ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 3, 2008
Электронный журнал,
рег. № П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.newa.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Управление в социальных и экономических системах, информационные системы и процессы

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК СТРАХОВЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИ КРИТИЧЕСКИХ СИТУАЦИЯХ[1]

А. Р. Мартиросян
Ереванский государственный университет
e-mail: artakm81@inbox.ru
“Работа выставляется в авторской редакции”

ВВЕДЕНИЕ

Страхование. Жизнь человека полна ситуаций, при которых возникают финансовые, физические или моральные потери. Частично их покрывает страхование. Оно распределяет риски редких, но больших убытков среди многих страхователей. Страхование нужно для избавления от финансовых потерь, вызванных неопределенностью наступления событий.

300 лет назад, Эдуард Ллойд осознал важность страхования транспортных рисков в морских перевозках. Риски для жизни, собственности, окружающей среды создали индустрию финансового покрытия непредсказуемых потерь. Страховые случаи происходят в непредсказуемые моменты. Неопределенность моментов и величин потерь – компоненты риска страховой компании.

Страховой компании нужны математические модели, описывающие виды ее деятельности ([16], [1], и др.). Изучение моделей и расчет характеристик работы страховой компании (тарифная ставка, вероятность разорения, величины страхового резерва в выбранные моменты и др.) приводят к управленческим решениям.

Финансовый риск и опасность разорения существуют для любой компании. Оценка риска – основа принятия решений. Разные виды моделирования и связанные с ними расчеты породили актуарную науку. Это – собрание понятий и идей из различных областей знаний, обьединенных их полезностью в разработке и управлении страховых систем (см. [1]). Важное место здесь занимают методы построения моделей риска. Теория страхового риска начинается с вероятностных моделей страховых операций (Барруа, 1835; Дормуа, 1878 и др.). Классическая теория, первоначально названная теорией коллективного риска, восходит к Лундбергу, 1903 г.. Теория с точки зрения стохастических процессов изложена Крамером [1954, 1955].

---

[1] Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 Теория вероятностей и математическая статистика. Научный руководитель: д. ф.- м. н., проф. Даниелян Э.А.

Теория риска изучает отклонения фактических финансовых результатов от ожидаемых методами предотвращения неблагоприятных последствий этих отклонений. Встраивание долгосрочных страховых договоров в модели риска превращает это направление в составную часть теории риска. Теория разорения (другой ее раздел) есть средство анализа страховых случаев.

Параметры математических моделей страхования таковы: величина начального капитала x, вероятность неразорения W (разорения $1-W$), величина средних доходов c и распределение ущербов. Обычно при заданном (и не всегда малом) c исследуют поведение $1-W(x)$ при больших x. Здесь важно поведение хвоста ФР ущерба $F(x)$ при больших x. Оценка W важна при больших рисках. Риск называют большим, если $1-F(x)\sim C(2-\gamma)\gamma^{-1}x^{-\gamma}$, $x\to+\infty$ при $\gamma\in(1,2)$, $C\in R^{+}$ (см. [44], стр. 42). В диссертации рассмотрены риски страховой компании при более общем условии.

Оценка страховых премий, достаточных для “технического неразорения”, при котором у компании хватает средств для погашения исков, предполагает неразорение с вероятностью, близкой к единице.

Вычисление $1-W$ в модели индивидуального риска сводится к вычислению вероятности превышения уровня суммой всех выплат по искам страхового портфеля[2]. При конечности дисперсии страховых выплат здесь применяют разные варианты ЦПТ. Отказ от конечности дисперсии приводит к предельным законам с “хорошими свойствами”.

Очереди. В современных компютерах работа “клиент – сервер” осуществляется разными способами (FIFO, LIFO и т. д.). При обращении к тем же данным пользователи дожидаются их освобождения. Производительность обработки падает. Модели очередей возникают всюду, где клиенты, требования, вызовы выстраиваются в очередь для приобретения услуг (обслуживания). Очереди обслуживают приборы с учетом влияния сопутствующих случайных факторов.

Первые работы по очередям сделаны Эрлангом, изучившим распределение задержки вызовов в телефонных переговорах. Прогресс в теории достигнут, благодаря работам Ф. Полячека, А. Я. Хинчина, Б. В. Гнеденко. Обширна литература по применениям теории очередей в технике (сети связи, ЭВМ), в промышленности (автоматы, конвейеры, склады), на транспорте, в торговле (рынки сбыта, банки, билетные кассы), в повседневной жизни (лифты, рестораны, парикмахерские).

Механизм образования очереди прост. Заявки поступают в очередь, обслуживаются приборами, уходят из системы. Время, проведенное заявкой в системе, состоит из времен ожидания и обслуживания. Работа прибора складывается из чередующихся периодов занятости и свободного состояния.

Модели очередей – ветвь теории вероятностей. Их используют для экономного проектирования систем массового удовлетворения потоков случайного характера. Каждодневно создаются ситуации массового спроса какого – либо специального вида. Обслуживающая организация с ограниченными возможностями не может немедленно удовлетворить все поступающие заявки. Возникает задача: установить зависимость между числом приборов и качеством обслуживания. Качество обслуживания измеряют различными показателями: доля вызовов, получающих отказ; среднее время ожидания вызовов разных типов и т.д.. Оно тем выше, чем больше число приборов. Чрезмерный их рост сопряжен с

[2]Под “страховым портфелем” понимаем совокупность однородных и однотипных страховых договоров.

излишними расходами. Поэтому сначала устанавливают уровень качества обслуживания, затем находят оптимальное число приборов, при котором уровень может быть достигнут.

Исследование процессов риска методами теории очередей изложено в [36], [25], [26], [40], [15].

Постановки задач. При оценке рисков страховой компании характеристиками служат загрузка ρ_1 и W. Зная W, можно предпринимать меры (увеличение премии, перестрахование и т. д.), уменьшающие $1-W$ настолько, чтобы разорение стало практически невозможным.

В диссертации исследуется предельное поведение W в докритической и надкритической ситуациях. Рассмотрены три вида страховых моделей, применяемых в страховой компании.

1. **Портфель 1** с произвольными договорами.
2. **Портфель 2** с чисто страховыми договорами.
3. **Портфель 3** с договорами, связанными с рентой.

Во всех портфелях за $(0,\infty)$ страховые случаи возникают по закону Пуассона с интенсивностью $\lambda>0$. Иначе, их число за $(0,t]$, выражаемое точечным процессом $N=\{N(t):t\ge 0, N(0)=0\}$, – однородный пуассоновский процесс интенсивности λ: $\mathrm{P}\{N(t)=k\}=\dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$, $k=0,1,2,\ldots$. Тогда разности $u_i=t_i-t_{i-1}$, $i=1,2,\ldots$; $t_0=0$ – НОР СВ с ФР $P\{u_i\le x\}=1-e^{-\lambda x}$, $x\ge 0$. При наступлении страховых случаев компания "выплачивает" страховые суммы $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ с конечным средним $a\in R^1$ и с ФР F. Они не зависят от моментов наступления страховых случаев. $S(t)=\sum\limits_{0\le t_i\le t}X_i$ – общая страховая сумма за $(0,t]$, а $\{S(t):0\le t<+\infty\}$ – СП со стационарными независимыми приращениями и с ФР $\mathrm{P}\{S(t)\le x\}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}F^{n*}(x)$, $x\in R^1$. Здесь $F^{n*}(x)$ есть n - кратная свертка F. При этом, $F^{0*}(x)=1$ при $x\ge 0$ и $F^{0*}(x)=0$ при $x<0$. Иначе, СП $\{S(t):0\le t<+\infty\}$ – обобщенный пуассоновский процесс.

Пусть в момент $t=0$ компания располагает начальным капиталом x.

Определение 1. Среднюю сумму выплат $\rho_1=\lambda a$ в единицу времени (страховая премия [25]) назовем загрузкой компании ($\rho_1>0$ или $\rho_1<0$) [20].

Когда ρ_1 фиксировано, то, обычно, при оценке риска используют ЦПТ. Со временем загрузка, следовательно, и риск могут достигнуть критических значений. Критическое значение c загрузки ρ_1 есть скорость увеличения ($c>0$) или уменьшения ($c<0$) резервов компании. Ее называют валовой страховой премией в единицу времени (см. [25]).

Резерв компании в момент t есть $x+ct-S(t)$ и в некоторый момент он может стать отрицательным. Тогда компания попадает в ситуацию "разорения" ("краха").

Определение 2. Событие $\{S(t)>x+ct\}$ называют разорением (см. [40], стр. 229).

Обозначим $T_x=\inf\{t:S(t)>x+ct, 0\le t<\infty\}$ и $T_x=\infty$, если $S(t)>x+ct$ для всех $t\ge 0$. СВ T_x есть момент, когда впервые резервный фонд компании отрицателен в $(0,\infty)$. Тогда (см. [36]) $\{T_x, 0 \le x < \infty\}$ – СП с неотрицательными стационарными независимыми приращениями.

Задача заключается в анализе поведения процессов риска (неразорения) (см. [18]) $r(t) = \sup\limits_{0 \le u \le t} \zeta(u)$ и $r = \sup\limits_{0 \le u < \infty} \zeta(u)$ с ФР $W(t,x) = P\{r(t) \le x\}$ и $W(x) = P\{r \le x\}$, где $\zeta(t) = S(t) - ct$ в Портфеле 1 и $\zeta(u) = (-1)^k (u - S(u))$ в Портфеле k, $k = 2,3$. Задача сводится к определению ФР $W(t,x)$ и $W(x)$, так как (см. [36]) вероятность того, что разорение призойдет за $(0,t]$, равна $P\{T_x \le t\} = 1 - W(x,t)$, а вероятность того, что разорение когда – нибудь произойдет, равна $P\{T_x < +\infty\} = 1 - W(x)$.

Поведение $r(t)$ и r (см. [20 – 22]) исследуем при критической загрузке. Именно, $\rho = |\rho_1 - c| \to 0$ (под $\rho \to 0$ понимаем либо $\rho_1 \downarrow c$, либо $\rho_1 \uparrow c$). Без ограничивая общности $c\rho_1 > 0$ и в Портфелях $k = 2;3$ полагаем $c = (-1)^k$ (выбором денежной единицы).

Для ФР $F(x) = P\{X_i \le x\}$ “страховых выплат” предполагаем, что ХФ $\hat\psi(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} dF(x)$ имеет следующее представление:

$$\hat\psi(s) - 1 - ais \sim -A \begin{cases} C_\gamma |s|^\gamma L(1/|s|), & 1 < \gamma < 2, \\ s^2, & \gamma = 2 \end{cases}, \ s \to 0,\ A > 0\,^3, \tag{1}$$

где $a = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$ конечно, $C_\gamma = \exp\left\{\pm \dfrac{\pi i(\gamma - 2)}{2}\right\}$, $\pm = sign(s)$, а функция $L(x) > 0$ является ММФ на бесконечности[4]. Известно, что (см. [32], стр. 9) если L – ММФ, то $x^\delta L(x) \to \infty$ и $x^{-\delta} L(x) \to 0$, $x \to \infty$ при любом $\delta > 0$. Поэтому

$$s^{\gamma-1} L(1/s) \xrightarrow[s \downarrow 0]{} 0,\ 1 < \gamma < 2, \tag{2}$$

что придает смысл (1). Более того, (1) выполнено равномерно по $a = M(X_i)$.

В Портфелях 2 и 3 ФР F сосредоточена на R^+ и вместо (1) для ПЛС $\psi(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dF(x)$, $\operatorname{Re}(s) \ge 0$ ФР F рассматриваем следующее асимптотические представление: ($a = M(X_i) = \int\limits_0^\infty x dF(x) < \infty$)

$$\psi(s) - 1 + as \sim As^\gamma \begin{cases} L(1/s), & 1 < \gamma < 2, \\ 1, & \gamma = 2 \end{cases}, \ s \downarrow 0,\ A > 0\,^5. \tag{3}$$

Условие (1) (см. [40], гл.17, зад. 13 - 15, стр. 668) при $1 < \gamma < 2$ эквивалентно условию

$$1 - F(x) \sim \frac{A(\gamma - 1)}{\Gamma(2 - \gamma)} x^{-\gamma} L(x),\ x \to \infty, \tag{4}$$

---

[3] При $\gamma = 2$ имеем разложение Тейлора $\hat\psi(s) - 1 - ais - As^2 = o(s^2)$ с $A = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) < +\infty$.

[4] Функция $L(x) > 0$ называется ММФ на бесконечности, если $L(tx) \sim L(t)$, $t \to \infty$, $\forall x > 0$.

[5] Здесь при $\gamma = 2$ разложение Тейлора есть $\psi(s) - 1 + as - As^2 = o(s^2)$ и $A = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty x^2 dF(x) < \infty$.

что обобщает условие большого риска. Из (4) вытекает конечность моментов порядка $\alpha<\gamma$ для ФР F сосредоточенных на $[0,+\infty)$.

О результатах. Приводится метод обращения ПЛС некоторых вспомогательных законов и исследуются их свойства. Дано обращение основных предельных рисков. Во всех портфелях отдельно рассмотрены случаи $\gamma=2$ ($A=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2dF(x)<\infty$)[6].

Пусть $\Delta(s)\geq 0$, $\Delta(0)=0$ и $\nabla(s)\geq 1$, $\nabla(0)=1$ – единственные решения уравнений $x^\gamma+x=s$ и $x^\gamma-x=s$, $1<\gamma\leq 2$, $s\geq 0$, соответственно. Везде, где функции $\Delta(s)$ и $\nabla(s)$ используем совместно, их обозначаем общим символом $\Diamond=\Diamond(s)$. Функция $\Diamond(s)$ возникает при описании предельных законов в Портфелях 1 – 3 при критической загрузке [18]. Существование и единственность $\Diamond(s)$ следует из теоремы о неявной функции (см. [37]). В диссертации дано обращение возникающих в предельных теоремах вспомогательных законов с ПЛС $e^{-t\Diamond(s)}$, $\left(\Diamond(s)\right)^{-1}$ и с помощью плотностей получены критические риски. Для них найдены интегральные представления и следующие представления в виде сходящихся рядов:

$$f_\Diamond(x,t)=\begin{cases}\dfrac{t}{\gamma\pi x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(t\pm x)^n}{n!}\Gamma\left(\dfrac{n+1}{\gamma}\right)x^{-\frac{n+1}{\gamma}}\sin\dfrac{n+1}{\gamma}\pi, & 1<\gamma\leq 2\\ \dfrac{t}{2x\sqrt{\pi x}}exp\left\{-(t\pm x)^2/4x\right\}, & \gamma=2\end{cases}, \tag{5}$$

$$f_o^\Diamond(x)=\left(\Gamma\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\right)^{-1}x^{-\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}+\frac{1}{\pi\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-(\pm 1)\right)^{n+1}}{(n+1)!}x^{\frac{(\gamma-1)n}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{n}{\gamma}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{\gamma}\right),\ x>0.$$

В символе $\pm$ верхний знак выбирается при функции ∇, а нижний – при Δ. С помощью полученных представлений эти плотности связываются с устойчивыми плотностями, с плотностями, имеющими ПЛС функции типа Миттаг – Леффлера. Исследуются асимптотические и другие свойства этих плотностей.

Информация. Предшествующие асимптотические результаты относятся лишь к Портфелю 2. Уже в модели $GI|GI|1|\infty$ с дисциплиной FIFO $r(t)$ и r интерпретируются как виртуальное время ожидания в момент t и его стационарный аналог (промежутки между соседними страховыми случаями образуют последовательность НОР СВ с общей ФР). При $\gamma=2$ и $\rho_1\uparrow 1$ с некоторыми дополнительными условиями сходимость (r/Mr) к экспоненциальному закону установлена многими авторами (А. А. Боровков, Дж. Ф. Кингман, Ю. В. Прохоров, Y. Yumm). Простое доказательство принадлежит Н. А. Бломквисту [49]. Эта ситуация интерпретируется в рамках схемы суммирования НОР СВ до случайного индекса [8]. В условиях критической загрузки при согласованном стремлении $\rho_1\uparrow 1$ и $t\to+\infty$ для $r(t)$ в ПЛС описаны возникающие предельные законы.

Условие (1) с ММФ L рассматривается впервые.

[6] При конечности моментов высоких порядков для оценки риска можно поставить экстремальную задачу с моментными ограничениями (см. [17], стр. 120).

Распределение материала таково. Глава 1 посвящена изучению свойств и представлений в виде сходящихся рядов для плотностей с интегральными преобразованиями с участием функции $\Diamond(s)$, которая встречается не только у нас, но и в ряде работ. Поэтому Глава 1 представляет самостоятельный интерес.

В Главе 2 изучены критические риски в Портфеле 1. Главы 3 и 4 выделены для аналогичного рассмотрения Портфелей 2 и 3, соответственно.

Во введении принята своя нумерация.

В Главах 1- 4 теоремы, следствия, леммы и замечания имеют двойную нумерацию – номер главы и номер утверждения внутри главы. Для формул принята тройная нумерация с добавлением на третьем месте номера формулы внутри параграфа. Тогда на втором месте указывается номер параграфа.

Для рисунков принята сквозная нумерация.

По теме диссертации опубликованы работы [9, 18 – 22].

Результаты работы неоднократно докладывались на семинарах кафедры теории вероятностей и математической статистики ЕГУ, Международного центра по передаче информации (Тампере, Финляндия).

ГЛАВА 1. ОБРАЩЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАКОНОВ.

§ 1.1. Свойства функции $\nabla(s)$.

В схеме суммирования НОР СВ (см. [23 – 24]) отказ от конечности дисперсии слагаемых привел к теоремам сходимости к УЗ. УЗ нашли применение в приложениях и утвердились в качестве спец. функций. Необходимым условием сходимости к ним в данной схеме служит правильное изменение хвостов ФР слагаемых (см. [40], [14]).

В моделях очередей с ожиданием особенностью СП характеристик является наличие “барьера” в нуле. Привнесение сюда условия правильного изменения для хвостов ФР времен обслуживания выявляет при критической загрузке предельные законы, отличные от УЗ. Они играют ту же роль в теории очередей, что и УЗ в теории суммирования.

В предельных теоремах, доказываемых в настоящей диссертации, предельные законы выражаются с помощью законов с ПЛС

$$\left(\Diamond(s)\right)^{-1} \text{ и } \exp\left\{-\tau\Diamond(s)\right\},\ 0<\tau<+\infty. \tag{1.1.1}$$

Возникает задача обращения ПЛС $(1.1.1)$ для нахождения предельных законов в явном виде.

УЗ представимы в явном виде лишь при нескольких значениях параметров. Они допускают представления в виде сходящихся рядов (см. [40], стр. 651). Естественно ожидать, что ситуация в нашем случае аналогична. В работе [37] для плотности $f_\Delta(x,\tau)$ ФР $F_\Delta(x,\tau)$ с ПЛС

$$e^{-\tau\Delta(s)}=\int_0^\infty e^{-sx}dF_\Delta(x,\tau)\,(=\int_0^\infty e^{-sx}f_\Delta(x,\tau)dx),\ s\ge 0 \tag{1.1.2}$$

получено представление в виде сходящегося ряда

$$f_\Delta(x,\tau)=\frac{\tau}{\pi\gamma x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-\tau)^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right)x^{-\frac{n+1}{\gamma}}\sin\frac{n+1}{\gamma}\pi. \tag{1.1.3}$$

Мы покажем, что эти законы абсолютно непрерывны и обращением ПЛС выведем интегральные представления. Далее, получим представления в виде сходящихся рядов для плотностей $f_\nabla(x,\tau)$, $f_o^\Diamond(x)$ ФР $F_\nabla(x,\tau)$, $F_o^\Diamond(x)$ соответственно с ПЛС $e^{-\tau\nabla(s)}$ и $(\Diamond(s))^{-1}$, $s \ge 0$.

В работе [37] для регулярной функции $\Delta(s)$ в комплексной области $S=\{s:\mathrm{Re}(s)\ge 0\}$ показано, что $z=\Delta(s)\in\{z:\mathrm{Re}(z)\ge 0\}$ при всех $s\in S$, а непрерывная кривая $z=\Delta(-it)$ при $t\in[0,\infty)$ целиком лежит в области, ограниченной отрицательной частью мнимой оси и лучом $\{z: Arg(z)=-\pi/2\gamma\}$ комплексной z – плоскости. Установим аналогичные свойства функции $\nabla(s)$.

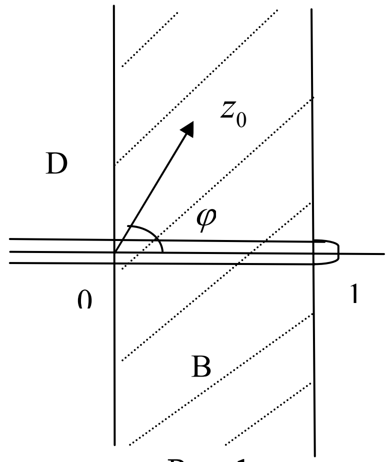

Рис. 1.

Лемма 1.1[7]**.** (a) Функция $z=\nabla(s)$ регулярна в области S при $s\in S$, $z=\nabla(s)\in\{z:\mathrm{Re}(z)\ge 1\}$.

(b) Непрерывная кривая $z=\nabla(-it)$, $t\in[0,+\infty)$ целиком лежит в области, ограниченной прямыми $\mathrm{Im}(z)=0$, $\mathrm{Re}(z)=1$ и лучом $\{z: Arg(z)=-\pi/2\gamma\}$ комплексной z – плоскости.

Доказательство. (a) Пусть C – комплексная плоскость. Рассмотрим регулярную часть принимающей положительные значения при $z>1$ функции $\varphi(z)=z^\gamma - z$ в области $D=C\setminus(-\infty,1]$. Тогда левая часть уравнения $z^\gamma - z = s$ есть регулярная функция в области D. Поскольку $\varphi_z'(z)=\gamma z^{\gamma-1}-1\ne 0$ в области $\{z:\mathrm{Re}(z)>1\}$, то, по теореме об обратной функции (см. [34], стр. 101), существует единственная функция $\nabla(s)$, обратная к функции $\varphi(z)$ и регулярная в области $S=\{s:\mathrm{Re}(s)\ge 0\}$. При $s\in S$ покажем, что $z=\nabla(s)\in\{z:\mathrm{Re}(z)\ge 1\}$. Сначала выясним, что при $s\in S$ функция $z=\nabla(s)$ не может принимать значения из полосы $B=\{z\in D: 0\le \mathrm{Re}(z)<1\}$, откуда и из непрерывности $\nabla(s)$ будет следовать, что $\nabla(s)$ не принимает значения из области $D\setminus\{z:\mathrm{Re}(z)\ge 1\}$ (см. рис. 1). Предположим противное. Пусть существует точка $s_0\in\{s:\mathrm{Re}(s)\ge 0\}$, такая что $z_0=\nabla(s_0)\in B$. Тогда, обозначив $z_0=re^{i\varphi}$, при $\varphi\in[-\pi/2,0)\cup(0,\pi/2]$ (так как $[0,1]\notin B$) получаем:

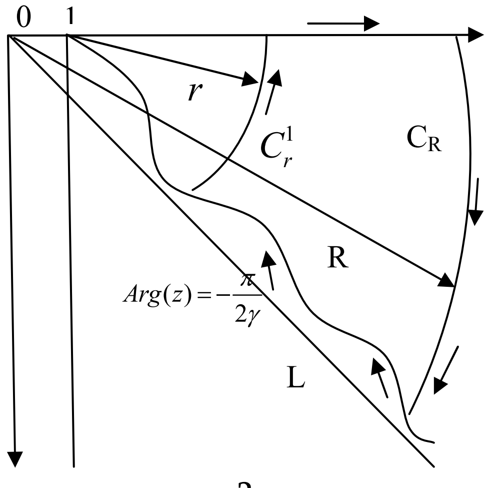

рис. 2.

$$0\le \mathrm{Re}(s_0)=\mathrm{Re}(z_0^\gamma - z_0)=\mathrm{Re}(z_0^\gamma)-\mathrm{Re}(z_0)=r^\gamma\cos\gamma\varphi - r\cos\varphi. \qquad (1.1.4)$$

Поскольку $z_0\in B$, то $\mathrm{Re}(z_0)=r\cos\varphi<1$. Без ограничения общности предположим, что $\varphi\in(0,\pi/2]$. Принято во внимание, что $\cos x$ – четная функция и $1<\gamma\le 2$. Следовательно, $\cos\varphi\ge 0$ и $0<\gamma\varphi\le\pi$.

[7]Лемма 1.1 может быть получена и с помощью теоремы Руше.

Отдельно рассмотрим случаи 1) $\gamma\varphi \in [\pi/2, \pi]$ и 2) $\gamma\varphi \in (0, \pi/2)$.

1) Пусть $\gamma\varphi \in [\pi/2, \pi]$. В этом случае $\cos\gamma\varphi \le 0$. Кроме того, так как $\cos\varphi$ и $\cos\gamma\varphi$ одновременно не равны нулю, то из $(1.1.4)$ имеем $0 \le \mathrm{Re}(s_0) = r^\gamma \cos\gamma\varphi - r\cos\varphi < 0$. Получили противоречие.

2) Пусть $\gamma\varphi \in (0, \pi/2)$. В этом случае обозначим $q(\varphi) = \cos^\gamma\varphi - \cos\gamma\varphi$ и покажем, что $q(\varphi) \ge 0$ при $\varphi \in [0, \pi/2)$. Имеем $q'(\varphi) = \gamma\sin\gamma\varphi - \gamma(\cos\varphi)^{\gamma-1}\sin\varphi \ge 0$, т. е. $q(\varphi)$ по φ не убывает. Так как $q(0) = 0$, то $q(\varphi) \ge 0$ при $\varphi \in [0, \pi/2)$. Очевидно, $q(\varphi) > 0$ при $\varphi \in (0, \pi/2)$. Следовательно, с учетом $\mathrm{Re}(z_0) < 1$ и $1 < \gamma \le 2$ заключаем: $0 \le \mathrm{Re}(s_0) = r^\gamma\cos\gamma\varphi - r\cos\varphi < (r\cos\varphi)^\gamma - r\cos\varphi = (\mathrm{Re}(z_0))^\gamma - \mathrm{Re}(z_0) < 0$.

Пришли к противоречию, поскольку $z = \nabla(s) \in \{z : \mathrm{Re}(z) \ge 1\}$.

(b) Положим $z = re^{i\varphi}$. Из - за $z = \nabla(s) \in \{z : \mathrm{Re}(z) \ge 1\}$, имеем: $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ и $r \ge 1$. Тогда из равенства $r^\gamma e^{i\varphi\gamma} - re^{i\varphi} = -it$ приходим к системе уравнений

$$r^{\gamma-1}\cos\gamma\varphi - \cos\varphi = 0, \quad r^\gamma\sin\gamma\varphi - r\sin\varphi = -t. \tag{1.1.5}$$

Из первого уравнения $(1.1.5)$ имеем $-\dfrac{\pi}{2\gamma} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2\gamma}$. А так как $r > 1$ и из $\varphi < \gamma\varphi$ следует, что $\sin\varphi < \sin\gamma\varphi \Rightarrow r\sin\varphi < r\sin\gamma\varphi < r^\gamma\sin\gamma\varphi$, то из второго уравнения $(1.1.5)$ при $0 \le \varphi \le \pi/2\gamma$ выводим, что левая часть второго уравнения положительна, а правая отрицательна. Таким образом, $Arg\nabla(-it) \in [-\pi/2\gamma, 0]$ при $t \in [0, \infty)$, что и требовалось доказать.

§ 1.2. Интегральное представление $f_\nabla(x, \tau)$.

Лемма 1.2. $F_\nabla(x,\tau)$ абсолютно непрерывна, а ее плотность $f_\nabla(x,\tau)$ имеет интегральное представление:

$$f_\nabla(x, \tau) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty}^{0} e^{-(x+\tau)z + xz^\gamma}\left(\gamma z^{\gamma-1} - 1\right)dz\right\}. \tag{1.2.1}$$

Доказательство. Сначала докажем существование функции $f_\nabla(x,\tau) \ge 0$ такой, что $F_\nabla(x,\tau) = \int_0^x f_\nabla(v,\tau)dv$. Для этого установим, что ХФ $e^{-\tau\nabla(-it)}$ ФР $F_\nabla(x,\tau)$ абсолютно интегрируема. Учитывая $\nabla(-it) = \overline{\nabla(it)}$ и произведя замену $z = \nabla(-it)$, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-\tau\nabla(-it)}\right|dt \le 2\left|\int_0^{+\infty}\left|e^{-\tau\nabla(-it)}\right|dt\right| = 2\left|i\int_L e^{-\tau z}\left(\tau z^{\tau-1} - 1\right)dz\right|.$$

Здесь $L = \{z : z = \nabla(-it), t \in [0, +\infty)\}$ – непрерывная кривая в комплексной z – плоскости. Рассмотрим в области D замкнутый контур $\Gamma_1 = C_r^1 \cup [1+r, R] \cup C_R \cup L_R^r$, состоящий из отрезка $[1+r, R]$, дуг окружностей $C_r^1 = \{z = 1 + re^{i\varphi}, \varphi_r \le \varphi \le 0\}$, $C_R = \{z = \mathrm{Re}^{i\varphi}, \varphi_R \le \varphi \le 0\}$ и части L_R^r кривой L, ограниченной этими дугами, где $\varphi_r = Arg\{L \cap C_r^1\}$ и $\varphi_R = Arg\{L \cap C_R\}$ (см. рис. 2). Так как функция $e^{-\tau z}\left(\gamma z^{\gamma-1} - 1\right)$ аналитична в области D, то, по теореме Коши,

$\int\limits_{\Gamma_1} e^{-\tau z}\left(\gamma z^{\gamma-1}-1\right)dz=0$. По лемме 3 из [34] стр. 239, $\int\limits_{C_r^1} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ и $\int\limits_{C_R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$. Устремляя R к бесконечности, а r к нулю, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-\tau\nabla(-it)}\right|dt \le 2\left|i\int\limits_{1}^{\infty} e^{-\tau z}\left(\gamma z^{\gamma-1}-1\right)dz\right| \le 2\gamma\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\tau z} z^{\gamma-1}dz+2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\tau z}dz=2\gamma\tau^{2-\gamma}\Gamma(\gamma)+\frac{2}{\tau}<\infty .$$

Так как ХФ $e^{-\tau\nabla(-it)}$ ФР $F_\nabla(x,\tau)$ абсолютно интегрируема (см. напр. [28], стр. 155), то $F_\nabla(x,\tau)$ абсолютно непрерывна. По формуле обращения интегралов Фурье (см. [40], стр. 570), $f_\nabla(x,\tau)=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx-\tau\nabla(-it)}dt=\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-itx-\tau\nabla(-it)}dt$.

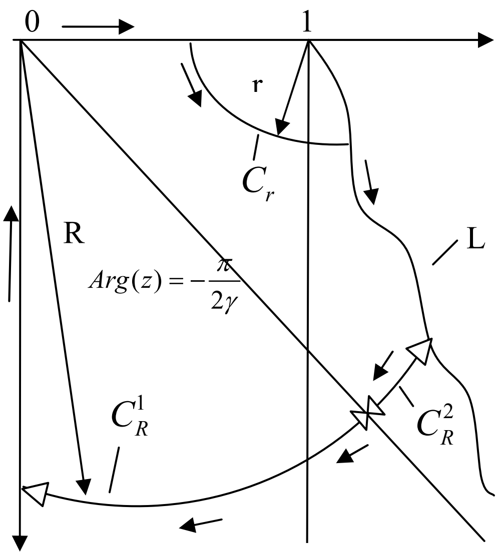

рис. 3

Учтено, что $\nabla(-it)=\overline{\nabla(it)}$. Заменой $z=\nabla(-it)$ получаем $f_\nabla(x,\tau)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left\{i\int\limits_{L} e^{-\tau z+\left(z^\gamma-z\right)x}\left(\gamma z^{\gamma-1}-1\right)dz\right\}$,

где интегрируем по непрерывной кривой L. Обозначим через L_R^r часть кривой L, ограниченный дугами окружностей

$$C_R^1=\left\{z=\operatorname{R}e^{i\varphi},-\pi/2\le\varphi\le-\pi/2\gamma\right\},$$

$$C_R^2=\left\{z=\operatorname{R}e^{i\varphi},-\pi/2\gamma\le\varphi\le\varphi_R\right\},$$

$$C_r=\left\{z=1+re^{i\varphi},-\pi\le\varphi\le\varphi_r\right\},$$

где $\varphi_R=Arg\left\{L\cap C_R^2\right\}$, $\varphi_r=Arg\left\{L\cap C_r\right\}$ (см. рис. 3). Рассмотрим в области D замкнутый контур $\Gamma=L_R^r\cup C_R^2\cup C_R^1\cup[-iR,0]\cup[0,1-r]\cup C_r$. При $\operatorname{Re}(z)\ge 1$ функция $e^{-\tau z+\left(z^\gamma-z\right)x}\left(\gamma z^{\gamma-1}-1\right)$ аналитична. По теореме Коши, $\int\limits_{\Gamma} e^{-\tau z+\left(z^\gamma-z\right)x}\left(\gamma z^{\gamma-1}-1\right)dz=0$. Покажем, что при $r\to 0$ и $R\to\infty$ интегралы по контурам C_r, C_R^1 и C_R^2 стремятся к нулю. Пусть $|C_r|$ – длина дуг C_r. Так как $|C_r|\xrightarrow[r\to 0]{} 0$, то $\left|\int\limits_{C_r} e^{-(\tau+x)z+xz^\gamma}\left(\gamma z^{\gamma-1}-1\right)dz\right|\le e^{-(\tau+x)(1+r)+x(1+r)^\gamma}\left(\gamma(1+r)^{\gamma-1}+1\right)|C_r|\xrightarrow[r\to 0]{} 0$.

Чтобы показать $\int\limits_{C_R^1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, произведем замену $z=\operatorname{R}e^{i\varphi}$:

$$\left|\int\limits_{C_R^1} e^{-(\tau+x)z+xz^\gamma}\left(\gamma z^{\gamma-1}-1\right)dz\right|\le\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/2\gamma} e^{-(\tau+x)R\cos\varphi+xR^\gamma\cos\gamma\varphi}\left(\gamma R^{\gamma-1}+1\right)Rd\varphi\xrightarrow[R\to\infty]{} 0 .$$

Учтено, что $\cos\varphi\ge 0$ и $\cos\gamma\varphi\le 0$ (из - за неравенств $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le-\frac{\pi}{2\gamma}$). С целью показать, что

$$\int\limits_{C_R^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0, \qquad (1.2.2)$$

проведем обсуждение. Пусть $\varphi_R=Arg\left\{L\cap C_R^2\right\}$. Так как $z=\operatorname{R}e^{i\varphi_R}\in L$, то удовлетворено условие $z^\gamma-z=-it$, откуда, приравнивая действительные части, получаем

$$R^{\gamma-1}\cos\gamma\varphi_R-\cos\varphi_R=0 . \qquad (1.2.3)$$

Из $(1.2.3)$ выводим $\cos\gamma\varphi_R = R^{1-\gamma}\cos\varphi_R \le R^{1-\gamma} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$. Следовательно, $\gamma\varphi_R \xrightarrow[R\to\infty]{} -\frac{\pi}{2}$, или $\varphi_R \xrightarrow[R\to\infty]{} -\frac{\pi}{2\gamma}$. Таким образом, кривая L при $R\to\infty$ бесконечно сближается с лучом $Arg(z) = -\pi/2\gamma$. Пусть $\varphi\in[-\pi/2\gamma,\varphi_R]$. Тогда, из соотношения $(1.2.3)$ находим

$$\cos\varphi_R - \cos\varphi = 2\sin\frac{\varphi-\varphi_R}{2}\sin\frac{\varphi+\varphi_R}{2} \le 2\sin\frac{(\pi/2\gamma)-\varphi_R}{2} \le$$

$$\le 2\sin\gamma\left(\frac{\pi}{2\gamma}-\varphi_R\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\varphi_R\right) = 2\cos\gamma\varphi_R = \frac{2\cos\varphi_R}{R^{\gamma-1}} \le \frac{2}{R^{\gamma-1}}.$$

Вернемся к равенству $(1.2.2)$, осуществив замену $z = \mathrm{Re}^{i\varphi}$. Произведем оценки

$$\left|\int_{C_R^2} e^{-(\tau+x)z+xz^\gamma}\left(\gamma z^{\gamma-1}-1\right)dz\right| \le \int_{-\pi/2\gamma}^{\varphi_R} e^{-\tau R\cos\varphi - xR\cos\varphi + xR^\gamma\cos\gamma\varphi}\left(\gamma R^{\gamma-1}+1\right)Rd\varphi \le$$

$$\le \int_{-\pi/2\gamma}^{\varphi_R} e^{-\tau R\cos\varphi + xR(\cos\varphi_R-\cos\varphi)}\left(\gamma R^{\gamma-1}+1\right)Rd\varphi \le \int_{-\pi/2\gamma}^{\varphi_R} e^{-\tau R\cos\varphi + xR\frac{2}{R^{\gamma-1}}} R\left(\gamma R^{\gamma-1}+1\right)d\varphi \le$$

$$\le \mathrm{R}\left(\gamma R^{\gamma-1}+1\right)exp\left\{-\tau R\cos(-\pi/2\gamma)+2xR^{2-\gamma}\right\}(\varphi_R+\pi/2\gamma) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Учтено, что $2-\gamma<1$ и $\cos(-\pi/2\gamma)>0$. Теперь, устремляя R к бесконечности, а r – к нулю, получаем $f_\nabla(x,\tau) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left\{-i\int_{-i\infty}^{0} - i\int_{0}^{1}\right\}$. Так как $\int_0^1$ – действительная функция, то $f_\nabla(x,\tau)$ принимает вид $(1.2.1)$. Лемма 1.2 доказана.

§ 1.3. Представление $f_\nabla(x,\tau)$ в виде сходящегося ряда.

Теорема 1.1. $f_\nabla(x,\tau)$ при $0<\tau<\infty$ имеет представление

$$f_\nabla(x,\tau) = \frac{\tau}{\gamma\pi x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+\tau)^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right)x^{-\frac{n+1}{\gamma}}\sin\frac{n+1}{\gamma}\pi,\ x>0. \qquad (1.3.1)$$

Доказательство. В интегральном представлении $(1.2.1)$ производим замену $t=-xz^\gamma$ и с учетом равенств $z=\left(tx^{-1}\right)^{1/\gamma}e^{\frac{i\pi}{\gamma}}$ и $dz = \frac{1}{\gamma x}\left(\frac{t}{x}\right)^{1/\gamma-1}e^{\frac{i\pi}{\gamma}}dt$ для $f_\nabla(x,\tau)$ находим представление

$$f_\nabla(x,\tau) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left\{-i\int_G e^{-(x+\tau)\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{\gamma}}e^{\frac{i\pi}{\gamma}}-t}\left[\gamma\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}e^{\frac{i\pi(\gamma-1)}{\gamma}}-1\right]\frac{1}{\gamma x}\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}e^{\frac{i\pi}{\gamma}}dt\right\}. \qquad (1.3.2)$$

Здесь контуром интегрирования служит кривая $G=\left\{t: t=-xz^\gamma, z\in(-i\infty,0)\right\}$. Кривая G регулярна и, если взять $z = le^{-\frac{\pi i}{2}}$, то $\mathrm{I}m(t) = l^\gamma x\sin(\gamma\pi/2)>0$. Таким образом, G целиком лежит в верхней полуплоскости области $D_1 = C\setminus(-\infty,0]$.

Разлагая в ряд Тейлора функцию $\exp\left\{(x+\tau)\left[t\left(xe^{-\pi i}\right)^{-1}\right]^{1/\gamma}\right\}$ в $(1.3.2)$ и используя аналитичность функции $\Gamma(z)$ в области D_1 (интеграл по контуру G заменяем интегралом по полуоси $(0,\infty)$), произведем выкладки

$$f_\nabla(x,\tau)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left\{-i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+\tau)^n}{n!}\left[\left(xe^{-i\pi}\right)^{-\left(\frac{n}{\gamma}+1\right)}\Gamma\left(\frac{n}{\gamma}+1\right)\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left\{i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+\tau)^n}{n!}\left[\frac{1}{\gamma}\left(xe^{-i\pi}\right)^{-\frac{n+1}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\gamma\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+\tau)^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right)x^{-\frac{n+1}{\gamma}}\sin\frac{n+1}{\gamma}\pi\left(\frac{x+\tau}{x}-1\right)=$$

$$=\frac{\tau}{\gamma\pi x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+\tau)^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right)x^{-\frac{n+1}{\gamma}}\sin\frac{n+1}{\gamma}\pi\,.$$

Итак, $(1.3.1)$ доказано.

При $\gamma=2$ вид $f_\nabla(x,\tau)$ упрощается. Действительно, из $(1.3.1)$ выводим:

$$f_\nabla(x,\tau)=\frac{\tau}{2\pi x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+\tau)^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)x^{-\frac{n+1}{2}}\sin\frac{n+1}{2}\pi=$$

$$=\frac{\tau}{2\pi x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+\tau)^{2k}}{(2k)!}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)x^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)}\sin\left(\pi k+\frac{\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{\tau}{2\pi x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!}\Gamma(k+1)x^{-(k+1)}\sin(k+1)\pi\,. \tag{1.3.3}$$

Используя соотношения $\sin(\pi(k+1))=0$, $\sin(\pi k+\pi/2)=(-1)^k$, $\dfrac{\Gamma(k+1/2)}{(2k)!}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2k}k!}$, из $(1.3.3)$ получаем:

$$f_\nabla(x,\tau)=\frac{\tau}{2x\sqrt{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x+\tau}{2}\right)^{2k}\frac{(-1)^k x^{-k}}{k!}=\frac{\tau}{2x\sqrt{\pi x}}e^{-\frac{(x+\tau)^2}{4x}}\text{ [8]}. \tag{1.3.4}$$

§ 1.4. Обращение ПЛС $1/\lozenge(s)$.

1.4.1. Интегральное представление.

Лемма 1.3. ФР $F_o^\lozenge(x)$ абсолютно непрерывна, а ее плотность $f_o^\lozenge(x)$ допускает интегральное представление:

$$f_o^\lozenge(x)=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty}^{0}\left(\gamma z^{\gamma-1}\pm 1\right)z^{-1}e^{\left(z^\gamma\pm z\right)x}dz\right\}, \tag{1.4.1}$$

где в символе $\pm$ верхний знак выбирается при функции Δ, нижний – при ∇.

[8] Формулу $(1.3.4)$ можно также вывести пользуясь табличными интегралами. Именно, $\nabla(s)=\left(1+\sqrt{4s+1}\right)/2$ при $\gamma=2$. По формуле обращения 23.91 (см. [12]), $e^{-\tau\sqrt{s}}=\int_0^\infty e^{-sx}\frac{\tau}{2x\sqrt{\pi x}}e^{-\frac{\tau^2}{4x}}dx$. Следовательно, $e^{-\frac{\tau}{2}\sqrt{4s+1}}=\int_0^\infty e^{-(4s+1)x}e^{-\frac{\tau^2}{16x}}\frac{\tau}{4x\sqrt{\pi x}}dx=\int_0^\infty e^{-sx}e^{-\frac{x}{4}}e^{-\frac{\tau^2}{4x}}\frac{\tau}{2x\sqrt{\pi x}}dx=\int_0^\infty e^{-sx}\frac{\tau}{2x\sqrt{\pi x}}e^{\left(-\frac{\tau^2}{4x}-\frac{x}{4}\right)}dx$, откуда выводим $e^{-\frac{\tau}{2}\left(1+\sqrt{4s+1}\right)}=\int_0^\infty e^{-sx}\frac{\tau}{2x\sqrt{\pi x}}e^{\left(-\frac{\tau^2}{4x}-\frac{x}{4}-\frac{\tau}{2}\right)}dx=\int_0^\infty e^{-sx}\frac{\tau}{2x\sqrt{\pi x}}e^{-\frac{(\tau+x)^2}{4x}}dx$. Снова пришли к формуле $(1.3.4)$.

Доказательство. Абсолютная непрерывность ФР $F_o^{\Diamond}(x)$ (т. е. существование такой функции $f_o^{\Diamond}(x)\ge 0$, что $F_o^{\Diamond}(x)=\int_0^x f_0^{\Diamond}(v)dv$) вытекает (см. [19]) из абсолютной непрерывности $F_{\Diamond}(x,t)$. Действительно, из равенств $\int_0^{\infty} e^{-sx}dF_o^{\Diamond}(x)=\frac{1}{\Diamond(s)}=\int_0^{\infty} e^{-t\Diamond(s)}dt$ получим формулу $f_o^{\Diamond}(s)=\int_0^{\infty} f_{\Diamond}(x,t)\,dt$. Она в случае $\gamma=2$ принимает вид (см. [19])

$$f_o^{\Diamond}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}e^{-x/4}\pm\left(1-\Phi\left(-\left(\pm\sqrt{x/2}\right)\right)\right). \qquad (1.4.2)$$

По формуле обращения для интегралов Фурье (см. напр. [40], стр. 581), имеем $f_o^{\Diamond}(x)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx}}{\Diamond(-it)}dt=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\infty}\frac{e^{-itx}}{\Diamond(-it)}dt$. Здесь учтено, что $\Diamond(-it)=\overline{\Diamond(it)}$. Произведя замену $z=\Diamond(-it)$, находим

$$f_o^{\Diamond}(x)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left\{i\int_{L_{\Diamond}}\left(\gamma z^{\gamma-1}\pm 1\right)z^{-1}e^{\left(z^{\gamma}\pm z\right)x}dz\right\},$$

где интегрируем по непрерывной кривой $L_{\Diamond}=\left\{z:z=\Diamond(-it),t\in[0,+\infty)\right\}$ (см. рис. 4). Обозначим через L_R^r часть кривой $L_{\Diamond}$, оказавшуюся между дугами окружностей

$$C_r^{\nabla}=\left\{z=1+re^{i\varphi},-\pi\le\varphi\le\varphi_r\right\},$$

$$C_R^2=\left\{z=\mathrm{Re}^{i\varphi},-\pi/2\gamma\le\varphi\le\varphi_R\right\},$$

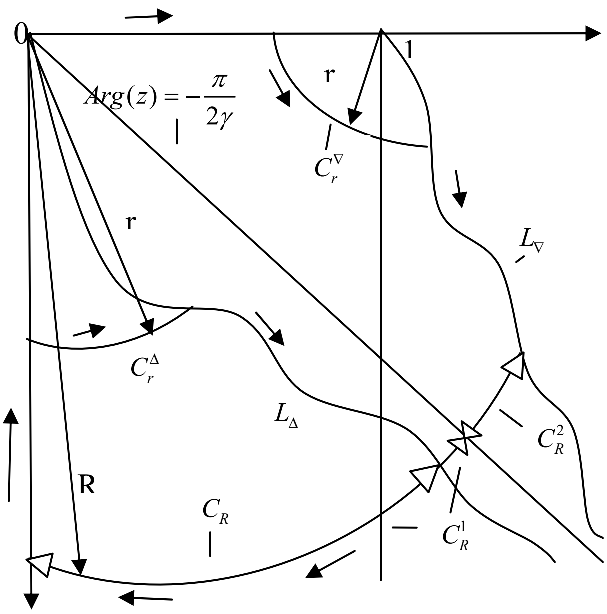

Рис. 4

с $\varphi_R=Arg\left\{L_{\nabla}\cap C_R^2\right\}$, $\varphi_r=Arg\left\{L_{\nabla}\cap C_r\right\}$ в случае функции ∇ и $C_R=\left\{z=\mathrm{Re}^{i\varphi},-\pi/2\le\varphi\le\varphi_R\right\}$, $C_r^{\Delta}=\left\{z=re^{i\varphi},-\pi/2\le\varphi\le\varphi_r\right\}$ с $\varphi_R=Arg\left\{L_{\Delta}\cap C_R\right\}$, $\varphi_r=Arg\left\{L_{\Delta}\cap C_r\right\}$ в случае функции Δ. Пусть $C_R^1=\left\{z=\mathrm{Re}^{i\varphi},-\pi/2\le\varphi\le-\pi/2\gamma\right\}$. Рассмотрим замкнутый контур $\Gamma_{\Diamond}$, который определяется следующим образом: $\Gamma_{\Delta}=L_R^r\cup C_R\cup[-iR,-ir]\cup C_r^{\Delta}$ и $\Gamma_{\nabla}=L_R^r\cup C_R^2\cup C_R^1\cup[-iR,0]\cup[0,1-r]\cup C_r^{\nabla}$. Так как функция $h_{\pm}(z)=\left(\gamma z^{\gamma-1}\pm 1\right)z^{-1}e^{\left(z^{\gamma}\pm z\right)x}$ аналитична внутри контура $\Gamma_{\Diamond}$, то, по теореме Коши, интеграл от нее по контуру $\Gamma_{\Diamond}$ равен нулю. Покажем, что при $r\to 0$ и $R\to\infty$ интегралы по контурам $C_r^{\Diamond}$, C_R^1, C_R^2 и C_R стремятся к нулю. Пусть C_{ρ}, $\rho=r,R$ – одна из дуг окружностей $C_r^{\Diamond}$, C_R^2, C_R и $\varphi_{\rho}=Arg\left\{L_{\Diamond}\cap C_{\rho}\right\}$. Так как $z=\rho e^{i\varphi_{\rho}}\in L_{\Diamond}$, то, приравнивая действительные части в соотношении $z^{\gamma}\pm z=-it$, получаем

$$\rho^{\gamma-1}\cos\gamma\varphi_{\rho}\pm\cos\varphi_{\rho}=0. \qquad (1.4.3)$$

Из (1.4.3) имеем $\varphi_{\Delta}=(\pi/2)+\varphi_r\xrightarrow[r\to 0]{}0$, $\varphi_{\nabla}=\pi+\varphi_r\xrightarrow[r\to 0]{}\pi/2$. Пусть $M_{\pm}(\rho)=\max_{z\in C_{\rho}}\left|h_{\pm}(z)\right|$. Тогда, так как $M_{-}(r)r\le e^{\left((1+r)^{\gamma}+1+r\right)x}\left(\gamma(1+r)^{\gamma-1}+1\right)r$ и $M_{+}(r)r\le e^{\left(r^{\gamma}+r\right)x}\left(\gamma r^{\gamma-1}+1\right)$, то

$\left|\int\limits_{C_r^\Diamond} h_\pm(z)\,dz\right| \le M_\pm(r)2r\varphi_\Diamond \xrightarrow[r\to 0]{} 0$. Произведя замену $z=\mathrm{Re}^{i\varphi}$ и учитывая, что $\cos\varphi\ge 0$, $\cos\gamma\varphi\le 0$ при $\varphi\in[-\pi/2,-\pi/2\gamma]$, для интегралов по дугам C_R, C_R^1 получим оценку

$$\left|\int h_\pm(z)\,dz\right| \le \int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/2\gamma} e^{\left(R^\gamma\cos\gamma\varphi \pm R\cos\varphi\right)x}\left(\gamma R^{\gamma-1}+1\right)d\varphi \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Осталось показать, что $\int\limits_{C_R^2} h_-(z) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$. Из $(1.4.3)$ выводим $\cos\gamma\varphi_R = \dfrac{\cos\varphi_R}{R^{\gamma-1}} \le \dfrac{1}{R^{\gamma-1}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$.

Произведя замену $z=\mathrm{Re}^{i\varphi}$, получим оценки

$$\left|\int\limits_{C_R^2} h_-(z)\,dz\right| \le \int\limits_{-\frac{\pi}{2\gamma}}^{\varphi_R} e^{x\left(R^\gamma\cos\gamma\varphi - R\cos\varphi\right)}\left(\gamma R^{\gamma-1}+1\right)d\varphi \le \left(\gamma R^{\gamma-1}+1\right)\int\limits_{-\frac{\pi}{2\gamma}}^{\varphi_R} e^{x\left(R^\gamma\cos\gamma\varphi_R - R\cos\varphi\right)}d\varphi \le$$

$$\le \left(\gamma R^{\gamma-1}+1\right)e^{x\left(2R^{2-\gamma}-R\cos(\pi/2\gamma)\right)}\left(\pi/2\gamma+\varphi_R\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Здесь учтено, что $2-\gamma<1$ и $\varphi_R \xrightarrow[R\to\infty]{} -\pi/2\gamma$. Теперь, устремляя R к бесконечности, а r – к нулю и учитывая, что интеграл $\int\limits_0^1 h_-(z)\,dz$ – действительное число, получаем формулу $(1.4.1)$.

Лемма 1.3 доказана.

1.4.2. Представление в виде ряда.

Теорема 1.2. Плотность $f_o^\Diamond(x)$ имеет представление в виде сходящегося ряда

$$f_o^\Diamond(x) = \left(\Gamma\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\right)^{-1} x^{-\frac{(\gamma-1)}{\gamma}} + \frac{1}{\pi\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^{n+1}}{(n+1)!}x^{\frac{(\gamma-1)n}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{n}{\gamma}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{\gamma}\right),\ x>0. \qquad (1.4.4)$$

Доказательство. В формуле $(1.4.1)$ произведем замену $t=-xz^\gamma$ и с учетом равенств $z=\left(tx^{-1}\right)^{1/\gamma}e^{\frac{\pi i}{\gamma}}$ и $dz=\dfrac{1}{\gamma x}\left(\dfrac{t}{x}\right)^{1/\gamma-1}e^{\frac{\pi i}{\gamma}}$ находим

$$f_o^\Diamond(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left\{-i\int\limits_G e^{-t\pm x\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{\gamma}}e^{\frac{\pi i}{\gamma}}}\left(\gamma\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{\gamma-2}{\gamma}}e^{\frac{\pi i(\gamma-2)}{\gamma}} \pm \left(\frac{t}{x}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}e^{-\frac{\pi i}{\gamma}}\right)\frac{e^{\frac{\pi i}{\gamma}}}{\gamma x}\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left\{-i\int\limits_G e^{-t\pm x(t/x)^{1/\gamma}e^{\frac{\pi i}{\gamma}}}\left(\frac{1}{x}(t/x)^{-1/\gamma}e^{\frac{\pi i(\gamma-1)}{\gamma}} \pm \frac{1}{\gamma t}\right)dt\right\}. \qquad (1.4.5)$$

Здесь интегрируем по регулярной кривой $G=\left\{t:t=-xz^\gamma, z\in(-i\infty,0)\right\}$, которая, как и выше, целиком лежит в верхней части положительной полуплоскости. Разлагая в $(1.4.5)$ в ряд Тейлора функцию $\exp\left\{\pm x(t/x)^{1/\gamma}e^{\frac{\pi i}{\gamma}}\right\}$ и используя аналитичность функции $\Gamma(z)$ (интеграл по контуру G заменяем интегралом по полуоси $(0,\infty)$), нетрудно получить

$$f_o^\Diamond(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left\{-i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm 1)^n}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-t}\left[x^{\frac{(\gamma-1)(n-1)}{\gamma}}t^{\frac{n-1}{\gamma}}e^{\frac{\pi i(n+\gamma-1)}{\gamma}} \pm \frac{1}{\gamma}x^{\frac{(\gamma-1)n}{\gamma}}t^{\frac{n}{\gamma}-1}e^{\frac{\pi i n}{\gamma}}\right]dt\right\} =$$

$$=\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left\{-i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{n!}\left[x^{\frac{(\gamma-1)(n-1)}{\gamma}}e^{\frac{\pi i(n+\gamma-1)}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{n-1}{\gamma}+1\right)\pm\frac{1}{\gamma}x^{\frac{(\gamma-1)n}{\gamma}}e^{\frac{\pi i n}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{n}{\gamma}\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^{n+1}}{n!}x^{\frac{(\gamma-1)n}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{n}{\gamma}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{\gamma}\right)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{n!}x^{\frac{(\gamma-1)(n-1)}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{n-1}{\gamma}+1\right)\sin\left(\frac{\pi(n-1)}{\gamma}\right). \qquad (1.4.6)$$

Из - за $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$, вторая сумма приводится к виду

$$I=\frac{1}{\pi}x^{-\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}\Gamma\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sin\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)-\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{n!}x^{\frac{(\gamma-1)(n-1)}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{n-1}{\gamma}+1\right)\sin\left(\frac{\pi(n-1)}{\gamma}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}x^{-\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}\Gamma\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sin\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)-\frac{1}{\pi\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^{n+1}}{n!}x^{\frac{(\gamma-1)n}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{n}{\gamma}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{\gamma}\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^{n+1}}{(n+1)!}x^{\frac{(\gamma-1)n}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{n}{\gamma}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{\gamma}\right),$$

что при подстановке в $(1.4.6)$ приводит к $(1.4.4)$. Здесь использована формула $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi a)}$ при $0<a<1$. Теорема 1.2 доказана.

При $\gamma=2$ с помощью соотношений $\sin(\pi(k+1))=0$, $\sin(\pi k+\pi/2)=(-1)^k$, $\dfrac{\Gamma(k+1/2)}{(2k)!}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2k}k!}$ плотность $f_o^{\Diamond}(x)$ приводится к виду $(1.4.2)$. Это можно сделать с помощью $(1.4.6)$. Именно, после выделения четных и нечетных членов первого ряда имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^{n+1}}{n!}x^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2k+1)k!}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{2k+1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^{\sqrt{x}/2}u^{2k}du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}/2}e^{-u^2}du,$$

что согласуется с $\pm\left(1-\Phi\left(-\left(\pm\sqrt{x/2}\right)\right)\right)$. Здесь произведено почленные интегрирование ряда. Во втором ряде, выделяя четные и нечетные члены, получим

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{n!}x^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi(n-1)}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k-\frac{1}{2}}}{(2k)!}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}e^{-\frac{x}{4}}.$$

§ 1.5. Связь с одним классом интегральных преобразований.

Учитывая представление $(1.4.1)$, плотность $f_{\nabla}(x,\tau)$ и ФР $F_{\nabla}(x,\tau)$ можно связать с функцией $\Psi_{\beta,\mu}(x)=\int_0^x\Phi_{\beta,\mu}(t)dt$, $x\in[0,\infty)$ (см. [11]), где

$$\Phi_{\beta,\mu}(s)=\frac{\beta}{2\pi i}\int_{\Gamma(\varepsilon,\beta)}e^{z^{\beta}-sz}z^{\beta(1-\mu)}dz,\ 1/\beta\le\mu<+\infty. \qquad (1.5.1)$$

Здесь для любого $\varepsilon > 0$ и $\beta \in (0, \pi)$) контур $\Gamma(\varepsilon, \beta)$ плоскости z пробегаем в направлении неубывания $\arg(z)$. Он состоит из двух лучей (см. рис. 5) $L^{(\pm)}(\varepsilon, \beta) = \{z : \arg(z) = \pm\beta, \varepsilon \le |z| < +\infty\}$ и дуги окружности $l(\varepsilon, \beta) = \{z : |\arg(z)| \le \beta, |z| = \varepsilon\}$, соединяющей концы $\varepsilon e^{\pm i\beta}$ этих лучей. В работе [11] доказано, что функция $\Phi_{\beta,\mu}(s)$ – целая и разлагается в ряд

$$\Phi_{\beta,\mu}(s) = -\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\Gamma\left(1-\mu+(k+1)\beta^{-1}\right)}{\Gamma(1+k)} \sin\pi\left(\frac{k+1}{\beta}-\mu\right)s^k. \qquad (1.5.2)$$

Известно также, что $E_\beta(-x, \mu) = \int_0^\infty e^{-x\tau} d\Psi_{\beta,\mu}(\tau)$, $x \in [0, +\infty)$, $1 \le \beta < +\infty$, $1/\beta \le \mu < +\infty$, где целые функции $E_\beta(-x, \mu)$ типа Миттаг – Леффлера определяются разложением $E_\beta(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + k\beta^{-1}\right)}$, $\beta > 0$, $-\infty < \mu < +\infty$. В формуле (1.5.2) взяв $\mu = 1$, $\beta = \gamma$ и $s = (\tau + x)x^{-1/\gamma}$, имеем $f_\nabla(x, \tau) = \frac{\tau}{\gamma x^{1-(1/\gamma)}}\Phi_{\gamma,1}\left((\tau + x)x^{-1/\gamma}\right)$. Точно так же, для плотности $f_\Delta(x, \tau)$ с ПЛ $e^{-\tau\Delta(s)}$ (при $x < \tau$) можно получить формулу связи $f_\Delta(x, \tau) = \frac{\tau}{\gamma x^{1-(1/\gamma)}}\Phi_{\gamma,1}\left((\tau - x)x^{-1/\gamma}\right)$. В работе [37] для плотности $f_\Delta(x, \tau)$ получено аналогичное (1.2.1) интегральное представление $f_\Delta(x, \tau) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty}^{0} e^{-(\tau - x)z + xz^\gamma}\left(\gamma z^{\gamma-1} + 1\right)dz\right\}$. Таким образом, имеем

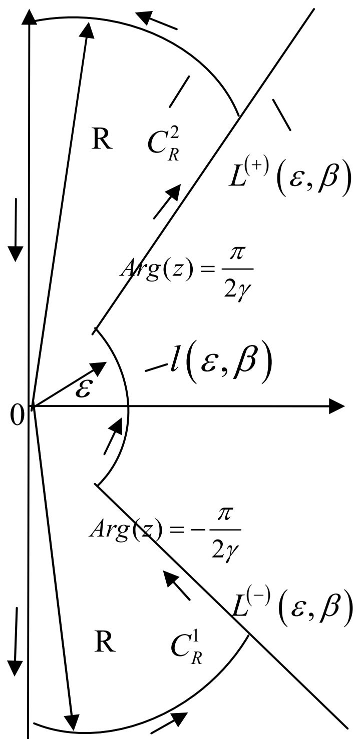

Рис. 5

$$f_\Diamond(x, \tau) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty}^{0} e^{-(\tau \pm x)z + xz^\gamma}\left(\gamma z^{\gamma-1} \mp 1\right)dz\right\}, \qquad (1.5.3)$$

где верхний знак выбираем в случае функции ∇, а нижний – при Δ. Исходя из свойств $\Diamond$, из соотношения $\Diamond(it) = \overline{\Diamond(-it)}$ можно заключить, что при всех $t \in (-\infty, 0]$ непрерывная кривая $z = \nabla(-it)$ целиком лежит в области, ограниченной прямыми $\mathrm{Im}(z) = 0$, $\mathrm{Re}(z) = 1$ и лучом $\{z : Arg(z) = \pi/2\gamma\}$, а кривая $z = \Delta(-it)$ – в области, ограниченной положительной частью мнимой оси и лучом $\{z : Arg(z) = \pi/2\gamma\}$ комплексной z – плоскости (см. рис. 6).

В параграфе 1.2 при доказательстве сходимости интегралов к нулю подинтегральные функции оценены по абсолютной величине и по действительной части. Использована скорость сближения кривой L_∇ к лучу $\{z : Arg(z) = -\pi/2\gamma\}$. Те же методы применимы здесь. Для функции Δ ситуация аналогична. Исходя из формулы $f_\Diamond(x, \tau) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx - \tau\Diamond(-it)}dt = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{0} e^{-itx - \tau\Diamond(-it)}dt$, для плотности $f_\Diamond(x, \tau)$ можно найти интегральное представление $f_\Diamond(x,\tau)=\mathrm{Re}\left\{\dfrac{1}{\pi i}\int\limits_0^{i\infty} e^{-(\tau\pm x)z+xz^\gamma}\left(\gamma z^{\gamma-1}\mp 1\right)dz\right\}$ и, сопоставляя его с $(1.5.3)$, заключить

$$f_\Diamond(x,\tau)=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{-(\tau\pm x)z+xz^\gamma}\left(\gamma z^{\gamma-1}\mp 1\right)dz\right\}. \qquad (1.5.4)$$

В $(1.5.4)$ делаем замену $y=x^{1/\gamma}z$, что дает

$$f_\Diamond(x,\tau)=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{-(\tau\pm x)x^{-1/\gamma}y+y^\gamma}\left(\gamma x^{1/\gamma-1}y^{\gamma-1}\mp 1\right)x^{-1/\gamma}dy\right\}.$$

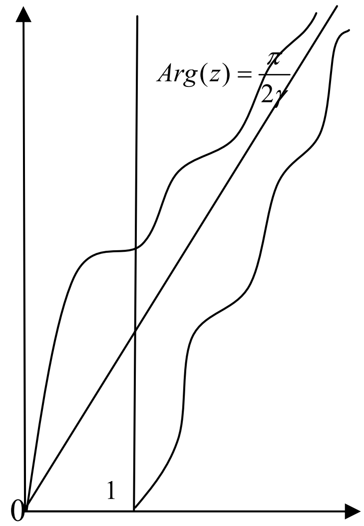

Рис. 6

Возьмем $\dfrac{\pi}{2\gamma}<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ и рассмотрим замкнутый контур $\Upsilon=C_R^1\bigcup[-R,R]\bigcup C_R^2\bigcup\Gamma_R$, состоящий из отрезка $[-R,R]$, дуг окружностей $C_R^2=\left\{z=\mathrm{Re}^{i\varphi},\beta\le\varphi\le\pi/2\gamma\right\}$, $C_R^1=\left\{z=Re^{i\varphi},-\pi/2\le\varphi\le-\beta\right\}$ и части Γ_R кривой Γ, ограниченной этими дугами. (см. рис. 5). Функция $h(y)=e^{-(\tau\pm x)x^{-1/\gamma}y+y^\gamma}\left(\gamma x^{1/\gamma-1}y^{\gamma-1}\mp 1\right)x^{-1/\gamma}$ аналитична внутри контура Υ и, по теореме Коши, $\int\limits_\Upsilon h(y)dy=0$. Покажем, что при $R\to+\infty$ интегралы по дугам C_R^1 и C_R^2 стремятся к нулю. Заменой $y=\mathrm{Re}^{i\varphi}$, имеем

$$\left|\int\limits_{C_R^1,C_R^2} e^{-(\tau\pm x)x^{-1/\gamma}y+y^\gamma}\left(\gamma x^{1/\gamma-1}y^{\gamma-1}\mp 1\right)x^{-1/\gamma}dy\right|\le\left|\int\limits_\beta^{\pi/2} e^{-(\tau\pm x)x^{-1/\gamma}R\cos\varphi+R^\gamma\cos\gamma\varphi}\left(\gamma x^{1/\gamma-1}R^{\gamma-1}+1\right)x^{-1/\gamma}Rd\varphi\right|\to 0.$$

Учтено, что $\cos\gamma\varphi\le 0$. (из - за неравенств $-\pi/2\le\varphi\le-\beta<-\pi/2\gamma$, или $\pi/2\gamma<\beta\le\varphi\le\pi/2$). Теперь, устремляя R к бесконечности, получаем

$$f_\Diamond(x,\tau)=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\varepsilon,\beta)} e^{-(\tau\pm x)x^{-1/\gamma}y+y^\gamma}\left(\gamma x^{1/\gamma-1}y^{\gamma-1}\mp 1\right)x^{-1/\gamma}dy\right\}.$$

Сравнение с $\Phi_{\beta,\mu}(s)$ дает: $f_\Diamond(x,\tau)=x^{-1}\Phi_{\gamma,1/\gamma}\left((\tau\pm x)x^{-1/\gamma}\right)\mp\gamma^{-1}x^{-1/\gamma}\Phi_{\gamma,1}\left((\tau\pm x)x^{-1/\gamma}\right)$. Учитывая связь $f_\Diamond(x,\tau)=\dfrac{\tau}{\gamma x^{1-(1/\gamma)}}\Phi_{\gamma,1}\left((\tau\pm x)x^{-1/\gamma}\right)$, получим: $f_\Diamond(x,\tau)=\dfrac{\tau}{\left(\tau x\pm x^{1-(2/\gamma)}\right)}\Phi_{\gamma,1/\gamma}\left(\dfrac{\tau\pm x}{x^{1/\gamma}}\right)$.

Последнее соотношение для Δ верно лишь при $x<\tau$.

Пусть γ_1, γ_2 и μ_1, μ_2 – параметры, подчиненные условиям $0<\gamma_1<\gamma_2<+\infty$, $0<\mu_1<+\infty$, $-\infty<\mu_2<+\infty$. Тогда в конечной комплексной плоскости z имеет место интегральное соотношение (см. [11])

$$E_{\gamma_2}(z,\mu_2)=\int\limits_0^\infty E_{\gamma_1}\left(z\tau^{1/\gamma_1},\mu_1\right)\tau^{\mu_1-1}\Phi_{\gamma,\mu}(\tau)d\tau,\ |z|<+\infty, \qquad (1.5.5)$$

где γ и μ связаны равенствами $\mu=\mu_2+\gamma_1(1-\mu_1)(\gamma_2)^{-1}$, $\gamma=\gamma_2/\gamma_1$. Дадим вероятностную интерпретацию соотношения $(1.5.5)$.

Пусть X и Y – независимые СВ с ФР F и G и с ПЛС φ и ϕ, соответственно. Известно, что (см. [40], стр. 521) ПЛС для XY дается равенством Парсеваля

$\int_0^\infty \varphi(sx)\,dG(x) = \int_0^\infty \phi(sx)\,dF(x)$. Следовательно, соотношение $(1.5.5)$ есть ПЛС для СВ XY, где СВ X и Y независимы и имеют ФР $\Psi_{\gamma_1,\mu_1}(x)$ и $G(x)$, соответственно. Здесь мера $dG(x) = x^{\gamma_1(\mu_1-1)}d\Psi_{\gamma,\mu}(x^{\gamma_1})$ (т. е. $G(x)$ имеет плотность $\gamma_1 x^{\gamma_1(\mu_1-2)-1}\Phi_{\gamma,\mu}(x^{\gamma_1})$). Соотношение $(1.5.5)$ можно рассматривать как ПЛС СВ XY, где СВ X и Y независимы и имеют плотности $\tau^{-1/\gamma_1}\Phi_{\gamma_1,\mu_1}(v\tau^{-1/\gamma_1})$ и $\tau^{\mu_1-1}\Phi_{\gamma,\mu}(\tau)$, соответственно из-за

$$E_{\gamma_1}\left(z\tau^{\frac{1}{\gamma_1}},\mu_1\right) = \int_0^\infty e^{z\tau^{\frac{1}{\gamma_1}}u}\Phi_{\gamma_1,\mu_1}(u)\,du = \int_0^\infty \frac{e^{zv}}{\tau^{1/\gamma_1}}\Phi_{\gamma_1,\mu_1}\left(\frac{v}{\tau^{1/\gamma_1}}\right)dv.$$

§ 1.6. Связь с устойчивыми законами.

В предельных теоремах важную роль играют стандартные устойчивые плотности $p(x,\alpha,\varphi)$ с ХФ $g(t) = \exp\left\{-|t|^\alpha \exp\{\pm\pi i\varphi/2\}\right\}$, где $\pm sign(t)$. Параметры α и φ удовлетворяют следующим условиям

$$0 < \alpha < 2,\ |\varphi| \le \begin{cases} \alpha, & 0 < \alpha < 1, \\ 2-\alpha, & 1 < \alpha < 2 \end{cases}. \qquad (1.6.1)$$

В дальнейшем нам нужна (см. [40], стр. 658 или [14])

Лемма 1.4. Для $x > 0$:

$$p(x,\alpha,\varphi) = \frac{1}{\pi x}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\Gamma(k\alpha+1)}{k!}\left(-\left(x^{-\alpha}\right)\right)^k \sin\left(\frac{\pi k(\varphi-\alpha)}{2}\right)\right],\ 0 < \alpha < 1; \qquad (1.6.2)$$

$$p(x,\alpha,\varphi) = \frac{1}{\pi x}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\Gamma(k\alpha^{-1}+1)}{k!}(-x)^k \sin\left(\frac{\pi k(\varphi-\alpha)}{2\alpha}\right)\right],\ 1 < \alpha < 2. \qquad (1.6.3)$$

Для $x < 0$ значения p определяются в соответствии с соотношением $p(-x,\alpha,\varphi) = p(x,\alpha,-\varphi)$. Более того, соотношение $(1.6.2)$ дает асимптотическое разложение при $x \to \infty$.

Интерес представляют односторонние устойчивые плотности $p\left(x,\frac{1}{\gamma},-\frac{1}{\gamma}\right)$, графики которых при значениях параметра $\gamma = 1,5;1,6;1,7;1,8;2$ приведены на Рис. 7. Графики построены с помощью компютерной программы Matematika 5.2. При этом, в формуле $(1.6.2)$ взяты первые 2500 членов ряда. В предельных теоремах законы с ПЛС $\exp\{-\tau\Diamond(s)\}$ возникает при согласованной сходимости времени t и нормировки θ к конечному пределу τ. В них (выбором нормировки θ), не ограничивая общности, можно положить $\tau = 1$. Несмотря на это, плотности $f_\Diamond(x,\tau)$ не выражаются один через другой при разных τ.

На рисунках 8 – 9 приведены графики плотности $f_{\Diamond}(x,1)$ при значениях параметра $\gamma = 1,5;1,6;1,7;1,8;2$. И здесь взяты первые 2500 членов соответствующего ряда. На рисунках 10 – 12 приведены графики плотностей $f_{\Diamond}(x,1)$ и $f_o^{\nabla}(x)$ при больших значениях аргумента и вблизи нуля для значения параметра $\gamma = 1.7$.

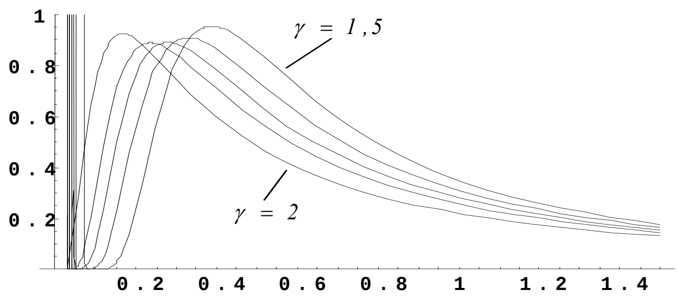

рис.7

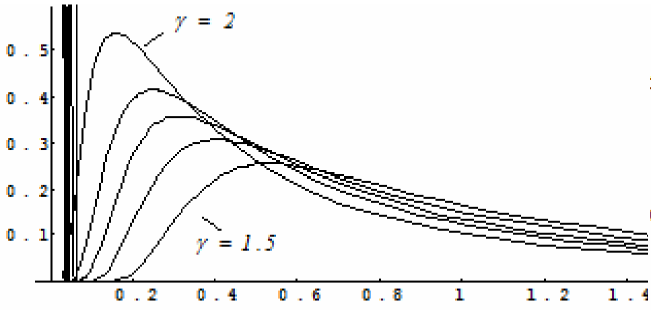

Рис. 8 $(f_{\nabla}(x,1))$

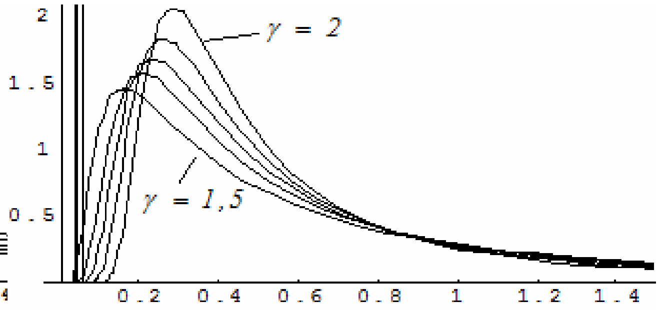

Рис. 9 $(f_{\Delta}(x,1))$.

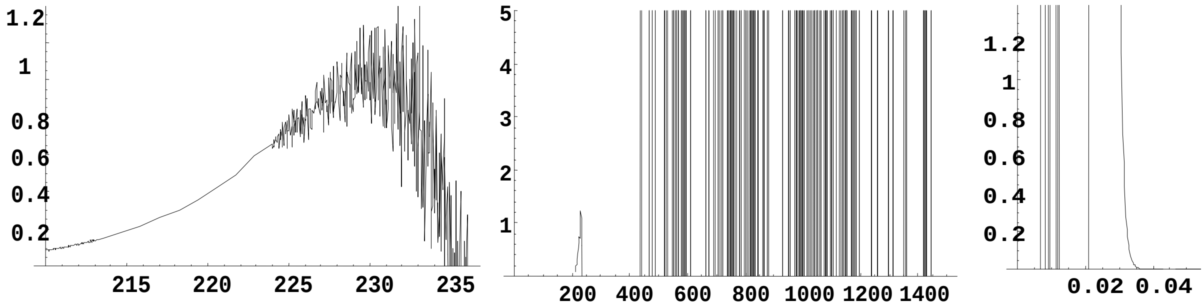

Рис. 10 $f_{\nabla}(x,1)$

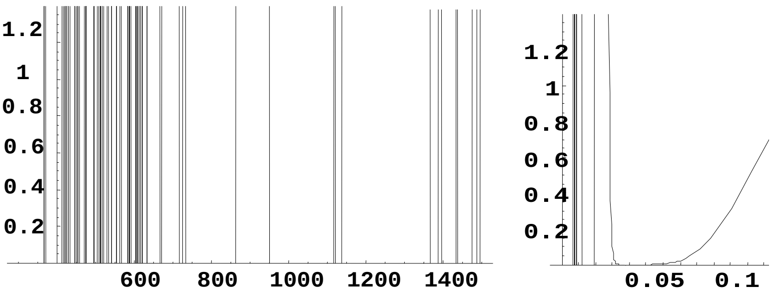

Рис. 11 $f_{\Delta}(x,1)$

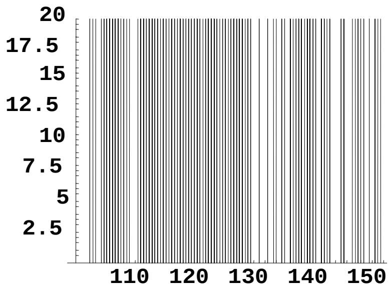

Рис. 12 $f_o^{\nabla}(x)$

Графики с наличием осцилляции подтверждают необходимость отдельного рассмотрения асимптотического поведения плотностей на бесконечности и вблизи нуля.

Подставляя $k = n+1$ в (5), с учетом формулы $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$, получим

$$f_{\Diamond}(x,t) = \frac{t}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(t \pm x)^{k-1}}{k!}\Gamma\left(\frac{k}{\gamma}+1\right)x^{-\left(\frac{k}{\gamma}+1\right)}\sin\frac{\pi k}{\gamma},\ x > 0,\ 0 < t < \infty .$$

Учитывая, что $0 < 1/\gamma < 1$, и сравнивая с $(1.6.2)$, в случае ∇ имеем

$$f_{\nabla}(x,t)=\frac{-t}{\pi x(t+x)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(k\gamma^{-1}+1)}{k!}\left(\left[x/(t+x)^{\gamma}\right]^{-1/\gamma}\right)^k\sin\frac{\pi k}{\gamma}=$$

$$=\frac{t}{(t+x)^{\gamma+1}}\frac{1}{\frac{\pi x}{(t+x)^{\gamma}}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(k\gamma^{-1}+1)}{k!}\left(\left[x/(t+x)^{\gamma}\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\right)^k\sin\left(\frac{\pi k}{2}\left(-\frac{2}{\gamma}\right)\right)=$$

$$=t(t+x)^{-(\gamma+1)}\,p\left(x/(t+x)^{\gamma},\gamma^{-1},-\gamma^{-1}\right).$$

В случае Δ при $0<x<t$ аналогично получаем $f_{\Delta}(x,t)=t(t-x)^{-(\gamma+1)}P\left(x/(t-x)^{\gamma},\gamma^{-1},-\gamma^{-1}\right)$, $0<x<t<\infty$, а при $0<t<x<\infty$ имеем $f_{\Delta}(x,t)=\frac{t}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-t)^{k-1}}{k!}\Gamma(k\gamma^{-1}+1)x^{-(k/\gamma+1)}\sin\frac{\pi k}{\gamma}=$

$$=\frac{t}{(x-t)^{\gamma+1}}\frac{1}{\frac{\pi x}{(x-t)^{\gamma}}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(k\gamma^{-1}+1)}{k!}\left(\left[\frac{x}{(x-t)^{\gamma}}\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\right)^k\sin\left(\frac{\pi k}{2}\left(\frac{2}{\gamma}-2\right)\right)=$$

$$=t(x-t)^{-(\gamma+1)}\,p\left(x/(x-t)^{\gamma},\gamma^{-1},3\gamma^{-1}-2\right).$$

Здесь учтено, что $(-1)^k\sin x=\sin(x-\pi k)$, и то, что величина $\varphi=3/\gamma-2$ удовлетворяет условию $(1.6.1)$. С помощью формулы $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$, $0<\alpha<1$, получим $f_{\Delta}(t,t)=\frac{1}{\pi\gamma}\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)t^{-1/\gamma}\sin\frac{\pi}{\gamma}=\frac{x^{-1/\gamma}}{\gamma\Gamma\left((\gamma-1)\gamma^{-1}\right)}$.

Рассмотрим плотность $f_{1/\gamma}(x,t)$ с ПЛС $e^{-ts^{1/\gamma}}$. Из леммы 1.4 ясно, что

$$f_{1/\gamma}(x,t)=\begin{cases}\dfrac{t}{\gamma\pi x}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right)x^{-\frac{n+1}{\gamma}}\sin\frac{n+1}{\gamma}\pi, & 1<\gamma<2,\\ \dfrac{t}{2x\sqrt{\pi x}}\exp\left\{-t^2/4x\right\}, & \gamma=2\end{cases},\quad x,t>0. \qquad (1.6.4)$$

Пусть $\delta(\tau)=\tau$ при $\Delta(s)$; $\delta(\tau)=-\tau$ при $\nabla(s)$ и $\delta(\tau)=0$ при $s^{1/\gamma}$. Сравнивая формулы $(1.6.4)$ и (5) для $f_{\Diamond}(x,t)$ и $f_{1/\gamma}(x,t)$, запишем

$$f_{\Diamond,1/\gamma}(x,t)=\begin{cases}\dfrac{t}{\gamma\pi x}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(t-\delta(x)\right)^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right)x^{-\frac{n+1}{\gamma}}\sin\frac{n+1}{\gamma}\pi, & 1<\gamma<2,\\ \dfrac{t}{2x\sqrt{\pi x}}\exp\left\{-\left(t-\delta(x)\right)^2/4x\right\}, & \gamma=2\end{cases}. \qquad (1.6.5)$$

Из $(1.6.5)$ следует $\left(t-\delta(x)\right)f_{\Diamond}(x,t)=tf_{1/\gamma}\left(x,t-\delta(x)\right)$ (для Δ лишь при $x<t$).

Паралельно с $\Diamond(s)$ рассмотрим ее обратную функцию $b(s)=s^{\gamma}+\delta(s)$. Так как ХФ $e^{(-it)^{\gamma}}=e^{-|t|^{\gamma}\left(-(-isign(t))^{\gamma}\right)}=e^{-|t|^{\gamma}e^{\pm\frac{\pi i(2-\gamma)}{2}}}$ соответствует плотности $p(x,\gamma,2-\gamma)$ (см. лемма 1.4), то ХФ $e^{\tau b(-it)}$ соответствует плотности

$$\varphi(x,\tau)=\frac{1}{\tau^{1/\gamma}}p\left(\frac{x+\delta(\tau)}{\tau^{1/\gamma}},\gamma,2-\gamma\right)=\frac{1}{\pi\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(x+\delta(\tau)\right)^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right)\tau^{-\frac{n+1}{\gamma}}\sin\frac{\pi(n+1)(\gamma-1)}{\gamma},$$

которая при $\gamma=2$ имеет вид $\varphi_\Diamond(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{(x+\delta(\tau))^2}{2\tau}}$. Так как $\sin\frac{\pi n(\gamma-1)}{\gamma}=(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi n}{\gamma}$, то $\varphi(-x,\tau)=\frac{1}{\pi\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\delta(\tau))^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right)\tau^{-\frac{n+1}{\gamma}}\sin\frac{\pi(n+1)}{\gamma}$. Таким образом, найдена связь:

$$tf_\Diamond(t,x)=x\varphi_\Diamond(-x,t).$$

Полученные формулы связи между $f_\Diamond(x,t)$ и устойчивыми плотностями формулируем в виде следующей леммы.

Лемма 1.5.

$$f_\nabla(x,t)=t(t+x)^{-(\gamma+1)}p\left(x(t+x)^{-\gamma},\gamma^{-1},-\gamma^{-1}\right),\ x>0,\ 0<t<\infty; \tag{1.6.6}$$

$$f_\Delta(x,t)=\begin{cases} t(t-x)^{-(\gamma+1)}p\left(x(t-x)^{-\gamma},\gamma^{-1},-\gamma^{-1}\right), & 0<x<t<\infty,\\ t(x-t)^{-(\gamma+1)}p\left(x(x-t)^{-\gamma},\gamma^{-1},3\gamma^{-1}-2\right), & 0<t<x<\infty,;\\ \left[\gamma\Gamma\left((\gamma-1)\gamma^{-1}\right)\right]^{-1}x^{1/\gamma}, & x=t>0\end{cases} \tag{1.6.7}$$

$$tf_\Diamond(t,x)=x\varphi_\Diamond(-x,t),\ (t-\delta(x))f_\Diamond(x,t)=tf_{1/\gamma}(x,t-\delta(x)).$$

Последнее соотношение для Δ верно лишь при $x<t$.

Асимптотические разложение для $f_\Diamond(t,x)$ можно получить из Леммы 1.5 и из асимптотических разложений устойчивых плотностей $p(x,\alpha,\varphi)$ [14], [40].

Теорема 1.3. При $x|t\pm x|^{-\gamma}\to\infty$ $f_\Diamond(x,t)\sim\frac{t}{\gamma\pi x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(t\pm x)^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right)x^{-\frac{n+1}{\gamma}}\sin\frac{n+1}{\gamma}\pi$.

Пусть $a_n=a_n(\alpha)=\frac{2^{2n}|B_{2n}|}{2n(2n)!}\left[\alpha(1-\alpha)^{2n-1}+1-(1-\alpha)^{2n}\right]$ – полиномы степени $2n-1$ со свободным членом, равным нулю (B_n – числа Бернулли). Обозначим $b_n(\alpha)=\frac{1}{n!}C_n(1!a_1,2!a_2,\dots,n!a_n)$, где

$C_n(y_1,y_2,\dots,y_n)=\sum\left\{\frac{n!}{k_1!\dots k_n!}\left(\frac{y_1}{1!}\right)^{k_1}\dots\left(\frac{y_n}{n!}\right)^{k_n}:k_1+2k_2+\dots+nk_n=n,k_j\ge 0\right\}$ – полиномы Белла.

Положим $d_n=d_n(\vartheta,\alpha)=\left(a_n(\alpha)-\frac{\vartheta^2}{\alpha}b_{n+1}(\alpha)\right)\vartheta^{2n}$, $q_n=q_n(\vartheta,\alpha)=\frac{1}{n!}C_n(1!d_1,2!d_2,\dots,n!d_n)$ (полиномы степени $2(n+1)$ по ϑ и полиномы степени $2n$ по α). Пусть $\xi=\xi(x,\alpha)=(1-\alpha)(x/\alpha)^{\alpha/(\alpha-1)}$ и $\nu=\nu(\alpha)=(1-\alpha)^{-1/\alpha}$.

Теорема 1.4. Для $f_\Diamond(t,x)$ имеют место асимптотические разложения:

1. $f_\nabla(x,t)\sim\frac{t\nu\,\mathrm{e}^{-\xi}}{(t+x)^{\gamma+1}}\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}\xi^{\frac{(2\gamma-1)}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}Q_n\left(\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)^{-n}\right)$ при $x/(t+x)^\gamma\to 0$,

   где $\xi=\xi\left(x/(t+x)^\gamma,\gamma^{-1}\right)=(\gamma-1)\gamma^{-1}\left(\gamma x/(t+x)^\gamma\right)^{1/(1-\gamma)}$, $\nu=\nu(1/\gamma)=(\gamma/(\gamma-1))^\gamma$;

2. $f_\Delta(x,t) \sim \frac{t\nu\, e^{-\xi}}{(t-x)^{\gamma+1}}\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}\xi^{\frac{(2\gamma-1)}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} Q_n\left(\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)^{-n}\right)$ при $\frac{x^{1/\gamma}}{t-x}\downarrow 0$,

где $\xi = \xi\left(x/(t-x)^\gamma, \gamma^{-1}\right) = (\gamma-1)\gamma^{-1}\left(\gamma x/(t-x)^\gamma\right)^{1/(1-\gamma)}$, $\nu = \nu\left(\gamma^{-1}\right) = \left(\gamma/(\gamma-1)\right)^\gamma$;

3. $f_\Delta(x,t) \sim \frac{\gamma t}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma k)x^{k-1}}{(k-1)!(x-t)^{\gamma k+1}}\sin(\pi k(2-\gamma))$ при $\frac{x^{1/\gamma}}{t-x}\uparrow 0$ и $1<\gamma<2$;

4. $f_\Delta(x,t) \sim \frac{t}{\sqrt{\pi x}} e^{-\frac{(x-t)^2}{4x}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} Q_n\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{(x-t)^2}{8x}\right)^{-n}\right)$ при $\frac{x^{1/\gamma}}{t-x}\uparrow 0$ и $\gamma = 2$.

Здесь $Q_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} q_n(t)e^{-t^2/2}dt$, а функции q_n (полиномы степени $2n$ относительно α) заданы выше.

Замечание 1.1. Из Теорем 1.3. и 1.4 следуют асимптотические разложения для $f_\Diamond(t,x)$ в случаях, когда t фиксировано и $x \to 0$, t фиксировано и $x\to\infty$, x фиксировано и $t\to\infty$, $x+t\to\infty$, $x+t\to 0$ и т.д..

ГЛАВА 2. КРИТИЧЕСКИЕ РИСКИ В ПОРТФЕЛЕ 1.

§ 2.1. Предварительные сведения.

В страховой практике страховые суммы принимают и положительные, и отрицательные значения (см. [36]). В этой главе рассмотрена модель страховой компании, которая предоставляет клиентам договоры как с чисто страховыми сделками, так и связанные с пожизненной рентой. Общая страховая сумма $S(t)$ за $(0,t]$ представима в виде суммы случайного числа СВ: $S(t) = \sum_{0\le t_i\le t} X_i$, где $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ – НОР СВ с ФР $F(x)$, $x\in R^1$, $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ – моменты наступления страховых случаев. СВ $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ независимы и разности $u_i = t_i - t_{i-1}$ ($i=1,2,\ldots$, $t_0=0$) – НОР СВ с ФР $P\{u_i\le x\} = 1-e^{-\lambda x}$, $x\ge 0$, $\lambda>0$. Значит, число $N=\{N(t): t\ge 0, N(0)=0\}$ страховых случаев за $(0,t]$ – однородный пуассоновский процесс интенсивности λ и $\{S(t): 0\le t<\infty\}$ – обобщенный пуассоновский процесс с ФР $P\{S(t)\le x\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}F^{n*}(x)$, $x\in R^1$, где F^{n*} есть n – кратная свертка F. При этом $F^{0*}(x)=1$ при $x\ge 0$ и $F^{0*}(x)=0$ при $x<0$.

Обозначим $\hat{\psi}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}dF(x)$ и $\zeta(t) = S(t)-ct$, $t\ge 0$, где c – константа, задающая интенсивность страховых взносов. Тогда (см. [36], стр. 170), ХФ для ФР $G(t,x) = P\{\zeta(t)\le x\}$ есть $e^{-t\hat{\nu}(s)}$, где $\hat{\nu}(s) = ics + \lambda(1-\hat{\psi}(s))$. Предполагаем, что ХФ $\hat{\psi}(s)$ имеет представление:

$$\hat{\psi}(s) - 1 - ais \sim A\begin{cases} -C_\gamma |s|^\gamma L(1/|s|), & 1<\gamma<2, \\ s^2, & \gamma = 2 \end{cases}, \quad s\to 0,\ A>0, \tag{2.1.1}$$

где $a=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdF(x)<+\infty$, $C_\gamma=\exp\left\{\pm\frac{\pi i(\gamma-2)}{2}\right\}$, $\pm=sign(s)$, а функция $L(x)>0$ является ММФ на бесконечности. Смысл C_γ выявляется в предельных теоремах.

Исследуем поведение процессов риска $r(t)=\sup\limits_{0\le u\le t}\zeta(u)$ и $r=\sup\limits_{0\le u<\infty}\zeta(u)$ с ФР $W(t,x)=P\{r(t)\le x\}$ и $W(x)=P\{r\le x\}$ ($W(x)\equiv 0$, $\rho_1>c$) при $\rho=|\rho_1-c|\to 0$. Пусть $A(s,v)=exp\left\{-\int\limits_0^\infty e^{-sx}d_xM(x,v)\right\}$ и $A(s)=A(s,0)$, $0<v<\infty$, $\operatorname{Re}s\ge 0$, где $M(x,v)=\int\limits_0^\infty e^{-vu}\frac{P\{\zeta(u)>x\}}{u}du$ и $M(x)=M(x,0)$[9], $x\ge 0$. Известно (см. [36], стр. 167), что $W(x)\equiv 0$ при $\rho_1>c$ и $W(x)$ имеет ПЛС $\Omega(s)=A(s)\begin{cases}1, & c\ge 0\\ \frac{\lambda}{\lambda-cs}, & c\le 0\end{cases}$, $\operatorname{Re}(s)\ge 0$ при $\rho_1<c$.

Пусть $\Omega(t,s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}d_xW(t,x)$, $\operatorname{Re}s\ge 0$. Для $\chi(v,s)=v\int\limits_0^\infty e^{-vt}\Omega(t,s)dt$ известна формула (см. [36], стр. 170) $\chi(v,s)=A(s,v)\begin{cases}1, & c\ge 0\\ \frac{\lambda+v}{\lambda+v-cs}, & c\le 0\end{cases}$, $0<v<\infty$. Положим $\hat{C}(v)=\int\limits_0^\infty d_xM(x,v)$, $\hat{C}=\hat{C}(0)$. Тогда $A(s,v)=exp\left\{-\int\limits_0^\infty\left(e^{-sx}-1\right)d_xM(x,v)-\hat{C}(v)\right\}$, $0<v<\infty$, $\operatorname{Re}(s)\ge 0$. Ясно, что $W(+\infty)=e^{-\hat{C}}$ и $\tilde{W}(x)=e^{\hat{C}}W(x)$ – собственная ФР. Известно, что (см. [40], стр. 640) распределение U с ХФ e^{ψ} сосредоточено на $[0,\infty)$ т. и т. т. к.

$$\psi(\zeta)=\int\limits_0^\infty\frac{e^{i\zeta x}-1}{x}dP(x)+ib\zeta, \qquad (2.1.3)$$

где $b\ge 0$ и P – мера на $(0,\infty)$ такая, что функция $\frac{1}{1+x}$ интегрируема по отношению к P. Для $\tilde{W}(x)$ $(2.1.3)$ выполнено с $b=0$ и с мерой $dP(x)=-xdM(x)$. Более того, если $P(x)\sim x^dL(x)$ при $x\to+\infty$, где $0<d<1$, то $1-\tilde{W}(x)\sim\frac{1}{1-d}x^{d-1}L(x)$, $x\to+\infty$ (см. [40]).

С каждым вещественным сепарабельным СП $\{\chi(t):0\le t<\infty\}$, почти все выборочные функции которого – неубывающие ступенчатые функции, удовлетворяющие условиям $\chi(t+0)=\chi(t)$ и $\chi(0)=0$, связывается двойственный СП $\{\chi^*(t):0\le t<\infty\}$. Он определяется (см. [36], стр. 67) как $\chi^*(t)=\sup\{u:\chi(u)\le t, 0\le u<\infty\}$ для $t\ge 0$. Очевидно, что $\{\chi^*(t)\le x\}\equiv\{\chi(x)>t\}$ для всех $t\ge 0$ и $x\ge 0$. Так как $\{S(t):0\le t<\infty\}$ – вещественный СП со стационарными независимыми приращениями, то таков же и СП $\{\zeta(t):0\le t<\infty\}$. По

[9] Известно также представление $M(x,v)=\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{\lambda^n}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda+v)u}u^{n-1}\left[1-F^{n*}(x+cu)\right]du$ (см. [36], стр. 171).

теореме Дуба (см. [13], стр. 352), СП $\{\zeta(t): 0 \le t < \infty\}$ можно считать сепарабельным[10]. Тогда в $M(x,v)$ можно взять $P\{\zeta(t) > x\} = P\{\zeta^*(x) \le t\}$, $t \ge 0$, $x \ge 0$.

§ 2.2. Обратные функции от ПМФ.

В доказываемых предельных теоремах коэффициенты нормирования при условии $(2.1.1)$ и критической загрузке являются ММФ от загрузки.

Теорема 2.1. Пусть $L(t)$ – ММФ на бесконечности, а функция $R^{(\alpha)}(t) \stackrel{def}{=} \dfrac{t^\alpha}{L(t)}$, $0 < \alpha < \infty$ абсолютно непрерывна и возрастает. Тогда, для того, чтобы для произвольного $\alpha \in (0,\infty)$ функция $a(t)$, $a(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ удовлетворяла условию

$$L(a(t))a(t)^{-\alpha} \sim t^{-1},\ t \to \infty, \tag{2.2.1}$$

необходима и достаточна асимптотическая эквивалентность

$$a(t) \sim t^{\frac{1}{\alpha}} \hat{L}_2^{(\alpha)}(t) \stackrel{def}{=} M^{(\alpha)}(t),\ t \to \infty. \tag{2.2.2}$$

Здесь $M^{(\alpha)}(t)$ – ПМФ, обратная к абсолютно непрерывной и возрастающей ПМФ $R^{(\alpha)}(t)$.

Замечание 2.1. По произвольной ПМФ $R_1(x) = x^\gamma L(x)$ строится ПМФ $R_2(x) = x^{\frac{1}{\gamma}} L_2(x)$ (см. [33], стр. 27) такая, что при $x \to \infty$

$$R_1(R_2(x)) \sim x,\ R_2(R_1(x)) \sim x. \tag{2.2.3}$$

Более того, $R_2(x)$ определяется асимптотически однозначно, т. е. если произвольная ПМФ $R_3(x)$, будучи подставлена вместо $R_2(x)$, удовлетворяет хотя бы одному из условий $(2.2.3)$ и $R_3(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то $R_3(x) \sim x^{1/\gamma} L_2(x)$, $x \to \infty$. Поэтому условие абсолютной непрерывности и возрастания функции $R^{(\alpha)}(t)$ можно опустить.

Доказательство Теоремы 2.1. Условие $(2.2.1)$ эквивалентно условию

$$t \sim \frac{a(t)^\alpha}{L(a(t))} = R^{(\alpha)}(a(t)),\ t \to \infty. \tag{2.2.4}$$

Из абсолютной непрерывности и возрастания функции $R^{(\alpha)}(t)$ следует существование ПМФ на бесконечности $M^{(\alpha)}(t)$, $t \ge 0$, являющейся обратной к $R^{(\alpha)}(t)$. Согласно Замечанию 2.1, $M^{(\alpha)}(t)$ имеет вид $M^{(\alpha)}(t) = t^{\frac{1}{\alpha}} \hat{L}_2^{(\alpha)}(t)$. Тогда

$$R^{(\alpha)}(M^{(\alpha)}(t)) = M^{(\alpha)}(R^{(\alpha)}(t)) \equiv t,\quad t > 0. \tag{2.2.5}$$

Из $(2.2.4)$ и $(2.2.5)$ $a(t) \equiv M^{(\alpha)}(R^{(\alpha)}(a(t))) \sim M^{(\alpha)}(t) = t^{\frac{1}{\alpha}} \hat{L}_2^{(\alpha)}(t)$, $t \to \infty$. Теорема 2.1 доказана.

---

[10] П $\{\zeta(u): 0 \le u < \infty\}$ сепарабелен, если найдется такая последовательность $\{u_i\}$, что $P\left\{\sup_{u\in I} \zeta(u) = \sup_{u_j \in I} \zeta(u_j)\right\} = P\left\{\inf_{u\in I} \zeta(u) = \inf_{u_j\in I} \zeta(u_j)\right\} = 1$ для открытых интервалов $I \in [0,+\infty)$.

Пусть F сосредоточена на R^+, $\psi(s)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}dF(x)$ удовлетворяет условию (3).

Следствие 2.1. При условии (3) с $1<\gamma<2$ [11], когда $\alpha=\gamma-1$ или $\alpha=\gamma$ (обозначим $\alpha=\gamma-1,\gamma$), существует ПМФ $M^{(\alpha)}(t)=t^{\frac{1}{\alpha}}\hat{L}_2^{(\alpha)}(t)$, $t\to\infty$, $\alpha=\gamma-1,\gamma$, такая что функция $a(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}\infty$ удовлетворяет условию $(2.2.1)$ с $\alpha=\gamma-1,\gamma$ т. и т. т., к. справедливо $(2.2.2)$ с $\alpha=\gamma-1,\gamma$, соответственно. При этом, существует абсолютно непрерывная, строго возрастающая ПМФ $R_1^{(\alpha)}(t)=\dfrac{t^\alpha}{L_1^{(\alpha)}(t)}$, эквивалентная функции $R^{(\alpha)}(t)$, такая что ПМФ $M^{(\alpha)}(t)$ ($\alpha=\gamma-1,\gamma$) является обратной к $R_1^{(\alpha)}(t)$.

Доказательство. Пусть верно (3). Рассмотрим ФР $F^*(x)=\dfrac{1}{a}\int\limits_0^x\left[1-F(y)\right]dy$. Известно, что (см. [36], стр. 49) $\psi^*(s)\overset{def}{=}\int\limits_0^\infty e^{-sx}dF^*(x)=\dfrac{1-\psi(s)}{as}$, $s>0$. Тогда,

$$1-\psi^*(s)=\frac{\psi(s)-1+as}{as}\sim\frac{A}{a}s^{\gamma-1}L\left(\frac{1}{s}\right),\ s\to0. \tag{2.2.6}$$

Так как $2-\gamma>0$, то (см. [40], стр. 503) условия $(2.2.6)$ и

$$1-F^*(x)\sim\frac{A}{\Gamma(2-\gamma)a}x^{-(\gamma-1)}L(x),\ x\to\infty \tag{2.2.7}$$

эквивалентны ($\alpha=\gamma-1$). Условие (3) при $1<\gamma<2$ эквивалентно условию (4) ($\alpha=\gamma$). Следовательно, ПМФ $\dfrac{A}{a\Gamma(2-\gamma)\left(1-F^*(x)\right)}$ и $\dfrac{A(\gamma-1)}{\Gamma(2-\gamma)(1-F(x))}$ с показателями $\gamma-1$ и γ, соответственно, эквивалентны некоторым абсолютно непрерывным, возрастающим ПМФ $R_1^{(\gamma-1)}(t)=\dfrac{t^{\gamma-1}}{L_1^{(\gamma-1)}(t)}$ и $R_1^{(\gamma)}(t)=\dfrac{t^\gamma}{L_1^{(\gamma)}(t)}$, соответственно. Следствие 2.1 доказано.

Замечание 2.2. Пусть выполнено условие (3). При $a(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}\infty$ имеет место следующая цепочка эквивалентностей:

$$a(t)\sim t^{\frac{1}{\gamma-1}}\hat{L}_2^{(\gamma-1)}(t)\ \Leftrightarrow\ \frac{L(a(t))}{a(t)^{\gamma-1}}\sim\frac{1}{t}\ \Leftrightarrow\ \frac{L(a(t))}{a(t)^\gamma}\sim\frac{1}{ta(t)}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ a(t)\sim(ta(t))^{\frac{1}{\gamma}}\hat{L}_2^{(\gamma)}(ta(t))\ \Leftrightarrow\ a(t)\sim t^{\frac{1}{\gamma-1}}\left[\hat{L}_2^{(\gamma)}(ta(t))\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{2.2.8}$$

Замечание 2.3. Из $(2.2.8)$ вытекает соотношение эквивалентности:

$$\left[\hat{L}_2^{(\gamma)}(ta(t))\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\sim\hat{L}_2^{(\gamma-1)}(t). \tag{2.2.9}$$

В дальнейшем используем обозначение

$$L_2^{(\alpha)}(t)=\left[\hat{L}_2^{(\alpha)}(t)\right]^{-1}. \tag{2.2.10}$$

[11] При $\gamma=2$ сохраняем все обозначения, так как имеем $L(x)\sim 1$ и, следовательно, $\hat{L}_2^{(\alpha)}(t)\sim 1$.

Пусть $B=\lambda A$. Предположим, что $\frac{\rho}{B}\xrightarrow[\rho\to 0]{}0$ и пишем $\omega\sim\left(\frac{\rho}{B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}L_2^{(\gamma-1)}\left(\frac{B}{\rho}\right)$ для величин порядка правой части эквивалентности[12]. При нормировке $\theta(\rho)\xrightarrow[\rho\to 0]{}0$ нужно задать и порядок совместного с $\rho\to 0$ стремления $t\to+\infty$. Обозначим, $s^*=\theta(\rho)s$ и

$$\hat{\alpha}(\rho)=\begin{cases}\rho\theta(\rho), & \theta(\rho)=o(\omega) \text{ или } \theta(\rho)\sim\omega,\\ B\theta(\rho)^{\gamma}L\left(\dfrac{1}{\theta(\rho)}\right), & \omega=o(\theta(\rho))\end{cases}.$$

Лемма 2.1. Пусть имеет место $(2.1.1)$ и $\theta(\rho)\xrightarrow[\rho\to 0]{}0$. Тогда $\hat{v}(s)$ для фиксированного $s>0$ имеет асимптотическое разложение:

$$\hat{v}(\theta(\rho)s)\sim\hat{\alpha}(\rho)\hat{b}(s),\ \rho\to 0, \qquad (2.2.11)$$

где $\hat{b}(s)=\begin{cases}sign(c-\rho_1)is, & \theta(\rho)=o(\omega),\\ sign(c-\rho_1)is+C_\gamma|s|^{\gamma}, & \theta(\rho)\sim\omega,\\ C_\gamma|s|^{\gamma}, & \omega=o(\theta(\rho))\end{cases}.$

Доказательство. Представим функцию $\hat{v}(s^*)$ в виде $\hat{v}(\theta(\rho)s)=\rho\theta(\rho)\left[sign(c-\rho_1)is-\dfrac{\lambda(\psi(s^*)-1-ais^*)}{\rho\theta(\rho)}\right]$. Функция $sign(1-\rho_1)s=const$ и, в силу условия $(2.1.1)$, имеем $\dfrac{\lambda(\psi(s^*)-1-ais^*)}{\rho\theta(\rho)}\sim\dfrac{B}{\rho}C_\gamma\theta(\rho)^{\gamma-1}|s|^{\gamma}L\left(\dfrac{1}{\theta(\rho)}\right)$. Рассматривая для $\pi=\lim\limits_{\rho\to 0}\left[\dfrac{B}{\rho}\theta(\rho)^{\gamma-1}L\left(\dfrac{1}{\theta(\rho)}\right)\right]$ возможные случаи 1) $\pi=1$, 2) $\pi=0$, 3) $\pi=+\infty$ и используя Теорему 2.1, легко убедиться в справедливости $(2.2.11)$. Лемма 2.1 доказана.

Замечание 2.4. Если F сосредоточена на R^+ и $\psi(s)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-sx}dF(x)$ удовлетворяет (3), то для $v(s)=s-\lambda(1-\psi(s))$ при фиксированном $s>0$ и $\theta(\rho)\xrightarrow[\rho\to 0]{}0$ аналогично получаем асимптотическое разложение:

$$v(\theta(\rho)s)\sim\alpha_1(\rho)b(s),\ \rho\to 0, \qquad (2.2.12)$$

где $\alpha_1(\rho)=\hat{\alpha}(\rho)$ и $b(s)=\begin{cases}sign(1-\rho_1)s, & \theta(\rho)=o(\omega),\\ s^{\gamma}+sign(1-\rho_1)s, & \theta(\rho)\sim\omega,\\ s^{\gamma}, & \omega=o(\theta(\rho))\end{cases}.$

---

[12] В предельных теоремах коэффициенты нормирования сравниваются с величинами $\left(\frac{\rho}{B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}L_2^{(\gamma-1)}\left(\frac{B}{\rho}\right)$. В Главе 3 будет показано, что когда ФР F сосредоточена на R^+, то наибольший неотрицательный вещественный корень $s=\omega$ уравнения $v(s)\overset{def}{=}s-\lambda\left(1-\int\limits_0^{+\infty}e^{-sx}dF(x)\right)=0$ при $\rho_1\downarrow 1\,(=c)$ имеет порядок $\omega\sim\left(\frac{\rho}{B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}L_2^{(\gamma-1)}\left(\frac{B}{\rho}\right)$.

Следствие 2.2. Если в условиях Замечания 2.4 $L(x) \sim 1$ при $x \to \infty$ и $\theta(\rho) = \left(\frac{\rho}{B}\right)^{\alpha}$, $0 < \alpha < \infty$, то $\nu\left(\left(\frac{\rho}{B}\right)^{\alpha} s\right) \sim q_{\alpha}(\rho) b_{\alpha}(s)$, $\rho \to 0$, где:

$$q_{\alpha}(\rho) = \begin{cases} \rho\left(\frac{\rho}{B}\right)^{\alpha}, & \alpha \ge \frac{1}{\gamma - 1}, \\ B\left(\frac{\rho}{B}\right)^{\alpha\gamma}, & 0 < \alpha \le \frac{1}{\gamma - 1} \end{cases}; \quad b_{\alpha}(s) = \begin{cases} sign(1-\rho_1)s, & \alpha > (\gamma-1)^{-1}, \\ s^{\gamma} + sign(1-\rho_1)s, & \alpha = (\gamma-1)^{-1}, \\ s^{\gamma}, & 0 < \alpha < (\gamma-1)^{-1} \end{cases}.$$

§ 2.3. ПЛС критических рисков.

В данном параграфе приведены предельные законы для произвольных страховых сумм. Они сформулированы в терминах ПЛС. Некоторые из них вырождены, но мы их выделять не будем.

Пусть $p(x, \alpha, \varphi)$ – плотность УЗ с ХФ $\exp\left\{-|s|^{\alpha} \exp\left\{\pm \frac{\pi i \varphi}{2}\right\}\right\}$, $0 < \alpha \le 2$ (см. Гл. 1, Лемма 1.4), $\delta(\tau) = \begin{cases} \tau sign(c - \rho_1), & \theta(\rho) \sim \omega \text{ или } \theta(\rho) = o(\omega), \rho \to 0, \\ 0, & \omega = o(\theta(\rho)), \rho \to 0 \end{cases}$, $E_y(x) = \begin{cases} 1, & x > y, \\ 0, & x \le y \end{cases}$ и $\Phi_{\tau}(x) = \tau^{-\frac{1}{\gamma}} \int_{-\infty}^{x} p\left(u\tau^{-\frac{1}{\gamma}}, \gamma, \gamma - 2\right) du$, $x \in R^1$, $\tau \in R^{+}$.

Теорема 2.2. Пусть $\theta(\rho) \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$ и $t \to +\infty$ так, что $t\hat{\alpha}(\rho) \to \tau$, $\tau \in [0, +\infty]$. Существует предел $\lim P\{\theta(\rho)\zeta(t) \le x\} = \Phi(\tau, x)$, $x \in R^1$. Здесь: $\Phi(0, x) = E_o(x)$; $\Phi(+\infty, x) \equiv 0$; $\Phi(\tau, x) = E_{-\delta(\tau)}(x)$ при $\theta(\rho) = o(\omega)$; $\Phi(\tau, x) = \Phi_{\tau}(x - \delta(\tau))$ при $\theta(\rho) \sim \omega$ или $\omega = o(\theta(\rho))$, а $0 < \tau < +\infty$.

Обозначим $\beta(s) = s^{1/\gamma}$ при $\delta(\tau) = 0$; $\beta(s) = \Diamond(s)$ при $\delta(\tau) \ne 0$.

Теорема 2.3. При $0 < \nu < \infty$, $s \ge 0$, $0 < \tau < +\infty$, $\mu = 0,1$ функция $N(s, \nu, \mu, \tau) \overset{def}{=} \exp\left\{-\int_0^{\infty} \left(e^{-sx} - 1\right) d_x \left[\int_0^{\infty} e^{-\nu u \mu} \frac{1 - \Phi(\tau u, x)}{u} du\right]\right\}$ имеет представление

$$N(s, \nu, \mu, \tau) = \frac{\beta\left(\frac{\mu\nu}{\tau}\right)}{s + \beta\left(\frac{\mu\nu}{\tau}\right)} \tag{2.3.1}$$

и является двойным ПЛС для ФР $U(x, t) = 1 - \int_0^t \phi(\tau u, x) du$, где

$$\phi(x, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{x^{\gamma}} p\left(\frac{\tau}{x^{\gamma}}, \frac{1}{\gamma}, -\frac{1}{\gamma}\right), & \delta(\tau) = 0, \\ f_{\Diamond}(\tau, x), & \delta(\tau) \ne 0 \end{cases}.$$

Существование невырожденных пределов $\lim\limits_{(\rho,t)} W\left(ut, \dfrac{x}{\theta(\rho)}\right) = W_\tau^\pm(u,x)$, $\lim\limits_{\rho_1\uparrow c} W\left(\dfrac{x}{\theta(\rho)}\right) = W_\tau^\pm(x)$, $\pm = sign(c)$, при критической загрузке для процессов риска связано с существованием $\Phi(\tau,x)$. Пусть $C^o(v) = \lim\limits_{\rho\to 0} \hat{C}(v)$ и $C^o = \lim\limits_{\rho\to 0} \hat{C}$.

Теорема 2.4. В условиях Теоремы 2.2 при $0<\tau<\infty$ существуют пределы $\lim P\{\theta(\rho) r(tu) \le x\} = W_\tau^\pm(u,x)$, $\lim\limits_{\rho_1\uparrow c} P\{\theta(\rho) r \le x\} = W_\tau^\pm(x)$, ($\pm = sign(c)$), $u \in R^+$, где

$$v\int_0^\infty e^{-vu}\left\{\int_0^\infty e^{-sx} d_x W_\tau^+(u,x)\right\} du = e^{-C^o} N(s,v,1,\tau),\ 0<v<\infty,\ s\ge 0. \qquad (2.3.2)$$

$W_\tau^+(x)$ определяется из $(2.3.2)$ и не зависит от u, причем с $v=0$ и $\tau=1$ справа;

$$W_\tau^-(u,x) = \begin{cases} W_\tau^+(u,x), & \theta(\rho) = o(-\lambda/c), \\ (1-e^{-x}) * W_\tau^+(u,x), & \theta(\rho) \sim -\lambda/c, \\ 0, & -\lambda/c = o(\theta(\rho)), \end{cases}; \qquad (2.3.3)$$

$W_\tau^-(x)$ определяется из $(2.3.3)$ с заменой $W_\tau^\pm(u,x)$ на $W_\tau^\pm(x)$.

Замечание 2.5. Пусть $t=\tau$ фиксировано и $\theta(\rho) \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$. Тогда:

a) $\Phi(t,x)$, $W_\tau^\pm(x)$, $W_\tau^\pm(u,x)$ существуют лишь в случае $\theta(\rho) \sim B^{-\frac{1}{\gamma}} L_2^{(\gamma)}(B)$ при $\omega = o(\theta(\rho))$, причем при $c \le 0$ в правой части $(2.3.2)$ добавляется множитель $\varepsilon^\pm(v,s)$, где $\varepsilon^+(v,s)=1$, $\varepsilon^-(v,s) = (\lambda_o + v)(\lambda_o + v + ps)^{-1}$, $p = \lim(-c\theta(\rho)) \in [0,\infty]$, $\lambda_o = \lim \lambda \in [0,\infty]$.

b) $W_\tau^\pm(u,x)$ определяется из равенства $v\int_0^\infty e^{-vu}\left\{\int_0^\infty e^{-sx} d_x W_\tau^\pm(u,x)\right\} du = e^{-C^o(v)} \varepsilon^\pm(v,s) N(s,v,1,1)$.

Обычно, при оценке рисков страховой компании требуют конечность второго момента страховых выплат и возникают разные варианты ЦПТ. Отдельно рассмотрим этот случай $(\gamma=2)$ при критической загрузке. Тогда $\Diamond(s) = \left(1 \pm \sqrt{4s+1}\right)\big/2$, где знак “+” (“–“) выбирается при функции ∇, (Δ).

Замечание 2.6. Решение $x = \Diamond(s)$ уравнения $x^\gamma \pm x = s$ можно найти и при других значениях параметра γ. При $\gamma = \dfrac{k+1}{k}$, $k=1,2,\ldots$, и $\gamma = \dfrac{2k-1}{k}$, $k=2,3,\ldots$, уравнение $x^\gamma \pm x = s$, приводится к алгебрическим уравнениям $y^{k+1} \pm y^k = s$ и $y^{2k-1} \pm y^k = s$. При $\gamma = 1.5$ $\Diamond(s)$ находим с помощью формулы Кардано или программой Mathematika 5.2. При $\gamma=1.5$ $\nabla(s)$ с условием $\nabla(0)=1$ имеет вид: $\nabla(s) = \dfrac{1}{3}\left\{1 + 2^{\frac{1}{3}}(1+6s)\left(2+18s+27s^2+3\sqrt{3}\sqrt{4s^3+27s^4}\right)^{-\frac{1}{3}} +\right.$

$$\left. + 2^{-\frac{1}{3}}\left(2+18s+27s^2+3\sqrt{3}\sqrt{4s^3+27s^4}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}.$$

При $s \geq 0$ обозначим: $v^{+}(s) \equiv 1$; $v^{-}(s) = 1$ при $\theta(\rho) = o\left(-\frac{\lambda}{c}\right)$; $v^{-}(s) = \frac{1}{1+s}$ при $\theta(\rho) \sim \left(-\frac{\lambda}{c}\right)$; $v^{-}(s) \equiv 0$ при $\left(-\frac{\lambda}{c}\right) = o(\theta(\rho))$. Пусть $\pm = sign(\delta(\bullet))$ в $\Diamond(s)$ и

$$\chi_{\tau}^{\pm}(s,v) = v\int_{0}^{\infty} e^{-vu}\left\{\int_{0}^{\infty} e^{-sx} d_x W_{\tau}^{\pm}(u,x)\right\}du .$$

Следствие 2.3. В условиях Теоремы 2.2: $\Phi(\tau,x) = E_{-\delta(\tau)}(x)$ при $\theta(\rho) = o(\omega)$; $\Phi(\tau,x) = \Phi\left(\frac{x+\delta(\tau)}{\sqrt{2\tau}}\right)$ при $\theta(\rho) \sim \omega$ или $\omega = o(\theta(\rho))$, где $\Phi(\bullet)$ – стандартный нормальный закон.

Следствие 2.4. В условиях Теоремы 2.4: $W_{\tau}^{+}(x) = e^{-\hat{C}}\left(1-e^{-x}\right)$; $W_{\tau}^{-}(x) = e^{-\hat{c}}\begin{cases} 1-e^{-x}, & \theta(\rho) \sim \omega = o(-\lambda/c), \\ 1-(1+x)e^{-x}, & \theta(\rho) \sim \omega \sim -\lambda/c \end{cases}$ при $\theta(\rho) \sim \omega$; $W_{\tau}^{\pm}(x) \equiv 0$ в остальных случаях.

Следствие 2.5. В условиях Теоремы 2.4:

$$\chi_{\tau}^{\pm}(s,v) = e^{-C^{o}} v^{\pm}(s)\begin{cases} 1, & \rho_1 < c \\ \frac{v}{v+\tau s}, & \rho_1 > c \end{cases}, \ \theta(\rho) = o(\omega);$$

$$\chi_{\tau}^{\pm}(s,v) = e^{-C^{o}} v^{\pm}(s)\Diamond\left(\frac{v}{\tau}\right)\left(s+\Diamond\left(\frac{v}{\tau}\right)\right)^{-1}, \ \theta(\rho) \sim \omega; \tag{2.3.4}$$

$$\chi_{\tau}^{\pm}(s,v) = e^{-C^{o}} v^{\pm}(s)\sqrt{v}\left(\sqrt{v}+s\sqrt{\tau}\right)^{-1}, \ \omega = o(\theta(\rho)). \tag{2.3.5}$$

Следствие 2.6. В условиях Теоремы 2.4 при $\theta(\rho) = o(\omega)$: $W_{\tau}^{+}(u,x) = e^{-\hat{C}} E_{o}(x)$ при $\rho_1 < c$ и $W_{\tau}^{+}(u,x) = e^{-C^{o}} E_{\tau u}(x)$ при $\rho_1 > c$, а $W_{\tau}^{-}(u,x)$ определяет $(2.3.3)$.

Следствие 2.7. В условиях Замечания 2.5 $\chi_{\tau}^{\pm}(s,v) = e^{-C^{o}(v)}\varepsilon^{\pm}(v,s)\sqrt{v}\big/\left(\sqrt{v}+s\right)$ при $\gamma = 2$.

Везде, где W_{τ}^{-} выражается через W_{τ}^{+}, которая зависит от $\Phi(\tau,x)$, а, следовательно, и от $sign(c)$, надо учитывать, что $c \leq 0$.

Из двойственных формул $P\{T_x \leq t\} = 1-W(x,t)$, $P\{T_x < +\infty\} = 1-W(x)$ и из результатов для $W(x,t)$ и $W(x)$ вытекает существование предельных законов для СВ T_x. Они оценивают первый момент ситуации разорения (см. ПРИЛ.).

В Портфеле 1 договоры связаны как с чисто страховыми сделками, так и со сделками с пожизненной рентой. Тем не менее, критические риски здесь не полностью совпадают с рисками в Портфелях 2 и 3. Поэтому отдельное рассмотрение критических рисков в Портфелях 2 и 3 (Гл. 3 и Гл. 4) необходимо. Различие критических рисков иллюстрируется в ПРИЛОЖЕНИИ.

§ 2.4. Доказательства результатов.

Не ограничивая общности, положим $\varphi = \gamma - 2$.

Доказательство Теоремы 2.3. Нетривиальные случаи в $(2.3.1)$ возникают при $\theta(\rho)\sim\omega$ и $\omega=o(\theta(\rho))$, когда $\Phi'(\tau,x)=\tau^{-\frac{1}{\gamma}}p\left(\left(x-\delta(\tau)\right)\tau^{-\frac{1}{\gamma}},\gamma,\gamma-2\right)$. Из - за $p(-x,\alpha,\varphi)=p(x,\alpha,-\varphi)$ (см. Гл. 1, Лемма 1.4), пишем $\Phi'(\tau,x)=\tau^{-\frac{1}{\gamma}}p\left(-\left(x-\delta(\tau)\right)\tau^{-\frac{1}{\gamma}},\gamma,2-\gamma\right)$. В силу формулы $(1.6.3)$, при $\varphi=\gamma-2$ и $\delta(\tau)\neq 0$ из равенства $\sin\left(\frac{\pi n(\gamma-1)}{\gamma}\right)=(-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi n}{\gamma}\right)$ выводим:

$$\Phi'(\tau,x)=\frac{1}{\pi\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\left(-\left(x-\delta(\tau)\right)\right)^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right)\tau^{-\frac{n+1}{\gamma}}\sin\left(\frac{\pi(n+1)}{\gamma}\right)\right]=\frac{\tau}{x}f_{\Diamond}(\tau,x),\ 1<\gamma\le 2.$$

Для $\nabla(s)$ $(\Delta(s))$ выбираем знак “+” (“–“). При $\delta(\tau)=0$, сравнивая разложения функции $\Phi'(\tau,x)$ и плотности $p\left(x,\frac{1}{\gamma},-\frac{1}{\gamma}\right)$, получившейся из Леммы 1.4, заключаем $\Phi'(\tau,x)=\frac{\tau}{x^{\gamma+1}}p\left(\frac{\tau}{x^\gamma},\frac{1}{\gamma},-\frac{1}{\gamma}\right)$. Так как плотность $\phi(x,\tau)=\frac{1}{x^\gamma}p\left(\frac{\tau}{x^\gamma},\frac{1}{\gamma},-\frac{1}{\gamma}\right)$ имеет ПЛ $e^{-xs^{\frac{1}{\gamma}}}$ (см. [40], стр. 203), то $\Phi'(\tau,x)=\frac{\tau}{x}\phi(x,\tau)$. Меняя порядок интегрирования в определении функции $N(s,v,\mu,\tau)$, получим $N(s,v,\mu,\tau)=\exp\left\{\int\limits_0^\infty e^{-vu\mu}\left[\int\limits_0^\infty\left(e^{-sx}-1\right)\Phi'(\tau u,x)\,dx\right]u^{-1}du\right\}$.

Еще раз меняем порядок интегрирования и делаем замену $z=\tau u$. С учетом полученных связей для Φ' выводим равенство $N(s,v,\mu,\tau)=\exp\left\{\int\limits_0^\infty\frac{e^{-sx}-1}{x}\left[\int\limits_0^\infty e^{-\frac{v\mu z}{\tau}}\phi(x,z)\,dz\right]dx\right\}$. Здесь $\phi(x,z)$ имеет ПЛ $\exp\{-x\beta(s)\}$, где $\beta(s)=\Diamond(s)$, либо $\beta(s)=s^{\frac{1}{\gamma}}$. Тогда $N(s,v,\mu,\tau)=\exp\left\{\int\limits_0^\infty\frac{e^{-sx}-1}{x}\exp\left\{-x\beta\left(\frac{v\mu}{\tau}\right)\right\}dx\right\}$. К $(2.3.1)$ приходим с учетом того, что

$$\int\limits_0^\infty\frac{1-e^{-sx}}{x}e^{-\mu x}dx=\ln\left(1+\frac{s}{\mu}\right). \qquad (2.4.1)$$

Последнее утверждение Теоремы 2.3 вытекает из следующих равенств

$$v\int\limits_0^\infty e^{-vu}\left\{\int\limits_0^\infty e^{-sx}d_xU(x,t)\right\}dt=\int\limits_0^{+\infty}e^{-sx}d_x\left[v\int\limits_0^{+\infty}e^{-vt}U(x,t)\,dt\right]=\frac{\beta(v/\tau)}{s+\beta(v/\tau)},$$

где учтено, что $v\int\limits_0^{+\infty}e^{-vt}U(x,t)\,dt=1-e^{-x\beta(v/\tau)}$ и $\int\limits_0^{+\infty}e^{-vt}dt=v^{-1}$. Теорема 2.3 доказана.

Доказательство Теоремы 2.2. Для $P\{\zeta(t)\le x\}$ ХФ имеет вид $\exp\{-t\hat{v}(s)\}$, где $\hat{v}(s)=ics+\lambda\left(1-\hat{\psi}(s)\right)$. Имеем $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{isx}d_xP\{\theta(\rho)\zeta(t)\le x\}=\exp\left\{-t\hat{v}(s^*)\right\}$. Существование $\Phi(\tau,x)$ следует из $(2.2.11)$ и теоремы единственности (см. [48], с. 300). При этом,

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{isx} d_x \Phi(\tau, x) = e^{-\tau \hat{b}(s)}$. Для конкретных ФР из формулировки Теоремы 2.2 данное равенство выполнено, откуда и из теоремы единственности следует утверждение.

Ясно, что для $\Phi(\tau, x)$ верно Замечание 2.5(a).

Доказательство Теоремы 2.4. Пределы находятся однотипно. Рассмотрим первый. Замена $y = ut$ в $\int\limits_0^{\infty} e^{-sx} d_x W\left(ut, \left(\frac{x}{\theta(\rho)}\right)\right) = \Omega(ut, s^*)$ дает $v\int\limits_0^{\infty} e^{-vu}\Omega(ut, s^*)du = \chi\left(\frac{v}{t}, s^*\right)$.

$\underline{c \geq 0}$. Заменой $x = \theta(\rho)u$ в $A\left(s^*, \frac{v}{t}\right)$ получаем

$$\chi\left(\frac{v}{t}, s^*\right) = A\left(s^*, \frac{v}{t}\right) = e^{-C^o\left(\frac{v}{t}\right)} \exp\left\{-\int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-sx} - 1\right) d_x M\left(\left(\frac{x}{\theta(\rho)}\right), \left(\frac{v}{t}\right)\right)\right\}.$$

При $t \sim \frac{\tau}{\hat{\alpha}(\rho)}$ заменой $u = yt$ в $M\left(\left(\frac{x}{\theta(\rho)}\right), \left(\frac{v}{t}\right)\right)$ находим

$$M\left(\left(\frac{x}{\theta(\rho)}\right), \left(\frac{v}{t}\right)\right) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-vy} \frac{P\{\theta(\rho)\zeta(ty) > x\}}{y} dy.$$

Существование $W_\tau^+(u, x)$ вытекает из Теоремы 2.2, [42], стр. 695, теорема 1. $\underline{c \leq 0}$. $(2.3.4)$ устанавливаем с помощью равенства $\chi\left(\frac{v}{t}, s^*\right) = A\left(s^*, \frac{v}{t}\right)\left\{1 + \left(-c\theta(\rho)\left(\lambda + \left(\frac{v}{t}\right)\right)^{-1}\right)s\right\}^{-1}$.

Теорема 2.4. доказана.

Ясно, что для $W_\tau^\pm(u, x)$ верно Замечание 2.5(a). Замечание 2.5(b) вытекает из следующих соображений. Для существования $W_\tau^\pm(u, x)$ нужно существование предела $m(y, v) = \lim\limits_{\rho \to 0} M\left(\left(\frac{y}{\theta(\rho)}\right), v\right) = \int\limits_0^{\infty} e^{-v\xi\mu} \frac{1 - \Phi(\xi, y)}{\xi} d\xi$, что следует из Теоремы 2.2 и [42], стр. 695, теорема 1. Тогда $\chi_\tau^\pm(s, v) = e^{-C^o(v)}\varepsilon^\pm(v, s)N(s, v, 1, 1)$ для $\theta(\rho) \sim B^{-\frac{1}{\gamma}} L_2^{(\gamma)}(B)$ с $\omega = o(\theta(\rho))$.

При $\gamma = 2$, $\omega \sim \frac{\rho}{B}$ и в $(2.2.11)$ $\hat{b}(s) = \alpha sign(c - \rho_1)is + \beta s^2$, где: $\alpha = 1$, $\beta = 0$ при $\theta(\rho) = o(\omega)$; $\alpha = \beta = 1$ при $\theta(\rho) \sim \omega$; $\alpha = 0$, $\beta = 1$ при $\omega = o(\theta(\rho))$. Далее, в $(2.2.11)$: $\hat{\alpha}(\rho) = \rho\theta(\rho)$ при $\theta(\rho) = o(\omega)$, или $\theta(\rho) \sim \omega$; $\hat{\alpha}(\rho) = B\theta(\rho)^2$ при $\omega = o(\theta(\rho))$.

Следствие 2.3 выводим из Теоремы 2.2. Докажем Следствие 2.4. Имеем

$$\Omega_o(s) \overset{def}{=} \int\limits_0^{\infty} e^{-sx} dW_\tau^+(x) = e^{-C^o} \exp\left\{\int\limits_0^{\infty}\left[\int\limits_0^{\infty} \left(e^{-sx} - 1\right) d_x \Phi(\tau u, x)\right] u^{-1} du\right\}.$$

При $\theta(\rho) = o(\omega)$ из расходимости интеграла $\int\limits_0^{\infty} \left(1 - e^{-x}\right)x^{-1}dx$ имеем $W_\tau^+(x) \equiv 0$. $\Omega_o(s) = e^{-C^o} \exp\left\{\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-sx} - 1}{2\sqrt{\pi\tau v^3}} \exp\left\{-\frac{\left(x + \delta(v\tau)\right)^2}{4v\tau}\right\} dxdv\right\}$ при $\omega = o(\theta(\rho))$ или $\theta(\rho) \sim \omega$. Меняя порядок интегрирования и делая замену $u = v\tau$, получаем

$$\Omega_o(s)=e^{-C^o}\exp\left\{\int_0^\infty\left(e^{-sx}-1\right)\int_0^\infty f(u,v)dudv\right\}.$$

$\underline{c\ge 0}$. При $\theta(\rho)\sim\omega$ имеем $\delta(u\tau)=u\tau$ ($\rho_1<c$) и плотность $xf(u,x)$ имеет ПЛ $e^{-x\nabla(s)}$. Из - за $(2.4.1)$ и $\nabla(0)=1$, получаем $\Omega_o(s)=e^{-\hat{C}}(1+s)^{-1}$. При $\omega=o(\theta(\rho))$ $\dfrac{x}{\sqrt{2\pi u^3}}e^{-\frac{x^2}{2u}}$ – плотность ФР $2\left(1-\Phi\left(x/\sqrt{u}\right)\right)$. Поэтому $xf(u,x)$ имеет ПЛ $e^{-x\sqrt{s}}$. Из расходимости интеграла $\int_0^\infty\left(1-e^{-x}\right)x^{-1}dx$ следует $W_\tau^+(x)\equiv 0$.

$\underline{c\le 0}$. Отметим лишь, что $\left(1-e^{-x}\right)*\left(1-e^{-x}\right)=1-(1+x)e^{-x}$.

Докажем Следствие 2.5. В случаях $\theta(\rho)\sim\omega$ и $\omega=o(\theta(\rho))$ в $(2.3.2)$ меняем порядок интегрирования $\chi_\tau^+(s,v)=e^{-C^o}\exp\left\{\int_0^\infty e^{-vy}\left[\int_0^\infty\dfrac{\left(e^{-sx}-1\right)}{2\sqrt{\pi\tau y^3}}\exp\left\{-\dfrac{\left(x+\delta(\tau y)\right)^2}{4\tau y}\right\}dx\right]dy\right\}$. Еще раз меняем порядок интегрирования и производим замену $u=\tau y$.

$$\chi_\tau^+(s,v)=e^{-C^o}\exp\left\{\int_0^\infty\left(e^{-sx}-1\right)\left[\int_0^\infty e^{-\frac{vu}{\tau}}f(u,x)du\right]dx\right\}.$$

При $\theta(\rho)\sim\omega$ $xf(u,x)$ имеет ПЛ $\exp\{-x\Diamond(s)\}$ и (см. $(2.3.4)$)

$$\chi_\tau^+(s,v)=e^{-C^o}\exp\left\{\int_0^\infty\frac{e^{-sx}-1}{x}e^{-x\Diamond\left(\frac{v}{\tau}\right)}dx\right\}=e^{-C^o}\Diamond\left(\frac{v}{\tau}\right)\left(s+\Diamond\left(\frac{v}{\tau}\right)\right)^{-1}.$$

Плотность $xf(u,x)$ имеет ПЛ $\mathrm{e}^{-x\sqrt{s}}$ при $\omega=o(\theta(\rho))$. Тогда (см. $(2.3.5)$)

$$\chi_\tau^+(s,v)=e^{-C^o}\left(\sqrt{v}/\left(\sqrt{v}+s\sqrt{\tau}\right)\right).$$

Случай $\underline{c\le 0}$ аналогичен.

Следствие 2.6 выводим из Теоремы 2.4. Докажем Следствие 2.7. Учитывая Замечание 2.5(b), $\Phi(\tau,x)=\Phi\left(x/\sqrt{2\tau}\right)$ при $\omega=o(\theta(\rho))$ и, как в Следствии 2.5, получаем $N(s,v,1,1)=\exp\left\{\int_0^\infty\left(e^{-sx}-1\right)\left[\int_0^\infty e^{-vu}f(u,x)du\right]dx\right\}$. Из - за вида ПЛ $\mathrm{e}^{-x\sqrt{s}}$ плотности $xf(u,x)$, с учетом $(2.4.1)$ заключаем $N(s,v,1,1)=\sqrt{v}/\left(\sqrt{v}+s\right)$, что и требовалось доказать.

ГЛАВА 3. КРИТИЧЕСКИЕ РИСКИ В ПОРТФЕЛЕ 2.

§ 3.1. Постановка задачи.

В настоящей главе рассмотривается Портфель 2.

При страховых случаях, распределенных по закону Пуассона с интенсивностью $\lambda>0$, компания выплачивает страховые суммы. Выплачиваемая сумма X_i – СВ с ФР F ($F(x)=0$ при $x<0$). Общая сумма $S(u)$ за $(0,u]$ – обобщенный пуассоновский процесс с интенсивностью λ и с ФР F, $\mathrm{P}\{S(u)\le x\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^n}{n!}F^{n*}(x)$. При скорости $c=1$ увеличения резервов риски оценивают ФР $W(t,x)=P\{r(t)\le x\}$ и $W(x)=P\{r\le x\}$ процессов риска $r(t)=\sup_{0\le u\le t}[S(u)-u]$ и $r=\sup_{0\le u<\infty}[S(u)-u]$, соответственно. Исследуются $W(t,x)$ и $W(x)$ при условиях (3) и критической загрузке.

Известные результаты. Если $\rho_1\ge 1$, то $W(x)=0$ для всех x. Если $\rho_1<1$, то верна формула Полячека – Хинчина (см. [36], стр. 162):

$$\Omega(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}dW(x)=\frac{\rho s}{\nu(s)},\ \mathrm{Re}\,s>0, \qquad (3.1.1)$$

где $\rho=|1-\rho_1|$ и $\nu(s)=s-\lambda(1-\psi(s))$ с ПЛС $\psi(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}dF(x)$, $\mathrm{Re}(s)\ge 0$. Для ПЛС $\Omega(t,s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}d_xW(t,x)$ (см. [36], стр. 54)

$$\Omega(t,s)=e^{\nu(s)t}-s\int_0^{t}W(t-y,0)e^{\nu(s)y}dy,\ \mathrm{Re}\,s\ge 0, \qquad (3.1.2)$$

$$F(z,s)=\int_0^{\infty}e^{-zt}\Omega(t,s)dt=\frac{1}{z-\nu(s)}\left(1-\frac{s}{\omega(z)}\right),\ \mathrm{Re}\,s\ge 0,\ \mathrm{Re}\,z\ge 0, \qquad (3.1.3)$$

где $z=\omega(s)$ – единственный корень уравнения $\nu(z)=s$ в области $\mathrm{Re}\,z\ge 0$, который удовлетворяет и условию (см. [36], стр. 54)

$$\int_0^{\infty}e^{-st}W(t,0)dt=\frac{1}{\omega(s)}. \qquad (3.1.4)$$

Сохраняем обозначения для B, F^* и $\psi^*(s)$, $s>0$.

§ 3.2. Асимптотика вспомогательных функций.

Нам понадобятся: уравнение $\nu(s)=0$ с его наибольшим неотрицательным вещественным корнем $s=\omega$; уравнение $\nu(z)=s$ с его единственным корнем $z=\omega(s)$. Исследуются их порядки, стремление к нулю при критической загрузке и устанавливается их правильное изменение.

Лемма 3.1. Если выполнено условие (3) и $\rho_1>1$, то корень $s=\omega$ при $\rho_1\downarrow 1$ удовлетворяет соотношениям: 1) $\omega\xrightarrow[\rho_1\downarrow 1]{}0$, 2) $\omega^{\gamma-1}L\left(\frac{1}{\omega}\right)\sim\frac{\rho}{B}\xrightarrow[\rho_1\downarrow 1]{}0$, 3) $\omega\sim\left(\frac{\rho}{\mathrm{B}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}L_2^{(\gamma-1)}\left(\frac{\mathrm{B}}{\rho}\right)$, где функция $L_2^{(\gamma-1)}(\bullet)$ определяется формулой $(2.2.10)$.

Доказательство. Имеем $\omega=\lambda(1-\psi(\omega))=\lambda a\omega\left(\frac{1-\psi(\omega)}{a\omega}\right)=\rho_1\omega\psi^*(\omega)$. Так как $\omega>0$ при $\rho_1>1$ (см. [36], стр. 50), то $\psi^*(\omega)=(\rho_1)^{-1}<1$. Поскольку $\psi^*(s)$ – ПЛС ФР F^*, то $\psi^*(s)$ убывает и ограничено единицей. Покажем, что при условии (3) функция $\psi^*(s)$ ни при каком значении $s>0$ не равна единице. Предположим противное, что $\psi^*(s_0)=1$ в некоторой точке $s_0>0$. Тогда, так как функция $\psi^*(s)$ убывает, то $\psi^*(s)\equiv 1$ на $(0,s_0]$, в том числе и в достаточно малой окрестности $S(o)$ нуля. Следовательно, $\psi^*(s)=\dfrac{1-\psi(s)}{as}\equiv 1$, $s\in S(o)$, откуда получаем, что $\psi(s)\equiv 1-as$ при $s\in S(o)$. Но это противоречит (3), так как $A>0$ и $L(x)>0$. Тогда из неравенств $1\ge\psi^*(0)\ge\psi^*(\omega)=(\rho_1)^{-1}\xrightarrow[\rho_1\downarrow 1]{}1$ следует, что $\omega\xrightarrow[\rho_1\downarrow 1]{}0$.

Докажем соотношение 2). Из (3) (по уже доказанному) при $\rho_1\downarrow 1$ имеем $(\rho_1-1)\omega=\lambda(\psi(\omega)-1+a\omega)\sim \mathrm{B}\omega^{\gamma}L(1/\omega)$. Так как $\omega>0$ при $\rho_1>1$, то $\omega^{\gamma-1}L\left(\dfrac{1}{\omega}\right)\sim\dfrac{\rho}{\mathrm{B}}$. По условию (2), $\omega^{\gamma-1}L(1/\omega)\sim\rho/\mathrm{B}\xrightarrow[\rho_1\downarrow 1]{}0$. 3) вытекает из Следствия 2.1. Лемма 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Хотя при $\rho_1<1$ корень $s=\omega$ равен нулю (см. [36], стр. 50), тем не менее, в случае $\rho_1\uparrow 1$ для величин порядка $\left(\dfrac{\rho}{B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}L_2^{(\gamma-1)}\left(\dfrac{B}{\rho}\right)$ используем обозначение $\omega\sim\left(\dfrac{\rho}{B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}L_2^{(\gamma-1)}\left(\dfrac{B}{\rho}\right)$, предполагая, что $\dfrac{\rho}{B}\xrightarrow[\rho_1\uparrow 1]{}0$ (которое, по лемме 3.1, в случае $\rho_1\downarrow 1$ справедливо).

Лемма 3.2. При условии (3) для фиксированного s решение $z=\omega(s)$, имеет разложение

$$\omega(\alpha s)\sim\beta(\alpha,\rho)A(s),\ (\alpha,\rho)\to 0, \tag{3.2.1}$$

где $\beta(\alpha,\rho)=\begin{cases}\omega, & \rho_1\downarrow 1,\quad \alpha=o(\rho\omega),\\ \alpha/\rho, & \rho_1\uparrow 1,\quad \alpha=o(\rho\omega),\\ \omega, & \rho_1\uparrow\downarrow 1,\quad \alpha\sim\rho\omega,\\ \left(\dfrac{\alpha}{B}\right)^{\frac{1}{\gamma}}L_2^{(\gamma)}\left(\dfrac{B}{\alpha}\right), & \rho_1\uparrow\downarrow 1,\quad \rho\omega=o(\alpha)\end{cases}$, $A(s)=A(s,\alpha)=\begin{cases}1, & \alpha=o(\rho\omega), & \rho_1\downarrow 1,\\ s, & \alpha=o(\rho\omega), & \rho_1\uparrow 1,\\ \nabla(s), & \alpha\sim\rho\omega, & \rho_1\downarrow 1,\\ \Delta(s), & \alpha\sim\rho\omega, & \rho_1\uparrow 1,\\ s^{1/\gamma}, & \rho\omega=o(\alpha), & \rho_1\uparrow\downarrow 1\end{cases}$.

Здесь $(\alpha,\rho)\to 0$ означает, что одновременно $\alpha\to 0$ и $\rho\to 0$.

Доказательство. Пусть $z=\omega(s)$ – единственный корень уравнения $v(z)=s$ в области $\operatorname{Re} z\ge 0$ (существование и единственность см. [36], стр. 51). Обозначив

$$\beta(s)=1+\frac{s}{\lambda}-\frac{\omega(s)}{\lambda}=\psi(\omega(s)), \tag{3.2.2}$$

получаем

$$\omega(s)=s+\lambda-\lambda\beta(s), \tag{3.2.3}$$

$$\psi(s+\lambda-\lambda\beta(s))=\beta(s). \tag{3.2.4}$$

Известно (см. [40], стр. 497), что решение $\beta(s)$ уравнения $(3.2.4)$ является ПЛС для некоторой (собственной при $\rho_1\le 1$ и несобственной при $\rho_1>1$) ФР. Следовательно,

$$\beta'(s)\le 0. \tag{3.2.5}$$

Из $(3.2.3)$ и $(3.2.5)$ получим $\omega'(s)=1-\lambda\beta'(s)>0$, т. е. $\omega(s)$ возрастает. Следовательно, $\omega(s)\downarrow\omega$ при $s\to 0$. Известно, что (см. [40], стр. 50) $\omega=0$ при $\rho_1\le 1$, и $\omega>0$ при $\rho_1>1$. Из леммы 3.1 имеем, что $\omega\xrightarrow[\rho_1\downarrow 1]{}0$. Следовательно, независимо от случаев $\rho_1\uparrow 1$, или $\rho_1\downarrow 1$,

$$\omega(s)\xrightarrow[\substack{\rho\to 0\\ s\to 0}]{}0. \tag{3.2.6}$$

Для получения разложения функции $\omega(\alpha s)$ воспользуемся условием (3) и свойствами $L(x)$. Обозначим $s^*=\alpha s$. Тогда из определения $\omega(s)$ и (3) следует, что:

$$(\rho_1-1)\omega(s^*)+s^*=\lambda\left(\psi\left(\omega(s^*)\right)-1+a\omega(s^*)\right)\sim B\omega(s^*)^\gamma L\left(1/\omega(s^*)\right). \tag{3.2.7}$$

Отдельно рассмотрим случаи $\rho_1\downarrow 1$ и $\rho_1\uparrow 1$. Обозначим $\varepsilon(s)=B(\omega(s))^\gamma L\left(\dfrac{1}{\omega(s)}\right)$. Пусть сначала $\rho_1\downarrow 1$. Из $(3.2.7)$ следует: $\lim\limits_{\rho_1\downarrow 1}\left[\rho\omega(s^*)/\varepsilon(s^*)+s^*/\varepsilon(s^*)\right]=1$.

Так как оба слагаемых неотрицательны, то существуют пределы:

$$0\le\lim_{\rho_1\downarrow 1}\left[\rho\omega(s^*)/\varepsilon(s^*)\right]=f_1(s)\le 1 \text{ и } 0\le\lim_{\rho_1\downarrow 1}\left[s^*/\varepsilon(s^*)\right]=f_2(s)\le 1.$$

Отдельно рассмотрим возможные случаи: 1) $\begin{cases}f_1(s)=1\\ f_2(s)=0\end{cases}$, 2) $\begin{cases}0<f_1(s),f_2(s)<1\\ f_1(s)+f_2(s)=1\end{cases}$, 3) $\begin{cases}f_1(s)=0\\ f_2(s)=1\end{cases}$.

Случай 1): Перепишем в следующем виде: $\rho\omega(s^*)/\varepsilon(s^*)\to 1$, $s^*/\varepsilon(s^*)\to 0$.

Согласно Следствию 2.1, из первого соотношения имеем

$$\omega(s^*)\sim(\rho/\mathrm{B})^{1/(\gamma-1)}L_2^{(\gamma-1)}(\mathrm{B}/\rho) \text{ при } \rho_1\downarrow 1. \tag{3.2.8}$$

Из второго соотношения выводим условие согласованного (α,ρ) стремления, при котором верно $(3.2.8)$, т. е. $\alpha=o\left(\mathrm{B}\omega(s^*)^\gamma L\left(1/\omega(s^*)\right)\right)=o\left(\rho(\rho/\mathrm{B})^{1/(\gamma-1)}L_2^{(\gamma-1)}(\mathrm{B}/\rho)\right)=o(\rho\omega)$.

В случае 2) при $\rho_1\downarrow 1$ справедливы цепочки соотношений:

$$\begin{cases}\dfrac{\rho\omega(s^*)}{\varepsilon(s^*)}\to f_1(s)\\[2ex] \dfrac{s^*}{\varepsilon(s^*)}\to 1-f_1(s)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\omega(s^*)\right)^{\gamma-1}L\left(\dfrac{1}{\omega(s^*)}\right)\sim\dfrac{\rho}{\mathrm{B}f_1(s)}\\[2ex] \left(\omega(s^*)\right)^{\gamma}L\left(\dfrac{1}{\omega(s^*)}\right)\sim\dfrac{\alpha s}{\mathrm{B}(1-f_1(s))}\end{cases}. \tag{3.2.9}$$

Согласно Следствию 2.1, из первого соотношения $(3.2.9)$ получим

$$\omega(s^*)\sim\left(\frac{\rho}{\mathrm{B}f_1(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}L_2^{(\gamma-1)}\left(\frac{\mathrm{B}f_1(s)}{\rho}\right)\sim\left(\frac{\rho}{\mathrm{B}f_1(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}L_2^{(\gamma-1)}\left(\frac{\mathrm{B}}{\rho}\right). \tag{3.2.10}$$

Из $(3.2.9)$ следует: $\dfrac{\alpha}{\rho\omega(s^*)}\sim\dfrac{1-f_1(s)}{sf_1(s)}$ при $\rho_1\downarrow 1$. Тогда

$$\frac{\rho}{\alpha}\left(\frac{\rho}{\mathrm{B}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}L_2^{(\gamma-1)}\left(\frac{\mathrm{B}}{\rho}\right)\sim\frac{s\left(f_1(s)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{1-f_1(s)}. \tag{3.2.11}$$

Правая часть $(3.2.11)$ не зависит от ρ и α, т. е. $\alpha \sim \rho\left(\frac{\rho}{\mathrm{B}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} L_2^{(\gamma-1)}\left(\frac{\mathrm{B}}{\rho}\right) \sim \rho\omega$. Из условия $\left[1-f_1(s)\right]s^{-1}\left(f_1(s)\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \equiv 1$ находим $\left(f_1(s)^{-\frac{1}{\gamma-1}}\right)^{\gamma} - \left(f_1(s)^{-\frac{1}{\gamma-1}}\right) = s$. Итак, $\left(f_1(s)\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} = \nabla(s)$.

Следовательно, при $\rho_1 \downarrow 1$ $\omega\left(s^*\right) \sim \left(\frac{\rho}{\mathrm{B}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \nabla(s) L_2^{(\gamma-1)}\left(\frac{\mathrm{B}}{\rho}\right) \sim \omega\nabla(s)$.

Случай 3): Имеем $s^*/\varepsilon\left(s^*\right) \to 1$, $\rho\omega\left(s^*\right)/\varepsilon\left(s^*\right) \to 0$ при $\rho_1 \downarrow 1$. По Следствию 2.1, из первого соотношения получим

$$\omega\left(s^*\right) \sim \left(\frac{\alpha s}{B}\right)^{1/\gamma} L_2^{(\gamma)}\left(\frac{\mathrm{B}}{\alpha s}\right) \sim \left(\frac{\alpha s}{\mathrm{B}}\right)^{1/\gamma} L_2^{(\gamma)}\left(\frac{\mathrm{B}}{\alpha}\right). \tag{3.2.12}$$

Из второго соотношения

$$\frac{\mathrm{B}}{\rho}\omega\left(s^*\right)^{\gamma-1} L\left(1/\omega\left(s^*\right)\right) = \frac{\omega\left(s^*\right)^{\gamma} L\left(1/\omega\left(s^*\right)\right)}{\rho\omega\left(s^*\right)/\mathrm{B}} \xrightarrow[\rho_1\downarrow 1]{} \infty. \tag{3.2.13}$$

По первому соотношению, $\omega\left(s^*\right)^{\gamma} L\left(1/\omega\left(s^*\right)\right) \sim \alpha s/\mathrm{B}$ при $\rho_1 \downarrow 1$. Учитывая $(3.2.12)$, получаем что соотношения $(3.2.13)$ и $\frac{\left(\alpha^{\gamma-1}\mathrm{B}\right)^{1/\gamma}}{\rho L_2^{(\gamma)}(\mathrm{B}/\alpha)} \to \infty$ или, что то же самое, $\frac{\alpha}{\rho}\left(\frac{\rho}{\mathrm{B}}\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} L_2^{(\gamma)}\left(\frac{\mathrm{B}}{\alpha}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \to \infty$ эквивалентны. Согласно Замечанию 2.2, при $\rho_1 \downarrow 1$ заключаем: $\frac{\rho}{\alpha}\left(\frac{\rho}{\mathrm{B}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} L_2^{(\gamma-1)}\left(\frac{\mathrm{B}}{\rho}\right) \to 0$, или $\rho\omega = o(\alpha)$. Доказательство Леммы 3.2 при $\rho_1 \downarrow 1$ завершено. Докажем справедливость Леммы 3.2 при $\rho_1 \uparrow 1$. В силу $(3.2.7)$, существует предел $\lim\limits_{\rho_1\uparrow 1}\left[\varepsilon\left(s^*\right)/s^* + \rho\omega\left(s^*\right)/s^*\right] = 1$. Следовательно, $0 \le \lim\limits_{\rho_1\uparrow 1}\left[\rho\omega\left(s^*\right)/s^*\right] = \varphi_1(s) \le 1$ и $0 \le \lim\limits_{\rho_1\uparrow 1}\left[\varepsilon\left(s^*\right)/s^*\right] = \varphi_2(s) \le 1$.

Далее, как и при $\rho_1 \downarrow 1$, рассмотрим случаи:

$$4)\ \begin{cases}\varphi_1(s)=1\\ \varphi_2(s)=0\end{cases},\ 5)\ \begin{cases}0<\varphi_1(s),\varphi_2(s)<1\\ \varphi_1(s)+\varphi_2(s)=1\end{cases},\ 6)\ \begin{cases}\varphi_1(s)=0\\ \varphi_2(s)=1\end{cases}.$$

Случай 4): Из обозначений при $\rho_1 \uparrow 1$ имеем: $\rho\omega\left(s^*\right)/s^* \to 1$, $\varepsilon\left(s^*\right)/s^* \to 0$. Из первого соотношения $\omega\left(s^*\right) \sim s^*/\rho$, с учетом же второго получаем: $\omega\left(s^*\right)^{\gamma-1} L\left(1/\omega\left(s^*\right)\right) = o(\rho/\mathrm{B})$. Следовательно, согласно Следствию 2.1, из монотонности соответствующей ПМФ при $\rho_1 \uparrow 1$ выводим соотношение: $\omega\left(s^*\right) = o\left((\rho/\mathrm{B})^{1/(\gamma-1)} L_2^{(\gamma-1)}(\mathrm{B}/\rho)\right)$.

Аналогично, нетрудно показать, что при $\rho_1 \uparrow 1$ для α справедливо соотношение эквивалентности $\alpha \sim \rho\omega\left(s^*\right)/s = o\left(\rho(\rho/B)^{\frac{1}{\gamma-1}} L_2^{(\gamma-1)}(B/\rho)\right) = o(\rho\omega)$.

В случае 5) при $\rho_1 \uparrow 1$ имеем: $\rho\omega\left(s^*\right)/s^* \to \varphi_1(s)$, $\varepsilon\left(s^*\right)/s^* \to \varphi_2(s)$. Из первого соотношения $\omega\left(s^*\right) \sim \alpha\rho^{-1}s\varphi_1(s)$, с учетом же второго выводим: $\omega\left(s^*\right)^{\gamma-1} L\left(1/\omega\left(s^*\right)\right) \sim (\rho/\mathrm{B})\left(\varphi_2(s)/\varphi_1(s)\right)$. Следовательно, согласно Следствию 2.1,

$\omega(s^*) \sim (\rho/\mathrm{B})^{\frac{1}{\gamma-1}} (\varphi_2(s)/\varphi_1(s))^{\frac{1}{\gamma-1}} L_2^{(\gamma-1)}(\mathrm{B}/\rho)$. Итак, в данном случае при $\rho_1 \uparrow 1$ для $\omega(s^*)$ получено два разложения. Следовательно, $\dfrac{\alpha}{\rho(\rho/\mathrm{B})^{\frac{1}{\gamma-1}} L_2^{(\gamma-1)}(\mathrm{B}/\rho)} \sim \left(\dfrac{\varphi_2(s)}{\varphi_1(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \dfrac{1}{\varphi_1(s)s}$.

С учетом того, что правая сторона полученного соотношения не зависит от ρ и α, при $\rho_1 \uparrow 1$ имеем: $\alpha \sim \rho(\rho/\mathrm{B})^{\frac{1}{\gamma-1}} L_2^{(\gamma-1)}(\mathrm{B}/\rho) \sim \rho\omega$, а $\varphi_1(s)$ находим из условия $\left(\dfrac{1-\varphi_1(s)}{\varphi_1(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \dfrac{1}{\varphi_1(s)s} = 1$. Это соотношение приводится к виду:

$$\left[\left((1-\varphi_1(s))/\varphi_1(s)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right]^{\gamma} + \left((1-\varphi_1(s))/\varphi_1(s)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = s,$$

т. е. $\left((1-\varphi_1(s))/\varphi_1(s)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \Delta(s)$, $\Delta(0)=0$ – решение уравнения $z^{\gamma}+z=s$. Следовательно, $\omega(s^*) \sim (\rho/\mathrm{B})^{\frac{1}{\gamma-1}} \Delta(s) L_2^{(\gamma-1)}(\mathrm{B}/\rho) \sim \omega\Delta(s)$ при $\alpha \sim \rho\omega$.

Случай 6) запишем в следующем виде: $\varepsilon(s^*)/s^* \to 1$, $\rho\omega(s^*)/s^* \to 0$. Из первого соотношения, по Следствию 2.1, $\omega(s^*) \sim (\alpha s/\mathrm{B})^{1/\gamma} L_2^{(\gamma)}(\mathrm{B}/\alpha)$. Из второго соотношения: $\dfrac{\alpha s}{\rho\omega(s^*)} \to \infty$. Следовательно, $\dfrac{\rho}{\alpha}\left(\dfrac{\alpha}{\mathrm{B}}\right)^{1/\gamma} L_2^{(\gamma)}\left(\dfrac{\mathrm{B}}{\alpha}\right) \to 0$ при $\rho_1 \uparrow 1$, что эквивалентно соотношению $\dfrac{\alpha}{\rho}\left(\dfrac{\rho}{\mathrm{B}}\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left(L_2^{(\gamma)}\left(\dfrac{\mathrm{B}}{\alpha}\right)\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \to \infty$. Поэтому, согласно Замечанию 2.2: $\rho\omega = o(\alpha)$ при $\rho_1 \uparrow 1$. Лемма 3.2 доказана.

Следствие 3.1. Если выполнено условие (3), то при $\alpha(\rho) \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$

$$\omega(\alpha(\rho)s) \sim \beta(\rho) A(s) L_{\circ},\ \rho_1 \to 1,\ \text{где: } \beta(\rho) = \begin{cases} (\rho/\mathrm{B})^{1/(\gamma-1)}, & \alpha(\rho)=o(\rho\omega), \quad \rho_1 \downarrow 1, \\ \alpha(\rho)\rho^{-1}, & \alpha(\rho)=o(\rho\omega), \quad \rho_1 \uparrow 1, \\ (\rho/\mathrm{B})^{1/(\gamma-1)}, & \alpha(\rho) \sim \rho\omega, \quad \rho_1 \uparrow\downarrow 1, \\ (\alpha(\rho)/\mathrm{B})^{1/\gamma}, & \rho\omega = o(\alpha(\rho)), \quad \rho_1 \uparrow\downarrow 1 \end{cases};$$

$$A(s)=A(s,\alpha(\rho)) = \begin{cases} 1, & \alpha(\rho)=o(\rho\omega), \quad \rho_1 \downarrow 1, \\ s, & \alpha(\rho)=o(\rho\omega), \quad \rho_1 \uparrow 1, \\ \nabla(s), & \alpha(\rho)\sim\rho\omega, \quad \rho_1 \downarrow 1, \\ \Delta(s), & \alpha(\rho)\sim\rho\omega, \quad \rho_1 \uparrow 1, \\ s^{1/\gamma}, & \rho\omega=o(\alpha(\rho)), \quad \rho_1 \uparrow\downarrow 1 \end{cases};\ L_{\circ} = \begin{cases} L_2^{(\gamma-1)}\left(\dfrac{\mathrm{B}}{\rho}\right), & \alpha(\rho)=o(\rho\omega), \quad \rho_1 \downarrow 1, \\ 1, & \alpha(\rho)=o(\rho\omega), \quad \rho_1 \uparrow 1, \\ L_2^{(\gamma-1)}\left(\dfrac{\mathrm{B}}{\rho}\right), & \alpha(\rho)\sim\rho\omega, \quad \rho_1 \downarrow\uparrow 1, \\ L_2^{(\gamma)}\left(\dfrac{\mathrm{B}}{\alpha(\rho)}\right), & \rho\omega=o(\alpha(\rho)), \quad \rho_1 \downarrow\uparrow 1 \end{cases}.$$

Следствие 3.2. Если в условиях леммы 3.2 $L(x) \sim 1$ при $x \to \infty$ и $\alpha(\rho) = \rho(\rho/\mathrm{B})^{\alpha}$, $0 < \alpha < \infty$, то $\omega\left(\rho(\rho/\mathrm{B})^{\alpha} s\right) \sim \beta_{\alpha}(\rho) A_{\alpha}(s)$, $\rho \to 0$, где

$$\beta_\alpha(\rho)=\begin{cases}\left(\dfrac{\rho}{\mathrm{B}}\right)^{1/(\gamma-1)}, & \rho_1\downarrow 1, \quad \alpha>(\gamma-1)^{-1},\\ \left(\dfrac{\rho}{\mathrm{B}}\right)^{\alpha}, & \rho_1\uparrow 1, \quad \alpha>(\gamma-1)^{-1},\\ \left(\dfrac{\rho}{\mathrm{B}}\right)^{1/(\gamma-1)}, & \rho_1\uparrow\downarrow 1, \quad \alpha=(\gamma-1)^{-1},\\ \left(\dfrac{\rho}{\mathrm{B}}\right)^{(\alpha+1)/\gamma}, & \rho_1\uparrow\downarrow 1, \quad 0<\alpha<(\gamma-1)^{-1}\end{cases};\ A_\alpha(s)=\begin{cases}1, & \rho_1\downarrow 1, \quad \alpha>(\gamma-1)^{-1},\\ s, & \rho_1\uparrow 1, \quad \alpha>(\gamma-1)^{-1},\\ \nabla(s), & \rho_1\downarrow 1, \quad \alpha=(\gamma-1)^{-1},\\ \Delta(s), & \rho_1\uparrow 1, \quad \alpha=(\gamma-1)^{-1},\\ s^{1/\gamma}, & \rho_1\uparrow\downarrow 1, \quad 0<\alpha<(\gamma-1)^{-1}\end{cases}.$$

Доказательство. В этом случае $L_2^{(\gamma-1)}(x)\sim 1$ и $L_2^{(\gamma)}(x)\sim 1$ при $x\to\infty$.

§ 3.3. Предельные риски.

В этом параграфе доказываются основные предельные теоремы о критических рисках в Портфеле 2.

Теорема 3.1. Пусть выполнено условие (3) и $\theta(\rho)\xrightarrow[\rho_1\to 1]{}0$. Тогда невырожденная, собственная предельная ФР $\lim\limits_{\rho_1\uparrow 1}P\{\theta(\rho)r\le x\}=W_o(x)$ существует т. и т. т., к. $\theta(\rho)\sim\omega$, причем $W_o(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & \gamma=2,\\ \int\limits_0^\infty e^{-t}G_{\gamma-1}\left(xt^{1/(1-\gamma)}\right)dt, & 1<\gamma<2\end{cases}.$

Доказательство. ПЛС ФР $W(x)=P\{r\le x\}$ задается формулой $(3.1.1)$. Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty e^{-sx}dP\{\theta(\rho)r\le x\}=\Omega(\theta(\rho)s)=\rho\theta(\rho)s/\nu(\theta(\rho)s).$$

Согласно Замечанию 2.4, $\nu(\theta(\rho)s)\sim\alpha_1(\rho)b(s)$ при $\rho\to 0$ (рассматривается только случай $\rho_1\uparrow 1$). Следовательно, по обобщенной теореме непрерывности (см. [40], стр. 486), собственная или несобственная предельная ФР $W_o(x)$ существует т. и т. т., к. $\rho\theta(\rho)\sim\alpha_1(\rho)$ при $\rho_1\uparrow 1$. Тогда $\Omega(\theta(\rho)s)\to\dfrac{s}{b(s)}$ и, по той же теореме, предельная ФР $W_o(x)$ – собственная ФР т. и т. т., к.

$$\lim_{s\to 0}\left[\lim_{\rho_1\uparrow 1}\Omega(\theta(\rho)s)\right]=\lim_{s\to 0}\left(s/b(s)\right)=1. \qquad (3.3.1)$$

Легко видеть, что условие $(3.3.1)$ имеет место только в случае $\theta(\rho)\sim\omega$. При этом, $\Omega_o(s)=\lim\limits_{\rho_1\uparrow 1}\Omega(\theta(\rho)s)=\left(1+s^{\gamma-1}\right)^{-1}$.

Если $\gamma=2$, то $\Omega_o(s)=(1+s)^{-1}$ – ПЛС закона $W_o(x)=1-e^{-x}$.

Если $1<\gamma<2$, то $\Omega_o(s)=\dfrac{1}{1+s^{\gamma-1}}=\int\limits_0^\infty e^{-\left(1+s^{\gamma-1}\right)t}dt=\int\limits_0^\infty e^{-t}\exp\left\{-\left(st^{1/(\gamma-1)}\right)^{\gamma-1}\right\}dt$. Поскольку $0<\gamma-1<1$, то функция $e^{-ts^{\gamma-1}}=e^{-\left(st^{1/(\gamma-1)}\right)^{\gamma-1}}$ есть ПЛС для $G_{\gamma-1}(x)$, т.е.

$$e^{-ts^{\gamma-1}}=\int_0^\infty e^{-sxt^{1/(\gamma-1)}}dG_{\gamma-1}(x)=\int_0^\infty e^{-sx}d_xG_{\gamma-1}\left(xt^{1/(1-\gamma)}\right).$$

Тогда $\Omega_o(s)=\int_0^\infty e^{-t}\left\{\int_0^\infty e^{-sx}d_xG_{\gamma-1}\left(xt^{1/(1-\gamma)}\right)\right\}dt=\int_0^\infty e^{-sx}d_x\left\{\int_0^\infty e^{-t}G_{\gamma-1}\left(xt^{1/(1-\gamma)}\right)dt\right\}$.

Следовательно, $W_o(x)=\int_0^\infty e^{-t}G_{\gamma-1}\left(xt^{1/(1-\gamma)}\right)dt$. Теорема 1.2 доказана.

Следствие 3.3. В условиях теоремы 3.1 $W_o(x)=1-\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k x^{k(\gamma-1)}}{\Gamma(1+k(\gamma-1))}$.

Доказательство. ПЛС для ФР $1-G_{\gamma-1}\left(xt^{-1/(\gamma-1)}\right)$ (если $\gamma\in(1,2)$) является функцией Миттаг – Леффлера $\varphi_x(s)=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-s)^k x^{k(\gamma-1)}}{\Gamma(1+k(\gamma-1))}$ (см. [40], стр. 510), поэтому интегрированием по частям выводим:

$$\int_0^\infty e^{-t}G_{\gamma-1}\left(xt^{-1/(\gamma-1)}\right)dt=-\int_0^\infty G_{\gamma-1}\left(xt^{-1/(\gamma-1)}\right)de^{-t}=-e^{-t}G_{\gamma-1}\left(\frac{x}{t^{1/(\gamma-1)}}\right)\Bigg|_{t=0}^{\infty}+\int_0^\infty e^{-t}d_tG_{\gamma-1}\left(xt^{-1/(\gamma-1)}\right)=$$

$$=1-\int_0^\infty e^{-t}d_t\left(1-G_{\gamma-1}\left(xt^{-1/(\gamma-1)}\right)\right)=1-\varphi_x(1)=1-\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k x^{k(\gamma-1)}}{\Gamma(1+k(\gamma-1))}.$$

В случае $\gamma=2$ имеем $1-e^{-x}=1-\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k x^k}{k!}$. Следствие 3.3 доказано.

Теорема 3.2. Пусть выполнено условие (3), $\theta(\rho)\xrightarrow[\rho\to0]{}0$ и $t\to\infty$ так, что $t\alpha_1(\rho)\to\tau$, $0\le\tau\le\infty$ (обозначим (ρ,t)), где $\alpha_1(\rho)$ определено в Замечании 2.4. Тогда: 1) при $\tau=0$ не существует невырожденный собственный предел $\lim_{(\rho,t)}P\{\theta(\rho)r(t)\le x\}=W_\tau(x)$.

2) Если $0<\tau<\infty$, то при любом $\theta(\rho)\xrightarrow[\rho\to0]{}0$ существует собственный невырожденный предел $\lim_{(\rho,t)}P\{\theta(\rho)r(t)\le x\}=W_\tau(x)$ с ПЛС, равным

$$\chi_\tau(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dW_\tau(x)=\begin{cases}e^{-\tau s}, & \theta(\rho)=o(\omega)\text{ при }\rho_1\downarrow1,\\ e^{\tau b(s)}\left[1-s\int_0^\tau e^{-b(s)v}dF_0(v)\right], & \text{в остальных случаях}\end{cases},$$

где $\int_0^\infty e^{-sx}dF_0(x)=\frac{1}{A(s)}$. Здесь $A(s)=A(s,\alpha_1(\rho))$.

3) Если $\tau=\infty$, то невырожденная собственная предельная ФР $\lim_{(\rho,t)}P\{\theta(\rho)r(t)\le x\}=W_\infty(x)$ существует т. и т. т., к. $\theta(\rho)\sim\omega$ при $\rho_1\uparrow1$, причем

$$W_\infty(x)=W_o(x)=1-\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k x^{k(\gamma-1)}}{\Gamma(1+k(\gamma-1))}.$$

Доказательство. Обозначим через $s^*=\theta(\rho)s$. Из формулы (3.1.2) имеем $\Omega(t,s)=e^{\nu(s)t}-s\int_0^t e^{\nu(s)y}W(t-y,0)dy=e^{\nu(s)t}\left\{1-s\int_0^t e^{-\nu(s)u}dF(u)\right\}$, где $F(u)=\int_0^u W(u,0)du$. Тогда

$$\int_0^\infty e^{-sx} d_x P\{\theta(\rho) r(t) \le x\} = \Omega(t, s^*) = e^{\nu(s^*)t}\left\{1 - s\int_0^t e^{-\nu(s^*)u} d_u\left[\theta(\rho)F(u)\right]\right\}. \qquad (3.3.2)$$

Пусть $\tau = 0$. Замена $u = vt$ в $(3.3.2)$ дает $\Omega(t, s^*) = e^{\nu(s^*)t}\left\{1 - s\int_0^1 e^{-\nu(s^*)tv} d_v\left[\theta(\rho)F(vt)\right]\right\}$.

Так как $e^{\nu(s^*)t} \xrightarrow[(\rho,t)]{} 1$, то невырожденная собственная предельная ФР существует т. и т. т., к. существует конечный предел $\lim\limits_{(\rho,t)}\left[\theta(\rho)F(vt)\right] = F_o(v)$. Из формулы $(3.1.4)$ имеем: $\int_0^\infty e^{-sv} d_v\left[\theta(\rho)F(vt)\right] = \dfrac{\theta(\rho)}{\omega(s/t)}$. В силу Леммы 3.2, выводим: $\omega(s/t) \sim \beta(1/t, \rho)A(s)$. Следовательно, по обобщенной теореме непрерывности (см. [40], стр. 486), конечный предел $F_o(v)$ существует т. и т. т., к.

$$\theta(\rho) \sim \beta(1/t, \rho). \qquad (3.3.3)$$

Представим условие $(3.3.3)$ в виде:

$$\begin{cases} \theta(\rho) \sim \omega, & t^{-1} = o(\rho\omega), \quad \rho_1 \downarrow 1, \\ \theta(\rho)\rho t \sim 1, & t^{-1} = o(\rho\omega), \quad \rho_1 \uparrow 1, \\ \theta(\rho) \sim \omega, & t^{-1} \sim \rho\omega, \quad \rho_1 \to 1, \\ \theta(\rho) \sim (Bt)^{-1/\gamma} L_2^{(\gamma)}(Bt) \Leftrightarrow B\theta(\rho)^\gamma L(1/\theta(\rho)) \sim t^{-1}, & \rho\omega = o(t^{-1}), \quad \rho_1 \to 1. \end{cases} \qquad (3.3.4)$$

Непосредственной проверкой показываем, что в соотношениях $(3.3.4)$ ни один из четырех вышеуказанных случаев не совместим с условием $\alpha_1(\rho)t \to 0$, т. е. в случае $\tau = 0$ невырожденный предельный закон не существует.

Пусть $0 < \tau < \infty$. В этом случае, произведя замену $u = v/\alpha_1(\rho)$ в $(3.3.2)$, получим:

$$\Omega(t, s^*) = e^{\nu(s^*)t}\left\{1 - s\int_0^{t\alpha_1(\rho)} e^{-\nu(s^*)v/\alpha_1(\rho)} d_v\left[\theta(\rho)F(v/\alpha_1(\rho))\right]\right\}. \qquad (3.3.5)$$

По Замечанию 2.4, $\nu(s^*)t \xrightarrow[(\rho,t)]{} \tau b(s)$ и $\nu(s^*)/\alpha_1(\rho) \xrightarrow[\rho\to 0]{} b(s)$. Произведя замену $u = v/\alpha_1(\rho)$ в $(3.1.4)$ и взяв $z = \alpha_1(\rho)s$, получаем $\int_0^\infty e^{-sv} d\left[\theta(\rho)F(v/\alpha_1(\rho))\right] = \dfrac{\theta(\rho)}{\omega(\alpha_1(\rho)s)}$.

В силу Следствия 3.1 (используя Следствие 2.1), $\omega(\alpha_1(\rho)s) \sim \omega A(s)$ для случая $\theta(\rho) = o(\omega)$ при $\rho_1 \downarrow 1$. В остальных же случаях $\omega(\alpha_1(\rho)s) \sim \theta(\rho)A(s)$. Следовательно,

$$\lim_{\rho\to 0}\int_0^\infty e^{-sx} d_v\left[\theta(\rho)F(v/\alpha_1(\rho))\right] = \begin{cases} 0, & \theta(\rho) = o(\omega), \rho_1 \downarrow 1, \\ 1/A(s), & \text{в остальных слу чаях} \end{cases}.$$

По обобщенной теореме непрерывности, $\lim\limits_{\rho\to 0}\left[\theta(\rho)F(v/\alpha_1(\rho))\right] = F_o(v)$, где $F_o(v) = 0$, если $\theta(\rho) = o(\omega)$ при $\rho_1 \downarrow 1$, а в остальных случаях $\int_0^\infty e^{-sx} dF_o(x) = \dfrac{1}{A(s)}$. Теперь, воспользовавшись теоремой Хелли (см. [47], стр. 315), перейдем в $(3.3.5)$ к пределу (ρ, t) и получим $\lim\limits_{(\rho,t)}\Omega(t, s^*) = \chi_\tau(s)$.

Пусть $\tau = \infty$. Известно, что (см. [36], стр. 52) существует предел

$$\lim_{t\to\infty} W(t,x) = W(x) = \begin{cases} 0, & \rho_1 \ge 1 \\ 1-(1-\rho_1)\int\limits_{+0}^{\infty} d_y P\{S(y)\le y+x\}, & \rho_1 < 1 \end{cases}, \; x \ge 0 .$$

Если же $\rho_1 < 1$, то справедлива формула Полячека – Хинчина. Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} \Omega(t,s) = \Omega(s) = \begin{cases} \rho s(\nu(s))^{-1}, & \rho_1 < 1, \\ 0, & \rho_1 \ge 1 \end{cases}\text{[13]}. \tag{3.3.6}$$

Если при $\alpha_1(\rho)t \to \infty$ существует конечный двойной предел $\lim\limits_{(\rho,t)} \Omega(t,s^*) = \Omega_o(s)$, то, по теореме о последовательных пределах (см. [41], стр. 168), существует и последовательный предел $\lim\limits_{\rho\to 0}\lim\limits_{t\to\infty} \Omega(t,s^*)$, равный двойному $\Omega_o(s)$. Поэтому из соотношения $(3.3.6)$ выводим: $\lim\limits_{\rho\to 0}\lim\limits_{t\to\infty} \Omega(t,s^*) = \begin{cases} 0, & \rho_1 \ge 1, \\ \lim\limits_{\rho\to 0} \Omega(s^*), & \rho_1 < 1 \end{cases}$. По Теореме 3.1, предел $\lim\limits_{\rho\to 0} \Omega(s^*) = \Omega_o(s)$ – ПЛС собственной ФР т. и т. т., к. $\theta(\rho) \sim \omega$, причем $\Omega_o(s) = (1+s^{\gamma-1})^{-1}$. С другой стороны, если $\theta(\rho) \sim \omega$ при $\rho_1 \uparrow 1$, то существует двойной предел $\lim\limits_{(\rho,t)} \Omega(t,s^*) = \Omega_o(s)$.

Теорема 3.2 доказана.

Следствие 3.4. В теореме 3.2, если $L(x) \sim 1$ при $x\to\infty$, $\theta(\rho) = (\rho/B)^{\alpha}$, $0<\alpha<\infty$, и $q_\alpha(\rho)t \to \tau$, $0<\tau<\infty$, то существует невырожденный предел $\lim\limits_{(\rho,t)} P\{(\rho/B)^{\alpha} r(t) \le x\} = W_\tau(x)$, где $\int\limits_0^\infty e^{-sx} dW_1(x) = e^{-\tau s}$ в случае $\alpha > \dfrac{1}{\gamma-1}$ при $\rho_1 \downarrow 1$ и $\int\limits_0^\infty e^{-sx} dW_1(x) = e^{-\tau b_\alpha(s)} \left\{1 - s\int\limits_0^\tau e^{-b_\alpha(s)v} dF_{o\alpha}(v)\right\}$ с $\int\limits_0^\infty e^{-sx} dF_{o\alpha}(x) = \dfrac{1}{A_\alpha(s)}$ в остальных случаях.

Следствие 3.5. В теореме 3.2, если $L(x) \sim 1$ при $x\to\infty$, $\theta(\rho) = (\rho/B)^{1/(\gamma-1)}$ и $t\to\infty$ так, что $t\rho(\rho/B)^{1/(\gamma-1)} \xrightarrow[\rho_1\uparrow 1]{t\to\infty} \infty$, то существует невырожденный предел

$$\lim_{(\rho,t)} P\left\{(\rho/B)^{1/(\gamma-1)} r(t) \le x\right\} = W_o(x) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k(\gamma-1)}}{\Gamma(1+k(\gamma-1))}.$$

Замечание 3.2. При условии (3), если $B\to\infty$, $\theta(\rho) \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$ и t фиксировано, то предел $\lim\limits_{\rho\to 0} P\{\theta(\rho) r(t) \le x\} = W_2(t,x)$ существует т. и т., к. $\theta(\rho) \sim B^{-1/\gamma} L_2^{(\gamma)}(B)$. При этом, $W_2(t,x) = 0$ при $x \le 0$ и

$$W_2(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{x} h(t,x)\,dx \text{ при } x>0, \tag{3.3.7}$$

[13] В справедливости $(3.3.6)$ можно также убедиться, воспользовавшись правилом Лопиталя, учитывая $(3.1.4)$ и равенство $\lim\limits_{t\to\infty} W(t,0) = W(0) = \begin{cases} 1-\rho_1, & \rho_1 < 1, \\ 0, & \rho_1 \ge 1 \end{cases}$ (см. [36], стр. 56).

где $h(t,x)=\begin{cases} \left(1/2\sqrt{\pi t}\right)\exp\left\{-x^2/4t\right\}, & \gamma=2, \\ \dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\Gamma\left(k\gamma^{-1}+1\right)}{k!}\left(-x\right)^{k-1}t^{-\frac{k}{\gamma}}\sin\dfrac{\pi k\left(\gamma-1\right)}{\gamma}, & 1<\gamma<2 \end{cases}.$

Действительно, из формулы $(3.3.2)$

$$\int_0^{\infty}e^{-sx}d_xP\left\{\theta(\rho)r(t)\le x\right\}=\Omega\left(t,s^*\right)=e^{\nu\left(s^*\right)t}\left\{1-s\int_0^t e^{-\nu\left(s^*\right)u}d_u\left[\theta(\rho)F(u)\right]\right\},$$

где $s^*=\theta(\rho)s$. Согласно Замечанию 2.4, конечный предел $\lim\limits_{\rho\to 0}\nu\left(s^*\right)=C(s)$ существует только в том случае, когда

$$B\theta(\rho)^{\gamma}L\left(1/\theta(\rho)\right)\to\theta,\ \ 0<\theta<\infty. \tag{3.3.8}$$

Не нарушая общности, положим $\theta=1$. По Следствию 2.1, из условия $(3.3.8)$ получаем $\theta(\rho)\sim B^{-1/\gamma}L_2^{(\gamma)}(B)$. Тогда $C(s)=\lim\limits_{\rho\to 0}\nu\left(s^*\right)=s^{\gamma}$. Так как t фиксировано, то $\lim\limits_{\rho\to 0}\int_0^t e^{-\nu\left(s^*\right)u}d\left[\theta(\rho)F(u)\right]=0$. Поэтому $\lim\limits_{\rho\to 0}\Omega\left(t,s^*\right)=e^{s^{\gamma}t}$. Так как $\left|e^{s^{\gamma}t}\right|\le 1$, то рассмотрим последний предел при $\mathrm{Re}(s)=0$. Подставив $s=-i\xi$, представим его в виде $e^{(-i\xi)^{\gamma}}=e^{-|\xi|^{\gamma}\left(-(-isign(\xi))^{\gamma}\right)}=e^{-|\xi|^{\gamma}e^{\pm\frac{\pi i(2-\gamma)}{2}}}$. Так как $|\gamma-2|\le 2-\gamma$, то, по Лемме 1.4, $e^{(-it)^{\gamma}}$ – ХФ двусторонней устойчивой плотности

$$p_{\gamma}(x)=p(x,\gamma,2-\gamma)=\frac{1}{\pi x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\Gamma\left(k\gamma^{-1}+1\right)}{k!}x^k\sin\frac{\pi k(\gamma-1)}{\gamma},\ x>0, \tag{3.3.9}$$

а для $x<0$ значения p определяются соотношением $p(-x,\gamma,\varphi)=p(x,\gamma,-\varphi)$. Тогда ХФ $e^{t(-i\xi)^{\gamma}}$ имеет плотность $t^{-1/\gamma}p_{\gamma}\left(xt^{-1/\gamma}\right)$ и $W_2(t,x)$ имеет вид $(3.3.7)$.

Замечание 3.3. При условии $(3.3.8)$, существование предела $\lim\limits_{\rho\to 0}\Omega\left(t,s^*\right)=e^{s^{\gamma}t}$ следует также из двойного преобразования $(3.1.3)$.

§ 3.4. Обращение предельного риска $W_{\tau}(x)$.

В настоящем параграфе сделано обращение ПЛС $\chi_{\tau}(s)$ и для предельного риска $W_{\tau}(x)$ из Теоремы 3.2 получена формула в явном виде.

Пусть $\theta(\rho)\xrightarrow[\rho\to 0]{}0$. $\alpha_1(\rho)$ определено с помощью $\theta(\rho)$. Для удобства используем обозначение

$$\bar{A}(s)=\bar{A}\left(s,\theta(\rho)\right)=\begin{cases} 1, & \theta(\rho)=o(\omega), & \rho_1\downarrow 1, \\ s, & \theta(\rho)=o(\omega), & \rho_1\uparrow 1, \\ \nabla(s), & \theta(\rho)\sim\omega, & \rho_1\downarrow 1, \\ \Delta(s), & \theta(\rho)\sim\omega, & \rho_1\uparrow 1, \\ s^{1/\gamma}, & \omega=o\left(\theta(\rho)\right), & \rho_1\uparrow\downarrow 1 \end{cases}. \tag{3.4.1}$$

Пусть $\delta(\tau)=\begin{cases}\tau sign(1-\rho_1), & \theta(\rho)\sim\omega, \quad \rho_1\to 1,\\ 0, & \omega=o(\theta(\rho)), \quad \rho_1\to 1\end{cases}$. Определим меру V на $[0,+\infty)$. Ее в случаях справа в записи $\delta(\tau)$ обозначаем V_+, V_-, V_o ($\pm = sign(1-\rho_1)$). Она связана с ФР G_α, $0<\alpha<1$ с ПЛС e^{-s^α}, $s\ge 0$. Именно, $V_\pm(x)=\int\limits_0^\infty e^{\mp t}G_{\gamma-1}\left(xt^{\frac{1}{1-\gamma}}\right)dt$, $V_o(x)=\int\limits_0^\infty G_{\gamma-1}\left(xt^{\frac{1}{1-\gamma}}\right)dt$ при $1<\gamma<2$, $V_+(x)=1-e^{-x}$, $V_-(x)=e^x$, $V_o(x)=x$ при $\gamma=2$. Очевидно, что (см. Следствие 3.3) $V_+(x)=W_o(x)=1-\sum\limits_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k x^{k(\gamma-1)}}{\Gamma(1+k(\gamma-1))}$. Так как ПЛС для ФР $1-G_{\gamma-1}\left(xt^{1/(1-\gamma)}\right)$ при $1<\gamma<2$ есть функция Миттаг – Леффлера $\sum\limits_{k=0}^\infty\frac{(-s)^k x^{k(\gamma-1)}}{\Gamma(1+k(\gamma-1))}$, то, учитывая, что $e^{x^{-\alpha}}G_\alpha(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0$ (см. [40], стр. 514, 520), аналогично можно получить представления $V_-(x)=1+\sum\limits_{k=0}^\infty\frac{x^{k(\gamma-1)}}{\Gamma(1+k(\gamma-1))}$ и $V_o(x)=\int\limits_0^\infty td\left(1-G_{\gamma-1}\left(xt^{\frac{1}{1-\gamma}}\right)\right)=\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}$.

Из представления в виде ряда (см. $(3.3.9)$) плотности $p_\gamma(x)$, $1<\gamma\le 2$, $x\in R$ УЗ с ХФ $e^{(-it)^\gamma}$ (см. [40], стр. 653 и [14]), с помощью равенства $\varphi(x,\tau)=\tau^{-1/\gamma}p_\gamma\left(\tau^{-1/\gamma}(x+\delta(\tau))\right)$, записываем представление $\varphi(x,\tau)=\frac{1}{\pi\gamma}\sum\limits_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n(x+\delta(\tau))^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right)\tau^{-\frac{n+1}{\gamma}}\sin\frac{\pi(n+1)(\gamma-1)}{\gamma}$. Оно при $\gamma=2$ есть плотность нормального закона $\varphi(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}e^{-\frac{(x+\delta(\tau))^2}{4\tau}}$. Далее, запишем плотность на $[0,+\infty)$ (см. гл 1): $f(x,t)=f_{\Diamond,1/\gamma}(x,t)$. Наконец, пусть $E_\tau(x)=\begin{cases}1, & x>\tau\\ 0, & x\le\tau\end{cases}$ и $f_o(x)=\int\limits_0^\infty f(x,t)dt$ (при $\theta(\rho)\sim\omega$ $f(x,t)=f_\Diamond(x,t)$ и $f_o(x)=f_o^\Diamond(x)$ см. Гл. 1).

Теорема 3.3. В условиях Теоремы 3.2, когда $0<\tau<\infty$:

a) $W_\tau(x)=E_\tau(x)$ при $\theta(\rho)=o(\omega)$ и $\rho_1\downarrow 1$;

b) $W_\tau(x)=E_0(x)$ при $\theta(\rho)=o(\omega)$ и $\rho_1\uparrow 1$;

c) $$W_\tau(x)=\int\limits_{-\infty}^x\varphi(v,\tau)dv-V(x)*\int\limits_{-\infty}^x\left(\int\limits_0^\tau f_o(\tau-u)d_u\varphi(v,u)\right)dv,\ x\ge 0 \qquad (3.4.2)$$

в случаях $\theta(\rho)\sim\omega$ и $\omega=o(\theta(\rho))$ при $\rho_1\to 1$.

Доказательство. Имеем $\chi_\tau(s)=e^{-\tau s}$, если $\theta(\rho)=o(\omega)$ при $\rho_1\downarrow 1$, и $\chi_\tau(s)=e^{\tau b(s)}\left[1-s\int\limits_0^\tau e^{-b(s)v}dF_o(v)\right]$ в остальных случаях. Здесь $\int\limits_0^\infty e^{-sx}dF_o(x)=\frac{1}{\overline{A}(s)}$ и $b(s)=\begin{cases}sign(1-\rho_1)s, & \theta(\rho)=o(\omega),\\ s^\gamma+sign(1-\rho_1)s, & \theta(\rho)\sim\omega,\\ s^\gamma, & \omega=o(\theta(\rho))\end{cases}$. Очевидно, что в случае a) $W_1(x)=E_\tau(x)$. В случае b)

$b(s) = sign(1-\rho_1)s = s$, $F_o(x) = x$ и так как $\int_0^\infty e^{-sx} dW_\tau(x) = e^{\tau s}\left\{1 - s\int_0^\tau e^{-sv} dv\right\} = 1$, то $W_\tau(x) = E_o(x)$. Рассмотрим случай c) ($\theta(\rho) \sim \omega$ и $\omega = o(\theta(\rho))$). Имеем

$$\int_0^\infty e^{-sx} dF_o(x) = \frac{1}{\bar{A}(s)} = \int_0^\infty e^{-t\bar{A}(s)} dt. \qquad (3.4.3)$$

$e^{-t\bar{A}(s)}$ есть (см. Гл. 1) ПЛ плотности $f(x,t)$. В $(3.4.3)$, меняя порядок интегрирования, получаем: $\int_0^\infty e^{-sx} dF_o(x) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-sx} f(x,t)\,dx\right] dt = \int_0^\infty e^{-sx}\left[\int_0^\infty f(x,t)\,dt\right] dx$.

Следовательно, $F_o(x) = \int_0^x f_o(v)\,dv$. Так как ПЛС $\varphi(s)$ ФР, определенной на полуоси $s > 0$, однозначно определяет ХФ $\varphi(-it)$, $t \in (-\infty, \infty)$ и наоборот (см. [2], стр. 151), то вместо ПЛС иногда рассмотриваем соответствующую ему ХФ. Представим ПЛС $\chi_\tau(s)$ в виде

$$\chi_\tau(s) = e^{\tau b(s)}\left\{1 - s\int_0^\tau e^{-b(s)v} dF_o(v)\right\} = e^{\tau b(s)} - \frac{s}{b(s)}\int_0^\tau f_o(\tau - u)\, de^{b(s)u},$$

и рассмотрим ХФ $\chi_\tau(-it) = \int_0^\infty e^{itx} dW_\tau(x) = e^{\tau b(-it)} - \frac{-it}{b(-it)}\int_0^\tau f_o(\tau - u)\, de^{b(-it)u}$. Плотность $\varphi(x,\tau)$ имеет ХФ $e^{b(-it)\tau}$. Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\chi_\tau(-it) = e^{\tau b(-it)} - \frac{-it}{b(-it)}\int_{-\infty}^\infty e^{itx}\left[\int_0^\tau f_o(\tau - u)\, d_u\varphi(x,u)\right] dx.$$

Рассмотрим ХФ $\frac{-it}{b(-it)}$. По Теореме 3.1, функция $\left(1 + s^{\gamma-1}\right)^{-1}$ есть ПЛС меры V_+. Аналогично $\left(s^{\gamma-1} - 1\right)^{-1}$ при $s > 1$ и $s^{1-\gamma}$ при $s > 0$ суть ПЛС мер V_- и V_0, соответственно, т. е. функция $\frac{-it}{b(-it)}$, $t \in R^1$ (функция $\frac{s}{b(s)}$, $s \ge 0$) – ХФ (ПЛС) меры V. Поэтому $\chi_\tau(-it) = \int_{-\infty}^\infty e^{itx} d_x\left[\int_{-\infty}^x \varphi(v,\tau)\,dv - V(x) * \int_{-\infty}^x\left(\int_0^\tau f_o(\tau - u)\, d_u\varphi(v,u)\right) dv\right]$, откуда следует $(3.4.2)$.

Теорема 3.4 доказана.

Из соотношения $\int_0^\infty e^{-sv} v^{1/\gamma - 1} dv = s^{-\gamma^{-1}}\Gamma(1/\gamma)$ вытекает

Замечание 3.4. $f_o(x) = x^{(1/\gamma)-1}/\Gamma(\gamma^{-1})$ при $\omega = o(\theta(\rho))$ и $\rho_1 \to 1$, следовательно, $F_o(x) = \left(\Gamma(\gamma^{-1})\right)^{-1}\int_0^x v^{1/\gamma - 1} dv = \gamma x^{1/\gamma}/\Gamma(\gamma^{-1})$.

Пусть $l = -1, 0, 1$, и $sl = sign(l)$. Так как существует плотность

$$p(x,t) = \frac{d}{dx}\left[G_{\gamma-1}\left(xt^{1/(1-\gamma)}\right)\right] = p_\gamma\left(xt^{1/(1-\gamma)}, \gamma^{-1}, -\gamma^{-1}\right)t^{1/(1-\gamma)},$$

то мера V имеет производную $v(x) = V'(x) = v_{sl}(x) = \int_0^\infty e^{-lt} p(x,t)\,dt$ при $1 < \gamma < 2$ и $v(x) = v_{sl}(x) = e^{-lt}$ при $\gamma = 2$. Поэтому верно

Замечание 3.5. В случаях $\theta(\rho) \sim \omega$ и $\omega = o(\theta(\rho))$ ФР $W_\tau(x)$ абсолютно непрерывна и имеет плотность ($x \ge 0$)

$$w_\tau(x) = \varphi(x,\tau) - v(x) * \int_0^\tau f_o(\tau-u)\, d_u\varphi(x,u) = \varphi(x,\tau) - \int_0^\tau f_o(\tau-u)\, d_u\left[v(x)*\varphi(x,u)\right].$$

Соответствующие предельные теоремы в терминах СВ T_x приведены в ПРИЛОЖЕНИИ.

Рассмотрим случай $\gamma = 2$. Нас интересуют невырожденные ситуации ($\theta(\rho) \ne o(\omega)$).

Следствие 3.6. Пусть в Портфеле 2 выполнены условия Теоремы 3.4 и $\gamma = 2$. Тогда:

a) при $\theta(\rho) \sim \omega$ и $\rho_1 \to 1$,

$$w_\tau(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(x+sign(1-\rho_1)\tau)^2}{4\tau}} + e^{-(sign(1-\rho_1)x)} \int_0^\tau f_0(\tau-u) \frac{e^{-\frac{(xsign(1-\rho_1)u)^2}{4u}} \left(x - sign(1-\rho_1)u\right)}{2u\sqrt{2\pi}} du; \quad (3.4.4)$$

b) при $\omega = o(\theta(\rho))$ и $\rho_1 \to 1$

$$w_\tau(x) = \left(1/\sqrt{\pi\tau}\right) \exp\left\{-x^2/4\tau\right\}. \quad (3.4.5)$$

Доказательство. При $\gamma = 2$ имеем $v(x) = e^{-\delta(x)}$, $f(x,t) = \frac{t}{2x\sqrt{\pi x}} e^{-\frac{(t-\delta(x))^2}{4x}}$ и $\varphi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x+\delta(t))^2}{4t}}$. Поэтому

$$f_o(x) = \int_0^\infty f(x,t)\,dt = \frac{1}{2x\sqrt{\pi x}} \left(\int_0^\infty (t-\delta(x)) e^{-\frac{(t-\delta(x))^2}{4x}} dt + \int_0^\infty \delta(x) e^{-\frac{(t-\delta(x))^2}{4x}} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{(t-\delta(x))^2}{4x}} d_t \frac{(t-\delta(x))^2}{4x} + \frac{\delta(x)\sqrt{2x}}{2x\sqrt{\pi x}} \int_{-\delta(x)/\sqrt{2x}}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

В последнем интеграле сделали замену $u = (t-\delta(x))/\sqrt{2x}$. Получим

$$f_o(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-\frac{\delta^2(x)}{4x}} + \frac{\delta(x)}{x}\left(1 - \Phi\left(-\delta(x)/\sqrt{2x}\right)\right).$$

Рассмотрим случаи: a) $\theta(\rho) \sim \omega$ при $\rho_1 \to 1$; b) $\omega = o(\theta(\rho))$ при $\rho_1 \to 1$.

a). Пусть $\pm = sign(1-\rho_1)$. Так как $\delta(x) = \pm x$, то $v(x) = e^{-(\pm x)}$, $\varphi(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(x\pm\tau)^2}{4\tau}}$,

$f_o(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-x/4} \pm \left(1 - \Phi\left(-\left(\pm\sqrt{x/2}\right)\right)\right)$ и $v(x)*\varphi(x,u) = \frac{e^{-(\pm x)}}{2\sqrt{\pi u}} \int_{-\infty}^x e^{\frac{-(v\mp u)^2}{4u}} dv = e^{-(\pm x)} \Phi\left(\frac{x \mp u}{\sqrt{2u}}\right)$.

Далее, $(3.4.4)$ следует из $w_\tau(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(x\pm\tau)^2}{4\tau}} - e^{-(\pm x)} \int_0^\tau f_o(\tau-u)\, d_u \Phi\left(\frac{x\mp u}{\sqrt{2u}}\right)$.

b). Так как $\delta(x) = 0$, то $v(x) = 1$, $\varphi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ и $f_o(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$. Тогда

$$v(x)*\varphi(x,u) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2\sqrt{\pi u}} e^{-v^2/4u} dv = \Phi\left(x/\sqrt{2u}\right)$$

и $w_\tau(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}e^{-\frac{x^2}{4\tau}}-\int\limits_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\pi(\tau-u)}}d_u\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2u}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}e^{-\frac{x^2}{4\tau}}+\frac{x}{4\pi}\int\limits_0^\tau \frac{e^{-\frac{x^2}{4u}}}{\sqrt{u^3(\tau-u)}}du$.

В последнем интеграле, делая замену $u=\tau x^2\big/\left(x^2+\tau t\right)$ и учитывая, что $du=-\frac{\tau^2x^2dt}{\left(x^2+\tau t\right)^2}$ и $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, получим $(3.4.5)$. Следствие 3.6 доказано.

ГЛАВА 4. КРИТИЧЕСКИЕ РИСКИ В ПОРТФЕЛЕ 3.

§ 4.1. Введение

В настоящей главе рассмотрен Портфель 3. Отсутствие процентного фактора – причина возможного возникновения ситуации разорения. Риск здесь зависит от интенсивности страховых случаев и от скачков “страховых выплат”. В этом случае страховая компания предоставляет клиентам постоянные выплаты, что с постоянной скоростью $c<0$ ($c=-1$) уменьшает резервный фонд. С другой стороны, страховые случаи (смерть клиента или прерывание договора по другой причине) в случайные моменты $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ увеличивают резервы компании на величины невыплаченных рент $\{X_i\}_{i=1}^\infty$. Сохраним термин “страховая выплата”. Здесь он имеет смысл прибыли. Предположим, что СВ $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ положительны, независимы и одинаково распределены с ФР F, ($F(x)=0$, $x<0$). Моменты возникновения страховых случаев $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ имеют распределение Пуассона с интенсивностью λ. Страховая сумма $S(u)=\sum\limits_{0\le t_i\le u}X_i$, выплачиваемая за $(0,u]$, – обобщенный пуассоновский процесс с ФР $\mathrm{P}\{S(u)\le x\}=\sum\limits_{n=0}^\infty\frac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^n}{n!}F^{n*}(x)$, $x\ge 0$. Процессами риска служат $r(t)=\sup\limits_{0\le u\le t}\left[u-S(u)\right]$ и $r=\sup\limits_{0\le u<\infty}\left[u-S(u)\right]$ с ФР $W(t,x)$ и $W(x)$, соответственно. Известно, что (см. [36], стр. 164)

$$W(t,x)=1-\int\limits_x^t\frac{x}{y}d_yP\{S(y)\le y-x\},\ 0<x\le t, \tag{4.1.1}$$

$$W(x)=1-\int\limits_x^\infty\frac{x}{y}d_yP\{S(y)\le y-x\}=1-e^{-\omega x},\ x>0, \tag{4.1.2}$$

где ω – наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения $\nu(s)=s-\lambda(1-\psi(s))=0$, причем (см. [36], стр. 52, теорема 4) $\omega=0$, если $0\le\rho_1\le 1$, $\omega>0$, если $\rho_1>1$.

Пусть $\rho_1>1$ фиксировано. Имеем $\omega=\lambda(1-\psi(\omega))=\rho_1\omega-\lambda(\psi(\omega)-1+a\omega)$. Учитывая неравенство (см. [2], 162) $\left|e^\beta-1-\beta\right|\le|\beta|^2\big/2$, $\operatorname{Re}\beta\le 0$, получим оценку $\rho\omega=\lambda\int\limits_0^{+\infty}\left(e^{-\omega x}-1+\omega x\right)dF(x)\le\lambda\omega^2/2$. Тогда $\omega\ge 2\rho/\lambda$, откуда следует оценка $1-W(x)=e^{-\omega x}\le e^{-2\rho x/\lambda}$, которая теряет смысл при $\rho\to 0$.

В главе сначала найдены новые представления для рисков $W(t,x)$ и $W(x)$. Найдены предельные риски при условии (3) и критической загрузке. (Загрузка страховой компании $\rho_1=\lambda a$ есть средняя суммарная прибыль в единичном временном интервале и предполагается, что загрузка стремится к абсолютной величине скорости (c) уменьшения резервов, т. е. $\rho_1\to 1$).

§ 4.2. Представления вероятности неразорения.

Новые представления вероятности неразорения предоставляет

Лемма 4.1. Пусть $\{S(u):0\le u\le\infty\}$ – сепарабельный СП с переставляемыми приращениями[14], почти все выборочные функции которого – неубывающие ступенчатые функции, обращающиеся в нуль при $u=0$. Существует мера $U_y(x)=U(x,y)$, такое что

$$W(t,x)=\begin{cases}1-\int_x^t d_yU(x,y), & 0<x\le t\\ 1, & x\ge t\end{cases},\ W(x)=1-\int_x^\infty d_yU(x,y)=1-e^{-\omega x},\ x>0.$$

Здесь $\int_0^\infty e^{-sy}d_yU(x,y)=e^{-x\omega(s)}$ и $z=\omega(s)$ - единственный корень уравнения $\nu(z)=s$ в области $\operatorname{Re}s\ge 0$.

Доказательство. С учетом $W(t,x)=1$ при $x\ge t$ из $(4.1.1)$ и $(4.1.2)$ имеем

$$W(t,x)=\begin{cases}1-\int_x^t \frac{x}{y}d_yP\{S(y)\le y-x\}, & 0<x\le t,\\ 1, & x\ge t\end{cases}\ \text{и}\ W(x)=1-\int_x^\infty \frac{x}{y}d_yP\{S(y)\le y-x\},\ x>0.$$

Известно, что (см. [36], стр. 67)

$$\int_x^\infty e^{-sy}\frac{x}{y}d_yP\{S(y)\le y-x\}=e^{-x\omega(s)},\ \operatorname{Re}s>0. \tag{4.2.1}$$

Заметим, что $P\{S(y)\le y-x\}=0$ при $y<x$. Следовательно, из $(4.2.1)$ получаем $\int_0^\infty e^{-sy}\frac{x}{y}d_yP\{S(y)\le y-x\}=e^{-x\omega(s)}$. Так как $e^{-x\omega(0)}=e^{-x\omega}$, то, обозначив

$$\varphi(x,s)=\int_0^\infty e^{-sy}\frac{xe^{x\omega}}{y}d_yP\{S(y)\le y-x\}=e^{-x(\omega(s)-\omega)}, \tag{4.2.2}$$

имеем $\varphi(x,0)=1$. Покажем, что функция $\varphi(x,s)$ ВМ. Т. е. (см. [40], стр. 505) $(-1)^n\varphi_s^{(n)}\ge 0$, $s>0$, $n=0,1,2,\ldots$. Очевидно, что функция e^{-xs} ВМ. Покажем, что функция $\omega(z)-\omega>0$

[14]СП $\{\xi(u):0\le u\le T\}$ называется процессом с переставляемыми приращениями, если для всех $n=2,3,\ldots$ и любого $t\in(0,T]$ все $n!$ перестановок последовательности $\zeta_r=\xi\left(\frac{rt}{n}\right)-\xi\left(\frac{rt-t}{n}\right)$, $r=1,2,\ldots,n$ имеют одинаковое совместное распределение, т. е. $P\{\zeta_{i_1}\le x_1,\zeta_{i_2}\le x_2,\ldots,\zeta_{i_n}\le x_n\}=P\{\zeta_1\le x_1,\zeta_2\le x_2,\ldots,\zeta_n\le x_n\}$ для всех $n!$ перестановок $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ последовательности $(1,2,\ldots,n)$ и всех $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

имеет ВМ производную. Так как $\omega(s)$ – решение уравнения $\nu(z)=s$, то, обозначив $\beta(s)=1+\dfrac{s}{\lambda}-\dfrac{\omega(s)}{\lambda}=\psi(\omega(s))$, получаем

$$\omega(s)=s+\lambda-\lambda\beta(s), \tag{4.2.3}$$

$$\psi(s+\lambda-\lambda\beta(s))=\beta(s). \tag{4.2.4}$$

Из $(4.2.4)$ заключаем, что (см. [40], стр. 507) функция $\beta(s)$ – ПЛС для некоторой неубывающей функции. Не нарушая общности, предположим, что функция $\beta(s)$ – ПЛС собственной ФР (иначе, разделив $\beta(s)$ на $\beta(0)>0$, получим $\beta(0)=1$). Следовательно (см. [40], стр. 505, теорема 1), функция $\beta(s)$ ВМ. Иначе,

$$(-1)^k\beta^{(k)}(s)\geq 0,\ k\geq 0,\ s\geq 0. \tag{4.2.5}$$

Из условия $(4.2.3)$: $(\omega(s)-\omega)'=1-\lambda\beta'(s)$. Следовательно,

$$(-1)^n\left(\left(\omega(s)-\omega\right)'\right)^{(n)}=\lambda(-1)^{n+1}\left(\beta''(s)\right)^{(n-1)}=\lambda(-1)^{n+1}\left(\beta^{(n+1)}(s)\right)\geq 0,\ n\geq 1,$$

а из $(4.2.5)$ (при $k=1$) получаем $(\omega(s)-\omega)'=1-\lambda\beta'(s)\geq 0$ (для $n=0$). Итак, функция $(\omega(s)-\omega)'$ ВМ. Так как $\varphi(x,s)$ есть суперпозиция ВМ функции e^{-xs} и функции $\omega(s)-\omega>0$ с ВМ – ой производной, то она ВМ (см. [40], стр. 507). Поэтому, по теореме 1 из [40], стр. 505, $\varphi(s,x)=\int\limits_0^\infty e^{-sy}d_yG(x,y)$. Учитывая форму $(4.2.2)$ функции $\varphi(x,s)$, по теореме единственности, получаем: $\dfrac{x}{y}d_yP\{S(y)\leq y-x\}=d_y\left\{e^{-x\omega}G(x,y)\right\}$.

Таким образом, $U(x,y)=e^{-x\omega}G(x,y)$ имеет ПЛС $e^{-x\omega(s)}$. Лемма 4.1 доказана.

Замечание 4.1. Если случайный процесс $\{S(u):0\leq u\leq\infty\}$ имеет плотность, то (см. [36], стр. 51) $U(x,y)=\int\limits_0^y\dfrac{x}{u}\dfrac{\partial P\{S(u)\leq u-x\}}{\partial x}du$.

§ 4.3. Предельные теоремы.

В этом параграфе доказаны основные предельные теоремы в портфеле с ануитетными договорами. Используем обозначения Главы 2 для $L_2^{(\alpha)}$, $\alpha=\gamma,\gamma-1$ и $\omega\sim\left(\dfrac{\rho}{\mathrm{B}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}L_2^{(\gamma-1)}\left(\dfrac{\mathrm{B}}{\rho}\right)$.

Непосредственно из формулы $(4.1.2)$ и из Леммы 3.1. вытекает

Теорема 4.1. Пусть выполнено условие (3) и $\theta(\rho)\xrightarrow[\rho_1\downarrow 1]{}0$. Тогда предел $\lim\limits_{\rho_1\downarrow 1}P\{\theta(\rho)r\leq x\}=1-e^{-x}$, $x>0$ существует т. и т. т., к. $\theta(\rho)\sim\omega$.

Пусть $\alpha(\rho)\xrightarrow[\rho\to 0]{}0$, $\beta(\rho)$ и L_o определены в Следствии 3.1. При согласованной сходимости $t\alpha(\rho)\to\tau$ (пишем (ρ,t)), $0<\tau\leq\infty$ справедлива

Теорема 4.2. Пусть верно условие (3). Если $\theta(\rho)\sim\beta(\rho)L_o$ при $\rho\to 0$ и $t\to\infty$ так, что $t\alpha(\rho)\to\tau$, $0<\tau\le\infty$, то $W_\tau(x)=\lim\limits_{(\rho,t)}P\{\theta(\rho)r(t)\le x\}=1-\int\limits_0^\tau d_vU_o(x,v)$, $x>0$, где $\int\limits_0^\infty e^{-sv}d_vU_o(x,v)=e^{-xA(s)}$, $s\ge 0$. В остальных случаях ($\theta(\rho)=o(\beta(\rho)L_o)$ и $\beta(\rho)L_o=o(\theta(\rho))$) $\lim\limits_{(\rho,t)}P\{\theta(\rho)r(t)\le x\}=1$, $x>0$.

Доказательство. Из леммы 4.1 имеем

$$P\{\theta(\rho)r(t)\le x\}=P\{r(t)\le x/\theta(\rho)\}=\begin{cases}1-\int\limits_{x/\theta(\rho)}^{t}d_yU(x/\theta(\rho),y), & 0<x\le t\theta(\rho),\\ 1, & x\ge t\theta(\rho),\end{cases}\qquad (4.3.1)$$

где

$$\int\limits_0^\infty e^{-sy}d_yU(x,y)=e^{-x\omega(s)}.\qquad (4.3.2)$$

В формулах $(4.3.1)$ и $(4.3.2)$, произведя замену $y=v/\alpha(\rho)$, получаем

$$P\{\theta(\rho)r(t)\le x\}=\begin{cases}1-\int\limits_{\frac{x\alpha(\rho)}{\theta(\rho)}}^{t\alpha(\rho)}d_vU\left(\frac{x}{\theta(\rho)},\frac{v}{\alpha(\rho)}\right), & 0<x\le t\theta(\rho),\\ 1, & x>t\theta(\rho)\end{cases},$$

и

$$\int\limits_0^\infty e^{-sv}d_vU\left(\frac{x}{\theta(\rho)},\frac{v}{\alpha(\rho)}\right)=\exp\left\{-x\frac{\omega(\alpha(\rho)s)}{\theta(\rho)}\right\}.\qquad (4.3.3)$$

По Следствию 3.1, $\omega(\alpha(\rho)s)\sim\beta(\rho)A(s)L_o$ при $\rho_1\to 1$. Здесь $A(s)=A(s,\alpha(\rho))$. По обобщенной теореме непрерывности (см. [40], стр. 499), из $(4.3.3)$ заключаем, что невырожденный предел $U_o(x,v)=\lim\limits_{\rho\to 0}U(x/\theta(\rho),y/\alpha(\rho))$ существует т. и т. т., к. $\theta(\rho)\sim\beta(\rho)L_o$. Остальные случаи ($\theta(\rho)=o(\beta(\rho)L_o)$ и $\beta(\rho)L_o=o(\theta(\rho))$) являются вырожденными: $\lim\limits_{(\rho,t)}P\{\theta(\rho)r(t)\le x\}=1$, $x>0$. Переходя к пределу в формуле $(4.3.3)$, получаем $\int\limits_0^\infty e^{-sv}d_vU_o(x,v)=e^{-xA(s)}$. Так как $\omega(s)=s+\lambda(1-\psi(\omega(s)))\ge s$, то при $\theta(\rho)\sim\beta(\rho)L_o$ получаем, что для произвольного s, когда $\rho<\rho_o$, справедливо соотношение $\frac{\alpha(\rho)s}{\theta(\rho)}\sim\frac{\alpha(\rho)s}{\beta(\rho)L_o}\le\frac{\omega(\alpha(\rho)s)}{\beta(\rho)L_o}\sim\frac{\beta(\rho)L_oA(s)}{\beta(\rho)L_o}=A(s)$. Таким образом,

$$\frac{\alpha(\rho)}{\beta(\rho)L_o}\le\frac{A(s)}{s}\ \text{при}\ \rho<\rho_o.\qquad (4.3.4)$$

Так как $(4.3.4)$ верно при любом фиксированном s, то

$$\frac{\alpha(\rho)}{\theta(\rho)}\sim\frac{\alpha(\rho)}{\beta(\rho)L_o}\xrightarrow[\rho\to 0]{}0.\qquad (4.3.5)$$

Поскольку $t\alpha(\rho)\to\tau$ $(0<\tau\le\infty)$, то, учитывая $(4.3.5)$, получаем

$$\lim_{(\rho,t)} P\left\{\theta(\rho) r(t) \le x\right\} = 1 - \int_0^\tau d_v U_0(x,v). \qquad (4.3.6)$$

При этом, так как $x \le t\theta(\rho) = t\alpha(\rho)\dfrac{\theta(\rho)}{\alpha(\rho)} \xrightarrow[(\rho,t)]{} \infty$, то $(4.3.6)$ верно при любом $x > 0$. Теорема 4.2 доказана.

Замечание 4.2. При фиксированном t и произвольном $\theta(\rho) \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$ верно соотношение $\lim\limits_{\rho\to 0} P\left\{\theta(\rho) r(t) \le x\right\} = 1$, $x > 0$.

Сохраним принятые в Главе 2 обозначения для $\delta(\tau)$ и плотности $f(x,t)$. Тогда Теорему 4.2 можно переформулировать (см. [18])

Теорема 4.2^*. При условиях Теоремы 4.2

a) $W_\tau(x) = 1 - e^{-x}$ в случае $\theta(\rho) = o(\omega)$ при $\rho_1 \downarrow 1$.

b) $W_\tau(x) = \begin{cases} 0 & x < \tau \\ 1 & x \ge \tau \end{cases}$ в случае $\theta(\rho) = o(\omega)$ при $\rho_1 \uparrow 1$.

c) $W_\tau(x) = 1 - \int\limits_0^\tau f(v,x)\,dv$ в случаях $\theta(\rho) \sim \omega$ и $\omega = o(\theta(\rho))$ при $\rho_1 \to 1$.

Доказательство. Имеем $W_\tau(x) = 1 - \int\limits_0^\tau d_v U_0(x,v)$, $x > 0$, где $\int\limits_0^\infty e^{-sv} d_v U_0(x,v) = e^{-xA(s)}$, $s \ge 0$ с $A(s) = A\big(s,(\rho\theta(\rho))\big)$. Если $\theta(\rho) = o(\omega)$ при $\rho_1 \downarrow 1$, то $U_0(x,v) = e^{-x}E_0(v)$ и, следовательно, $W_\tau(x) = 1 - e^{-x}$. В случае $\theta(\rho) = o(\omega)$ при $\rho_1 \uparrow 1$ имеем $U_0(x,v) = E_x(v)$ и $W_\tau(x) = \begin{cases} 0 & x < \tau \\ 1 & x \ge \tau \end{cases}$. В случаях $\theta(\rho) \sim \omega$ и $\omega = o(\theta(\rho))$ $e^{-xA(s)}$ есть ПЛ для $f(v,x)$ (см. Гл. 1). Следовательно, $U_0(x,v) = \int\limits_0^v f(u,x)du$ и $W_\tau(x) = 1 - \int\limits_0^\tau f(v,x)\,dv$. Теорема 4.2^* доказана.

Отдельно рассмотрим случай конечного второго момента $(\gamma = 2)$ страховых выплат при критической загрузке. Рассмотрим невырожденные ситуации ($\theta(\rho) \ne o(\omega)$ в Портфеле 3).

Обозначим: $F_x(u) = 2\left(1 - \Phi\left(x/\sqrt{u}\right)\right)$, $u > 0$. Известно, что (см. [40], стр. 216) F_x имеет ПР $f_x(u) = \dfrac{x}{\sqrt{2\pi u^3}} e^{-\frac{x^2}{2u}}$, $u > 0$.

Следствие 4.1. Пусть в Портфеле 3 выполнены условия Теоремы 4.2 и страховые выплаты имеют конечный второй момент. Тогда:

a) Если $\theta(\rho) \sim \omega$ при $\rho_1 \to 1$, то $W_\tau(x) = 1 - e^{sign(1-\rho_1)\frac{x}{2} - \frac{\tau}{4}} f_{x/\sqrt{2}}(\tau) * e^{-\frac{\tau}{4}}$;

b) Если $\omega = o(\theta(\rho))$ при $\rho_1 \to 1$, то $W_\tau(x) = 1 - F_x(2\tau)$.

Доказательство. Если $\omega = o(\theta(\rho))$ при $\rho_1 \to 1$, то $\delta(v) = 0$ и

$$W_\tau(x) = 1 - \int_0^\tau \frac{xe^{-x^2/4v}}{2\sqrt{\pi v^3}} dv = 1 - \int_0^\tau \frac{\left(x/\sqrt{2}\right) e^{-\frac{1}{2v}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi v^3}} dv = 1 - \int_0^\tau f_{x/\sqrt{2}}(v)\,dv = 1 - 2\left(1 - \Phi\left(x/\sqrt{2\tau}\right)\right)$$

с плотностью $w_\tau(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}e^{-\frac{x^2}{4\tau}}$. В случае $\theta(\rho)\sim\omega$ при $\rho_1\to 1$, $\delta(v)=vsign(1-\rho_1)$ и

$$W_\tau(x)=1-\int_0^\tau \frac{x}{2v\sqrt{\pi v}}e^{-\frac{(x-(vsign(1-\rho_1)))^2}{4v}}dv=1-e^{\frac{xsign(1-\rho_1)}{2}}\int_0^\tau \frac{\left(x/\sqrt{2}\right)e^{-\frac{1}{2u}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi u^3}}e^{-\frac{u}{4}}du=$$

$$=1-e^{\frac{xsign(1-\rho_1)}{2}}\int_0^\tau f_{x/\sqrt{2}}(u)e^{-\frac{u}{4}}du=1-e^{\frac{xsign(1-\rho_1)}{2}-\frac{\tau}{4}}\int_0^\tau f_{x/\sqrt{2}}(u)e^{\frac{\tau-u}{4}}du.$$

§ 4.4. Предельный процесс $\xi_\Diamond(t,\gamma)$ и его свойства.

Плотности $f(x,t)=f_\Diamond(x,t)$ и $f_o(x)=f_o^\Diamond(x)$ (при $sign\delta(\bullet)=\pm1$) с ПЛ $e^{-t\Diamond(s)}$ и $(\Diamond(s))^{-1}$ соответственно, возникают в предельных теоремах. Ниже рассмотрены свойства этих законов.

Пусть $\delta(\tau)=\begin{cases}\tau, & \Delta(s)\\ -\tau, & \nabla(s)\end{cases}$ и СП $\{\xi_\Diamond(t)=\xi_\Diamond(t;\gamma):t\ge0\}$ имеет ФР $F_\Diamond(x,\tau)$ и ПР $f_\Diamond(x,t)$ с ПЛ $e^{-\tau\Diamond(s)}$. По теореме Абеля (см. [Так], 215) имеем $\lim\limits_{x\to\infty}F_\Diamond(x,\tau)=\lim\limits_{s\to0}e^{-\tau\Diamond(s)}=\begin{cases}1, & \Delta,\\ e^{-\tau}, & \nabla\end{cases}$. Поэтому иногда вместо функции $\Diamond(s)$ рассматриваем функцию $\hat{\Diamond}(s)$, которая отличается от $\Diamond(s)$ тем, что в ней вместо $\nabla(s)$ взята функция $\nabla(s)-1$ (с целью получения собственного распределения).

В предельных теоремах доказано, что СП $\{\xi_\Diamond(t):t\ge0\}$ является слабым пределом положительных (собственных или несобственных) СП. Кроме того, СП $\{\xi_\Diamond(t):t\ge0\}$ абсолютно непрерывен (случай ∇ см. в [9]).

1. Слабая сходимость СП $\{\xi_\Diamond(t):t\ge0\}$ к УЗ вытекает из следующих асимптотических соотношений:

$$\Delta(s)=\begin{cases} s-s^\gamma(1+o(1))=s(1+(1)), & s\to0,\\ s^{1/\gamma}-\gamma^{-1}s^{2/\gamma-1}(1+o(1))=s^{1/\gamma}(1+o(1)), & s\to\infty,\end{cases} \tag{4.4.1}$$

$$\nabla(s)=\begin{cases} 1+s(\gamma-1)^{-1}(1+o(1)), & s\to0,\\ s^{1/\gamma}+\gamma^{-1}s^{2/\gamma-1}(1+o(1))=s^{1/\gamma}(1+o(1)), & s\to\infty.\end{cases} \tag{4.4.2}$$

$(4.4.1)$ приведено в [30], а $(4.4.2)$ выводится аналогично.

Справедливы следующие утверждения.

Пусть θ – нормирующий коэффициент. Тогда:

а) Если $t\to\infty$, то $\lim\limits_{t\to\infty}P\{\xi_\Delta(t)/t\le x\}=\begin{cases}1, & x>1,\\ 0, & x\le1\end{cases}$;

б) Если t фиксированно и $\theta\to0$, то $\lim\limits_{\theta\to0}P\{\theta\xi_\nabla(t)\le x\}=\begin{cases}e^{-t}, & x>0,\\ 0, & x\le0\end{cases}$;

в) Если $t\to0$ и $\theta\to+\infty$ так, что $\theta^{1/\gamma}t\to\tau(=1)$, то $\lim P\{\theta\xi_\Diamond(t)\le x\}=G_{1/\gamma}(x)$.

Доказательство вытекает из $(4.4.1)$ и $(4.4.2)$.

2. **Лемма 4.2.** Для любых t_1, t_2 и независимых $\xi_\Diamond(t_1)$, $\xi_\Diamond(t_2)$ $\xi_\Diamond(t_1+t_2)\overset{d}{=}\xi_\Diamond(t_1)+\xi_\Diamond(t_2)$, или $f_\Diamond(x,t_1+t_2)=f_\Diamond(x,t_1)*f_\Diamond(x,t_2)$, где символ "$\overset{d}{=}$" означает равенство распределений.

Следствие 4.2. Для любого $n\ge 2$ и $t_1,t_2,...,t_n>0$ $\xi_\Diamond(t_1+t_2+...+t_n)\overset{d}{=}\xi_\Diamond(t_1)+\xi_\Diamond(t_2)+...+\xi_\Diamond(t_n)$, где $\{\xi_\Diamond(t_i)\}_{i=1}^n$ – последовательность независимых СВ.

Доказательство Леммы 4.2 очевидно и в случае функции Δ приведено в [37].

3. **Теорема 4.3.** Положительная функция $\Diamond(s)$ имеет ВМ производную.

Доказательство. Так как $\phi(s)=1/\Diamond(s)$ – ПЛС некоторой меры F_o (см. Гл. 3), то $\phi(s)$ ВМ (см. [40], стр. 505 Теорема 1). Тогда $\Diamond'(s)=-\dfrac{\phi'(s)}{\phi^2(s)}$. Учитывая равенство $\Diamond^\gamma(s)\pm\Diamond(s)=s$, заключаем: $\Diamond'(s)=\dfrac{1}{\gamma\Diamond^{\gamma-1}(s)\pm 1}>0$. Здесь в "$\pm$" верхний знак выбирается при функции Δ, а нижний – при ∇. Так как функция $\phi(s)$ ВМ, то $(-\phi'(s))$ тоже ВМ. Имеем $\left(s^{-1}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{s^{n+1}}$, т.е. функция s^{-1} ВМ. Поскольку, $\phi^2(s)=(-\phi(s))(-\phi(s))$ и $-\phi'(s)$ ВМ, то, по критерию 2 из [40] стр. 507, заключаем, что функция $\dfrac{1}{-\phi(s)}$ ВМ. Тогда функция $\dfrac{1}{\phi^2(s)}$, как произведение двух ВМ функций, тоже ВМ (см. [40], стр. 507). Следовательно, $\Diamond'(s)=(-\phi'(s))\left(\dfrac{1}{\phi^2(s)}\right)$ ВМ.

Теорема 4.3 доказана.

Из ВМ функции $\Diamond'(s)$ вытекает (см. [40], стр. 516):

Следствие 4.3. Функция $\Diamond'(s)$ ($\hat{\Diamond}'(s)$) имеет интегральное представление вида $\Diamond'(s)=\hat{\Diamond}'(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dP(x)$, где P мера на $[0,\infty)$.

Замечание 4.3. В случае функции Δ мера P – ФР.

Следствие 4.4. Функция $e^{-t\hat{\Diamond}(s)}$ есть ПЛС безгранично делимого распределения (ФР $F_{\hat{\Diamond}}(x,t)$ безгранично делимо).

Следствие 4.5. Функция $\hat{\Diamond}(s)$ имеет интегральное представление $\hat{\Diamond}(s)=\int_0^\infty \dfrac{1-e^{-sx}}{x}dP(x)$, где P такая мера, что $\int_1^\infty \dfrac{1}{x}dP(x)<\infty$.

4 **(Подчиненность).** Подчиненность уже использовалась в Главе 3, когда между плотностями $f_\Diamond(x,t)$ и $f_o^\Diamond(x)$ устанавливалась связь $f_o^\Diamond(x)=\int_0^\infty f_\Diamond(x,t)dt$. Здесь мы установим подчиненность процесса $\{\xi_\nabla(t):t\ge 0\}$ с устойчивым процессом порядка $1/\gamma$ и с процессом $\{\xi_\Delta(t):t\ge 0\}$. Между ФР и плотностями выведем связь в форме интегрального уравнения.

Подчиненность $F_\nabla(x,t)$ с управляющим процессом с ФР $G_{1/\gamma}$. Из определения $\nabla(s)$ имеем, что $e^{-t\nabla(s)}=e^{-t(s+\nabla(s))^{1/\gamma}}$. Так как $\nabla(s)$ имеет ВМ производную, то такова и функция $s+\nabla(s)$. Тогда функция $e^{-t(s+\nabla(s))}$ есть ПЛС от ФР $E_t(x)*F_\nabla(x,t)$, где $E_t(x)=\begin{cases}1, & x>t\\ 0, & x\le t\end{cases}$.

Известно (см. [40], стр. 508), что ФР $U_t(x)=\int\limits_0^\infty E_u(x)*F_\nabla(x,u)\,d_uG_{1/\gamma}(ut^{-\gamma})$ имеет ПЛС $e^{-t(s+\nabla(s))^{1/\gamma}}$. Следовательно, из соотношения $e^{-t\nabla(s)}=e^{-t(s+\nabla(s))^{1/\gamma}}$ и из теоремы единственности (см. [48], стр. 300) получаем, что ФР $F_\nabla(x,t)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$F_\nabla(x,t)=\int\limits_0^\infty E_u(x)*F_\nabla(x,u)\,d_uG_{1/\gamma}(ut^{-\gamma}). \tag{4.4.3}$$

Так как $E_u(x)*F_\nabla(x,t)=F_\nabla(x-u,t)$ и $\{\xi_\nabla(t);t\ge 0\}$ – положительный СП то (4.4.3) принимает вид $F_\nabla(x,t)=\int\limits_0^\infty F_\nabla(x-u,u)\,d_uG_{1/\gamma}(ut^{-\gamma})=\int\limits_0^x F_\nabla(x-u,u)\,d_uG_{1/\gamma}(ut^{-\gamma})$, или в терминах плотностей $f_\nabla(x,t)=\frac{1}{t^\gamma}\int\limits_0^\infty f_\nabla(x-u,u)\,p\left(\frac{u}{t^\gamma},\frac{1}{\gamma},-\frac{1}{\gamma}\right)du=\frac{1}{t^\gamma}\int\limits_0^x f_\nabla(x-u,u)\,p\left(\frac{u}{t^\gamma},\frac{1}{\gamma},-\frac{1}{\gamma}\right)du$.

Учтено, что ФР $G_{1/\gamma}(ut^{-\gamma})$ имеет плотность $t^{-\gamma}p\left(\frac{x}{t^\gamma},\frac{1}{\gamma},-\frac{1}{\gamma}\right)$ (см. Лемму 1.4).

Подчиненность $F_\nabla(x,t)$ с управляющим процессом с ФР $F_\Delta(x,t)$. Так как функция $\Delta(s)$ – решение уравнения $z^\gamma+z=s$, а $\nabla(s)$ – решение уравнения $z^\gamma-z=s$, то имеет место соотношение $\nabla(s)^\gamma+\nabla(s)=s+\nabla(s)$, $s\ge 0$, откуда следует формула связи $\nabla(s)=\Delta(s+2\nabla(s))$, $s\ge 0$. Она дает нам и значение $\Delta(2)=1$. Так как $\nabla(s)$ имеет ВМ производную, то такова же и функция $s+2\nabla(s)$. Функция $e^{-t(s+2\nabla(s))}$ является ПЛС ФР $E_t(x)*F_\nabla(x,2t)$. Поэтому ФР $U_t(x)=\int\limits_0^\infty E_u(x)*F_\nabla(x,2u)\,d_uF_\Delta(u,t)$ имеет ПЛС $e^{-t\Delta(s+2\nabla(s))}$ (см. [40], стр. 508). Теперь из соотношения $e^{-t\nabla(s)}=e^{-t\Delta(s+2\nabla(s))}$ и из теоремы единственности получаем, что ФР $F_\nabla(x,t)$ и $F_\Delta(x,t)$ удовлетворяют интегральному уравнению:

$$F_\nabla(x,t)=\int\limits_0^\infty E_u(x)*F_\nabla(x,2u)\,d_uF_\Delta(u,t). \tag{4.4.4}$$

Так как $E_u(x)*F_\nabla(x,2u)=F_\nabla(x-u,2u)$ и $\{\xi_\nabla(t):t\ge 0\}$ – положительный СП то (4.4.4) принимает вид $F_\nabla(x,t)=\int\limits_0^\infty F_\nabla(x-u,2u)\,d_uF_\Delta(u,t)=\int\limits_0^x F_\nabla(x-u,2u)\,d_uF_\Delta(u,t)$, или в терминах плотностей $f_\nabla(x,t)=\int\limits_0^\infty f_\nabla(x-u,2u)f_\Delta(u,t)\,du=\int\limits_0^x f_\nabla(x-u,2u)f_\Delta(u,t)\,du$.

5. Оценка максимального правдоподобия параметра $\theta=\tau$ при $\gamma=2$.

Пусть $\gamma=2$ и $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ – выборка из генеральной совокупности с ФР $F_\Diamond(x,\theta)$, $\theta\in\Theta=(0,+\infty)$, где $X_k>0$, $k=1,2,...,n$. Построим функцию правдоподобия

$L(X,\theta)=f_\Diamond(X_1,\theta)\cdots f_\Diamond(X_n,\theta)$ и рассмотрим уравнение правдоподобия $\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial\theta}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \ln f_\Diamond(X_k,\theta)}{\partial\theta}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f_\Diamond(X_k,\theta)}\frac{\partial \ln f_\Diamond(X_k,\theta)}{\partial\theta}=0$. Так как $f_\Diamond(x,\theta)=\frac{\theta}{2x\sqrt{\pi x}}e^{-\frac{(\theta\pm x)^2}{4x}}$ при $\gamma=2$, то $\frac{\partial \ln f_\Diamond(X_k,\theta)}{\partial\theta}=\frac{1}{2X_k\sqrt{\pi X_k}}e^{-\frac{(\theta\pm X_k)^2}{4X_k}}\left[1-\frac{\theta^2}{2X_k}\mp\frac{\theta}{2}\right]=f_\Diamond(X_k,\theta)\left[\frac{1}{\theta}-\frac{\theta}{2X_k}\mp\frac{1}{2}\right]$ и уравнение правдоподобия принимает вид $\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{\theta}-\frac{\theta}{2X_k}\mp\frac{1}{2}\right]=n\left[\frac{1}{\theta}\mp\frac{1}{2}\right]-\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X_k}=0$.

Обозначив $p_n=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X_k}$, уравнение сводим к квадратному уравнению $p_n\theta^2\pm\frac{1}{2}\theta-1=0$ с решением $\hat\theta=\frac{\mp1\pm\sqrt{1+16p_n}}{4p_n}$. Так как $\hat\theta=\frac{-1-\sqrt{1+16p_n}}{4p_n}\notin\Theta$, то в случае функции ∇ для параметра θ получаем единственную оценку $\hat\theta=\frac{-1+\sqrt{1+16p_n}}{4p_n}\in\Theta$.

Замечание 4.4. С помощью соотношения $tf_\Diamond(t,x)=x\varphi_\Diamond(-x,t)$ (см. Лемму 1.5) предельная ФР $W_\tau(x)$ в случае $\theta(\rho)\sim\omega$ принимает вид $W_\tau(x)=1-\int_0^\tau\frac{x}{v}\varphi_\Diamond(-x,v)dv$. Т. е. в пределе вид $(4.1.1)$ вероятности неразорения сохраняется.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Формулируем основные предельные теоремы в терминах СВ T_x которые дают возможность оценивать первый момент ситуации разорения.

Теорема $2.4'$. При условиях Теоремы 2.4

$$\lim P\left\{t^{-1}T_{x/\theta(\rho)}\le u\right\}=1-W_\tau^\pm(u,x),u\in R^+ \text{ и } \lim_{\rho_1\uparrow c}P\left\{T_{x/\theta(\rho)}<+\infty\right\}=1-W_\tau^\pm(x).$$

Теорема $3.1'$. При условиях Теоремы 3.1 невырожденная, собственная предельная ФР $\lim_{\rho_1\uparrow1}P\left\{T_{x/\theta(\rho)}<+\infty\right\}=1-W_o(x)$ существует т. и т. т., когда $\theta(\rho)\sim\omega$.

Теорема $3.2'$. Пусть выполнены условия Теоремы 3.2

1) при $\tau=0$ не существует невырожденный собственный предел $\lim_{(\rho,t)}P\left\{T_{x/\theta(\rho)}\le t\right\}=1-W_\tau(x)$.

2) Если $0<\tau<\infty$, то при любом $\theta(\rho)\xrightarrow[\rho\to0]{}0$ существует собственный невырожденный предел $\lim_{(\rho,t)}P\left\{T_{x/\theta(\rho)}\le t\right\}=1-W_\tau(x)$.

3) Если $\tau=\infty$, то невырожденная собственная предельная ФР $\lim_{(\rho,t)}P\left\{T_{x/\theta(\rho)}\ge t\right\}=W_\infty(x)=W_o(x)$ существует т. и т. т., к. $\theta(\rho)\sim\omega$ при $\rho_1\uparrow1$.

Теорема $3.3'$. В условиях Теоремы 3.3 существует предел $\lim_{\rho\to0}P\left\{T_{x/\theta(\rho)}\le t\right\}=W_2(t,x)$, причем только тогда, когда $\theta(\rho)\sim B^{-1/\gamma}L_2^{(\gamma)}(B)$.

Из предельных теорем доказанных в Главе 3, очевидно, что “максимальные” критические риски в Портфеле 2 можно оценить с помощью риска

$$1-W_o(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k(\gamma-1)}}{\Gamma(1+k(\gamma-1))},\ x\geq 0.$$

Из определения целой функции $E_\beta(-x,\mu)$ (см. Гл. 1), имеем

$$1-W_o(x)=E_{\frac{1}{\gamma-1}}\left(-x^{\gamma-1},1\right),\ x\geq 0. \quad (\Pi 1)$$

Тогда асимптотическое поведение максимального критического риска можно получить с помощью соответствующих асимптотических разложений функции $E_\beta(z,\mu)$ [11]. Тогда из $(\Pi 1)$ получаем

$$W_o(x)=1-\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{k+1} x^{k(1-\gamma)}}{\Gamma(1-k(\gamma-1))}+O\left(|x|^{-(1+p)(\gamma-1)}\right),\ x\to+\infty. \quad (\Pi 2)$$

При фиксированной загрузке асимптотическое поведение риска вытекает из формулы Полячека – Хинчина. Имеем: $1-\Omega(s)=\dfrac{\lambda(\psi(s)-1+as)}{\rho s+\lambda(\psi(s)-1+as)}\sim\dfrac{B}{\rho}s^{\gamma-1}L\left(\dfrac{1}{s}\right)$, $s\to 0$.

Тогда, (см. [40]), $1-W(x)\sim\dfrac{1}{\Gamma(2-\gamma)}\dfrac{B}{\rho}x^{-(\gamma-1)}L(x)$, $x\to+\infty$. Для предельного закона $W_o(x)$ имеем $1-\Omega_o(s)=\dfrac{s^{\gamma-1}}{1+s^{\gamma-1}}\sim s^{\gamma-1}$, $s\to 0$ и, следовательно, $1-W_o(x)\sim\dfrac{x^{-(\gamma-1)}}{\Gamma(2-\gamma)}$, $x\to+\infty$, что вытекает и из $(\Pi 2)$.

В Портфеле 3 для СВ T_x имеем

Теорема 4.1′. При условиях Теоремы 4.1 предел $\lim\limits_{\rho_1\downarrow 1}P\left\{T_{x/\theta(\rho)}<+\infty\right\}=e^{-x}$, $x>0$ существует т. и т. т., когда $\theta(\rho)\sim\omega$.

Теорема 4.2′. В условиях Теоремы 4.2 $P\left\{T_{x/\theta(\rho)}\leq t\right\}\to 1-W_\tau(x)$.

Покажем, что критические риски Портфеля 1 не совпадают с критическими рисками Портфелей 2 – 3.

Критические риски в Портфеле 1 (с точностью до множителей e^{-C^o} и $e^{-C^o(v)}$) описываются двойным ПЛС $N(s,v,\mu,\tau)$ ФР $1-\int_0^t\phi(\tau u,x)du$ (см. Теорема 2.3), что согласуется с утверждением Теоремы 4.2*. Тем не менее, результаты Портфеля 3 не вытекают из результатов Портфеля 1, так как $c=-1<0$. В этом случае в Портфеле 1 из – за множителя $\dfrac{\lambda_o+v}{\lambda_o+v+ps}$ появляется и второй компонент, который добавляет риск, связанный с интенсивностью страховых случаев.

В Портфеле 2 невырожденные случаи имеют ПЛС (см. Теорему 3.2) $\chi_\tau(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dW_\tau(x)=e^{\tau b(s)}-s\int_0^\tau e^{b(s)u}f(\tau-u)du$, где $\int_0^\infty e^{-su}f(u)du=\dfrac{1}{A(s)}$. Отсюда для двойного ПЛС имеем

$$\int_0^\infty e^{-z\tau}\chi_\tau(s)d\tau=\frac{1}{z-b(s)}\left(1-\frac{s}{A(z)}\right),\ z>0,\ s>0. \quad (\Pi 3)$$

Здесь $s = A(z)$ – единственный корень уравнения $b(s) = z$, $s \geq 0$. Так как $(П3)$ не вытекает из $(2.3.1)$, то соответствующие риски не совпадают.

Отметим, что формулу $(П3)$ можно получить и из двойного ПЛС $(3.1.3)$, с учетом Следствия 3.1 и Замечания 2.4.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И СИМВОЛОВ

ЦПТ – центральная предельная теорема
УЗ – устойчивый закон
МО – математическое ожидание
НОР – независимые одинаково распределенные
ПЛС – Преобразование Лапласа – Стильтеса
ПЛ – Преобразование Лапласа
ПФ – Преобразование Фурье
ХФ – Характеристическая функция
СВ – случайная величина
СП – случайный процесс
ФР – функция распределения
ВМ – вполне монотонность
ММФ – медленно меняющаяся функция
ПМФ – правильно меняющаяся функция
т. и т. т., к. – тогда и только тогда, когда
P – знак вероятности
M – знак математического ожидания
$i = \sqrt{-1}$ – комплексная единица
R^1 – действительная прямая
R^+ – положительная полупрямая
$*$ – знак свертки
$\Phi(\bullet)$ – стандартный нормальный закон
$\Gamma(\bullet)$ – гамма – функция Эйлера
o, $\sim$ – пишем $\left.\begin{matrix} u = o(v) \\ u \sim v \end{matrix}\right\}$ при $x \to a$, если $\frac{u}{v} \to \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, ($u$, $v > 0$ зависят от x)
FIFO – (first in – first out) – первым пришел – первым обслужен
LIFO – (last in – first out) – последним пришел – первым обслужен
$G_\alpha(x)$ – стандартный устойчивый закон с показателем $\alpha \in (0,1)$ и ПЛС $\exp\{-s^\alpha\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бауерс Н. Л., Гербер Х. У., Джонс Д. А., Несбитт С. Д., Хикман Д. Ч. Актуарная математика – М.: “Янус – К”, 2001.
2. Боровков А. А., Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986.
3. Висков О. В. О времени ожидания в смешанной системе массового обслуживания. – Труды МИ АН им. В. А. Стеклова, 1964, 71, 26 – 34.

4.Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. - М.: Наука, 1965.

5.Даниелян И. Э. Правильное изменение и интерполяция в моделях суммирования и очередей. – Ереван: Дисс. на соиск. уч. Степ. канд. физ.-мат. наук, 2003.

6.Даниелян Э. А. Предельная теорема для времени ожидания в модели M/G/1/∞ при единичной загрузке.– Ереван: Ученые записки ЕГУ, 1987.

7.Даниелян Э. А. Предельные теоремы для времени ожидания в одноканальных приоритетных системах. – ДАН Арм. ССР, LXXI, [1]3, 1980, 129 – 135.

8. Даниелян Э. А., Даниелян А. А., Даниелян И. А. Закономерности очередей в моделях с ожиданием. – Ереван: Ученые записки ЕГУ, 2006, 3 – 24.

9.Даниелян Э. А., Мартиросян А. Р., Читчян Р. Н., – Об одном предельном законе в теории очередей. – Ереван: Матем. в Высш. Школе, Том 3, N3, 2007, 10 - 17.

10. Даниелян Э. А., Читчян Р. Н. Многомерные предельные теоремы для времени ожидания в приоритетных системах $M_r|G_r|1|\infty$. - Acta Cyb., Том. 5, Fasc. 3, Szeged, 1981, 325-343.

11. Джрбашян М. М., Багиян Р. А., Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функциями типа Миттаг – Леффлера. – Изв. АН Арм. ССР, Математика, X, [1] 6, 1975, 482 – 508.

12. Диткин В. А., Прудников А. П., Справочник по операционному исчислению. – М.: “Высшая школа”, 1965.

13. Дуб Д. Л. Вероятностные процессы. – М.: ИЛ, 1956.

14. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. – М.: Наука, 1980.

15. Зорин В. А., Мухин В. И. Элементы теории процессов риска. Методическая разработка для студентов дневного отделения факультета ВМК. – Н. Новгород: ННГУ, 2003 – 25 с.

16. Карнилов И. А. Основы страховой математики. – М.: Юнити, 2004.

17. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973.

18. Мартиросян, А. Р. Критические риски в страховых портфелях. – Ереван: Матем. в Высш. Школе, Том 3, 2007, N4, 10 - 17.

19. Мартиросян А. Р. Представление в виде ряда одной плотности в теории очередей. – Ереван: Ученые записки ЕГУ, N2, 2008, 142 – 145.

20. Мартиросян А. Р., Читчян Р. Н. Анализ страховых моделей с положительными страховыми выплатами в критической ситуации. – Ереван: Информ. Техн. и Управл., N 6, 2007, 75 – 99.

21. Мартиросян А. Р., Читчян Р. Н. Асимптотический анализ отрицательных страховых сумм в критической ситуации. – Изв. НАН Армении. Математика, 2007, том 42, н. 6, 55 - 71.

22. Мартиросян А. Р., Даниелян И. Э. Апроксимация критических рисков в страховых портфелях. – Ереван: Докл. НАН РА, N2, 2008, 110 - 118.

23. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. – М.: Наука, 1987.

24. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972.

25. Прабху Н. У. Методы теории массового обслуживания и управления запасами. – М.: Машиностроение, 1969.

26. Прабху Н. У. Стохастические процессы теории запасов. – М.: Мир, 1984.

27. Прохоров Ю. В. Переходные явления в процессах массового обслуживания. – Лит. мат. сб., [1]3, 1963, 199 – 205.

28. Прохоров Ю. В., Розанов, Ю. А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. Перераб. – М.: Наука, 1987.
29. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. – М.:ИЛ, 1963.
30. Саакян В. Г. Дисциплина случайного выбора в моделях $\vec{M}_r\left|\vec{G}_r\right|1|\infty$. –М.: дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук, 1985 г.
31. Саакян В. Г., Угарид М. Асимптотические разложения и одномерные теоремы в модели $M\left|G\right|1|\infty$. – ВЦ АН Арм. ССР, 1990, Препринт.
32. Седлецкий А. М., Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные аппроксимации. – М.: Сов. Мат. Фундаментальные направления. Том 5, 2003.
33. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985.
34. Сидоров Ю. В., Федорюк М. Н., Шабунин М. Н. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1989.
35. Соловьев В. И. Математические методы управления рисками. – М.: МГУ Уч. пособ. 2003.
36. Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов. – М.: Мир, 1971.
37. Угарид Мухамед. Модели типа $M\left|G\right|1|\infty$ при критической загрузке. – Ереван: дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук, 1990.
38. Фалин Г. И., Фалин А. И. Актуарная математика в задачах. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
39. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. – М.: Мир, 1984.
40. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. т. 2. – М.: Мир, 1984.
41. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т. 1. – М.: Наука, 1969.
42. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т. 2. – М.: Наука, 1969.
43. Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания. – М.: Гос. Изд. Физ – Мат. Лит., 1963.
44. Цициашвили Г. Ш., Беспалов В. М., Осипова М. А. Кооперативные и декомпозиционные эффекты в многоэлементных стохастических системах. – Владивосток: Дальнаука, 2003.
45. Читчян Р. Н. Предельные теоремы в приоритетных моделях $\vec{M}_r\left|\vec{G}_r\right|1|\infty$ в условиях критической загрузки. – Вильнюс: дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук, 1982.
46. Читчян Р. Н., Угарид М. О процедуре обращения ПЛС предельных распределений в модели $\vec{M}_r\left|\vec{G}_r\right|1|\infty$. – ВЦ АН Арм. ССР, 1990. Препринт.
47. Шилов Г. Е., Математический анализ. Спец. курс. – М.: Гос. Изд. Физ. – Мат. Лит., 1961.
48. Ширяев А. Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980.
49. Blomqvist N. A., A simple derivation of the $GI\left|G\right|1$ waiting time distribution in heavy traffic – Scand. J. Statist., 1974, v.1, N1, p. 39 – 40.
50. Daykin C. D, Pentikainen T., Pesonen M. Practical risk theory for actuaries – Chapman & Hall, 1994 ISBN: 0412428504
51. Kingman J. F. C. Approximations for Queues in Heavy Traffic. Queueing Theory: Recent Developments and Applications. – New York: Ed. R. Cruon, Eisevior Publishers, 1965.
52. Stam A. J. Regular Variation of a Subordinated Probability Distribution. /–/ Adv. Appl.Prop., 1973, 5, p. 308 – 327.