ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 4, 2016
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МОДЕЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

С.И.Митрохин

Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

Аннотация

Изучается краевая задача для семейства дифференциальных операторов с разделёнными граничными условиями. Потенциал дифференциального оператора является суммируемой функцией на отрезке. Получена асимптотика решений соответствующего дифференциального уравнения при больших значениях спектрального параметра. Выведено уравнение на собственные значения изучаемого оператора. Найдена асимптотика собственных значений изучаемого семейства дифференциальных операторов. Получено уравнение, которому удовлетворяют собственные функции исследуемых операторов.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, краевая задача, суммируемый потенциал, спектральный параметр, асимптотика собственных значений.

Abstract

The boundary value problem for a family of differential operators with separated boundary conditions is studied. The potential of a differential operator is a summable function on the segment. The asymptotic of solutions of the corresponding differential equations for large values of the spectral parameter is obtained. The equation for the eigenvalues of the studied operators is deduced. The asymptotic behavior of the eigenvalues of the studied family of differential operators is found. The equation to which the eigenfunctions of the studied operators satisfy is obtained.

Keywords: differential operator, boundary value problem, summable potential, spectral parameter, asymptotics of the eigenvalues.

Введение. Постановка задачи. Исторический обзор.

Изучим следующую модельную краевую задачу для дифференциального оператора девятого порядка, задаваемого дифференциальным уравнением

$$y^{(9)}+q(x)\cdot y(x)=\lambda\cdot a^{9}\cdot y(x), 0\le x\le\pi, a>0, \qquad (1)$$

с разделёнными граничными условиями вида

$$\begin{gathered} y^{(m_1)}(0)=y^{(m_2)}(0)=\ldots=y^{(m_7)}(0)=y^{(n_1)}(\pi)=y^{(n_2)}(\pi)=0, \\ m_1<m_2<\ldots<m_6<m_7, n_1<n_2, m_k, n_1, n_2\in\{0,1,2,\ldots,8\}, k=1,2,\ldots,7. \end{gathered} \qquad (2)$$

В дифференциальном уравнении (1) число $\lambda\in C$ - спектральный параметр, функция $\rho(x)=a^{9}=const$ - весовая функция, функция $q(x)$ - потенциал.

При этом мы предполагаем, что потенциал $q(x)$ - суммируемая функция на отрезке $[0;\pi]$:

$$q(x)\in L_1[0;\pi](=)\left(\int_0^x q(t)dt\right)'_x=q(x) \text{ почти для всех } x\in[0;\pi]. \qquad (3)$$

Исторически сложилось так, что сначала спектральные свойства дифференциальных операторов вида (1)-(2) изучались при условии достаточно гладких потенциалов $q(x)$. В работе [1] была выписана асимптотика решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n–го порядка при больших значениях спектрального параметра. В работах [2] и [3] при условии бесконечно гладкого потенциала были выписаны асимптотические формулы для корней одного класса целых функций и найдены следы обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков.

В случае кусочно-гладких коэффициентов чаще всего изучались спектральные свойства операторов второго порядка. В работе [4] в случае кусочно-гладкой весовой функции были изучены свойства сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора второго порядка. В работе [5] были получены формулы регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами. В работе [6] автор изучил некоторые спектральные свойства дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией.

Дифференциальные операторы с суммируемыми коэффициентами начали изучаться не так давно. В работе [7] рассмотрены операторы Штурма-Лиувилля с суммируемым потенциалом и найдена асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций. В работе [8] автором получена асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка с суммируемыми коэффициентами. Метод работы [8] отличается от метода работы [7]. В случае операторов порядка выше второго все вычисления многократно усложняются. В работе [9] изучены спектральные свойства дифференциальных операторов произвольного нечётного порядка с суммируемым потенциалом с конкретными граничными условиями. Изучая граничные условия (2), мы одновременно изучаем целое семейство дифференциальных операторов.

1. Асимптотика решений дифференциального уравнения (1) при больших значениях спектрального параметра. Пусть $\lambda = s^9, s = \sqrt[9]{\lambda}$,причём для корректности дальнейших рассуждений зафиксируем ту ветвь арифметического корня, для которой $\sqrt[9]{1} = +1$. Введём следующие обозначения:

$$\begin{gathered} w_k^9 = 1, w_k = e^{\frac{2\pi i}{9}(k-1)}, k = 1,2,...,9; w_1 = 1, w_2 = e^{\frac{2\pi i}{9}} = \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) = z \neq 0, \\ w_3 = e^{\frac{4\pi i}{9}} = \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) = z^2, w_4 = z^3, ..., w_m = z^{m-1} (m = 1,2,...,9). \end{gathered} \tag{4}$$

При этом справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{9} w_k^p = 0, p = 1,2,...,8; \quad \sum_{k=1}^{9} w_k^p = 9, p = 0, p = 9. \tag{5}$$

Числа w_k $(k = 1,2,3,...,9)$ из (4) – (5) делят единичную окружность на девять равных частей, числа w_{1+k} и w_{10-k} являются комплексно-сопряженными:

$$w_{10-k} = \overline{w_{1+k}} (k = 0,1,2,...,5); w_1 = \overline{w_1}; w_9 = \overline{w_2}; w_8 = \overline{w_3}; ...; w_6 = \overline{w_5}. \tag{6}$$

Для дальнейших выкладок мы введём полезное обозначение $w_{9+m} = w_m, m = 1,2,3,...,9.$

Методами, продемонстрированными в работах [10, гл. 2], [11, гл. 1], [12], доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. Решение $y(x,s)$ дифференциального уравнения (1) удовлетворяет следующему интегральному уравнению Вольтерра:

$$y(x,s) = \sum_{k=1}^{9} C_k \cdot e^{a w_k s x} - \frac{1}{9 a^8 s^8} \cdot \sum_{k=1}^{9} w_k \cdot e^{a w_k s x} \cdot \int_0^x q(t) \cdot e^{-a w_k s t} \cdot y(t,s) dt, \tag{7}$$

где $C_k (k = 1,2,...,9)$ - произвольные постоянные.

Формула (7) устанавливается методом вариации произвольных постоянных с использованием свойств (5).

Интегральное уравнение (7) с помощью метода Пикара применим к нахождению асимптотики решений дифференциального уравнения (1) при больших значениях спектрального параметра λ. Из уравнения (7) находим $y(t,s)$, подставляем $y(t,s)$ в интегральное уравнение (7) и делаем необходимые преобразования. В итоге получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет следующий вид:

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{9} C_k\cdot y_k(x,s); y^{(p)}(x,s)=\sum_{k=1}^{9} C_k\cdot y_k^p(x,s), p=1,2,...,8, \quad (8)$$

$C_k(k=1,2,...,9)$ - произвольные постоянные,

$$y_k(x,s)=e^{aw_k sx}-\frac{A_{8,k}(x,s)}{9a^8s^8}+O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\, s|x}}{s^{16}}\right), k=1,2,...,9, \quad (9)$$

$$\frac{y_k^p(x,s)}{(as)^p}=w_k^p\cdot e^{aw_k sx}-\frac{A_{8,k}^p(x,s)}{9a^8s^8}+O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\, s|x}}{s^{16}}\right), k=1,2,...,9, p=1,2,...,8, \quad (10)$$

$$\begin{gathered}A_{8,k}(x,s)=w_1e^{aw_1sx}\cdot\int_0^x q(t)\cdot e^{a(w_k-w_1)st}dt_{ak1}+w_2e^{aw_2sx}\cdot\int_0^x q(t)\cdot e^{a(w_k-w_2)st}dt_{ak2}+...+\\+w_9e^{aw_9sx}\cdot\int_0^x q(t)\cdot e^{a(w_k-w_9)st}dt_{ak9}, k=1,2,....,9;\end{gathered} \quad (11)$$

$$A_{8,k}^{(p)}(x,s)=\sum_{n=1}^{9} w_n\cdot w_n^p\cdot e^{aw_n sx}\cdot\int_0^x q(t)\cdot e^{a(w_k-w_n)st}dt_{akn}, k=1,2,...,9; p=1,2,...,8. \quad (12)$$

При выводе формул (8) – (12) мы использовали следующие начальные условия:

$$\begin{gathered}A_{8,k}(0,s)=0; A_{8,k}^p(0,s)=0; y_k(0,s)=1; y_k^{(p)}(0,s)=w_k^{(p)}\cdot(as)^p;\\ y(0,s)=\sum_{k=0}^{9} C_k\cdot 1; y^{(p)}(0,s)=\sum_{k=0}^{9} C_k\cdot w_k^p\cdot a^p\cdot s^p, k=1,2,...,9; p=1,2,...,8.\end{gathered} \quad (13)$$

Оценки (9) – (12) получаются аналогично оценкам, полученным для гладкого потенциала $q(x)$ в монографиях [10, глава 2], [11, глава 1].

2. Изучение граничных условий (2). Подставляя формулы (8) – (13) в граничные условия (2), получаем:

$$\begin{cases} y^{(m_r)}(0,s)=0(=)\sum_{k=1}^{9} C_k y_k^{(m_r)}(0,s)=0(=)\sum_{k=1}^{9} C_k w_k^{(m_r)}(as)^{m_r}=0, r=1,2,...,7. & (14)\\ y^{(n_j)}(\pi,s)=0(=)\sum_{k=1}^{9} C_k y_k^{(n_j)}(\pi,s)=0; j=1,2. & (15)\end{cases}$$

Система (14) – (15) (из девяти уравнений с девятью неизвестными $C_1, C_2, ..., C_9$) имеет ненулевые решения ($C_1^2+C_2^2+...+C_9^2\neq 0$) только в том случае, когда её определитель равен нулю. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1) – (2) – (3) имеет следующий вид:

$$g(s)=\begin{vmatrix} y_1^{(m_1)}(0,s)=b_{11} & y_2^{(m_1)}(0,s)=b_{12} & \ldots & y_8^{(m_1)}(0,s)=b_{1,8} & y_9^{(m_1)}(0,s)=b_{1,9} \\ y_1^{(m_2)}(0,s)=b_{21} & y_2^{(m_2)}(0,s)=b_{22} & \ldots & y_8^{(m_2)}(0,s)=b_{2,8} & y_9^{(m_2)}(0,s)=b_{2,9} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(m_7)}(0,s)=b_{7,1} & y_2^{(m_7)}(0,s)=b_{7,2} & \ldots & y_8^{(m_7)}(0,s)=b_{7,8} & y_9^{(m_7)}(0,s)=b_{7,9} \\ y_1^{(n_1)}(\pi,s)=b_{8,1} & y_2^{(n_1)}(\pi,s)=b_{8,2} & \ldots & y_8^{(n_1)}(\pi,s)=b_{8,8} & y_9^{(n_1)}(\pi,s)=b_{8,9} \\ y_1^{(n_2)}(\pi,s)=b_{9,1} & y_2^{(n_2)}(\pi,s)=b_{9,2} & \ldots & y_8^{(n_2)}(\pi,s)=b_{9,8} & y_9^{(n_2)}(\pi,s)=b_{9,9} \end{vmatrix}=0. \qquad (16)$$

В первых девяти строчках определителя $g(s)$ из (16) применим начальные условия (13) и поделим в k-ой строке на $(as)^{m_k}\neq 0$ $(k=1,2,\ldots,13)$. Для изучения корней уравнения (16) применим теорему Лапласа о разложении определителя $g(s)$ по последним двум строкам. В результате получим:

$$g(s)=\phi_{1,2}\cdot\psi_{1,2}+\phi_{2,3}\cdot\psi_{2,3}+\phi_{3,4}\cdot\psi_{3,4}+\ldots+\phi_{8,9}\cdot\psi_{8,9}+\phi_{9,1}\cdot\psi_{9,1}-\phi_{1,3}\cdot\psi_{1,3}+$$
$$+\phi_{1,4}\cdot\psi_{1,4}+\ldots=\sum_{j_1,j_2=1}^{9}\phi_{j_1,j_2}\cdot\psi_{j_1,j_2}=0, \qquad (17)$$

$$\phi_{1,2}=\begin{vmatrix} b_{8,1} & b_{8,2} \\ b_{9,1} & b_{9,2} \end{vmatrix};\phi_{2,3}=\begin{vmatrix} b_{8,2} & b_{8,3} \\ b_{9,2} & b_{9,3} \end{vmatrix};\ldots;\phi_{j_1,j_2}=\begin{vmatrix} b_{8,j_1} & b_{8,j_2} \\ b_{9,j_1} & b_{9,j_2} \end{vmatrix}; \qquad (18)$$

$$\psi_{1,2}=D_{3,4,\ldots,8,9};\psi_{2,3}=D_{1,4,5,\ldots,8,9};\psi_{3,4}=D_{1,2,5,6,\ldots,8,9};\ldots;\psi_{8,9}=D_{1,2,\ldots,6,7};$$
$$D_{k_1,k_2,\ldots,k_8,k_9}=\begin{vmatrix} b_{1,k_1} & b_{1,k_2} & \ldots & b_{1,k_6} & b_{1,k_7} \\ b_{2,k_1} & b_{2,k_2} & \ldots & b_{2,k_6} & b_{2,k_7} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{7,k_1} & b_{7,k_2} & \ldots & b_{7,k_6} & b_{7,k_7} \end{vmatrix},k_m\in\{1,2,\ldots,8,9\}, \qquad (19)$$

где (b_{mk}) - элементы определителя $g(s)$ из (16).

Знаки «+» и «-» элементов суммы (17) зависят от чётности или нечётности перестановок, которые образуют индексы элементов ϕ_{j_1,j_2} и ψ_{j_1,j_2}.

Некоторые из определителей $D_{k_1,k_2,\ldots,k_8,k_9}$ из (19), которые понадобятся нам в процессе исследования спектра краевой задачи (1) – (2) – (3), мы вычислим в явном виде, используя очень удобные обозначения (4) – (6).

Например, имеем из (19), (13), (16):

$$D_{1,2,3,4,5,6,7} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1,7} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2,7} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{7,1} & b_{7,2} & b_{7,3} & \dots & b_{7,7} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & w_3^{m_1} & \dots & w_7^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & w_3^{m_2} & \dots & w_7^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_7} & w_2^{m_7} & w_3^{m_7} & \dots & w_7^{m_7} \end{vmatrix} \overset{(4)}{=}$$

$$\overset{(4)}{=} \begin{vmatrix} 1^{m_1} & z^{m_1} & z^{2m_1} & \dots & z^{6m_1} \\ 1^{m_2} & z^{m_2} & z^{2m_2} & \dots & z^{6m_2} \\ 1^{m_3} & z^{m_3} & z^{2m_3} & \dots & z^{6m_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{m_7} & z^{m_7} & z^{2m_7} & \dots & z^{6m_7} \end{vmatrix} = \prod_{p>r,\, p,r=1,2,\dots,7} \left(z^{m_p} - z^{m_r} \right) = D_7 \neq 0, \qquad (20)$$

так как определитель $D_{1,2,3,\dots,7,8,9}$ представляет собой определитель Вандермонда чисел $z^{m_1}, z^{m_2}, \dots, z^{m_9}$.

Используя формулы (4) – (6) и свойства определителей, имеем:

$$D_{2,3,4,5,6,7,8} = \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1,7} & b_{1,8} \\ b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2,7} & b_{2,8} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{6,2} & b_{6,3} & \dots & b_{6,7} & b_{6,8} \\ b_{7,2} & b_{7,3} & \dots & b_{7,7} & b_{7,8} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_2^{m_1} & w_3^{m_1} & \dots & w_7^{m_1} & w_8^{m_1} \\ w_2^{m_2} & w_3^{m_2} & \dots & w_7^{m_2} & w_8^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^{m_6} & w_3^{m_6} & \dots & w_7^{m_6} & w_8^{m_6} \\ w_2^{m_7} & w_3^{m_7} & \dots & w_7^{m_7} & w_8^{m_7} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} z^{m_1} & z^{2m_1} & \dots & z^{6m_1} & z^{7m_1} \\ z^{m_2} & z^{2m_2} & \dots & z^{6m_2} & z^{7m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{m_6} & z^{2m_6} & \dots & z^{6m_6} & z^{7m_6} \\ z^{m_7} & z^{2m_7} & \dots & z^{6m_7} & z^{7m_7} \end{vmatrix} = z^{m_1} \cdot z^{m_2} \cdot (\dots) \cdot z^{m_6} \cdot z^{m_7} \cdot \begin{vmatrix} 1 & z^{m_1} & \dots & z^{5m_1} & z^{6m_1} \\ 1 & z^{m_2} & \dots & z^{5m_2} & z^{6m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z^{m_6} & \dots & z^{5m_6} & z^{6m_6} \\ 1 & z^{m_7} & \dots & z^{5m_7} & z^{6m_7} \end{vmatrix} = \qquad (21)$$

$$= z^{M_7} \cdot D_7 \neq 0, M_7 = m_1 + m_2 + \dots + m_6 + m_7 = \sum_{k=1}^{7} m_k.$$

Аналогичным образом выводятся следующие формулы:

$$\begin{aligned} & D_{3,4,5,6,7,8,9} = z^{2M_7} \cdot D_7; D_{4,5,6,7,8,9,10} = D_{1,4,5,6,7,8,9} = z^{3M_7} \cdot D_7; \dots; \\ & D_{n,n+1,n+2,\dots,n+4,n+5,n+6} = z^{(n-1)M_7} \cdot D_7, n = 1,2,\dots,9; w_{n+9} = w_n; D_{k_1+9,k_2+9,\dots,k_6+9,k_7+9} = D_{k_1,k_2,\dots,k_6,k_7}. \end{aligned} \qquad (22)$$

Определители ϕ_{j_1,j_2} из (17) – (18) вычислим, учитывая (16) и асимптотические разложения (9) – (10):

$$\phi_{1,2}=\begin{vmatrix} b_{8,1} & b_{8,2} \\ b_{9,1} & b_{9,2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{y_1^{(n_1)}(\pi,s)}{(as)^{n_1}} & \dfrac{y_2^{(n_1)}(\pi,s)}{(as)^{n_1}} \\ \dfrac{y_1^{(n_2)}(\pi,s)}{(as)^{n_2}} & \dfrac{y_2^{(n_2)}(\pi,s)}{(as)^{n_2}} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} w_1^{n_1}\cdot e^{aw_1 s\pi}-\dfrac{A_{8,1}^{n_1}(\pi,s)}{9a^8s^8}+O\left(\dfrac{1}{s^{16}}\right) & w_2^{n_1}\cdot e^{aw_2 s\pi}-\dfrac{A_{8,2}^{n_1}(\pi,s)}{9a^8s^8}+O\left(\dfrac{1}{s^{16}}\right) \\ w_1^{n_2}\cdot e^{aw_1 s\pi}-\dfrac{A_{8,1}^{n_2}(\pi,s)}{9a^8s^8}+O\left(\dfrac{1}{s^{16}}\right) & w_2^{n_2}\cdot e^{aw_2 s\pi}-\dfrac{A_{8,2}^{n_2}(\pi,s)}{9a^8s^8}+O\left(\dfrac{1}{s^{16}}\right) \end{vmatrix}= \tag{23}$$

$$=P_{1,2}\cdot e^{a[w_1+w_2]s\pi}-\frac{R_{1,2,8}(\pi,s)}{9a^8s^8}+O\left(\frac{1}{s^{16}}\right);\ P_{1,2}=\begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_2^{n_1} \\ w_1^{n_2} & w_2^{n_2} \end{vmatrix};$$

$$R_{1,2,8}(\pi,s)=\begin{vmatrix} A_{8,1}^{n_1}(\pi,s) & w_2^{n_1} \\ A_{8,1}^{n_2}(\pi,s) & w_2^{n_2} \end{vmatrix}_1\cdot e^{aw_2 s\pi}+\begin{vmatrix} w_1^{n_1} & A_{8,2}^{n_1}(\pi,s) \\ w_1^{n_2} & A_{8,2}^{n_2}(\pi,s) \end{vmatrix}_2\cdot e^{aw_1 s\pi}. \tag{24}$$

Таким же способом получаем:

$$\phi_{2,3}=\begin{vmatrix} b_{8,2} & b_{8,3} \\ b_{9,2} & b_{9,3} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{y_2^{(n_1)}(\pi,s)}{(as)^{n_1}} & \dfrac{y_3^{(n_1)}(\pi,s)}{(as)^{n_1}} \\ \dfrac{y_2^{(n_2)}(\pi,s)}{(as)^{n_2}} & \dfrac{y_3^{(n_2)}(\pi,s)}{(as)^{n_2}} \end{vmatrix}=P_{2,3}e^{a(w_2+w_3)s\pi}-\frac{R_{2,3,8}(\pi,s)}{9a^8s^8}+O\left(\frac{1}{s^{16}}\right);$$

$$P_{2,3}=\begin{vmatrix} w_2^{n_1} & w_3^{n_1} \\ w_2^{n_2} & w_3^{n_2} \end{vmatrix}; \tag{25}$$

$$R_{2,3,8}(\pi,s)=\begin{vmatrix} A_{8,2}^{n_1}(\pi,s) & w_3^{n_1} \\ A_{8,2}^{n_2}(\pi,s) & w_3^{n_2} \end{vmatrix}_3\cdot e^{aw_3 s\pi}+\begin{vmatrix} w_2^{n_1} & A_{8,3}^{n_1}(\pi,s) \\ w_2^{n_2} & A_{8,3}^{n_2}(\pi,s) \end{vmatrix}_4\cdot e^{aw_2 s\pi}. \tag{26}$$

Аналогично выводу формул (20) – (22) находим:

$$P_{1,2}=\begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_2^{n_1} \\ w_1^{n_2} & w_2^{n_2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1^{n_1} & z^{n_1} \\ 1^{n_2} & z^{n_2} \end{vmatrix}=z^{n_2}-z^{n_1}=\det Wand`s\left(z^{n_1},z^{n_2}\right)=P_2\neq 0, \tag{27}$$

$$P_{2,3}=\begin{vmatrix} w_2^{n_1} & w_3^{n_1} \\ w_2^{n_2} & w_3^{n_2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} z^{n_1} & z^{2n_1} \\ z^{n_2} & z^{2n_2} \end{vmatrix}=z^{N_2}\cdot P_2,\ N_2=n_1+n_2;$$
$$P_{3,4}=z^{2N_2}\cdot P_2,\ P_{4,5}=z^{3N_2}\cdot P_2;\ldots;P_{n,n+1}=z^{(n-1)N_2}\cdot P_2,\ n=1,2,\ldots \tag{28}$$

3. Нахождение асимптотики собственных значений оператора (1)-(2)-(3).

Чтобы изучить уравнение (16) на собственные значения, которое мы преобразовали к виду (17) – (19), подставим туда формулы (23) – (28) и (20) – (22) и увидим, что основное приближение получившегося уравнения имеет следующий вид:

$$g_0(s)=P_2e^{a(w_1+w_2)s\pi}z^{2M_7}D_7+z^{N_2}P_2e^{a(w_2+w_3)s\pi}z^{3M_7}D_7+z^{2N_2}P_2e^{a(w_3+w_4)s\pi}z^{4M_7}D_7+\ldots+$$
$$+z^{7N_2}P_2e^{a(w_8+w_9)s\pi}z^{9M_7}D_7+z^{8N_2}P_2e^{a(w_9+w_1)s\pi}z^{10M_7}D_7-e^{a(w_1+w_3)s\pi}\psi_{1,3}+e^{a(w_1+w_4)s\pi}\psi_{1,4}+\ldots=0, \tag{29}$$

при этом формулы для $\psi_{1,3},\psi_{1,4},\ldots$ мы не находим и в дальнейшем они нам не понадобятся.

Для нахождения асимптотики корней уравнения (29) (а также уравнений (16), (17) – (19)) необходимо изучить индикаторную диаграмму этого уравнения (см. [13, глава 12]), т.е. выпуклую оболочку множества показателей экспонент, входящих в уравнение (29). Значит, нам надо исследовать выпуклую оболочку множества точек $\{w_k + w_p; k, p = 1,2,...,9\}$. Из геометрических соображений (из правила сложения векторов) следует, что $|w_1 + w_4| < |w_1 + w_3| < |w_1 + w_2|$, $|w_2 + w_5| < |w_2 + w_4| < |w_2 + w_3|$ и т.д. Значит, выпуклой оболочкой множества точек $\{w_k + w_p; k, p = 1,2,...,9\}$ является правильный девятиугольник $D_1D_2D_3....D_8D_9$, вершинами которого являются точки $w_1 + w_2$, $w_2 + w_3$, $w_3 + w_4,...,$ $w_7 + w_8$, $w_8 + w_9$, $w_9 + w_{10} = w_9 + w_1$. Следовательно, индикаторная диаграмма уравнения (29) имеет следующий вид:

$$D_1D_2D_3....D_8D_9, D_1 \leftrightarrow w_1 + w_2, D_2 \leftrightarrow w_2 + w_3,..., D_9 \leftrightarrow w_9 + w_1. \tag{30}$$

Из общей теории (см. [13, глава 12], [14], [15]) нахождения корней уравнений (29), (16), (17) – (19) следует, что корни этих уравнений лежат в девяти секторах, определяемых девятиугольником $D_1D_2D_3....D_8D_9$ из (30), бесконечно малого раствора, биссектрисы которых перпендикулярны сторонам этого девятиугольника.

Изучим асимптотику корней уравнения (17) – (19) в секторе 1), биссектриса которого перпендикулярна отрезку $[D_1; D_2] = [w_1 + w_2; w_2 + w_3]$. Значит, в этом секторе на асимптотику корней влияют только экспоненты с показателями $w_1 + w_2$ и $w_2 + w_3$, остальные экспоненты в этом секторе представляют собой бесконечно малые величины. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. В секторе 1) индикаторной диаграммы (30), биссектриса которого перпендикулярна отрезку $[D_1; D_2] = [w_1 + w_2; w_2 + w_3]$, уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1) – (2) – (3) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} f_1(s) = \phi_{1,2} \cdot \psi_{1,2} + \phi_{2,3} \cdot \psi_{2,3} + \overset{=}{o}(1) = \left[P_{1,2} \cdot e^{a(w_1 + w_2)s\pi} - \frac{R_{1,2,8}(\pi, s)}{9a^8 s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{16}}\right) \right] \cdot z^{2M_7} \cdot D_7 + \\ + \left[P_{2,3} \cdot e^{a(w_2 + w_3)s\pi} - \frac{R_{2,3,8}(\pi, s)}{9a^8 s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{16}}\right) \right] \cdot z^{3M_7} \cdot D_7 = 0, \end{gathered} \tag{31}$$

<u>где $P_{1,2} \overset{(27)}{=} P_2 \neq 0, P_{2,3} \overset{(28)}{=} z^{N_2} P_2$, функции $R_{1,2,8}(\pi, s)$ и $R_{2,3,8}(\pi, s)$ определены формулами (24) и (26).</u>

Чтобы вычислить определитель $R_{1,2,8}(\pi, s)$ из (24), применим асимптотические формулы (11) – (12) и разложим получившийся определитель по столбцам на сумму определителей. Например, для определителя $|\ldots|_1$ из (24) имеем:

$$|\ldots|_1 = \begin{vmatrix} A_{8,1}^{n_1}(\pi,s) & w_2^{n_1} \\ A_{8,1}^{n_2}(\pi,s) & w_2^{n_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1 w_1^{n_1} E_1 \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a11} + w_2 w_2^{n_1} E_1 \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a12} + w_3 w_3^{n_1} E_3 \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a13} + \overset{=}{o}(1) & w_2^{n_1} \\ w_1 w_1^{n_2} E_1 \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a11} + w_2 w_2^{n_2} E_1 \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a12} + w_3 w_3^{n_2} E_3 \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a13} + \overset{=}{o}(1) & w_2^{n_2} \end{vmatrix} =$$

$$= w_1 E_1 \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a11} \begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_2^{n_1} \\ w_1^{n_2} & w_2^{n_2} \end{vmatrix} + w_2 E_2 \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a12} \begin{vmatrix} w_2^{n_1} & w_2^{n_1} \\ w_2^{n_2} & w_2^{n_2} \end{vmatrix} + w_3 E_3 \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a13} \begin{vmatrix} w_3^{n_1} & w_2^{n_1} \\ w_3^{n_2} & w_2^{n_2} \end{vmatrix} + \overset{=}{o}(1) = \tag{32}$$

$$= w_1 E_1 \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a11} P_2 + w_2 \cdot 0 + w_3 E_3 \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a13} \cdot (-1) P_{2,3} + \overset{=}{o}(1); E_k = e^{a w_k s\pi}, k = 1,2,3,\ldots$$

Аналогичным образом преобразуем определители $|\ldots|_2$, $|\ldots|_3$, $|\ldots|_4$ из (24) и (26), подставим их в уравнение (31), учтём формулу (28), поделим на $z^{2M_7} \cdot D_7 \neq 0$, получаем следующее уравнение:

$$f_1(s) = \left[P_{1,2} \cdot e^{a(w_1+w_2)s\pi} - P_{2,3} \cdot e^{a(w_2+w_3)s\pi} \cdot z^{M_7} \right] - \frac{1}{9a^8 s^8} f_{1,8}(s) + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{16}} \right) = 0, \tag{33}$$

$$\begin{aligned} f_{1,8}(s) = & \left[(w_1 + w_2) \cdot P_{1,2} \cdot \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a11} \cdot e^{a(w_1+w_2)s\pi} - w_3 \cdot P_{2,3} \cdot \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a13} \cdot e^{a(w_2+w_3)s\pi} + \overset{=}{o}(1) \right] - \\ & - z^{M_7} \cdot \left[(w_2 + w_2) \cdot P_{2,3} \cdot \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a22} \cdot e^{a(w_2+w_3)s\pi} - w_1 \cdot P_{1,2} \cdot \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a31} \cdot e^{a(w_1+w_2)s\pi} + \overset{=}{o}(1) \right], \end{aligned} \tag{34}$$

при этом мы учли, что из формул (11) – (12) следует, что $\left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a11} = \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a22} = \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a33} = \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{ann} = \int_0^\pi q(t)dt_{a11}, n = 1,2,3,..,9$.

Поделив в уравнении (33) – (34) на $P_{1,2} \cdot e^{a(w_2+w_3)s\pi} \neq 0$, учтём, что $\frac{P_{2,3}}{P_{1,2}} = z^{N_2}$ из (27) – (28), находим:

$$\tilde{f}_1(s) = \left[e^{a(w_1-w_3)s\pi} - z^{M_7} \cdot z^{N_2} \right] - \frac{\tilde{f}_{1,8}(\pi,s)}{9a^8 s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{16}} \right) = 0, \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1,8}(\pi,s) = & \left[(w_1 + w_2) \cdot e^{a(w_1-w_3)s\pi} - (w_2 + w_3) \cdot z^{M_7} \cdot z^{N_2} \right]_5 \cdot \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a11} + \left[w_1 \cdot z^{M_7} \cdot \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a31} \times \right. \\ & \left. \times e^{a(w_1-w_3)s\pi} - w_3 \cdot z^{N_2} \cdot \left(\int_0^\pi \ldots \right)_{a13} \right]_6. \end{aligned} \tag{36}$$

Основное приближение уравнения (35) – (36) имеет вид

$$
\begin{gathered}
e^{a(w_1-w_3)s\pi} - z^{M_7}\cdot z^{N_2} = 0 \Leftrightarrow e^{a(w_1-w_3)s\pi} = z^{M_7}\cdot z^{N_2} = e^{2\pi i k}\cdot e^{\frac{2\pi i}{9}\cdot M_7}\cdot e^{\frac{2\pi i}{9}\cdot N_2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow s_{k,1,осн} = \frac{2i}{a(w_1-w_3)}\cdot \tilde{k}, \tilde{k} = k + \frac{M_7+N_2}{9}, k\in Z.
\end{gathered} \tag{37}
$$

В формуле (37) индекс 1 у $s_{k,1,осн}$ показывает, что мы рассматриваем сектор 1) индикаторной диаграммы (30), «осн» означает, что это основное приближение корней уравнения (35) – (36).

Из общей теории нахождения корней квазимногочленов вида (35) – (36) следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1) – (2) – (3) в секторе 1) индикаторной диаграммы (30) вычисляется по следующей формуле:

$$
s_{k,1} = \frac{2i}{a(w_1-w_3)}\cdot\left[\tilde{k} + \frac{d_{8,k,1}}{\tilde{k}^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{16}}\right)\right], \tilde{k} = k + \frac{M_7+N_2}{9}, k\in Z. \tag{38}
$$

Для доказательства теоремы 5 необходимо показать, что коэффициенты $d_{8,k,1}$ из (38) вычисляются единственным образом в явном виде.

Применяя формулы Маклорена, получаем:

$$
\begin{gathered}
e^{a(w_1-w_3)s\pi}\Big|_{s_{k,1}} \overset{(38)}{=} e^{2\pi i k}\cdot e^{2\pi i\cdot\left[\frac{d_{8,k,1}}{\tilde{k}^8}+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{16}}\right)\right]} = e^{2\pi i k}\cdot e^{2\pi i\cdot\frac{M_7+N_2}{9}}\cdot e^{\left[\frac{d_{8,k,1}}{\tilde{k}^8}+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{16}}\right)\right]} = \\
= 1\cdot z^{M_7}\cdot z^{N_2}\cdot\left[1 + \frac{2\pi i\cdot d_{8,k,1}}{\tilde{k}^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{16}}\right)\right],
\end{gathered} \tag{39}
$$

$$
\frac{1}{s_{k,1}^8} \overset{(38)}{=} \frac{a^8\cdot(w_1-w_3)^8}{2^8\cdot i^8}\cdot\frac{1}{\tilde{k}^8}\cdot\left[1 - \frac{d_{8,k,1}}{\tilde{k}^9} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{17}}\right)\right]. \tag{40}
$$

Подставляя формулы (38) – (40) в уравнение (35) – (36), имеем:

$$
\begin{gathered}
\left[z^{M_7}\cdot z^{N_2} + z^{M_7}\cdot z^{N_2}\cdot\frac{d_{8,k,1}\cdot 2\pi i}{\tilde{k}^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{16}}\right) - z^{M_7}\cdot z^{N_2}\right] - \frac{1}{9a^8}\cdot\frac{a^8\cdot(w_1-w_3)^8}{2^8\cdot i^8}\cdot\frac{1}{\tilde{k}^8}\times \\
\times\left(1+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^9}\right)\right)\cdot\tilde{f}_{1,8}(\pi,s)\Big|_{s_{k,1}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{16}}\right) = 0,
\end{gathered}
$$

откуда следует, что

$$
d_{8,k,1} = \frac{1}{2\pi i}\cdot z^{-M_7}\cdot z^{-N_2}\cdot\frac{(w_1-w_3)^8}{9\cdot 2^8}\cdot(-1)\cdot\tilde{f}_{1,8}(\pi,s)\Big|_{s_{k,1,осн}}. \tag{41}
$$

Скобка $[...]_5$ из (36) в силу формулы (39) равна:

$$
[...]_5 = (w_1+w_2)\cdot\left[z^{M_7}\cdot z^{N_2} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^8}\right)\right] - (w_2+w_3)\cdot z^{M_7}\cdot z^{N_2} = z^{M_7}\cdot z^{N_2}\cdot(w_1-w_3) + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^8}\right). \tag{42}
$$

Скобка $[\ldots]_6$ из (36) преобразуется следующим образом:

$$[\ldots]_6\Big|_{s_{k,1,осн}} = e^{\frac{2\pi i}{9}} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{9}} \cdot 1 \cdot z^{M_7} \cdot \int_0^{\pi} q(t) \cdot e^{a(w_3-w_1)st} dt_{a31}\Bigg|_{s_{k,1,осн}} \cdot \left[z^{M_7} \cdot z^{N_2} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^8}\right)\right] - e^{\frac{2\pi i}{9}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{9}} \cdot z^{M_7} \cdot z^{N_2} \times$$

$$\times z^{-M_7} \cdot \int_0^{\pi} q(t) \cdot e^{a(w_1-w_3)st \cdot \left[\frac{2\tilde{k}}{a(w_1-w_3)} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^8}\right)\right]} dt_{a13}\Bigg|_{s_{k,1,осн}} = e^{\frac{2\pi i}{9}} \cdot z^{M_7} \cdot z^{N_2} \cdot \left[e^{-\frac{2\pi i}{9}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{9} M_7} \int_0^{\pi} q(t) \cdot e^{-2\tilde{k}ti} dt_{a31} - e^{\frac{2\pi i}{9}} \times \right.$$

$$\left. \times e^{-\frac{2\pi i}{9} M_7} \cdot \int_0^{\pi} q(t) \cdot e^{2\tilde{k}ti} dt_{a13} \right] = (-2i) z^{M_7} \cdot z^{N_2} \cdot e^{\frac{2\pi i}{9}} \cdot \int_0^{\pi} q(t) \cdot \sin\left[2\tilde{k}t + \frac{2\pi}{9} - \frac{2\pi}{9} M_7\right] dt_{bk_2}.$$

(43)

Подставляя формулы (42), (43) в (41), с учётом (36) находим:

$$d_{8,k,1} = -\frac{1}{9\pi} \cdot \frac{z^{-M_7} \cdot z^{N_2}}{i \cdot 2^9} \cdot (w_1 - w_3)^9 \cdot z^{M_7} \cdot z^{N_2} \cdot \left\{ \left(\int_0^{\pi} \ldots \right)_{a11} + \frac{(-2i) \cdot e^{\frac{2\pi i}{9}}}{w_1 - w_3} \cdot \left(\int_0^{\pi} \ldots \right)_{bk_2} \right\}. \quad (44)$$

Применяя обозначения (4), получаем:

$$w_1 - w_3 = 1 - e^{\frac{2\pi i}{9} 2} = e^{\frac{2\pi i}{9}} \cdot \left[e^{-\frac{2\pi i}{9}} - e^{\frac{2\pi i}{9}} \right] = (-2i) \cdot e^{\frac{2\pi i}{9}} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right). \quad (45)$$

Подставим формулу (45) в формулы (44) и (38), сделаем необходимые преобразования и формулировку теоремы 5 скорректируем следующим образом.

Теорема 6. 1) Собственные значения дифференциального оператора (1) – (2) – (3) в секторе 1) $(\perp [w_1 + w_2; w_2 + w_3])$ индикаторной диаграммы (30) подчиняются следующей асимптотике:

$$s_{k,1} = -\frac{1}{a} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{9}} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)} \cdot \left[\tilde{k} + \frac{d_{8,k,1}}{\tilde{k}^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{16}}\right)\right], \tilde{k} = k + \frac{M_7 + N_2}{9}, \quad (46)$$

$$M_7 = \sum_{k=1}^{7} m_k, N_2 = n_1 + n_2, k \in Z;$$

числа $m_k (k = 1,2,\ldots,7)$ и n_1, n_2 заданы граничными условиями (2), при этом

$$d_{8,k,1} = -\frac{1}{9\pi} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right)^9 \cdot \left\{ \int_0^{\pi} q(t) dt_{a11} + \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)} \cdot \int_0^{\pi} q(t) \cdot \sin\left[2\tilde{k}t + \frac{2\pi}{9} - \frac{2\pi}{9} \cdot M_7\right] dt_{bk_2} \right\}, k \in Z; \quad (47)$$

2) Для остальных секторов индикаторной диаграммы (30) справедливы следующие соотношения:

$$s_{k,2} = s_{k,1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{9}}; s_{k,3} = s_{k,2} \cdot e^{\frac{2\pi i}{9}} = s_{k,1} \cdot e^{\frac{4\pi i}{9}}; \ldots; s_{k,p} = s_{k,1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{9}(p-1)}, p = 1,2,3,\ldots,9, \quad (48)$$

при этом $\lambda_{k,p} = s^9_{k,p}$, $p = 1,2,3,...,9$.

Доказательство формул (48) проводится аналогично доказательству формул (46) – (47) для сектора 1).

С помощью формул (46) – (48) можно вычислить асимптотику собственных функций дифференциального оператора (1) – (2) – (3).

Список литературы

1. **Федорюк М. В.** Асимптотика решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n –го порядка // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2, № 1. С. 492-507.
2. **Лидский В. Б., Садовничий В. А.** Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Математический сборник. 1968. Т. 65, № 4. С. 558-566.
3. **Садовничий В. А.** О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков // Математический сборник. 1967. Т. 72, № 2. С. 293-310.
4. **Ильин В. А.** О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // Математические заметки. 1977. Т. 22, № 5. С. 698-723.
5. **Митрохин С. И.** О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами // Вестник МГУ. Сер.: матем., мех. 1986. № 6. С. 3-6.
6. **Митрохин С. И.** О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // Доклады РАН. 1997. Т. 356, № 1. С. 13-15.
7. **Винокуров В. А., Садовничий В. А.** Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма—Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Известия РАН. Сер.: матем. 2000. Т. 64, № 4. С. 47-108.
8. **Митрохин С. И.** Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестник Московского университета. Сер.: матем., мех. 2009. № 3. С. 14-17.
9. **Митрохин С. И.** О спектральных свойствах дифференциальных операторов нечётного порядка с суммируемым потенциалом // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, №12. С. 1808-1811.
10. **Наймарк М. А.** Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528с.
11. **Юрко В. А.** Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384с.

12. **Митрохин С. И.** О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммирующими коэффициентами с запаздывающим аргументом // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, №4. С. 95-115.
13. **Беллман Р., Кук К. Л.** Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548с.
14. **Садовничий В. А., Любишкин В. А.** О некоторых новых результатах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 109-116.
15. **Садовничий В. А., Любишкин В. А., Белабасси Ю.** О регуляризованных суммах корней целой функции одного класса // Доклады АН СССР. 1980. Т.254, № 6. С. 1346-1348.