m-1}\right)^{1/2}\left(1-\frac{\alpha(\alpha+m-2)}{2(m-1)}\right)^{-1}+\eta\right]\times\right.$$

$$\left.\times\sup_{x_0\in\Omega}||f||_{L_{2,\alpha}(\Omega,x_0)}\right\}^{\frac{m}{m+2\gamma}}\left(\int_B |Du|^2\,dx\right)^{\frac{m}{m+2\gamma}} + C\left(||f||_{L_2(\Omega)}+||u||_{W_2^{(1)}(\Omega)}\right).$$

Здесь Ω' — строго внутренняя подобласть Ω, $B=\{x : |x-x_0|<\delta\}$, S — площадь сферы единичного радиуса в R^m, постоянная

$$M=\left(1+\frac{(m-2+\gamma)\{(1+\gamma)^2+[2-(1-\gamma)^2]m\}}{(m+1+\gamma)^2(1-\gamma)^2}\right)^{1/2}$$

5. Параболические системы и нестационарный итерационный процесс

Работы А.И. Кошелева [21,30,32] содержат исследования квазилинейных параболических систем, которые рассматриваются в цилиндре $Q=(0,T)\times\Omega$ при конечном $T>0$ на промежутке времени $t\in[0,T)$. Для векторной функции $u(x,t)=\{u_1(x,t),\ldots,u_m(x,t)\}$ рассматривается система

$$\partial_t u - \sum_{i=1}^{m} D_i a_{ik}(x,t,D_j u_l) = f_k(x,t) \tag{5.1}$$

с краевыми условиями

$$u|_{t=0} = u|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{5.2}$$

Предполагается, что $\partial\Omega$ — гладкая поверхность, коэффициенты $a_{ik}(x,t,p_{jl})$ непрерывно дифференцируемы по всем p, т.е. по градиентам $D_j u_l$ при почти всех $x,t\in Q$.

Матрица

$$A=\left\{\frac{\partial a_{ik}}{\partial p_{jl}}\right\} \tag{5.3}$$

порядка $m^2\times m^2$ является симметричной, а ее спектр, составленный из собственных чисел λ_i удовлетворяет условиям

$$\inf\{\lambda_i\}=\lambda>0 \quad \text{и} \quad \sup\{\lambda_i\}=\Lambda<\infty, \tag{5.4}$$

где inf и sup берутся по всем аргументам, от которых зависит λ_i.

Для задачи (5.1), (5.2) рассматривается итерационный процесс

$$\varepsilon\partial_t u_k^{(n+1)} - \Delta u_k^{(n+1)} = -\Delta u_k^{(n)} + \varepsilon\bigl(L_k(u^{(n)}) + f_k(x,t)\bigr),$$

который в слабой форме принимает вид

$$\varepsilon\int_Q \partial_t u_k^{(n+1)} v_k\,dx\,dt + \int_Q D_i u_k^{(n+1)} D_i v_k\,dx\,dt =$$

$$= \int_Q D_i u_k^{(n)} D_i v_k\,dx\,dt - \varepsilon\int_Q \left[\sum_{i=1}^m a_{ik}(x,t,D_j u_l^{(n)}) D_i v_k - f_k(x,t)v_k\right] dx\,dt, \tag{5.5}$$

где ε — достаточно малая положительная постоянная.

Процесс (5.5) сходится в $W_2^{(0,1)}(Q)$ к обобщенному решению задачи (5.1), (5.2) со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой $q = (\Lambda - \lambda)(\Lambda + \lambda)^{-1}$ (этот результат был доказан В.М. Чистяковым), при этом малый параметр $\varepsilon = 2(\Lambda + \lambda)^{-1}$.

Если принять дополнительно, что а) существует такое значение $q_0 > 2$, при котором для всех $q \in (1, q_0]$ и для всех $u \in W_q^{(0,1)}(Q)$ коэффициенты $a_{ik} \in L_q(Q)$; б) для всех $u \in W_q^{(0,2)}(Q)$ справедливо условие $L(U) \in L_q(Q)$; в) выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial a_{ik}(x,t,p_{jl})}{\partial x_j}\right| < C(1+|p|), \quad |p|^2 = \sum_{j,l=1}^m |p_{jl}|^2,$$

то справедлива доказаннная в [21], [32]

Теорема. *Если*

$$\left(\frac{\Lambda-\lambda}{\Lambda+\lambda}\right)^2 \left(1 + \frac{m-2}{m+1}\right)[1+(m-2)(m-1)]\frac{m}{2} < 1 \quad \textit{при} \quad m \geqslant 3$$

или

$$2\left(\frac{\Lambda-\lambda}{\Lambda+\lambda}\right)^2 < 1 \quad \textit{при} \quad m = 2,$$

то существует обобщенное решение задачи (5.1), (5.2), которое при некотором достаточно малом показателе удовлетворяет неравенству Гёльдера как по x, так и по t в $\overline{Q}$.

В статье [18] этот результат используется при решении уравнения нелинейной фильтрации

$$\partial_t u - D_i\left[(a(\nabla u)D_i u - f(x,t)\right] = 0$$

с краевыми условиями (5.2). Принимая для коэффициента a выражение

$$a = \alpha - \frac{\beta}{1 + |\nabla u|^2},$$

где $\alpha, \beta > 0$ и $\alpha > \beta$, можно найти собственные значения

$$\lambda_1 = a; \quad \lambda_2 = a + a'|\nabla p|$$

матрицы параболичности

$$A = \left\{ a\delta_{ik} + a' \frac{p_i p_k}{|\nabla p|^2} \right\} \quad (i, k = 1, 2),$$

Отсюда следует, что

$$\lambda = \ \min\{\ \inf \lambda_1, \inf \lambda_2\ \} = \alpha - \beta,$$

$$\Lambda = \max\{\sup \lambda_1, \sup \lambda_2\} = \alpha.$$

Знаменатель геометрической прогрессии

$$K = \frac{\Lambda - \lambda}{\Lambda + \lambda} = \frac{\beta}{2\alpha - \beta} < 1.$$

Процесс (5.5) в рассматриваемом случае сходится в пространстве Гёльдера оптимальным образом при $\varepsilon = 2/(2\alpha - \beta)$.

В статье А.И. Кошелева [17] представлено исследование связной упруго-диффузионной задачи. Сформулированы ограничения, при которых рассматриваемая задача имеет регулярное решение. В работах [21,26] обсуждаются условия потери регулярности решений для некоторых примеров параболических систем, связанной с возникновением так называемых режимов с обострением.

Как известно, исследование режимов с обострением, или "взрывов"в случае одного квазилинейного параболического уравнения второго порядка опирается на принцип максимума, который в случае параболических систем, вообще говоря, не выполняется. А.И.Кошелев установил необходимые условия неограниченного роста решения задачи на конечном промежутке времени, опираясь на полученные им достаточные условия регулярности решений параболических систем. Для системы

$$\partial_t u_k = \sum_{i=0}^{m} D_i a_{ik}(x, t, Du) + \sum_{i,j=0}^{m} \sum_{h,l=1}^{N} b_{ij}^{h,k,l} D_i(u_h D_j u_l) \tag{5.6}$$

вводится величина

$$E[u] = \left[\sup_{x_0 \in \bar{\Omega}'} \int_{\Omega'} |u|^2 |x - x_0|^\alpha \, dx \right]_{t=T} + \sup_{x_0 \in \bar{\Omega}'} \int_{\Omega'} |Du|^2 |x - x_0|^\alpha \, dx \, dt.$$

Если для обобщенного решения $u(t,x)$ системы (5.6) величина $E[u]$ ограничена на множестве $Q(\eta) = (0, T_0 - \eta) \times \Omega$, а при $\eta \to 0$ получается неограниченный рост $E[u] \to \infty$, то момент времени T_0 является временем "взрыва"решения $u(t,x)$. Предложенная схема апробирована на примере параболической системы [26]

$$\partial_t u = \Delta u - \nabla(v \nabla u),$$

$$\delta \partial_t v = \alpha \Delta v - \beta v + \gamma u$$

с положительными параметрами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ при начальных и граничных условиях

$$u|_{t=0} = u_0 > 0, \quad v|_{t=0} = u_0 > 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

6. Регулярность решений системы Навье-Стокса

Изучению системы уравнений Стокса, а также системы Навье-Стокса посвящены работы [22-25, 31,32], а также главы 7, 8 из книги [21]. А.И.Кошелев получил коэрцитивные оценки для стационарной и нестационарной систем Стокса с явно вычисляемыми постоянными и доказал, что при достаточно малых числах Рейнольдса решение уравнений Навье-Стокса принадлежит пространству Гёльдера. Приведем некоторые конкретные результаты.

Для стационарной системы Стокса

$$-\Delta u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0$$

с однородным граничными условием

$$\left. u \right|_{\partial\Omega} = 0$$

были получены оценки

$$\int_B |\nabla p|^2 r^\alpha \zeta(x) \, dx \leqslant \left(1 + \frac{(m-2)^2}{m-1} + O(\gamma) \right) \int_B |f|^2 r^\alpha \zeta(x) \, dx +$$

$$+ C \int_B |p|^2 \, dx, \tag{6.1}$$

$$\int_B \left|D'^2 u\right|^2 r^\alpha \zeta(x)\,dx \leqslant \left[1 + \left(1 + \frac{(m-2)^2}{m-1}\right)^{1/2} + O(\gamma)\right]^2 (1+$$

$$+\frac{m-2}{m+1}\Bigr) \int_B |f|^2 r^\alpha \zeta(x)\,dx + C\left(\int_B |Du|^2\,dx + \int_B |p|^2\,dx\right), \qquad (6.2)$$

$$\int_B |\Delta u|^2 r^\alpha \zeta(x)\,dx \leqslant \left[1 + \left(1 + \frac{(m-2)^2}{m-1}\right)^{1/2} + O(\gamma)\right]^2 \int_B |f|^2 r^\alpha \zeta(x)\,dx+$$

$$+C\int_B |p|^2\,dx, \qquad (6.3)$$

где $\alpha = 2 - m - 2\gamma \quad (0 < \gamma < 1), r = |x - x_0|, \zeta(x)$ — срезающая функция, точное определение которой, равно как и доказательства неравенств (6.1)-(6.3) можно найти в [21].

Аналогичные оценки получены А.И. Кошелевым и в случае нестационарной системы Стокса

$$\partial_t u - \nu\Delta u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0$$

с граничными условиями

$$u\Big|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 0.$$

Пусть $Q = (0,T) \times B$. Тогда вместо неравенств (6.1), (6.2) будем иметь

$$\int_Q |\nabla p|^2 r^\alpha \zeta(x)\,dx\,dt \leqslant 2\left(1 + \frac{m-2}{m+1} + O(\gamma)\right)\int_Q |f|^2 r^\alpha \zeta(x)\,dx\,dt+$$

$$+C\int_Q |p|^2\,dx\,dt, \qquad (6.4)$$

$$\int_Q \left|D'^2 u\right|^2 r^\alpha \zeta(x)\,dx\,dt \leqslant \frac{m}{\nu^2}\left(1 + \frac{m-2}{m-1} + O(\gamma)\right)\times$$

$$\times\left[1 + \sqrt{2}\left(1 + \frac{m-2}{m+1}\right)^{1/2}\right]^2 \int_Q |f|^2 r^\alpha \zeta(x)\,dx\,dt+$$

$$+C\left(\int_Q |Du|^2\,dx\,dt + \frac{1}{\nu^2}\int_Q |p|^2\,dx\,dt\right), m = 3 \qquad (6.5)$$

В случае плоской задачи при $m = 2$ неравенство (6.5) записывается в следующем виде [21]:

$$\int_Q \left|D'^2 u\right|^2 r^\alpha \zeta(x)\, dx\, dt \leqslant \frac{2(1+\sqrt{2})^2}{\nu^2\gamma}\,(1+O(\gamma)) \int_Q |f|^2 r^\alpha \zeta(x)\, dx\, dt +$$

$$+C\left(\int_Q |Du|^2\ dx + \frac{1}{\nu^2}\int_Q |p|^2\ dx\, dt\right). \qquad (6.6)$$

Для исследования системы уравнений Навье-Стокса

$$\partial_t u - \nu\Delta u + u_k D_k u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0 \qquad (6.7)$$

с граничным и начальным условиями

$$u\Big|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 0 \qquad (6.8)$$

А.И. Кошелев использует итерационный процесс

$$\partial_t u^{(n+1)} - \nu\Delta u^{(n+1)} + \nabla p^{(n+1)} = f - u_k^{(n)} D_k u^{(n+1)}, \quad \operatorname{div} u^{(n+1)} = 0 \qquad (6.9)$$

с граничными условиями (6.8) для каждой итерации. Уравнения (6.7)–(6.9) могут быть записаны также в интегральной форме.

Пусть норма $||f||$ функции f вычислена в пространстве $L_2(Q)$. Процесс (6.9) при достаточно малых числах Рейнольдса $\mathcal{R} = \nu^{-1}||f||$ сходится в пространстве $H^{1,2}_{2,\alpha}(Q)$, для которого норма

$$||u||^{1,2}_{2,\alpha} = \left(\sup_{x_0\in\bar\Omega}\int_{Q_R} (|\partial_t u|^2 + |D'^2 u|^2) r^\alpha \zeta(x)\, dx\, dt + \int_Q |u|^2\, dx\, dt\right)^{1/2},$$

при этом $Q_R = (0,T)\times\Omega_R(x_0)$, $\alpha = 1-m-2\gamma \quad (0<\gamma<1/2)$. В свою очередь, из сходимости в $H^{1,2}_{2,\alpha}(Q)$ следует сходимость в пространстве Гёльдера $C^\gamma(Q)$ и в пространстве непрерывных функций $C(Q)$.

Настоящий обзор результатов, полученных проф. Александром Ивановичем Кошелевым, ни в коей мере не является исчерпывающим. Математическое наследие А.И. Кошелева, о котором можно получить более полное представление из его статей и монографий [1–35], составляет выдающийся вклад в теорию краевых задач для эллиптических и параболических систем уравнений, а также содержит ряд ценных достижений в математической теории упругости и в математической гидродинамике.

Литература

1. *Кошелев А.И.* Дифференцируемость решений некоторых задач теории потенциала. // Мат. сб.1953. Т.32.№74 — С.653-664.

2. *Кошелев А.И.* Априорные оценки в L_p и теоремы существования // Успехи мат. наук. 1958. Т.13. №4. — С.29-88

3. *Кошелев А.И.* О сходимости метода последовательных приближений для квазилинейных эллиптических уравнений //Докл.АН СССР. 1962. Т.142. №5. — С.1007-1010.

4. *Кошелев А.И.* О некоторых вопросах существования и приближенного решения для квазилинейных уравнений и систем в пространствах С.Л.Соболева// Сиб.мат.журн. 1968. Т.9. №5. — С.1173-1181

5. *Кошелев А.И.* О непрерывности решений систем квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с ограниченными нелинейностями //Докл.АН СССР. 1973. Т.213. №4. — С.777-779.

6. *Кошелев А.И.* О непрерывности решений систем квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с ограниченными нелинейностями // Изв. вузов. Математика.1974. №1. — С.59-70.

7. *Кошелев А.И.* О наилучших оценках сходимости одного итерационного процесса // Изв. вузов. Математика.1974. №5. — С.138-143.

8. *Кошелев А.И.* О гладкости решений квазилинейных эллиптических систем второго порядка // Изв. вузов. Математика.1976. №6. — С.45-61.

9. *Кошелев А.И.* О непрерывности решений квазилинейных эллиптических систем второго порядка // Докл.АН СССР. 1977. Т.232. №4. — С.766-769.

10. *Кошелев А.И.* О непрерывности решений квазилинейных эллиптических систем второго порядка // Диф. уравнения. 1977. №7. — С.1256-1263.

11. *Кошелев А.И.* Регулярность решений квазилинейных эллиптических систем // Успехи мат. наук. 1978. Т.33. №4. — С.3-49

12. *Кошелев А.И.* О точных условиях гладкости решений эллиптических систем и теореме Лиувилля // Докл.АН СССР. 1982. Т.265. №6. — С.1309-1311.

13. *Кошелев А.И.* Неравенство Корна с весом и некоторые итерационные процессы для квазилинейных эллиптических систем // Докл.АН СССР. 1983. Т.271. №5. — С.1056-1059.

14. *Кошелев А.И.* Неравенство Корна с весом и некоторые итерационные

процессы для квазилинейных эллиптических систем // Изв. вузов. Математика.1984. №1. — С.7-18.

15. *Кошелев А.И.* Регулярность решений эллиптических уравнений и систем. — М.: Наука, 1986. — 240с.

16. *Кошелев А.И.* О регулярности вплоть до границы напряжений в линейной теории упругости // Проблемы механики деформируемого твердого тела: Межвуз.сб./Санкт-Петербургский государственный университет. - Санкт-Петербург: СПбГУ, 2002. - С.166-172

17. *Кошелев А.И.* Об одной упруго-диффузионной задаче // Докл.АН СССР. 2003. Т.391. №6. — С.746-748.

18. *Кошелев А.И.* Применение универсального итерационного процесса к некоторым задачам механики // Вестн. С.-Петерб.ун-та. Сер.1. 2008. Вып. 2. С.47-55

19. *Кошелев А.И., Челкак С.И.* О регулярности решений эллиптических систем высоких порядков // Докл.АН СССР. 1983. Т.272. №2. — С.297-300.

20. *Кошелев А.И., Челкак С.И.* Регулярность решений некоторых нелинейных задач теории упругости в областях с коническими граничными точками // Прочность и разрушение материалоов и конструкций. 1999 (Исследования по упругости и пластичности. Вып.18).— С.102-115

21. *Кошелев А.И., Челкак С.И.* Регулярность решений некоторых краевых задач для квазилинейных эллиптических и параболических систем. — СПб. Изд-во С.-Петербургского университета, 2000, — 356 с.

22. *Chelkak S., Koshelev A.* About the boundedness of solutions for the nonstationary Navier–Stokes system/ —Stuttgart: Univ.Stuttgart, Math. Inst. A. 1994. — 19 p.Preprint 94-4

23. *Chelkak S., Koshelev A.* About the regularity of solutions for the nonstationary Navier–Stokes system // Math. Nachr. 1996. Bd. 177. — S. 41-55

24. *Chelkak S., Koshelev A.* About the regularity of solutions for the nonstationary Navier–Stokes system // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1997. Vol. 172. – P.43-63

25. *Chelkak S., Koshelev A., Oganesjan L.* Regular solutions of the Navier–Stokes system // Mem.Diff.Eq.Math.Phys.1997.Vol.12. — P.33-41

26. *Gajewski H., Jäger W. Koshelev A.* About loss of regularity and "blow-up"of solutions for quasilinear parabolic systems— Berlin: IAAS, 1993. — 18 S. Preprint N 70

27. *Koshelev A.* About some coercive inequalities for elementary elliptic and parabolic operators. — Berlin: IAAS, 1992. — 46 S. Preprint N 15

28. *Koshelev A.* Some Liouville type theorems for quasilinear parabolic systems. — Bonn: Univ. Bonn, 1992. — 14 p.Preprint N 233

29. *Koshelev A.* Regularity of solutions for some problems of mathematical physics. — Berlin: IAAS, 1993. — 46 S/ Preprint N 53

30. *Koshelev A.* Regularity of solutions for some problems of parabolic systems // Math. Nachr. 1993. Bd. 162. — S. 59-88

31. *Koshelev A.* About sharpness of some estimates for solutions of the Stokes system. — Stuttgart: Univ.Stuttgart, Math. Inst. A. 1995. — 15 p.Preprint 95-6

32. *Koshelev A.* Regularity problem for quasilinear elliptic and parabolic systems // Lecture Notes in Math. Bd. 1614, 1995. — 255 s.

33. *Koshelev A.* About the regularity of the stresses for the linear theory of elasticity — Heidelberg: Univ.Heidelberg, Preprint 2000-15 (SFB 359) — 8 s.

34. *Koshelev A., Chelkak S.* Regularity of solutions of quasilinear elliptic systems // Teubner-Texte Math. Bd. 77, 1985. — 205 S.

35. *Koshelev A., Narbut M.A.* Plane problems in non-linear theory of elasticity for hardening media // Memorie di Matematica e Applicazioni. 124 (2006), V. XXX, fasc. 1, pagg. 95-102