ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 4, 2016
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

групповой анализ дифференциальных уравнений

Поиск группы преобразований, допускаемой системой уравнений, описывающей движение вязкой несжимаемой проводящей жидкости

С.Ю. Маламанов

Факультет прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

В работе рассматривается поиск группы преобразований, допускаемой системой уравнений, описывающей движение вязкой несжимаемой проводящей жидкости. Вначале находится фактор-система уравнений, связывающая только инварианты подгруппы неравномерных растяжений основной группы, допускаемой рассматриваемой системой. Затем ищется группа преобразований, допускаемая полученной фактор–системой.

Ключевые слова: группа преобразований, инвариантное решение, понижение порядка, дифференциальные уравнения.

Abstract

The paper deals with the problem on the searching a group of transformations admitted by the system of equations describing the motion of a viscous incompressible conducting fluid. We evaluate the system of differential equations connecting only the invariants of the subgroup of the main group of non-uniform stretching allowed by the system. Then we find the group of transformations admitted by the obtained quotient system.

Keywords: group of transformations, invariant solution, reducing the order, differential equations.

Введение

Одним из современных методов изучения процессов и явлений, рассматриваемых механикой сплошных сред, является групповой анализ. Термин «групповой анализ дифференциальных уравнений» был введен Л.В. Овсянниковым и сейчас является общепризнанным во всём мире. Групповой анализ – это направление в математике, предметом изучения которого является совместное рассмотрение дифференциальных уравнений и групп преобразований, допускаемых данными уравнениями. Говорят, что система дифференциальных уравнений допускает группу преобразований независимых и зависимых переменных, если эта система остаётся неизменной под действием всех преобразований, принадлежащих данной группе. Знание группы преобразований, допускаемой данной системой уравнений – как обнаружил Софус Ли - способствует нахождению частных (инвариантных) решений этой системы в явном виде. Свойство инвариантности позволяет отыскивать классы частных решений, в частности, за счет уменьшения числа независимых переменных. Инвариантность уравнений (системы уравнений), описывающих постановку любой задачи физики и механики относительно группы растяжения (подобия) является необходимым и обязательным условием. С другой стороны, для отыскания конкретных инвариантных решений надо выбрать подгруппу основной группы или взять подалгебру операторов основной алгебры Ли. Поэтому в нашем случае это будет оператор растяжения.

Рассмотрим уравнения, описывающие течения вязкой, несжимаемой, проводящей жидкости [1]:

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right) = -\nabla p + \mu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}, \qquad (1)$$

где плотность тока находится из обобщенного закона Ома:

$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}).$$

Здесь σ – коэффициент электропроводности жидкости. Считая, что электрическое поле отсутствует $\boldsymbol{E} = 0$, перепишем (1) в виде

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right)=-\nabla p+\mu\Delta\boldsymbol{u}+\sigma(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}. \tag{2}$$

Уравнение переноса вектора индукции магнитного поля $\boldsymbol{B}$ представим в форме

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{1}{\mu_m\sigma}\Delta\boldsymbol{B}+\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}). \tag{3}$$

В этой формуле μ_m– коэффициент магнитной вязкости. Введя, компоненты вектора $\boldsymbol{u}(u,v,w)$ и вектора $\boldsymbol{B}(B_x,B_y,B_z)$, запишем проекции уравнений (1) и (2) на ось x декартовой системы координат:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\sigma[(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}]_{\boldsymbol{x}}, \tag{1$'$}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t}=\frac{1}{\mu_m\sigma}\left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}\right)+\ [\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})]_x\,, \tag{2$'$}$$

где x у прямых скобок в последних слагаемых означает, что это проекция соответствующего члена на ось x. Введем неоднородные растяжения всех переменных в виде

$$t=a^{\alpha}\hat{t}\,;\ \ \boldsymbol{x}=a\widehat{\boldsymbol{x}}\,;\ \ \boldsymbol{u}=a^{\beta}\widehat{\boldsymbol{u}}\,;\ \ \boldsymbol{B}=a^{\gamma}\widehat{\boldsymbol{B}}\,;\ \ p=a^{\varphi}\hat{p}. \tag{4}$$

Также подвергнем «преобразованию» дифференциальные операторы:

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{1}{a^{\alpha}\partial\hat{t}}\ ;\ \ \nabla=\frac{1}{a}\widehat{\nabla}\,;\ \ \Delta=\frac{1}{a^2}\hat{\Delta}.$$

Из приведенных выражений видно, что прямоугольные координаты, проекции скорости и проекции индукции магнитного поля преобразуются по одному и тому же (в каждом случае своему) закону. “Галочкой» сверху обозначена преобразованная величина и оператор. Сначала подставим преобразованные переменные в уравнение (2):

$$\rho\left(\frac{a^{\beta}}{a^{\alpha}}\frac{\partial\widehat{\boldsymbol{u}}}{\partial\hat{t}}+\frac{a^{2\beta}}{a}(\widehat{\boldsymbol{u}}\widehat{\nabla})\widehat{\boldsymbol{u}}\right)+\frac{a^{\varphi}}{a}\widehat{\nabla}p=\eta\frac{a^{\beta}}{a^2}\hat{\Delta}\widehat{\boldsymbol{u}}+\sigma a^{\beta}a^{2\gamma}\big(\widehat{\boldsymbol{u}}\times\widehat{\boldsymbol{B}}\big)\times\widehat{\boldsymbol{B}}.$$

Разделим обе части уравнения на степенной комплекс $\left(\frac{a^{\beta}}{a^{\alpha}}\right)$ у нестационарного члена в левой части. В результате получим

$$\rho\left(\frac{\partial\widehat{\boldsymbol{u}}}{\partial\hat{t}}+\frac{a^{2\beta}}{a}\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}(\widehat{\boldsymbol{u}}\widehat{\nabla})\widehat{\boldsymbol{u}}\right)+\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}\frac{a^{\varphi}}{a}\widehat{\nabla}p=\eta\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}\frac{a^{\beta}}{a^2}\hat{\Delta}\widehat{\boldsymbol{u}}+\sigma\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}\,a^{\beta}a^{2\gamma}\big(\widehat{\boldsymbol{u}}\times\widehat{\boldsymbol{B}}\big)\times\widehat{\boldsymbol{B}}$$

или

$$\rho\left(\frac{\partial\hat{\boldsymbol{u}}}{\partial\hat{t}}+a^{\beta+\alpha-1}\left(\hat{\boldsymbol{u}}\hat{\nabla}\right)\hat{\boldsymbol{u}}\right)+a^{\varphi+\alpha-\beta-1}\hat{\nabla}p=\eta\, a^{\alpha-2}\hat{\Delta}\hat{\boldsymbol{u}}+\sigma a^{2\gamma+\alpha}\left(\hat{\boldsymbol{u}}\times\hat{\boldsymbol{B}}\right)\times\hat{\boldsymbol{B}}.$$

Требование инвариантности уравнения (2) относительно преобразований (4) сводится к сравнению множителей, появляющихся у отдельных слагаемых. Следовательно, в нашем случае должно быть

$$a^{\beta+\alpha-1}=a^{\varphi+\alpha-\beta-1}=a^{\alpha-2}=a^{2\gamma+\alpha}\equiv 1. \tag{5}$$

Таким образом, получается система уравнений относительно показателей степени – $\alpha,\beta,\gamma,\varphi$.

$$\begin{cases}a^{\beta+\alpha-1}=1\\ a^{\varphi+\alpha-\beta-1}=1\\ a^{\alpha-2}=1\\ a^{2\gamma+\alpha}=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\beta+\alpha-1=0\\ \varphi+\alpha-\beta-1=0\\ \alpha-2=0\\ 2\gamma+\alpha=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\gamma=-1\\ \beta=-1\\ \varphi=-2\\ \alpha=2\end{cases} \tag{6}$$

Полученное решение позволяет записать конкретное преобразование семейства преобразований (4). Оно получено только из рассмотрения инвариантности уравнения движения. Поэтому требуется произвести аналогичную процедуру и с уравнением (3), образующим систему с уравнением (2). После подстановки (4) в (3), получим

$$\frac{a^{\gamma}}{a^{\alpha}}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{B}}}{\partial\hat{t}}=\frac{1}{\mu_m\sigma}\frac{a^{\gamma}}{a^2}\hat{\Delta}\hat{\boldsymbol{B}}+\frac{a^{\beta}a^{\gamma}}{a}\hat{\nabla}\times\left(\hat{\boldsymbol{u}}\times\hat{\boldsymbol{B}}\right).$$

Разделим обе части уравнения на степенной комплекс $\left(\frac{a^{\gamma}}{a^{\alpha}}\right)$ у нестационарного члена в левой части. В результате можно записать

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{B}}}{\partial\hat{t}}=\frac{1}{\mu_m\sigma}\frac{a^{\alpha}}{\partial a^{\gamma}}\frac{a^{\gamma}}{a^2}\hat{\Delta}\hat{\boldsymbol{B}}+\frac{a^{\alpha}}{a^{\gamma}}\frac{a^{\beta}a^{\gamma}}{a}\hat{\nabla}\times\left(\hat{\boldsymbol{u}}\times\hat{\boldsymbol{B}}\right).$$

Соответствующая система уравнений для показателей степеней примет вид

$$\begin{cases}a^{\alpha-2}=1\\ a^{\beta+\alpha-1}=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=-1.\end{cases}$$

Сравнивая с системой (6), видим, что никакой новой и противоречивой «информации» не появилось.

В итоге получим окончательный вид преобразований (4), допускаемых нашей системой уравнений

$$t=a^2\hat{t}\,;\;\; \boldsymbol{x}=a\hat{\boldsymbol{x}}\,;\;\; \boldsymbol{u}=\tfrac{1}{a}\hat{\boldsymbol{u}}\,;\;\; \boldsymbol{B}=\tfrac{1}{a}\hat{\boldsymbol{B}}\,;\;\; p=\tfrac{1}{a^2}\hat{p}. \tag{7}$$

На следующем этапе, руководствуясь традиционным алгоритмом [2], необходимо найти инварианты группы растяжений и выразить через них независимые и зависимые переменные. Этим мы уменьшим суммарное количество переменных и тем самым, в определенной мере, упростим задачу. Для нахождения инвариантов следует решить уравнение

$$X(I) = \xi^i(x)\frac{\partial I}{\partial x^i} = 0. \qquad i = (1, \dots, N) \tag{8}$$

В нашем случае $N = 11$ и (8) примет следующий вид

$$X(I) = \xi_t\frac{\partial I}{\partial t} + \xi_x\frac{\partial I}{\partial x} + \xi_y\frac{\partial I}{\partial y} + \xi_z\frac{\partial I}{\partial z} + \eta_u\frac{\partial I}{\partial u} + \eta_v\frac{\partial I}{\partial v} + \eta_w\frac{\partial I}{\partial w} + \eta_p\frac{\partial I}{\partial p} +$$

$$+\eta_{B_x}\frac{\partial I}{\partial B_x} + \eta_{B_y}\frac{\partial I}{\partial B_y} + \eta_{B_z}\frac{\partial I}{\partial B_z} = 0.$$

Координаты векторного поля $\xi_i, i = (1, \dots, 4)$ и η_j, $j = (1, \dots, 7)$ находятся из уравнений Ли и формул преобразования растяжения (7). Окончательно оператор группы растяжения примет вид («галочки» над переменными опущены для упрощения записи):

$$X = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} - u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} - w\frac{\partial}{\partial w} - 2p\frac{\partial}{\partial p} -$$

$$-B_x\frac{\partial}{\partial B_x} - B_y\frac{\partial}{\partial B_y} - B_z\frac{\partial}{\partial B_z}. \tag{9}$$

Заметим, что в отсутствие магнитного поля $\left(B_x = B_y = B_z \equiv 0\right)$, оператор (9) упрощается и получается хорошо известный результат для группы растяжений допускаемой уравнениями Навье-Стокса. Теперь инварианты можно найти из уравнения:

$$X(I) = 2t\frac{\partial I}{\partial t} + x\frac{\partial I}{\partial x} + y\frac{\partial I}{\partial y} + z\frac{\partial I}{\partial z} - u\frac{\partial I}{\partial u} - v\frac{\partial I}{\partial v} - w\frac{\partial I}{\partial w} - 2p\frac{\partial I}{\partial p} -$$

$$-B_x\frac{\partial I}{\partial B_x} - B_y\frac{\partial I}{\partial B_y} - B_z\frac{\partial I}{\partial B_z} = 0,$$

или из системы уравнений характеристик, для вышеприведенного уравнения:

$$\frac{dt}{2t} = \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{dz} = -\frac{du}{u} = -\frac{dv}{v} = -\frac{dw}{w} = -\frac{dp}{2p} =$$

$$= -\frac{dB_x}{B_x} = -\frac{dB_y}{B_y} = -\frac{dB_z}{B_z}.$$

В результате, инварианты имеют вид

$$\frac{x}{\sqrt{t}}, \frac{y}{\sqrt{t}}, \frac{z}{\sqrt{t}}, pt, \sqrt{t}u, \sqrt{t}v, \sqrt{t}w, \sqrt{t}B_x, \sqrt{t}B_y, \sqrt{t}B_z .$$

Введя автомодельные переменные

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{t}},$$

где $\boldsymbol{\xi}(\xi, \eta, \varsigma)$ и $\boldsymbol{x}(x, y, z)$, можно инвариантные решения записать в виде:

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{t}}\boldsymbol{U}(\xi, \eta, \varsigma) \equiv \frac{1}{\sqrt{t}}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\xi}),$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{t}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}), \tag{10}$$

$$p = \frac{1}{t}P(\boldsymbol{\xi}).$$

В координатной форме первые два уравнения (10) будут выглядеть так:

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}}U(\xi, \eta, \varsigma), \quad B_x = \frac{1}{\sqrt{t}}H_\xi(\xi, \eta, \varsigma),$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{t}}V(\xi, \eta, \varsigma), \quad B_y = \frac{1}{\sqrt{t}}H_\eta(\xi, \eta, \varsigma), \tag{11}$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{t}}W(\xi, \eta, \varsigma), \quad B_z = \frac{1}{\sqrt{t}}H_\varsigma(\xi, \eta, \varsigma).$$

Эти выражения вместе с представлением для давления необходимо подставить в исходные уравнения (2) и (3). Опуская довольно громоздкие преобразования приведём окончательный вид полученной системы уравнений в векторной форме:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \\ \frac{\rho}{2}(-\boldsymbol{U} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\boldsymbol{U} + 2\boldsymbol{U} \cdot \nabla\boldsymbol{U}) + \nabla P = \mu\Delta\boldsymbol{U} + \sigma(\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H} \\ \frac{1}{2}(-\boldsymbol{H} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\boldsymbol{H}) = \frac{1}{\mu_m\sigma}\Delta\boldsymbol{H} + \nabla \times (\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{H}). \end{cases} \tag{12}$$

Таким образом, построена фактор-система уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой проводящей жидкости, отвечающая группе растяжений. Видно, что дифференциальные уравнения связывают только инварианты допускаемой группы неоднородных растяжений. Главным упрощением является тот факт, это система не эволюционного типа, в отличие от первоначальной. Уменьшение числа независимых переменных – результат безусловно существенный, но это только начало. На следующем этапе возможны два пути. Первый путь. Численно или с помощью других приближенных методов ищется решение полученной системы. После его нахождения и соответствующей формы представления, осуществляется переход от инвариантов к исходным переменным, тем самым решение уже будет зависеть и от времени. Второй путь состоит в поиске группы допускаемой фактор–системой для дальнейшей редукции и поиска классов частных решений – инвариантных и частично-инвариантных. В данной работе был выбран второй путь. Поиск указанной группы задача технически довольно сложная с трудоемкими выкладками. Будем следовать традиционному алгоритму [2], при этом опустим большинство расчётов. Также заметим, что наличие большого числа индексов, обозначающих как составляющие векторов, так и производные по соответствующим переменным, приводит к «необходимости» ввести упрощающие и более привычные обозначения. Так составляющие векторов $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{H}$ (см. выражения (10) и (11)) обозначим как (U,V,W) и (B,C,D), а вектора $\boldsymbol{\xi}$ – как привычные (x,y,z). Помимо этого, не нарушая общности рассмотрения, примем, плотность жидкости, коэффициенты вязкости и электропроводности равны единице. При этих соглашениях исследуемая система (12) такова:

$$-\frac{1}{2}\left[U+x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}+z\frac{\partial U}{\partial z}-2\left(U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}+W\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial p}{\partial x}=$$

$$=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+D(WB-UD)-C(UC-VB),$$

$$-\frac{1}{2}\left[V+x\frac{\partial V}{\partial x}+y\frac{\partial V}{\partial y}+z\frac{\partial V}{\partial z}-2\left(U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}+W\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial p}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+B(UC-VB)-D(VD-WC),$$

$$-\frac{1}{2}\left[W+x\frac{\partial W}{\partial x}+y\frac{\partial W}{\partial y}+z\frac{\partial W}{\partial z}-2\left(U\frac{\partial W}{\partial x}+V\frac{\partial W}{\partial y}+W\frac{\partial W}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial p}{\partial z}=$$

$$=\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+C(VD-WC)-B(WB-UD),$$

$$-\frac{1}{2}\left[B+x\frac{\partial B}{\partial x}+y\frac{\partial B}{\partial y}+z\frac{\partial B}{\partial z}\right]=$$

$$=\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial y}(UC-VB)-\frac{\partial}{\partial z}(WB-UD), \qquad (13)$$

$$-\frac{1}{2}\left[C+x\frac{\partial C}{\partial x}+y\frac{\partial C}{\partial y}+z\frac{\partial C}{\partial z}\right]=$$

$$= \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z}(VD - WC) - \frac{\partial}{\partial x}(UC - VB),$$

$$-\frac{1}{2}\left[D + x\frac{\partial D}{\partial x} + y\frac{\partial D}{\partial y} + z\frac{\partial D}{\partial z}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}(WB - UD) - \frac{\partial}{\partial y}(VD - WC),$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Используя общепринятое обозначение $\partial_q = \dfrac{\partial}{\partial q}$, будем искать оператор симметрии, допускаемый системой (13) в виде

$$X = \xi^x(x,y,z)\partial_x + \xi^y(x,y,z)\partial_y + \xi^z(x,y,z)\partial_z + \eta^U(x,y,z,U)\partial_U +$$

$$+\eta^V(x,y,z,V)\partial_V + \eta^W(x,y,z,W)\partial_W + \eta^p(x,y,z,p)\partial_p + \eta^B(x,y,z,B)\partial_B +$$

$$+\eta^C(x,y,z,C)\partial_C + \eta^D(x,y,z,D)\partial_D. \qquad (14)$$

Наличие в системе (13) вторых производных требует вычисления соответственно первого и второго продолжений оператора (14). Первое продолжение имеет вид

$$X_1 = X + \zeta^{U_x}\partial_{U_x} + \zeta^{U_y}\partial_{U_y} + \zeta^{U_z}\partial_{U_z} + \zeta^{V_x}\partial_{V_x} + \zeta^{V_y}\partial_{V_y} + \zeta^{V_z}\partial_{V_z} + \zeta^{W_x}\partial_{W_x} +$$

$$+\zeta^{W_y}\partial_{W_y} + \zeta^{W_z}\partial_{W_z} + \zeta^{B_x}\partial_{B_x} + \zeta^{B_y}\partial_{B_y} + \zeta^{B_z}\partial_{B_z} + \zeta^{C_x}\partial_{C_x} + \zeta^{C_y}\partial_{C_y} + \zeta^{C_z}\partial_{C_z} +$$

$$+\zeta^{D_x}\partial_{D_x} + \zeta^{D_y}\partial_{D_y} + \zeta^{D_z}\partial_{D_z} + \zeta^{p_x}\partial_{p_x} + \zeta^{p_y}\partial_{p_y} + \zeta^{p_z}\partial_{p_z}. \qquad (15)$$

Аналогично выписывается второе продолжение

$$X_2 = X_1 + \zeta^{U_{xx}}\partial_{U_{xx}} + \zeta^{U_{yy}}\partial_{U_{yy}} + \zeta^{U_{zz}}\partial_{U_{zz}} + \zeta^{V_{xx}}\partial_{V_{xx}} + \zeta^{V_{yy}}\partial_{V_{yy}} + \zeta^{V_{zz}}\partial_{V_{zz}} +$$

$$+\zeta^{W_{xx}}\partial_{W_{xx}} + \zeta^{W_{yy}}\partial_{W_{yy}} + \zeta^{W_{zz}}\partial_{W_{zz}} + \zeta^{B_{xx}}\partial_{B_{xx}} + \zeta^{B_{yy}}\partial_{B_{yy}} + \zeta^{B_{zz}}\partial_{B_{zz}} +$$

$$+\zeta^{C_{xx}}\partial_{C_{xx}} + \zeta^{C_{yy}}\partial_{C_{yy}} + \zeta^{C_{zz}}\partial_{C_{zz}} + \zeta^{D_{xx}}\partial_{D_{xx}} + \zeta^{D_{yy}}\partial_{D_{yy}} + \zeta^{D_{zz}}\partial_{D_{zz}}. \qquad (16)$$

В этих выражениях $\zeta_{(1)} = Đ_i(\eta) - u_j Đ_i(\xi_j)$ и $\zeta_{(2)} = Đ_j(\zeta^i_{(1)}) - u_{ik} Đ_j(\xi^k)$ формулы продолжения на первые и вторые производные соответственно. Đ – оператор полного дифференцирования

$$Ð_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + u_{ik} \frac{\partial}{\partial u_k} + \cdots.$$

В исследуемой системе (13) семь уравнений, поэтому будет семь условий того, что система уравнений допускает преобразование симметрии:

$$X\, F_i\big(x, y, z, U, V, W, p, U_x, U_y, U_z, \dots, U_{xx}, U_{yy}, U_{zz}, \dots\big)\big|_{F=0} = 0, \qquad (17)$$

(i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

В качестве примера, рассмотрим условие симметрии последнего уравнения системы (13). Это условие получается, если на уравнение неразрывности подействовать оператором (15):

$$X_1 \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) = 0,$$

В полученном таким образом определяющем уравнении производится расщепление по производным от дифференциальных переменных. В результате этого получаются условия, из которых можно найти вид зависимостей

$$\xi^y = \xi^y(y),$$

$$\xi^x = \xi^x(x),$$

$$\xi^z = \xi^z(z),$$

Эти функции используются в дальнейшем и позволяют получить большое количество ограничений, накладываемых на искомые функции.

Подобное же рассмотрение условий симметрии для оставшихся уравнений системы (13) приводит к следующему результату (подробные выкладки опущены ввиду их громоздкости):

$$\eta^U = -a_1 U + a_1 x + \frac{a_2}{2},$$

$$\eta^V = -a_1 V + a_1 y + \frac{a_3}{2},$$

$$\eta^W = -a_1 W + a_1 z + \frac{a_4}{2}.$$

$$\eta^P = -2a_1 P + f_1(x, y, z)$$

$$\eta^B = -\frac{B}{4}\,(a_1 x^2 + a_2 x) + a_5,$$

$$\eta^C = -\frac{C}{4}\,(a_1x^2 + a_2x) + a_6, \qquad (18)$$

$$\eta^D = -\frac{D}{4}\,(a_1x^2 + a_2x) + a_7.$$

В этих выражениях a_i – произвольные константы (i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), а $f_1(x,y,z)$ – гладкая функция. Полагая в этом общем решении (18) определяющих уравнений сначала $a_1 = 1, a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$, затем $a_2 = 1, a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$, и так далее до $a_7 = 1, a_1 = a_2 \cdots a_6 = 0$, строим следующие операторы симметрии:

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + (x-U)\frac{\partial}{\partial U} + (y-V)\frac{\partial}{\partial V} + (z-W)\frac{\partial}{\partial W} +$$

$$+(-2P + f_1)\frac{\partial}{\partial P} - x^2\frac{B}{4}\frac{\partial}{\partial B} - y^2\frac{C}{4}\frac{\partial}{\partial C} - z^2\frac{D}{4}\frac{\partial}{\partial D},$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial U} - x\frac{B}{4}\frac{\partial}{\partial B} + f_1\frac{\partial}{\partial P},$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial V} - y\frac{C}{4}\frac{\partial}{\partial C} + f_1\frac{\partial}{\partial P},$$

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial W} + y\frac{D}{4}\frac{\partial}{\partial D} + f_1\frac{\partial}{\partial P},$$

$$X_5 = \frac{\partial}{\partial B} + f_1\frac{\partial}{\partial P}$$

$$X_6 = \frac{\partial}{\partial C} + f_1\frac{\partial}{\partial P}$$

$$X_7 = \frac{\partial}{\partial D} + f_1\frac{\partial}{\partial P}.$$

Найденные операторы позволяют построить основную алгебру Ли. Её примечательной особенностью является бесконечномерность, так как операторы зависят от произвольной функции $f_1(x,y,z)$. Оператор $f_1\partial_p$ соответствует тому факту, что уравнениями (13) давление определяется с точность до слагаемого, равного произвольной функции (x,y,z). При построении преобразований локальных групп Ли, соответствующих найденным операторам, необходимо вернуться к прежним обозначениям: (U,V,W) – составляющие вектора $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\xi})$,

(B, C, D) –составляющие вектора $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi})$, а $\boldsymbol{\xi}$ автомодельная переменная (см. выражения (10) и (11)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новожилов В. В., Павловский В. А.* Установившиеся турбулентные течения несжимаемой жидкости. – СПб: СПбГУ, 2013. – 483 с.

2. *Овсянников Л.В*. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.